

**Beiträge zur Theorie und Anwendung von
Keim-Korn-Modellen mit konvexen Körnern**

Von der Fakultät für Mathematik und Informatik
der Technischen Universität Bergakademie Freiberg

genehmigte

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades
doctor rerum naturalium

Dr. rer. nat.

vorgelegt

von Dipl.-Math. Felix Ballani

geboren am 18.11.1975 in Potsdam

Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. habil. Dietrich Stoyan, Freiberg

Prof. Dr. rer. nat. habil. Joseph Mecke, Jena

Prof. Dr. rer. nat. habil. Günter Last, Karlsruhe

Tag der Verleihung: 22.02.2006

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Zeit als Stipendiat des DFG-Graduiertenkollegs „Räumliche Statistik“ und während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter des Instituts für Stochastik der Technischen Universität Bergakademie Freiberg in den Jahren 2001 bis 2005. Beiden Einrichtungen bin ich äußerst dankbar für die finanzielle Unterstützung, die mir die Teilnahme an verschiedenen weiterbildenden Kursen und Konferenzen ermöglichte.

Mein besonderer Dank gilt meinem Betreuer Herrn Prof. Dr. Dietrich Stoyan für hilfreiche Anregungen und Diskussionen zu den Inhalten dieser Arbeit, aber auch für viele darüber hinaus gehende begleitende Ratschläge und Lebensweisheiten.

Den Herren Prof. Dr. G. Last und Prof. Dr. W. Weil danke ich herzlich für die Möglichkeit, einige der Ergebnisse aus Kapitel 2 in ihrem Seminar vorzutragen. Die damit verbundene Diskussion empfand ich als sehr hilfreich. Sehr dankbar bin ich auch Herrn Prof. Dr. D. J. Daley für seine Gedanken zur Thematik des Kapitels 4.

Mein Dank gilt ferner meinen Kollegen Dr. A. Tscheschel für seine immer währende Diskussionsbereitschaft und seine Vorschläge zur Verbesserung von C-Programmen sowie Dr. I. Kadashevich für seine Hilfe bei den Packungssimulationen in Kapitel 4, ebenso wie Frau J. Hubáľková für die Herstellung der in Kapitel 4 untersuchten Betonproben. Die Verwendung der zugehörigen CT-Bilder in dieser Arbeit gestattete freundlicherweise Herr Prof. Dr. J. Ohser.

Freiberg, im August 2005

Felix Ballani

Inhaltsübersicht

Symbolverzeichnis	vii
1 Einleitung und Überblick	1
1.1 Größen zweiter Ordnung für zufällige Mengen	2
1.2 Der Matérn-Prozess mit konvexen Körnern	4
1.3 Modellierung zweier Proben eines Feuerbetons	5
2 Größen zweiter Ordnung für zufällige Mengen	7
2.1 Vorbereitungen	7
2.1.1 Punktprozesse in $\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d$	7
2.1.2 Steiner-Formeln, Krümmungsmaße und Randstruktur	10
2.1.3 Momentenmaße	12
2.1.4 Kontaktverteilungsfunktion zweiter Ordnung	14
2.2 Ein Analogon zu (1.8) für den Fall zweiter Ordnung	15
2.3 Lokale Endlichkeit und Existenz einer Dichte	23
2.4 Eine Anwendung der Koflächenformel	29
2.5 Existenz der rechtsseitigen Ableitungen bei $(0,0)$	40
2.5.1 Absolute Stetigkeit	40
2.5.2 Poisson-Prozess	45
2.5.3 Matérn-Prozess	53
2.5.4 Gibbs-Prozess	56
2.6 Stationäres und isotropes Boolesches Modell	58
2.6.1 Kreisscheiben und Kugeln	59
2.6.2 Rechtecke	63
2.6.3 Zylinder	64
2.7 Bemerkungen und offene Probleme	67
3 Der Matérn-Prozess mit konvexen Körnern	69
3.1 Das Modell	69
3.1.1 Definition	69

3.1.2	Campbell-Maße	70
3.1.3	Faktorielle Momentenmaße und Produktdichten	73
3.2	Zwei Beispiele	76
3.2.1	Charakteristiken	76
3.2.2	Vergleich mit Gibbs-Modell und RSA-Modell	78
4	Modellierung zweier Proben eines Feuerbetons	81
4.1	Die Betonproben	81
4.1.1	Herstellung	81
4.1.2	Rekonstruktion	82
4.1.3	Statistische Analyse	85
4.2	Klassische Modelle für Hartkugelsysteme	87
4.2.1	Dichte zufällige Packungen	87
4.2.2	Klassisches RSA-Modell	88
4.2.3	Stationärer markierter Gibbs-Prozess	89
4.3	Modifizierte Modelle	91
4.3.1	Geordnetes RSA-Modell	91
4.3.2	Schiebemodell	92
4.3.3	Überprüfung der modifizierten Modelle	92
4.4	Schlussfolgerungen	95
A	Herleitungen der Produktdichte des Oberflächenmaßes	97
A.1	Boolesches Modell mit Rechtecken	97
A.2	Boolesches Modell mit Kreiszyindern	104
	Literaturverzeichnis	115

Symbolverzeichnis

Diese Übersicht beinhaltet vorwiegend jene in der Literatur gebräuchlichen Symbole, die im folgenden Text nicht ausführlicher erklärt, aber dennoch häufig verwendet werden.

\mathbb{R}^d	d -dimensionaler euklidischer Raum, $d \geq 1$;
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen;
$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$	übliches Skalarprodukt für Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$;
$\ \mathbf{x}\ $	euklidische Norm von $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$;
\mathbf{o}	Nullvektor des \mathbb{R}^d ;
$\angle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$	kleinerer der beiden Winkel zwischen $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$;
$B^d(\mathbf{x}, r)$	$= \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d : \ \mathbf{y} - \mathbf{x}\ \leq r\}$, Kugel mit Mittelpunkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ und Radius $r \geq 0$;
B^d	$= B^d(\mathbf{o}, 1)$, Einheitskugel des \mathbb{R}^d ;
S^{d-1}	$= \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d : \ \mathbf{y}\ = 1\}$, Einheitskugel des \mathbb{R}^d ;
\mathcal{H}^k	k -dimensionales Hausdorff-Maß, $k \geq 0$;
b_d	$= \mathcal{H}^d(B^d)$;
a_j	$= (d - j)b_{d-j}$ für $j \in \{0, \dots, d - 1\}$;
\mathcal{K}^d	System aller kompakten und konvexen Teilmengen des \mathbb{R}^d ;
S^d	erweiterter Konvexring des \mathbb{R}^d ;
∂K	Rand einer Menge $K \subset \mathbb{R}^d$;
\oplus	Minkowski-Addition, d. h. $A \oplus B = \{\mathbf{x} + \mathbf{y} : \mathbf{x} \in A, \mathbf{y} \in B\}$, $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$;
tA	$= \{t\mathbf{x} : \mathbf{x} \in A\}$ für $t \in \mathbb{R}$ und $A \subseteq \mathbb{R}^d$;
\check{A}	$= -A$ für $A \subseteq \mathbb{R}^d$;
A_t	$= A \oplus tB^d$ für $t \geq 0$ und $A \subseteq \mathbb{R}^d$;
SO_d	Gruppe der eigentlichen Drehungen des \mathbb{R}^d ;
σ_{d-1}	sphärisches Lebesgue-Maß auf S^{d-1} ;
ν	bezüglich SO_d invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß auf SO_d ;
$\mathcal{B}(E)$	Borelsche σ -Algebra eines lokal kompakten Raums E mit abzählbarer Basis;
$N_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d}$	Menge aller Zählmaße ψ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d)$ mit $\psi(B \times \mathcal{K}^d) < \infty$ für alle kompakten Mengen $B \subset \mathbb{R}^d$;
$\mathcal{N}_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d}$	σ -Algebra auf $N_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d}$, die von allen Abbildungen $\psi \mapsto \psi(A)$, $\psi \in N_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d}$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d)$, erzeugt wird;
δ_e	Dirac-Maß im Punkt $e \in E$;
$\mathbf{1}\{\cdot\}$	$= 1$, falls Aussage in $\{\cdot\}$ wahr, sonst $= 0$;
$\mathbf{1}_A(e)$	$= 1$, falls $e \in A$, sonst $= 0$, Indikatorfunktion der Menge A ;
$\psi \setminus \delta_{(\mathbf{x}, K)}$	$= \psi - \mathbf{1}\{\psi(\{(\mathbf{x}, K)\}) > 0\} \delta_{(\mathbf{x}, K)}$ für $\psi \in N_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d}$ und $(\mathbf{x}, K) \in \mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d$;
$[\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}]$	abstrakter Wahrscheinlichkeitsraum, auf dem alle zufälligen Größen definiert sind;
\mathbb{E}	Erwartungswert bezüglich des Wahrscheinlichkeitsmaßes \mathcal{P}

Kapitel 1

Einleitung und Überblick

In der Stochastischen Geometrie existiert mit dem Begriff der zufälligen abgeschlossenen Menge ein leistungsfähiges Werkzeug zur Beschreibung zufälliger geometrischer Strukturen. Eine besonders wichtige Klasse zufälliger abgeschlossener Mengen sind die sogenannten *Keim-Korn-Modelle* in \mathbb{R}^d , und unter diesen wiederum jene, die sich als lokal endliche Vereinigung zufälliger nichtleerer *konvexer kompakter* Mengen darstellen lassen. Die Realisierungen einer solchen zufälligen Menge Ξ sind somit Elemente des erweiterten Konvexrings \mathcal{S}^d . Etwas formaler sei die zufällige Menge Ξ durch

$$\Xi := \bigcup_{n=1}^{\infty} (\xi_n + Z_n) \quad (1.1)$$

definiert, wobei die *Keime* ξ_n und die *Körner* Z_n , $n = 1, 2, \dots$, durch einen markierten Punktprozess

$$\Psi := \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{(\xi_n, Z_n)} \quad (1.2)$$

auf \mathbb{R}^d mit Marken Z_n , $n = 1, 2, \dots$, aus der Menge der nichtleeren konvexen kompakten Mengen in \mathbb{R}^d gegeben sind, wobei $\Psi(\{(\mathbf{x}, K) : (\mathbf{x} + K) \cap B \neq \emptyset\}) < \infty$ \mathcal{P} -f. s. für alle kompakten Mengen $B \subset \mathbb{R}^d$ gelte. Ψ wird auch *Keim-Korn-Prozess* genannt.

Diese Klasse zufälliger Mengen umfasst bereits viele Anwendungssituationen und erlaubt aufgrund der besonderen Struktur der betrachteten Mengen oftmals einfache geometrische Interpretationen abgeleiteter Größen. Die Darstellung (1.1) ist dabei sogar für jede zufällige Menge mit Realisierungen in \mathcal{S}^d möglich (Weil und Wieacker, 1988), wobei zudem Ψ in (1.2) so gewählt werden kann, dass Ψ die gleichen Invarianzeigenschaften wie die zufällige Menge besitzt. Für eine allgemeine Einführung in die Theorie und Anwendung zufälliger abgeschlossener Mengen sei stellvertretend auf Stoyan, Kendall und Mecke (1995) sowie Schneider und Weil (2000) verwiesen.

Die vorliegende Arbeit enthält drei verschiedene Beiträge zur Theorie und Anwendung von Keim-Korn-Modellen (1.1) und der zugrunde liegenden markierten Punktprozesse (1.2). Der folgende Überblick gibt eine Einführung in die betrachteten Fragestellungen.

1.1 Größen zweiter Ordnung für zufällige Mengen

Eine gemäß (1.1) definierte zufällige abgeschlossene Menge Ξ in \mathbb{R}^d , $d \geq 2$, ist der Ausgangspunkt für eine ganze Vielzahl zufälliger Maße, vgl. z. B. Schneider (1993), Stoyan, Kendall und Mecke (1995) sowie Heinrich und Molchanov (1999). Ein solches zufälliges Maß ist beispielsweise das durch

$$V_{\Xi}(B) := \mathcal{H}^d(B \cap \Xi), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad (1.3)$$

definierte *zufällige Volumenmaß* V_{Ξ} . Neben der durch

$$V_V^{(d)}(\mathbf{x}) := \mathcal{P}(\mathbf{x} \in \Xi), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad (1.4)$$

bestimmten *lokalen Volumendichte* $V_V^{(d)}(\mathbf{x})$ ist in der Theorie und Anwendung zufälliger Mengen die durch

$$C(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) := \mathcal{P}(\mathbf{x}_1 \in \Xi, \mathbf{x}_2 \in \Xi), \quad \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^d, \quad (1.5)$$

gegebene *Kovarianz* $C(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ eine häufig zur Beschreibung und Charakterisierung verwendete *Größe zweiter Ordnung* (siehe z. B. Stoyan, Kendall und Mecke, 1995, und Verweise). Sehr einfach lässt sich zeigen, dass die Kovarianz eine zweite Produktdichte von V_{Ξ} ist, also eine Dichte des zweiten Momentenmaßes $\mathbb{E}[V_{\Xi}(\cdot)V_{\Xi}(\cdot)]$ von V_{Ξ} bezüglich \mathcal{H}^{2d} .

In ähnlicher Weise zur Definition von V_{Ξ} lässt sich durch

$$S_{\Xi}(B) := \lim_{t \downarrow 0} \mathcal{H}^{d-1}(B \cap \partial[\Xi \oplus B^d(\mathbf{o}, t)]), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad (1.6)$$

das *zufällige Oberflächenmaß* S_{Ξ} von Ξ einführen. Dabei ist die Wohldefiniiertheit von S_{Ξ} durch die in (1.1) an Ξ gestellten Bedingungen gewährleistet. (Man beachte, dass die in (1.6) gegebene Definition des zufälligen Oberflächenmaßes von jener in Abschnitt 7.3.4 in Stoyan, Kendall und Mecke, 1995, abweicht, welche für eine $(d-1)$ -dimensionale Menge Ξ nur die Hälfte des Oberflächeninhalts ergibt.)

Aus den in S_{Ξ} enthaltenen Informationen über den Rand von Ξ lassen sich weitere Kenngrößen zufälliger Mengen ableiten. Eine wichtige Größe ist hier die *lokale Oberflächendichte* (auch *spezifische Oberfläche*) $S_V^{(d)}(\mathbf{x})$. Sie kann beispielsweise über

$$S_V^{(d)}(\mathbf{x}) := \lim_{t \downarrow 0} \frac{\mathbb{E}S_{\Xi}(B^d(\mathbf{x}, t))}{\mathcal{H}^d(B^d(\mathbf{x}, t))}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad (1.7)$$

eingeführt werden (siehe z. B. Hahn u. a., 1999) und ist als Dichte des Intensitätsmaßes $\mathbb{E}S_{\Xi}(\cdot)$ interpretierbar (vgl. zur Existenz Proposition 4.10 in Hug und Last, 2000).

Ein Analogon zur Kovarianz als zweite Produktichte von V_{Ξ} ist die zweite Produktichte von S_{Ξ} . Sie sei im Folgenden mit $\varrho_S^{(2)}$ bezeichnet. Grundsätzlich kann diese Dichtefunktion $\varrho_S^{(2)}$ als eine weitere Möglichkeit zur Beschreibung zufälliger Mengen betrachtet werden. Sie spielt auch in der Statistischen Physik eine Rolle, wo sie beispielsweise zur Berechnung von Schranken für die Flüssigkeitsdurchlässigkeit von Modellen poröser Medien verwendet wird (vgl. Kapitel 21 in Torquato, 2002). Erste diesbezügliche Überlegungen und Ergebnisse gehen bereits auf Doi (1976) zurück.

Die Existenz von $\varrho_S^{(2)}$ ist allerdings nicht mehr auf so einfache Weise wie die der Kovarianz nachweisbar und erfordert zusätzliche Voraussetzungen an die zufällige Menge Ξ (siehe Abschnitt 2.3). Zudem ist eine Bestimmung von Formeln für $\varrho_S^{(2)}$ auf der Grundlage eines Modells i. A. schwierig. Basierend auf unterschiedlichen Ansätzen sind bisher für das Boolesche Modell mit Kugeln in \mathbb{R}^2 (Mecke, 2001) und in \mathbb{R}^3 (Doi, 1976; Torquato, 2002) sowie mit Strecken in \mathbb{R}^2 (Mecke, 2001) exakte Formeln sowie für das Gibbssche Hartkugelmodell in \mathbb{R}^3 (Torquato, 1986) Näherungen bestimmt worden. Für stationäre und isotrope Boolesche Modelle mit ausschließlich $(d - 1)$ -dimensionalen kompakten und konvexen Körnern sind darüber hinaus Herleitungen von $\varrho_S^{(2)}$ als Ableitung der K -Funktion für das zufällige Maß S_{Ξ} (Abschnitt 7.2.2 in Stoyan, Kendall und Mecke, 1995) ähnlich einer Beziehung zwischen der K -Funktion und der zweiten Produktichte eines gewöhnlichen Punktprozesses (Stoyan, Kendall und Mecke, 1995, S. 129) möglich. Ähnlichkeiten gibt es auch zur Untersuchung von Produktichten zufälliger Faserprozesse, vgl. hierzu z. B. Stoyan, Mecke und Pohlmann (1980). Insbesondere der in Formel (5.16) in Torquato (2002) verfolgte Ansatz scheint jedoch auch für andere Modelle und kompliziertere Körner ein möglicher Zugang zu sein.

Dieser Zugang hängt eng mit einer für stationäre zufällige Mengen Ξ seit längerem bekannten Eigenschaft zusammen: Unter gewissen Glattheitsvoraussetzungen an die Körner sind die (nun ortsunabhängigen) Größen $V_V^{(d)}$ und $S_V^{(d)}$ über die Beziehung (Formel (6.2.4) in Stoyan, Kendall und Mecke, 1995)

$$S_V^{(d)} = (1 - V_V^{(d)})H'_s(0) \quad (1.8)$$

verknüpft. Dabei ist $H'_s(0)$ die Ableitung der *sphärischen Kontaktverteilungsfunktion*

$$H_s(t) := \mathcal{P}(\mathbf{o} \in \Xi \oplus tB^d \mid \mathbf{o} \notin \Xi). \quad (1.9)$$

bei $t = 0$. (1.8) ist dabei in der Literatur in unterschiedlichen Darstellungen und Verallgemeinerungen betrachtet worden. So gehen entsprechende Ergebnisse zur absoluten Stetigkeit von H_s auf Last und Schassberger (1998) sowie Hansen u. a. (1999) zurück.

Eine Verallgemeinerung von (1.8) auf den instationären Fall wird vor allem in Micheletti und Stoyan (1998) sowie Hug und Last (2000) diskutiert. In letzterer Arbeit wird zudem eine Theorie im Sinne von (1.8) für den Fall entwickelt, dass das in (1.9) verwendete *Strukturelement* B^d durch einen strikt konvexen Körper ersetzt wird.

In Torquato (2002, Formel (5.16)) wird nun für das stationäre Boolesche Modell mit Kugeln in \mathbb{R}^3 die Produktdichte $\varrho_S^{(2)}$ (dort „surface-surface correlation function“ F_{ss} genannt) in zu (1.8) ähnlicher Weise über

$$\varrho_S^{(2)}(\mathbf{r}) = \overline{C}(\mathbf{r}) \left. \frac{\partial}{\partial t_2} \right|_{t_2=+0} \left. \frac{\partial}{\partial t_1} \right|_{t_1=+0} H_s^{(2)}(\mathbf{r}, t_1, t_2) \quad (1.10)$$

bestimmt, wobei $\overline{C}(\mathbf{r})$ die Kovarianz des Komplements von Ξ ist und $H_s^{(2)}$ durch

$$H_s^{(2)}(\mathbf{r}, t_1, t_2) := \mathcal{P}(\mathbf{o} \in \Xi \oplus t_1 B^d, \mathbf{r} \in \Xi \oplus t_2 B^d \mid \mathbf{o} \notin \Xi, \mathbf{r} \notin \Xi), \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^d, \quad (1.11)$$

gegeben ist (vgl. auch die Definitionen in Abschnitt 2.1). Dabei wird (1.10) allerdings ohne Angabe eines Beweises verwendet.

Ziel des Kapitels 2 ist zu untersuchen, unter welchen Voraussetzungen an das Keim-Korn-Modell Ξ und weitergehend an den zugrunde liegenden Punktprozess auf $\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d$ Gleichung (1.10) bzw. ihre Verallgemeinerung auf den instationären Fall gültig ist (Abschnitte 2.2, 2.3, 2.5). Hilfreich sind dabei einige der Methoden aus Hug und Last (2000), die vor allem auf den verallgemeinerten Krümmungsmaßen und einer Formel vom Steiner-Typ für Mengen aus dem erweiterten Konvexring \mathcal{S}^d (vgl. Abschnitt 2.1) basieren. Im Fall des stationären Booleschen Modells ist es dann möglich, Formeln für die Dichte $\varrho_S^{(2)}$ für weitere Kornverteilungen anzugeben (Abschnitt 2.6).

Für eine Anwendung von $\varrho_S^{(2)}$ stellt sich prinzipiell auch die Frage nach geeigneten Schätzern. Diese soll hier jedoch nicht diskutiert werden.

1.2 Der Matérn-Prozess mit konvexen Körnern

Eine wichtige Aufgabe in der Stochastischen Geometrie/ Räumlichen Statistik und in der Statistischen Physik ist das Studium zufälliger Systeme *harter* (d. h., sich nicht schneidender) Kugeln (vgl. auch Kapitel 4). Zwei bedeutende Modelle sind hierfür der Hard-Core-Gibbs-Prozess (siehe Löwen, 2000, Mase u. a., 2001) und das RSA-Modell („random sequential addition/ adsorption model“, so vor allem in der Statistischen Physik gebräuchlich, siehe Evans, 1993; Talbot u. a., 2000; in der Literatur zur Stochastischen Geometrie auch „simple sequential inhibition process“ genannt, siehe z. B. Stoyan, Kendall und Mecke, 1995). Beide Modelle sind analytisch gar nicht oder nur schwer zugänglich, weshalb sie

im Wesentlichen mit Hilfe von Simulationen untersucht werden. Für den Gibbs-Prozess kommen dabei Markov-Chain-Monte-Carlo-Simulationen zur Anwendung, siehe Binder (2001) und Mase u. a. (2001); für das RSA-Modell wurden z. B. von Döge (2001) effiziente Algorithmen entwickelt. Ein deutlich einfacheres Modell hinsichtlich der Herleitbarkeit expliziter Formeln ist Matérns zweiter Hard-Core-Prozess (Matérn, 1960; Stoyan, Kendall und Mecke, 1995, S. 162), welcher jedoch nur vergleichsweise geringe Intensitäten zulässt.

Die Annahme kugelförmiger Objekte reicht bei der Modellierung realer Sachverhalte in vielen Situationen nicht aus, weshalb vorwiegend in der physikalischen Literatur entsprechende Gibbs-Modelle mit beispielsweise Ellipsoiden und Zylindern betrachtet wurden, siehe z. B. Schmid und Phuong (2002) und Blaak u. a. (1999). Ebenso wurden schon zufällige Systeme von Kreisscheiben in \mathbb{R}^3 u. a. von Eppenga und Frenkel (1984) sowie Léger und Levesque (2002) untersucht. Insbesondere bei diesen Systemen mit stark von der Kugelform abweichenden Partikeln ist zu erwarten, dass einige Effekte, die im Fall harter Kugeln überhaupt nicht auftreten, besonders deutlich sichtbar werden. So kann zum Beispiel bei dichteren Strukturen eine gegenseitige Ausrichtung (Parallelisierung) nahe beieinander liegender Partikeln beobachtet werden.

Ziel des Kapitels 3 ist es, zunächst das ursprüngliche Modell von Matérn auf den allgemeineren Fall mit konvexen Körpern zu übertragen und Formeln für reduzierte faktorielle Campbellmaße und faktorielle Momentenmaße herzuleiten (Abschnitt 3.1). Dabei sind einige Ergebnisse und Methoden für Spezialfälle dieses Modells bereits aus Stoyan und Stoyan (1985) sowie Månsson und Rudemo (2002) bekannt. Die nun verallgemeinerte Formulierung macht es möglich, die Ergebnisse insbesondere in Abschnitt 2.5.3 im Zusammenhang mit der Gültigkeit von (1.10) anzuwenden. Mit Blick auf die in der Literatur betrachteten Gibbs-Prozesse mit harten Kreisscheiben werden in Abschnitt 3.2 dann zwei analoge Beispiele (Strecken in \mathbb{R}^2 , Kreisscheiben in \mathbb{R}^3) für das verallgemeinerte Matérn-Modell diskutiert. Obwohl dabei ebenso wie im Kugelfall nur vergleichsweise geringe Intensitäten möglich sind, treten auch hier lokale Anisotropieeffekte auf. Für gleiche Intensitäten werden abschließend das Matérn-Modell, das Gibbs-Modell und das RSA-Modell für den Fall harter Kreisscheiben in \mathbb{R}^3 verglichen.

1.3 Modellierung zweier Proben eines Feuerbetons

Beton ist ein wichtiger Baustoff, der in äußerst vielfältigen Zusammensetzungen und Formen verwendet wird. Typischerweise kann Beton als ein aus zwei verschiedenen Komponenten (Phasen) bestehendes Material angesehen werden, wobei eine Komponente aus (zufällig verteilten) harten Partikeln besteht, die von einer aus Zement als Bindemittel bestehenden zweiten Phase umgeben sind.

Bei der Erforschung von Beton sind vor allem dessen mechanische Eigenschaften wie das Bruchverhalten bei äußeren Drücken und Spannungen, aber auch Transporteigenschaften (Bentz u. a., 1999) von besonderem Interesse. Wie auch bei vielen anderen Materialien stehen diese Eigenschaften in einem engen Zusammenhang zur inneren geometrischen Struktur (Torquato, 2002; Sahimi, 2003). In den wenigsten Fällen hängen diese Eigenschaften allein vom Volumenanteil der Partikelphase ab. Daher ist i. A. sowohl die statistische Analyse von Beton als auch dessen Modellierung eine sinnvolle und wichtige Aufgabe. Da die Zementphase in der Regel als homogene Masse anzusehen ist, spielt vor allem die durch das System der eingebundenen Partikeln gebildete Struktur eine Rolle.

Modelle für Beton gehören meist zur Klasse der Modelle für Systeme zufällig verteilter harter Partikeln. Viele dieser Modelle sind dabei auch auf andere reale Situationen außerhalb der Betonforschung anwendbar, z. B. im Zusammenhang mit Sintermetallen und granularen Materialien. Bei der Herstellung der in diesem Kapitel untersuchten Betonproben (siehe auch Abschnitt 4.1) wurden kugelförmige Partikeln verwendet, weshalb im Folgenden nur Modelle für zufällige Systeme harter Kugeln eine Rolle spielen werden. Sehr erfolgreiche Modelle sind hier vor allem von Physikern und Ingenieuren entwickelt worden (siehe z. B. Löwen, 2000; Sollich, 2002; Winslow u. a., 1994; Bentz u. a., 1999). Dies sind allerdings oftmals aus mathematisch-analytischer Sicht nur schwer oder gar nicht zugängliche Modelle, selbst ihre Simulation ist häufig nicht offensichtlich. Es existieren zwar einfachere, auf Poisson-Prozessen basierende Modelle wie das Matérn-Modell (siehe insbesondere Kapitel 3 und Verweise), das Stienen-Modell (Stoyan, 1998), das lilypond-Modell (Häggström und Meesters, 1996) sowie das dead-leaves-Modell (Jeulin, 1997), die allerdings für den vorliegenden Fall schon wegen der relativ geringen Volumenanteile der zugehörigen Kugelsysteme ausscheiden.

Ziel des Kapitels 4 ist es, Modelle harter Kugeln aus der Stochastischen Geometrie/ Räumlichen Statistik und der Statistischen Physik zu finden, durch die zwei Proben eines selbstfließenden Feuerbetons mit kugelförmigen Partikeln gut beschrieben werden können. Dabei erweist sich neben dem in Bentz u. a. (1999) beschriebenen Modell ein weiteres, in der Literatur bisher nicht betrachtetes, endliches Modell als besonders passend. Alle hierzu nötigen Vergleiche basieren auf Größen der Stochastischen Geometrie/ Räumlichen Statistik für markierte Punktprozesse und zufällige abgeschlossene Mengen wie z. B. der Paarkorrelationsfunktion und der sphärischen Kontaktverteilungsfunktion. Diese können für die Betonproben aus Datensätzen bestimmt werden, die mit Verfahren der Bayesschen Bildanalyse aus den CT-Bildern der realen Betonproben rekonstruiert werden.

Die in diesem einführenden Abschnitt und dann Kapitel 4 untersuchte Thematik ist weitgehend identisch mit dem Inhalt eines gemeinsamen Artikel des Autors mit Daryl J. Daley und Dietrich Stoyan (vgl. Ballani u. a., 2005), vgl. ebenfalls Ballani (2005).

Kapitel 2

Größen zweiter Ordnung für zufällige Mengen

2.1 Vorbereitungen

Dieser Abschnitt dient der Einführung weiterer, vor allem für dieses Kapitel wichtiger Begriffe, Größen und Eigenschaften. Hinsichtlich hier verwendeter, aber nicht bewiesener Aussagen sei auf die Literatur, insbesondere die Bücher von Schneider (1993), Stoyan, Kendall und Mecke (1995), Schneider und Weil (2000) sowie den Artikel von Hug und Last (2000) verwiesen.

2.1.1 Punktprozesse in $\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d$

Die im Laufe dieses Kapitels zu zeigenden Eigenschaften für ein gemäß (1.1) definiertes Keim-Korn-Modell Ξ basieren auf Voraussetzungen an den zugrunde liegenden markierten Punktprozess Ψ auf \mathbb{R}^d mit Marken in \mathcal{K}^d . Ψ ist dabei ein auf einem abstrakten Wahrscheinlichkeitsraum $[\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}]$ definiertes zufälliges Zählmaß mit der Eigenschaft, dass $\Psi(B \times \mathcal{K}^d) < \infty$ für alle kompakten Mengen $B \subset \mathbb{R}^d$ erfüllt ist. Die Menge aller dieser Maße sei durch $N_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d}$ bezeichnet. Die Darstellung

$$\Psi = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{(\xi_n, Z_n)}$$

sei im Folgenden auch dann gewählt, wenn nur von $n = 1$ bis κ summiert wird, wobei κ eine Zufallsgröße mit Werten in $\{0, 1, \dots, \infty\}$ ist. Obwohl Ψ als ein zufälliges Maß definiert ist, soll im Folgenden auch die Schreibweise $(\mathbf{x}, K) \in \Psi$, falls $\Psi(\{(\mathbf{x}, K)\}) > 0$ gilt, möglich sein.

Viele der Voraussetzungen an Ψ lassen sich als Voraussetzungen an die entsprechenden

auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d)$ bzw. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d)$ definierten *Intensitätsmaße*

$$\alpha_\Psi(\cdot) := \mathbb{E} \left[\int \mathbf{1}\{(\mathbf{x}, K) \in \cdot\} \Psi(d(\mathbf{x}, K)) \right] \quad (2.1)$$

und *zweiten faktoriellen Momentenmaße*

$$\alpha_\Psi^{(2)}(\cdot) := \mathbb{E} \left[\int \int \mathbf{1}\{(\mathbf{x}, K, \mathbf{y}, L) \in \cdot\} (\Psi \setminus \delta_{(\mathbf{x}, K)})(d(\mathbf{y}, L)) \Psi(d(\mathbf{x}, K)) \right] \quad (2.2)$$

von Ψ formulieren. Eine wesentliche Annahme betrifft dabei die Darstellung von α_Ψ und $\alpha_\Psi^{(2)}$.

Voraussetzung 2.1. Das Intensitätsmaß α_Ψ des Punktprozesses Ψ auf $\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d$ sei in der Form

$$\alpha_\Psi(d(\mathbf{x}, K)) = \varrho(\mathbf{x}, K) \mathcal{H}^d(d\mathbf{x}) Q(dK) \quad (2.3)$$

darstellbar. Dabei seien $\varrho : \mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d \rightarrow [0, \infty)$ eine messbare Funktion und Q ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathcal{K}^d .

Voraussetzung 2.2. Das zweite faktorielle Momentenmaß $\alpha_\Psi^{(2)}$ des Punktprozesses Ψ auf $\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d$ sei in der Form

$$\alpha_\Psi^{(2)}(d(\mathbf{x}_1, K_1, \mathbf{x}_2, K_2)) = \varrho^{(2)}(\mathbf{x}_1, K_1, \mathbf{x}_2, K_2) Q_2(d(K_1, K_2)) \mathcal{H}^d(d\mathbf{x}_1) \mathcal{H}^d(d\mathbf{x}_2) \quad (2.4)$$

darstellbar. Dabei seien $\varrho^{(2)} : \mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d \rightarrow [0, \infty)$ eine messbare Funktion und Q_2 ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{K}^d \times \mathcal{K}^d$.

Voraussetzung 2.1 ist dabei insbesondere für ein stationäres Ψ mit einer konstanten Funktion ϱ erfüllt, erlaubt aber auch allgemeinere (instationäre) Fälle. Voraussetzung 2.2 trifft auf viele bekannte Modelle (siehe z. B. Kapitel 3) zu und ist somit keine wesentliche Einschränkung.

Für α_Ψ und $\alpha_\Psi^{(2)}$ wird weiterhin häufig eine lokale Endlichkeit in folgendem Sinne gefordert.

Voraussetzung 2.3. Für das Intensitätsmaß α_Ψ des Punktprozesses Ψ auf $\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d$ gelte

$$\int \mathbf{1}\{(K + \mathbf{x}) \cap B \neq \emptyset\} \alpha_\Psi(d(\mathbf{x}, K)) < \infty \quad (2.5)$$

für alle kompakten Mengen $B \subset \mathbb{R}^d$.

Voraussetzung 2.4. Für das zweite faktorielle Momentenmaß $\alpha_\Psi^{(2)}$ des Punktprozesses Ψ auf $\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d$ gelte

$$\int \mathbf{1}\{(K_1 + \mathbf{x}_1) \cap B_1 \neq \emptyset\} \mathbf{1}\{(K_2 + \mathbf{x}_2) \cap B_2 \neq \emptyset\} \alpha_\Psi^{(2)}(d(\mathbf{x}_1, K_1, \mathbf{x}_2, K_2)) < \infty \quad (2.6)$$

für alle kompakten Mengen $B_1, B_2 \subset \mathbb{R}^d$.

Mit Voraussetzung 2.3 wird beispielsweise gefordert, dass die mittlere Anzahl der Mengen $K + \mathbf{x}$, $(\mathbf{x}, K) \in \Psi$, die eine kompakte Menge schneiden, endlich ist. Aus Voraussetzung 2.3 folgt für Ψ die Eigenschaft

$$\int \mathbf{1}\{(\mathbf{x} + K) \cap B \neq \emptyset\} \Psi(d(\mathbf{x}, K)) < \infty \quad \mathcal{P}\text{-f. s.} \quad (2.7)$$

für alle kompakten Mengen $B \subset \mathbb{R}^d$, die sichert, dass die zufällige Menge

$$\Xi := \bigcup_{(\mathbf{x}, K) \in \Psi} (\mathbf{x} + K) \quad (2.8)$$

\mathcal{P} -f. s. *abgeschlossen* ist. Es sei dann durch T diejenige messbare Abbildung auf $N_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d}$ bezeichnet, die implizit durch (2.8) gegeben ist und damit $T(\Psi) = \Xi$ erfüllt.

Es bezeichne P die *Verteilung* von Ψ , also das durch $P(A) := \mathcal{P}(\Psi \in A)$, $A \in \mathcal{N}_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d}$, gegebene Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{N}_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d}$. Bei der Formulierung einiger Ergebnisse spielen die durch $P_{(\mathbf{x}, K)}^!$, $(\mathbf{x}, K) \in \mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d$, und $P_{(\mathbf{x}, K), (\mathbf{y}, L)}^!$, $(\mathbf{x}, K), (\mathbf{y}, L) \in \mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d$, bezeichneten *ersten* bzw. *zweiten reduzierten Palmischen Verteilungen* von Ψ eine Rolle. Sie existieren, falls α_Ψ und entsprechend $\alpha_\Psi^{(2)}$ σ -endlich sind, was beispielsweise bei Gültigkeit der Voraussetzung 2.1 und entsprechend der Voraussetzung 2.2 der Fall ist, und sind α_Ψ -f. ü. bzw. $\alpha_\Psi^{(2)}$ -f. ü. eindeutig bestimmt (siehe Abschnitt 12.3 in Kallenberg, 1983). Für einen *einfachen* Punktprozess Ψ ist beispielsweise $P_{(\mathbf{x}, K)}^!$ als die bedingte Verteilung von P unter der Bedingung, dass Ψ in (\mathbf{x}, K) einen Punkt besitzt, der aber nicht mitgezählt wird, interpretierbar. Es gelten die (auch als Definition zu verstehenden) Beziehungen

$$\int \int g(\mathbf{x}, K, \psi \setminus \delta_{(\mathbf{x}, K)}) \psi(d(\mathbf{x}, K)) P(d\psi) = \int \int g(\mathbf{x}, K, \psi) P_{(\mathbf{x}, K)}^!(d\psi) \alpha_\Psi(d(\mathbf{x}, K)) \quad (2.9)$$

und

$$\begin{aligned} & \int \int \int h(\mathbf{x}, K, \mathbf{y}, L, \psi \setminus \delta_{(\mathbf{x}, K)} \setminus \delta_{(\mathbf{y}, L)}) (\psi \setminus \delta_{(\mathbf{x}, K)}) (d(\mathbf{y}, L)) \psi(d(\mathbf{x}, K)) P(d\psi) \\ &= \int \int h(\mathbf{x}, K, \mathbf{y}, L, \psi) P_{(\mathbf{x}, K), (\mathbf{y}, L)}^!(d\psi) \alpha_\Psi^{(2)}(d(\mathbf{x}, K, \mathbf{y}, L)), \end{aligned} \quad (2.10)$$

wobei $g : \mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d \times N_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d} \rightarrow [0, \infty]$ und $h : \mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d \times N_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d} \rightarrow [0, \infty]$ beliebige messbare Funktionen seien (vgl. Kallenberg, 1983; für einfache Punktprozesse auch Theorem 1 in Hanisch, 1982). Ähnlich wie in Hug und Last (2000) werde für messbares $l : N_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d} \rightarrow \mathbb{R}$ gelegentlich $\mathbb{E}_{(\mathbf{x}, K)}[l(\Psi)]$ für $\int l(\psi) P_{(\mathbf{x}, K)}^!(d\psi)$ und $\mathbb{E}_{(\mathbf{x}, K), (\mathbf{y}, L)}[l(\Psi)]$ für $\int l(\psi) P_{(\mathbf{x}, K), (\mathbf{y}, L)}^!(d\psi)$ geschrieben.

Ist speziell Ψ ein Poisson-Prozess, dann folgen aus (2.9) und (2.10) sowie dem Satz von Slivnyak-Mecke (siehe z. B. Satz 3.1 in Mecke, 1967) die charakteristischen Eigenschaften

$$P_{(\mathbf{x}, K)}^! = P \quad \text{für } \alpha_\Psi\text{-f. a. } (\mathbf{x}, K) \in \mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d \quad (2.11)$$

und

$$P_{(\mathbf{x},K),(\mathbf{y},L)}^! = P \quad \text{für } \alpha_{\Psi}^{(2)}\text{-f. a. } (\mathbf{x}, K, \mathbf{y}, L) \in \mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d. \quad (2.12)$$

Mit

$$\psi_{\mathbf{y}} := \sum_{(\mathbf{x},K) \in \psi} \delta_{(\mathbf{x}+\mathbf{y},K)} \quad (2.13)$$

für $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ und

$$\vartheta\psi := \sum_{(\mathbf{x},K) \in \psi} \delta_{(\vartheta\mathbf{x},\vartheta K)} \quad (2.14)$$

für $\vartheta \in SO_d$ heiße Ψ *stationär*, falls für alle $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ $\mathcal{P}(\Psi_{\mathbf{y}} \in \cdot) = \mathcal{P}(\Psi \in \cdot)$ erfüllt ist, und *isotrop*, falls für alle $\vartheta \in SO_d$ $\mathcal{P}(\vartheta\Psi \in \cdot) = \mathcal{P}(\Psi \in \cdot)$ erfüllt ist.

Die folgenden Unterabschnitte gehen nun auf wichtige Größen und Begriffe im Zusammenhang mit zufälligen \mathcal{S}^d -Mengen ein.

2.1.2 Steiner-Formeln, Krümmungsmaße und Randstruktur

Für eine Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ sei

$$d(A, \mathbf{x}) := \inf\{t \geq 0 : A \cap (\mathbf{x} + tB^d) \neq \emptyset\} \quad (2.15)$$

der *Abstand von $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ zu A* bezüglich der euklidischen Einheitskugel B^d in \mathbb{R}^d . Falls $A = \emptyset$, sei $d(A, \mathbf{x}) = \infty$. Der Abstand $d(A, \mathbf{x})$ genügt dabei einer Bewegungsinvarianz in folgendem Sinne: Für alle $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ und alle $\vartheta \in SO_d$ gilt

$$d(\vartheta A + \mathbf{y}, \vartheta\mathbf{x} + \mathbf{y}) = d(A, \mathbf{x}). \quad (2.16)$$

Im Folgenden sei $K \in \mathcal{S}^d$ eine Menge aus dem erweiterten Konvexring in \mathbb{R}^d . Da K abgeschlossen ist, gibt es einen Punkt $\mathbf{y} \in K$ mit $d(K, \mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$. Jedes $\mathbf{y} \in K$ mit dieser Eigenschaft heißt Projektion von \mathbf{x} auf K . Besteht die Menge aller Projektionen von \mathbf{x} auf K nur aus einem Punkt, sei dieser durch $\mathbf{p}(K, \mathbf{x})$ bezeichnet. Gilt in diesem Fall zusätzlich $\mathbf{x} \notin K$, dann sei

$$\mathbf{u}(K, \mathbf{x}) := \frac{\mathbf{x} - \mathbf{p}(K, \mathbf{x})}{d(K, \mathbf{x})} \quad (2.17)$$

der zugehörige Richtungsvektor aus S^{d-1} . (Ist K insbesondere konvex, dann ist für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ der Projektionspunkt von \mathbf{x} auf K eindeutig bestimmt.) Die Bewegungsinvarianz (2.16) von $d(\cdot, \cdot)$ überträgt sich entsprechend auf $\mathbf{p}(\cdot, \cdot)$ und $\mathbf{u}(\cdot, \cdot)$.

Alle Punkte $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \setminus K$, die mehr als einen Projektionspunkt auf K haben, bilden das *uere Skelett* $\text{exo}(K)$ von K (siehe dazu z. B. Hug und Last, 2000). Für $K \in \mathcal{S}^d$ heißt die Menge

$$N(K) := \{(\mathbf{p}(K, \mathbf{x}), \mathbf{u}(K, \mathbf{x})) : \mathbf{x} \notin K \cup \text{exo}(K)\} \quad (2.18)$$

Normalenbündel von K . Mit $\mathbf{p}(K, \mathbf{x}) \in \partial K$ und $\mathbf{u}(K, \mathbf{x}) \in S^{d-1}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \setminus K$, gilt folglich $N(K) \subseteq \partial K \times S^{d-1}$. Für Punktepaare $(\mathbf{z}, \mathbf{b}) \in N(K)$ ist weiterhin die *Reichweitenfunktion* $\delta(K, \cdot)$ durch

$$\delta(K, \mathbf{z}, \mathbf{b}) := \inf\{s > 0 : \mathbf{z} + s\mathbf{b} \in \text{exo}(K)\} \quad (2.19)$$

erklärt, wobei $\inf \emptyset := \infty$ gelte. Für $(\mathbf{z}, \mathbf{b}) \notin N(K)$ sei $\delta(K, \mathbf{z}, \mathbf{b}) := 0$. Folglich gilt

$$N(K) = \{(\mathbf{z}, \mathbf{b}) \in \partial K \times S^{d-1} : \delta(K, \mathbf{z}, \mathbf{b}) > 0\}. \quad (2.20)$$

Der folgende Satz ist eine Verallgemeinerung der bekannten Steiner-Formel für konvexe Körper K und führt Maße ein, die auf \mathcal{S}^d fortgesetzt werden können. Sowohl diese Maße als auch ihre Fortsetzungen auf \mathcal{S}^d werden in diesem Kapitel eine wichtige Rolle spielen.

Satz 2.1 (Theorem 4.2.1, Schneider, 1993). *Für jeden konvexen Körper $K \in \mathcal{K}^d$ existieren endliche positive Maße $\Theta_i(K, \cdot)$, $i = 0, \dots, d-1$, auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times S^{d-1})$, so dass*

$$\mathcal{H}^d(\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : 0 < d(K, \mathbf{x}) \leq t, (\mathbf{p}(K, \mathbf{x}), \mathbf{u}(K, \mathbf{x})) \in D\}) = \sum_{i=0}^{d-1} t^{d-i} b_{d-i} \Theta_i(K, D)$$

für alle $t > 0$ und alle $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times S^{d-1})$ gilt.

Die Maße $\Theta_i(K, \cdot)$, $i = 0, \dots, d-1$, sind auf $N(K)$ konzentriert und heißen *verallgemeinerte Krümmungsmaße* von $K \in \mathcal{K}^d$. Aus diesen Maßen sind durch

$$C_i(K, A) := \Theta_i(K, A \times S^{d-1}), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad (2.21)$$

die *Krümmungsmaße* $C_0(K, \cdot), \dots, C_{d-1}(K, \cdot)$ von K ableitbar. Insbesondere sind

$$V_i(K) := C_i(K, \mathbb{R}^d) \quad (2.22)$$

die *inneren Volumina* des konvexen Körpers K . Auch hier gilt für alle $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ und alle $\vartheta \in SO_d$ eine Bewegungsinvarianz im Sinne von

$$C_i(\vartheta K + \mathbf{y}, \vartheta A + \mathbf{y}) = C_i(K, A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \quad (2.23)$$

Die Maße $\Theta_i(K, \cdot)$, $i = 0, \dots, d-1$, können additiv auf den Konvexring des \mathbb{R}^d fortgesetzt werden (siehe Abschnitt 4.4 in Schneider, 1993). Diese Fortsetzungen sind i. A. signierte Maße. Es stellt sich aber heraus, dass die Maße $\Theta_i(K, \cdot \cap N(K))$, $i = 0, \dots, d-1$, für Mengen K aus dem Konvexring nichtnegativ sind. Man kann deshalb für $K \in \mathcal{S}^d$ nichtnegative und lokalendliche Maße auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times S^{d-1})$ gemäß

$$\Theta_i^+(K, \cdot) := \Theta_i(K, \cdot \cap N(K)), \quad i = 0, \dots, d-1, \quad (2.24)$$

definieren. Diese sind eindeutig durch ihre Werte für Mengen $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times S^{d-1})$ bestimmt, deren Projektion auf \mathbb{R}^d beschränkt ist (siehe Hug und Last, 2000). In Verallgemeinerung von Satz 2.1 existiert auch für Mengen $K \in \mathcal{S}^d$ eine Formel vom Steiner-Typ, in der nun die Maße Θ_i^+ auftreten.

Satz 2.2 (Theorem 3.3, Hug/Last, 2000). Für alle Mengen $K \in \mathcal{S}^d$ und für alle messbaren nichtnegativen Funktionen $g : \mathbb{R}^d \times S^{d-1} \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty]$ gilt

$$\begin{aligned} & \int \mathbf{1}\{d(K, \mathbf{x}) > 0\} g(\mathbf{p}(K, \mathbf{x}), \mathbf{u}(K, \mathbf{x}), d(K, \mathbf{x})) \mathcal{H}^d(d\mathbf{x}) \\ &= \sum_{i=0}^{d-1} (d-i) b_{d-i} \int \int \mathbf{1}\{\delta(K, \mathbf{z}, \mathbf{b}) > s\} g(\mathbf{z}, \mathbf{b}, s) s^{d-i-1} \Theta_i^+(K, d(\mathbf{z}, \mathbf{b})) ds. \end{aligned}$$

In den Abschnitten 2.2, 2.3 und 2.5 wird dieser Satz ein viel verwendetes Hilfsmittel sein.

Für einige der späteren Betrachtungen sind neben den (verallgemeinerten) Krümmungsmaßen eines konvexen Körpers auch noch weitere Begriffe hinsichtlich seiner Randstruktur von Interesse. Sei daher nun $K \in \mathcal{K}^d$.

Besteht für den Randpunkt $\mathbf{z} \in \partial K$ die Menge $N(K, \mathbf{z}) := \{\mathbf{b} \in S^{d-1} : (\mathbf{z}, \mathbf{b}) \in N(K)\}$ aus genau einem Vektor, sei dieser Vektor mit $\mathbf{n}(K, \mathbf{z})$ bezeichnet. \mathbf{z} wird in diesem Fall ein *regulärer* Randpunkt genannt, und $\mathbf{n}(K, \mathbf{z})$ ist dann der eindeutig bestimmte Normaleneinheitsvektor im Punkt \mathbf{z} an K . Die Menge aller regulären Randpunkte sei durch $\text{reg}K$ bezeichnet. Sind sogar alle Randpunkte von K regulär, wird K *glatt* oder *aus der Klasse C^1* genannt, da in diesem Fall der Rand von K eine stetig differenzierbare Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^d im Sinne der Differentialgeometrie ist.

Es ist somit $\mathbf{n} : \text{reg}K \rightarrow S^{d-1}$ mit $\mathbf{z} \mapsto \mathbf{n}(K, \mathbf{z})$ das *sphärische Abbild* von K (vgl. Schneider, 1993). Für ein $K \in \mathcal{K}^d$ aus der Klasse C^1 ist \mathbf{n} dann sogar stetig auf ∂K .

Der Rand ∂K eines konvexen Körpers $K \in \mathcal{K}^d$ heiße *stückweise C^k -glatt*, $k = 1, 2$, wenn ∂K in der Form

$$\bigcup_{i=1}^n F_i, \quad n < \infty, \quad (2.25)$$

mit $(d-1)$ -dimensionalen Seitenflächen F_i , $i = 1, \dots, n$, dargestellt werden kann, wobei die F_i reguläre C^k -Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^d mit $\text{relint}(F_i) \cap \text{relint}(F_j) = \emptyset$, $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$, seien. Dabei bezeichne $\text{relint}(F)$ das relativ Innere von F . Im Fall $k = 2$ sei zusätzlich angenommen, dass alle $F_i \cap F_j$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$, C^2 -Untermannigfaltigkeiten sind.

2.1.3 Momentenmaße

Ist Ξ eine zufällige abgeschlossene Menge aus dem erweiterten Konvexring, dann sind die Maße

$$\Theta_j^+(\Xi, \cdot), \quad j = 0, \dots, d-1, \quad (2.26)$$

nichtnegative zufällige Maße auf $\mathbb{R}^d \times S^{d-1}$. Für Borelmengen $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times S^{d-1})$ seien durch

$$\Lambda_j^+(B_1) := \mathbb{E}[\Theta_j^+(\Xi, B_1)], \quad j = 0, \dots, d-1, \quad (2.27)$$

die zugehörigen *Intensitätsmaße* (Momentenmaße erster Ordnung, siehe Hug und Last, 2000) und durch

$$\Lambda_{ij}^+(B_1 \times B_2) := \mathbb{E}[\Theta_i^+(\Xi, B_1)\Theta_j^+(\Xi, B_2)], \quad i, j = 0, \dots, d-1, \quad (2.28)$$

die zugehörigen *gemischten Momentenmaße zweiter Ordnung* definiert.

In Vorbereitung von Abschnitt 2.2 seien durch

$$\Psi_j^+(A) := \int \mathbf{1}\{(\mathbf{z}, \mathbf{b}, \delta(\Xi, \mathbf{z}, \mathbf{b})) \in A\} \Theta_j^+(\Xi, d(\mathbf{z}, \mathbf{b})), \quad j = 0, \dots, d-1, \quad (2.29)$$

für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times S^{d-1} \times [0, \infty])$ als Hilfsgrößen weitere zufällige Maße auf $\mathbb{R}^d \times S^{d-1} \times [0, \infty]$ eingeführt (vgl. Last und Schassberger, 1998; Hug und Last, 2000), die im Vergleich zu $\Theta_j^+(\Xi, \cdot)$ zusätzliche lokale Informationen über die Reichweite zwischen Randpunkten und äußerem Skelett enthalten. Die entsprechenden Intensitätsmaße seien

$$\Lambda_j(\cdot) := \mathbb{E}[\Psi_j^+(\cdot)], \quad j = 0, \dots, d-1, \quad (2.30)$$

und die entsprechenden gemischten Momentenmaße zweiter Ordnung seien

$$\Lambda_{ij}(\cdot \times \cdot) := \mathbb{E}[\Psi_i^+(\cdot)\Psi_j^+(\cdot)], \quad i, j = 0, \dots, d-1. \quad (2.31)$$

Es gilt $\Lambda_{ij}(\cdot \times (0, \infty] \times \cdot \times (0, \infty]) = \Lambda_{ij}^+(\cdot, \cdot)$.

Sind die Maße $\Lambda_{ij}^+(\cdot \times S^{d-1} \times \cdot \times S^{d-1})$ lokal endlich, dann ist die Desintegration

$$\Lambda_{ij}(d(\mathbf{z}_1, \mathbf{b}_1, \rho_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{b}_2, \rho_2)) = G_{ij}^+(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, d(\mathbf{b}_1, \rho_1, \mathbf{b}_2, \rho_2)) \Lambda_{ij}^+(d\mathbf{z}_1 \times S^{d-1} \times d\mathbf{z}_2 \times S^{d-1}) \quad (2.32)$$

möglich, wobei G_{ij}^+ ein stochastischer Kern von $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ in $S^{d-1} \times [0, \infty] \times S^{d-1} \times [0, \infty]$ ist, siehe z. B. Daley und Vere-Jones (1988, Exercise 6.1.7.) und Rao (1993, Abschnitt 5.4). Das Maß $G_{d-1, d-1}^+$ lässt sich mit Hilfe bekannter Größen interpretieren. Eine Desintegration von $\Lambda_{d-1, d-1}^+$ führt nämlich auf

$$\Lambda_{d-1, d-1}^+(d(\mathbf{z}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{b}_2)) = \mathcal{R}^{(2)}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, d(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)) \Lambda_{d-1, d-1}^+(d\mathbf{z}_1 \times S^{d-1} \times d\mathbf{z}_2 \times S^{d-1}), \quad (2.33)$$

wobei $\mathcal{R}^{(2)}$ ein stochastischer Kern von $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ in $S^{d-1} \times S^{d-1}$ ist. Da für alle $(\mathbf{z}, \mathbf{b}) \in N(\Xi)$ für die Reichweitenfunktion $\delta(\Xi, \mathbf{z}, \mathbf{b}) > 0$ gilt, ist o. B. d. A.

$$G_{d-1, d-1}^+(\mathbf{z}_1, A_1, (0, \infty], \mathbf{z}_2, A_2, (0, \infty]) = \mathcal{R}^{(2)}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, A_1, A_2) \quad (2.34)$$

für $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(S^{d-1})$ annehmbar. $\mathcal{R}^{(2)}$ ist als gemeinsame bedingte Richtungsverteilung im Sinne einer Zweipunkt-Markenverteilung (vgl. Stoyan, Kendall und Mecke, 1995, S. 114) interpretierbar, wobei die Marken hier Richtungsvektoren aus S^{d-1} sind.

Da aus der Jensenschen Ungleichung für $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned} (\Lambda_i^+(B \times S^{d-1}))^2 &= (\mathbb{E}[\Theta_i^+(\Xi, B \times S^{d-1})])^2 \\ &\leq \mathbb{E} \left[(\Theta_i^+(\Xi, B \times S^{d-1}))^2 \right] = \Lambda_{ii}^+(B \times S^{d-1} \times B \times S^{d-1}) \end{aligned}$$

gefolgert werden kann, impliziert die lokale Endlichkeit von $\Lambda_{ii}^+(\cdot \times S^{d-1} \times \cdot \times S^{d-1})$ auch die lokale Endlichkeit von $\Lambda_i^+(\cdot \times S^{d-1})$. In Abschnitt 2.3 wird untersucht, unter welchen Voraussetzungen die lokale Endlichkeit der Maße Λ_{ij}^+ gegeben ist.

2.1.4 Kontaktverteilungsfunktion zweiter Ordnung

Für eine beliebige zufällige abgeschlossene Menge Ξ sei in Analogie zum Begriff der Kontaktverteilungsfunktion (vgl. Stoyan, Kendall und Mecke, 1995) für $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^d$, $t_1, t_2 \geq 0$ und $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(S^{d-1})$ unter der Bedingung $\mathcal{P}(\mathbf{x}_1 \notin \Xi, \mathbf{x}_2 \notin \Xi) > 0$ durch

$$\begin{aligned} H_s^{(2)}(\mathbf{x}_1, t_1, A_1, \mathbf{x}_2, t_2, A_2) \\ := \mathcal{P}(d(\Xi, \mathbf{x}_1) \leq t_1, \mathbf{u}(\Xi, \mathbf{x}_1) \in A_1, d(\Xi, \mathbf{x}_2) \leq t_2, \mathbf{u}(\Xi, \mathbf{x}_2) \in A_2 \mid \mathbf{x}_1 \notin \Xi, \mathbf{x}_2 \notin \Xi) \end{aligned} \quad (2.35)$$

eine *verallgemeinerte sphärische Kontaktverteilungsfunktion zweiter Ordnung* definiert. Im Fall $\mathcal{P}(\mathbf{x}_1 \notin \Xi, \mathbf{x}_2 \notin \Xi) = 0$ sei $H_s^{(2)}(\mathbf{x}_1, t_1, A_1, \mathbf{x}_2, t_2, A_2) := 1$.

Insbesondere ist $H_s^{(2)}(\mathbf{x}_1, \cdot, \mathbf{x}_2, \cdot) := H_s^{(2)}(\mathbf{x}_1, \cdot, S^{d-1}, \mathbf{x}_2, \cdot, S^{d-1})$ als Verteilungsfunktion der gemeinsamen bedingten Verteilung des Vektors $(d(\Xi, \mathbf{x}_1), d(\Xi, \mathbf{x}_2))$ unter der Bedingung $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\} \cap \Xi = \emptyset$ interpretierbar. Die Einbeziehung der zufälligen Richtungsvektoren $\mathbf{u}(\Xi, \mathbf{x}_1)$ und $\mathbf{u}(\Xi, \mathbf{x}_2)$ berücksichtigt dabei zusätzliche lokale Informationen und ist an die Ausführungen zur Kontaktverteilungsfunktion in Last und Schassberger (1998) sowie Hug und Last (2000) angelehnt. Weitere Verallgemeinerungen von $H_s^{(2)}$ sind sowohl hinsichtlich des hier verwendeten Strukturelements B^d (vgl. hierzu insbesondere Hug und Last, 2000) als auch nochmals weiterer lokaler Informationen (vgl. Hug u. a., 2002) möglich, werden aber im Folgenden nicht betrachtet.

Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten der Bedingung $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\} \cap \Xi = \emptyset$ ist gerade die Kovarianz des Komplements von Ξ , die im Folgenden durch $\overline{C}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ bezeichnet sei.

Falls Ξ stationär und isotrop ist, hängen $H_s^{(2)}$ und \overline{C} bezüglich \mathbf{x}_1 und \mathbf{x}_2 nur noch von $r := \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|$ ab, und es seien in diesem Fall abkürzend

$$H_s^{(2)}(r, t_1, t_2) := H_s^{(2)}(\mathbf{x}_1, t_1, S^{d-1}, \mathbf{x}_2, t_2, S^{d-1}) \text{ und } \overline{C}(r) := \overline{C}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2). \quad (2.36)$$

2.2 Ein Analogon zu (1.8) für den Fall zweiter Ordnung

Dieser Abschnitt überträgt die bekannte Beziehung (1.8) zwischen der sphärischen Kontaktverteilungsfunktion und der Oberflächendichte einer zufälligen abgeschlossenen Menge auf den Fall zweiter Ordnung. Gleichzeitig wird damit die in Torquato (2002, Formel (5.16)) gegebene Beziehung in verallgemeinerter Form bewiesen. Als besonders praktikabel erweist sich dabei der Zugang von Last und Schassberger (1998) sowie Hug und Last (2000).

Satz 2.3. *Es sei Ξ eine zufälliges Keim-Korn-Modell mit Körnern aus \mathcal{K}^d . Die zugehörigen Momentenmaße $\Lambda_{ij}^+(\cdot \times S^{d-1} \times \cdot \times S^{d-1})$, $i, j = 0, \dots, d-1$, seien lokal endlich. Es seien $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(S^{d-1})$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \lim_{t_2 \downarrow 0} \lim_{t_1 \downarrow 0} \int g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) (t_1 t_2)^{-1} \overline{C}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) H_s^{(2)}(\mathbf{x}_1, t_1, A_1, \mathbf{x}_2, t_2, A_2) \mathcal{H}^{2d}(d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)) \\ = 4 \int g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \Lambda_{d-1, d-1}^+(d\mathbf{x}_1 \times A_1 \times d\mathbf{x}_2 \times A_2) \end{aligned}$$

für alle stetigen Funktionen $g : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ mit kompaktem Träger.

Beweis. Der Beweis erfolgt in zwei Schritten, innerhalb derer im Wesentlichen die im Beweis von Theorem 4.1 in Hug und Last (2000) genutzten Techniken angewendet werden. Es gelte abkürzend die Schreibweise $d(\mathbf{x}) := d(\Xi, \mathbf{x})$, und Entsprechendes auch für \mathbf{p} , \mathbf{u} und δ .

Seien $0 < t_1 \leq 1$ und $0 < t_2 \leq 1$. Mit

$$\mathcal{P}((d(\mathbf{x}_1), \mathbf{u}(\mathbf{x}_1), d(\mathbf{x}_2), \mathbf{u}(\mathbf{x}_2)) \in \cdot) = \mathbb{E}[\mathbf{1}\{(d(\mathbf{x}_1), \mathbf{u}(\mathbf{x}_1), d(\mathbf{x}_2), \mathbf{u}(\mathbf{x}_2)) \in \cdot\}]$$

folgt aus der verallgemeinerten Steiner-Formel in Satz 2.2 und dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} & \iint g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \overline{C}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) H_s^{(2)}(\mathbf{x}_1, t_1, A_1, \mathbf{x}_2, t_2, A_2) \mathcal{H}^d(d\mathbf{x}_1) \mathcal{H}^d(d\mathbf{x}_2) \\ &= \mathbb{E} \left[\iint g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \mathbf{1}\{d(\mathbf{x}_1) \in (0, t_1], \mathbf{u}(\mathbf{x}_1) \in A_1\} \mathbf{1}\{d(\mathbf{x}_2) \in (0, t_2], \mathbf{u}(\mathbf{x}_2) \in A_2\} \mathcal{H}^d(d\mathbf{x}_1) \mathcal{H}^d(d\mathbf{x}_2) \right] \\ &= \sum_{i=0}^{d-1} a_i \mathbb{E} \left[\iiint g(\mathbf{z}_1 + s_1 \mathbf{b}_1, \mathbf{x}_2) \mathbf{1}\{s_1 \leq t_1, \mathbf{b}_1 \in A_1, \delta(\mathbf{z}_1, \mathbf{b}_1) > s_1\} s_1^{d-i-1} \right. \\ & \quad \left. \times \Theta_i^+(\Xi, d(\mathbf{z}_1, \mathbf{b}_1)) ds_1 \mathbf{1}\{d(\mathbf{x}_2) \in (0, t_2], \mathbf{u}(\mathbf{x}_2) \in A_2\} \mathcal{H}^d(d\mathbf{x}_2) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{d-2} a_i \mathbb{E} \left[\int \int \int g(\mathbf{z}_1 + s_1 \mathbf{b}_1, \mathbf{x}_2) \mathbf{1}\{s_1 \leq t_1, \mathbf{b}_1 \in A_1, \delta(\mathbf{z}_1, \mathbf{b}_1) > s_1\} s_1^{d-i-1} \right. \\
&\quad \left. \times \Theta_i^+(\Xi, d(\mathbf{z}_1, \mathbf{b}_1)) ds_1 \mathbf{1}\{d(\mathbf{x}_2) \in (0, t_2], \mathbf{u}(\mathbf{x}_2) \in A_2\} \mathcal{H}^d(d\mathbf{x}_2) \right] \\
&+ a_{d-1} \mathbb{E} \left[\int \int \int (g(\mathbf{z}_1 + s_1 \mathbf{b}_1, \mathbf{x}_2) - g(\mathbf{z}_1, \mathbf{x}_2)) \mathbf{1}\{s_1 \leq t_1, \mathbf{b}_1 \in A_1, \delta(\mathbf{z}_1, \mathbf{b}_1) > s_1\} \right. \\
&\quad \left. \times \Theta_{d-1}^+(\Xi, d(\mathbf{z}_1, \mathbf{b}_1)) ds_1 \mathbf{1}\{d(\mathbf{x}_2) \in (0, t_2], \mathbf{u}(\mathbf{x}_2) \in A_2\} \mathcal{H}^d(d\mathbf{x}_2) \right] \\
&+ a_{d-1} \mathbb{E} \left[\int \int \int g(\mathbf{z}_1, \mathbf{x}_2) \mathbf{1}\{s_1 \leq t_1, \mathbf{b}_1 \in A_1, \delta(\mathbf{z}_1, \mathbf{b}_1) > s_1\} \right. \\
&\quad \left. \times \Theta_{d-1}^+(\Xi, d(\mathbf{z}_1, \mathbf{b}_1)) ds_1 \mathbf{1}\{d(\mathbf{x}_2) \in (0, t_2], \mathbf{u}(\mathbf{x}_2) \in A_2\} \mathcal{H}^d(d\mathbf{x}_2) \right] \\
&=: R_1(t_1, t_2) + R_2(t_1, t_2) + R_3(t_1, t_2).
\end{aligned}$$

Sei $\|g\| := \sup\{|g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)| : (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d\}$. Die Stetigkeit von g auf einem kompakten Träger sichert die Endlichkeit von $\|g\|$. Ist U der kompakte Träger von g , dann gibt es kompakte Mengen $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^d$ mit $U \subseteq U_1 \times U_2$. Weiterhin sei $\bar{U}_1 := U_1 \oplus B^d$ und $\bar{U}_2 := U_2 \oplus B^d$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
|R_1(t_1, t_2)| &\leq \sum_{i=0}^{d-2} a_i \mathbb{E} \left[\int \int \int |g(\mathbf{z}_1 + s_1 \mathbf{b}_1, \mathbf{x}_2)| \mathbf{1}\{s_1 \leq t_1, \mathbf{b}_1 \in A_1, \delta(\mathbf{z}_1, \mathbf{b}_1) > s_1\} s_1^{d-i-1} \right. \\
&\quad \left. \times \Theta_i^+(\Xi, d(\mathbf{z}_1, \mathbf{b}_1)) ds_1 \mathbf{1}\{d(\mathbf{x}_2) \in (0, t_2], \mathbf{u}(\mathbf{x}_2) \in A_2\} \mathcal{H}^d(d\mathbf{x}_2) \right] \\
&\leq \sum_{i=0}^{d-2} a_i \mathbb{E} \left[\int \int \int |g(\mathbf{z}_1 + s_1 \mathbf{b}_1, \mathbf{x}_2)| \mathbf{1}\{s_1 \leq t_1\} s_1^{d-i-1} \Theta_i^+(\Xi, d(\mathbf{z}_1, \mathbf{b}_1)) ds_1 \mathcal{H}^d(d\mathbf{x}_2) \right] \\
&= \sum_{i=0}^{d-2} a_i \int \int \int |g(\mathbf{z}_1 + s_1 \mathbf{b}_1, \mathbf{x}_2)| \mathbf{1}\{s_1 \leq t_1\} s_1^{d-i-1} \Lambda_i^+(d(\mathbf{z}_1, \mathbf{b}_1)) ds_1 \mathcal{H}^d(d\mathbf{x}_2) \\
&\leq \sum_{i=0}^{d-2} a_i \|g\| \Lambda_i^+(\bar{U}_1 \times S^{d-1}) \mathcal{H}^d(U_2) \frac{1}{d-i} t_1^{d-i} \\
&\leq \left(\sum_{i=0}^{d-2} a_i \|g\| \Lambda_i^+(\bar{U}_1 \times S^{d-1}) \mathcal{H}^d(U_2) \frac{1}{d-i} \right) t_1^2 \\
&= c_1 t_1^2,
\end{aligned}$$

wegen $0 < t_1 \leq 1$. Dabei gilt $c_1 < \infty$, da $\|g\| < \infty$ und $\Lambda_i^+(\cdot \times S^{d-1})$ und \mathcal{H}^d lokal endlich sind.

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Da g stetig auf einem kompakten Träger ist, ist g auch gleichmäßig stetig. Daher gibt es ein $t_\varepsilon \in (0, 1]$, so dass $|g(\mathbf{z}_1 + s_1 \mathbf{b}_1, \mathbf{x}_2) - g(\mathbf{z}_1, \mathbf{x}_2)| < \varepsilon$ für alle $s_1 \in (0, t_\varepsilon]$, $(\mathbf{z}_1, \mathbf{b}_1) \in \mathbb{R}^d \times S^{d-1}$ und $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^d$ gilt. Mit einer analogen Abschätzung

wie für $|R_1(t_1, t_2)|$ erhält man für alle $t_1 \in (0, t_\varepsilon]$

$$\begin{aligned} |R_2(t_1, t_2)| &\leq \varepsilon a_{d-1} \int \int \int \mathbf{1}\{s_1 \leq t_1\} \mathbf{1}\{\mathbf{z}_1 \in \bar{U}_1, \mathbf{x}_2 \in U_2\} \Lambda_{d-1}^+(\mathrm{d}\mathbf{z}_1 \times S^{d-1}) \mathrm{d}s_1 \mathcal{H}^d(\mathrm{d}\mathbf{x}_2) \\ &= \varepsilon a_{d-1} \Lambda_{d-1}^+(\bar{U}_1 \times S^{d-1}) \mathcal{H}^d(U_2) t_1. \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt ist, gilt

$$\lim_{t_1 \downarrow 0} \frac{|R_2(t_1, t_2)|}{t_1} = 0.$$

Weiterhin ist nach abermaliger Anwendung von Satz 2.2

$$\begin{aligned} &R_3(t_1, t_2) \\ &= a_{d-1} \mathbb{E} \left[\int \int \int \int g(\mathbf{z}_1, \mathbf{x}_2) \mathbf{1}\{s_1 \leq t_1, \mathbf{b}_1 \in A_1, \delta(\mathbf{z}_1, \mathbf{b}_1) > s_1\} \Theta_{d-1}^+(\Xi, \mathrm{d}(\mathbf{z}_1, \mathbf{b}_1)) \mathrm{d}s_1 \right. \\ &\quad \left. \times \mathbf{1}\{d(\mathbf{x}_2) \in (0, t_2], \mathbf{u}(\mathbf{x}_2) \in A_2\} \mathcal{H}^d(\mathrm{d}\mathbf{x}_2) \right] \\ &= a_{d-1} \sum_{j=0}^{d-1} a_j \mathbb{E} \left[\int \int \int \int g(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 + s_2 \mathbf{b}_2) \mathbf{1}\{s_1 \leq t_1, \mathbf{b}_1 \in A_1, \delta(\mathbf{z}_1, \mathbf{b}_1) > s_1\} \mathbf{1}\{s_2 \leq t_2\} \right. \\ &\quad \left. \times \mathbf{1}\{\mathbf{b}_2 \in A_2, \delta(\mathbf{z}_2, \mathbf{b}_2) > s_2\} s_2^{d-j-1} \Theta_{d-1}^+(\Xi, \mathrm{d}(\mathbf{z}_1, \mathbf{b}_1)) \Theta_j^+(\Xi, \mathrm{d}(\mathbf{z}_2, \mathbf{b}_2)) \mathrm{d}s_1 \mathrm{d}s_2 \right] \\ &= a_{d-1} \sum_{j=0}^{d-1} a_j \int \int \int \int g(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 + s_2 \mathbf{b}_2) \mathbf{1}\{s_1 \leq t_1, \mathbf{b}_1 \in A_1, \rho_1 > s_1\} \mathbf{1}\{s_2 \leq t_2, \mathbf{b}_2 \in A_2, \rho_2 > s_2\} \\ &\quad \times s_2^{d-j-1} \Lambda_{d-1,j}(\mathrm{d}(\mathbf{z}_1, \mathbf{b}_1, \rho_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{b}_2, \rho_2)) \mathrm{d}s_1 \mathrm{d}s_2 \\ &= a_{d-1} \sum_{j=0}^{d-1} a_j \int \int \int \int g(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 + s_2 \mathbf{b}_2) \mathbf{1}\{s_1 \leq t_1, \mathbf{b}_1 \in A_1, \rho_1 > s_1\} \mathbf{1}\{s_2 \leq t_2, \mathbf{b}_2 \in A_2, \rho_2 > s_2\} \\ &\quad \times s_2^{d-j-1} G_{d-1,j}^+(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathrm{d}(\mathbf{b}_1, \rho_1, \mathbf{b}_2, \rho_2)) \Lambda_{d-1,j}^+(\mathrm{d}\mathbf{z}_1 \times S^{d-1} \times \mathrm{d}\mathbf{z}_2 \times S^{d-1}) \mathrm{d}s_1 \mathrm{d}s_2 \\ &= a_{d-1} \sum_{j=0}^{d-1} a_j \int \int \int \int g(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 + s_2 \mathbf{b}_2) \mathbf{1}\{s_1 \leq t_1\} \mathbf{1}\{s_2 \leq t_2, \mathbf{b}_2 \in A_2, \rho_2 > s_2\} s_2^{d-j-1} \\ &\quad \times G_{d-1,j}^+(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, A_1 \times (s_1, \infty] \times \mathrm{d}(\mathbf{b}_2, \rho_2)) \Lambda_{d-1,j}^+(\mathrm{d}\mathbf{z}_1 \times S^{d-1} \times \mathrm{d}\mathbf{z}_2 \times S^{d-1}) \mathrm{d}s_1 \mathrm{d}s_2. \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} &\int_0^{t_1} \int g(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 + s_2 \mathbf{b}_2) \mathbf{1}\{\mathbf{b}_2 \in A_2, \rho_2 > s_2\} G_{d-1,j}^+(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, A_1 \times (s_1, \infty] \times \mathrm{d}(\mathbf{b}_2, \rho_2)) \mathrm{d}s_1 \\ &= t_1 \int g(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 + s_2 \mathbf{b}_2) \mathbf{1}\{\mathbf{b}_2 \in A_2, \rho_2 > s_2\} G_{d-1,j}^+(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, A_1 \times (0, \infty] \times \mathrm{d}(\mathbf{b}_2, \rho_2)) \\ &\quad - \int_0^{t_1} \int g(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 + s_2 \mathbf{b}_2) \mathbf{1}\{\mathbf{b}_2 \in A_2, \rho_2 > s_2\} G_{d-1,j}^+(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, A_1 \times (0, s_1] \times \mathrm{d}(\mathbf{b}_2, \rho_2)) \mathrm{d}s_1 \end{aligned}$$

und

$$\left| \int_0^{t_1} \int g(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 + s_2 \mathbf{b}_2) \mathbf{1}\{\mathbf{b}_2 \in A_2, \rho_2 > s_2\} G_{d-1,j}^+(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, A_1 \times (0, s_1] \times d(\mathbf{b}_2, \rho_2)) ds_1 \right| \\ \leq t_1 \int |g(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 + s_2 \mathbf{b}_2)| G_{d-1,j}^+(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, A_1 \times (0, t_1] \times d(\mathbf{b}_2, \rho_2))$$

folgt unter Hinzunahme der Abschätzungen für R_1 und R_2 und unter Berücksichtigung von (2.32)

$$\left| \int \int g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) t_1^{-1} \bar{C}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) H_s^{(2)}(\mathbf{x}_1, t_1, A_1, \mathbf{x}_2, t_2, A_2) \mathcal{H}^d(d\mathbf{x}_2) \mathcal{H}^d(d\mathbf{x}_1) \right. \\ \left. - a_{d-1} \sum_{j=0}^{d-1} a_j \int \int \int g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 + s_2 \mathbf{b}_2) \mathbf{1}\{s_2 \leq t_2, \mathbf{b}_2 \in A_2, \rho_2 > s_2\} s_2^{d-j-1} \right. \\ \left. \times G_{d-1,j}^+(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, A_1 \times (0, \infty] \times d(\mathbf{b}_2, \rho_2)) \Lambda_{d-1,j}^+(d\mathbf{x}_1 \times S^{d-1} \times d\mathbf{x}_2 \times S^{d-1}) ds_2 \right| \\ \leq c_1 t_1 + \frac{|R_2(t_1, t_2)|}{t_1} \\ + a_{d-1} \sum_{j=0}^{d-1} a_j \int \int \int |g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 + s_2 \mathbf{b}_2)| \mathbf{1}\{s_2 \leq t_2, \mathbf{b}_2 \in A_2, \rho_2 > s_2\} s_2^{d-j-1} \\ \times G_{d-1,j}^+(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, A_1 \times (0, t_1] \times d(\mathbf{b}_2, \rho_2)) \Lambda_{d-1,j}^+(d\mathbf{x}_1 \times S^{d-1} \times d\mathbf{x}_2 \times S^{d-1}) ds_2 \\ \leq c_1 t_1 + \frac{|R_2(t_1, t_2)|}{t_1} + a_{d-1} \sum_{j=0}^{d-1} \frac{a_j t_2^{d-j}}{d-j} \|g\| \Lambda_{d-1,j}(U_1 \times S^{d-1} \times (0, t_1] \times \bar{U}_2 \times S^{d-1} \times (0, \infty])$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung konvergiert für $t_1 \downarrow 0$ gegen 0. Es verbleibt

$$a_{d-1} \sum_{j=0}^{d-1} a_j \int \int \int g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 + s_2 \mathbf{b}_2) \mathbf{1}\{\rho_2 > s_2, \mathbf{b}_2 \in A_2, s_2 \leq t_2\} s_2^{d-j-1} \\ \times G_{d-1,j}^+(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, A_1 \times (0, \infty] \times d(\mathbf{b}_2, \rho_2)) \Lambda_{d-1,j}^+(d\mathbf{x}_1 \times S^{d-1} \times d\mathbf{x}_2 \times S^{d-1}) ds_2 \\ = a_{d-1} \sum_{j=0}^{d-2} a_j \int \int \int g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 + s_2 \mathbf{b}_2) \mathbf{1}\{\rho_2 > s_2, \mathbf{b}_2 \in A_2, s_2 \leq t_2\} s_2^{d-j-1} \\ \times G_{d-1,j}^+(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, A_1 \times (0, \infty] \times d(\mathbf{b}_2, \rho_2)) \Lambda_{d-1,j}^+(d\mathbf{x}_1 \times S^{d-1} \times d\mathbf{x}_2 \times S^{d-1}) ds_2 \\ + a_{d-1}^2 \int \int \int (g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 + s_2 \mathbf{b}_2) - g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)) \mathbf{1}\{\rho_2 > s_2, \mathbf{b}_2 \in A_2, s_2 \leq t_2\} \\ \times G_{d-1,d-1}^+(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, A_1 \times (0, \infty] \times d(\mathbf{b}_2, \rho_2)) \Lambda_{d-1,d-1}^+(d\mathbf{x}_1 \times S^{d-1} \times d\mathbf{x}_2 \times S^{d-1}) ds_2 \\ + a_{d-1}^2 \int \int \int g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \mathbf{1}\{\rho_2 > s_2, \mathbf{b}_2 \in A_2, s_2 \leq t_2\} \\ \times G_{d-1,d-1}^+(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, A_1 \times (0, \infty] \times d(\mathbf{b}_2, \rho_2)) \Lambda_{d-1,d-1}^+(d\mathbf{x}_1 \times S^{d-1} \times d\mathbf{x}_2 \times S^{d-1}) ds_2 \\ =: \tilde{R}_1(t_2) + \tilde{R}_2(t_2) + \tilde{R}_3(t_2).$$

Es lässt sich wieder abschätzen

$$\begin{aligned} |\tilde{R}_1(t_2)| &\leq a_{d-1} \sum_{j=0}^{d-2} a_j \|g\| \Lambda_{d-1,j}^+(U_1 \times S^{d-1} \times \bar{U}_2 \times S^{d-1}) \frac{1}{d-j} t_2^{d-j} \\ &\leq \left(a_{d-1} \sum_{j=0}^{d-2} a_j \|g\| \Lambda_{d-1,j}^+(U_1 \times S^{d-1} \times \bar{U}_2 \times S^{d-1}) \frac{1}{d-j} \right) t_2^2 \\ &= c_2 t_2^2, \end{aligned}$$

wobei $c_2 < \infty$, da $\Lambda_{d-1,j}^+(\cdot \times S^{d-1} \times \cdot \times S^{d-1})$ lokal endlich ist.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Da g gleichmäßig stetig ist, gibt es wieder ein $t_\varepsilon \in (0, 1]$, so dass $|g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 + s_2 \mathbf{b}_2) - g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)| < \varepsilon$ für alle $s_2 \in (0, t_\varepsilon]$, $(\mathbf{x}_2, \mathbf{b}_2) \in \mathbb{R}^d \times S^{d-1}$ und $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^d$ gilt. Für alle $t_2 \in (0, t_\varepsilon]$ erhält man

$$\begin{aligned} |\tilde{R}_2(t_2)| &\leq \varepsilon a_{d-1}^2 \iint \mathbf{1}\{s_2 \leq t_2\} \mathbf{1}\{\mathbf{x}_1 \in U_1, \mathbf{x}_2 \in \bar{U}_2\} \Lambda_{d-1,d-1}^+(d\mathbf{x}_1 \times S^{d-1} \times d\mathbf{x}_2 \times S^{d-1}) ds_2 \\ &= \varepsilon a_{d-1}^2 \Lambda_{d-1,d-1}^+(U_1 \times S^{d-1} \times \bar{U}_2 \times S^{d-1}) t_2. \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt ist, gilt

$$\lim_{t_2 \downarrow 0} \frac{|\tilde{R}_2(t_2)|}{t_2} = 0.$$

Mit

$$\begin{aligned} &\int_0^{t_2} G_{d-1,d-1}^+(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, A_1 \times (0, \infty] \times A_2 \times (s_2, \infty]) ds_2 \\ &= t_2 G_{d-1,d-1}^+(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, A_1 \times (0, \infty] \times A_2 \times (0, \infty]) \\ &\quad - \int_0^{t_2} G_{d-1,d-1}^+(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, A_1 \times (0, \infty] \times A_2 \times (0, s_2]) ds_2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^{t_2} G_{d-1,d-1}^+(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, A_1 \times (0, \infty] \times A_2 \times (0, s_2]) ds_2 \right| \\ &\leq t_2 G_{d-1,d-1}^+(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, A_1 \times (0, \infty] \times A_2 \times (0, t_2]) \end{aligned}$$

folgt unter Hinzunahme der Abschätzungen für \tilde{R}_1 und \tilde{R}_2 und unter Berücksichtigung

von (2.32)

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{t_2} a_{d-1} \sum_{j=0}^{d-1} a_j \int \int \int g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 + s_2 \mathbf{b}_2) \mathbf{1}_{\{\rho_2 > s_2, s_2 \leq t_2\}} s_2^{d-j-1} \right. \\
& \quad \times G_{d-1,j}^+(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, A_1 \times (0, \infty] \times d(\mathbf{b}_2, \rho_2)) \Lambda_{d-1,j}^+(d\mathbf{x}_1 \times S^{d-1} \times d\mathbf{x}_2 \times S^{d-1}) d s_2 \\
& \quad \left. - a_{d-1}^2 \int g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \Lambda_{d-1,d-1}^+(d\mathbf{x}_1 \times A_1 \times d\mathbf{x}_2 \times A_2) \right| \\
& \leq c_2 t_2 + \frac{|\tilde{R}_2(t_2)|}{t_2} \\
& \quad + a_{d-1}^2 \int g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) G_{d-1,d-1}^+(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, A_1 \times (0, \infty] \times A_2 \times (0, t_2]) \\
& \quad \quad \times \Lambda_{d-1,d-1}^+(d\mathbf{x}_1 \times S^{d-1} \times d\mathbf{x}_2 \times S^{d-1}) \\
& \leq c_2 t_2 + \frac{|\tilde{R}_2(t_2)|}{t_2} + a_{d-1}^2 \|g\| \Lambda_{d-1,d-1}(U_1 \times A_1 \times (0, \infty] \times U_2 \times A_2 \times (0, t_2]).
\end{aligned}$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung konvergiert für $t_2 \downarrow 0$ gegen 0, womit die Behauptung gezeigt ist. \square

Die Aussage des Satzes 2.3 ist (in Analogie zu Remark 4.2 in Hug und Last, 2000) gleichbedeutend zur vagen Konvergenz (siehe Definition 30.1 in Bauer, 1992) des Maßes

$$(t_1 t_2)^{-1} \bar{C}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) H_s^{(2)}(\mathbf{x}_1, t_1, A_1, \mathbf{x}_2, t_2, A_2) \mathcal{H}^{2d}(d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2))$$

gegen das Maß

$$4\Lambda_{d-1,d-1}^+(d\mathbf{x}_1 \times A_1 \times d\mathbf{x}_2 \times A_2)$$

für $(t_1, t_2) \downarrow (0, 0)$.

Unter zusätzlichen Voraussetzungen erhält man nun für $H_s^{(2)}$ aus Satz 2.3 ein Ergebnis im Sinne von (1.8).

Satz 2.4. *Es sei Ξ eine zufälliges Keim-Korn-Modell mit Körnern aus \mathcal{K}^d . Die zugehörigen Momentenmaße $\Lambda_{ij}^+(\cdot \times S^{d-1} \times \cdot \times S^{d-1})$ seien lokal endlich. $\Lambda_{d-1,d-1}^+(\cdot \times S^{d-1} \times \cdot \times S^{d-1})$ sei absolut stetig bezüglich \mathcal{H}^{2d} mit Dichte $\lambda_{d-1,d-1}^+$. Es seien $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(S^{d-1})$. Es existiere $\frac{\partial}{\partial t_2} \Big|_{t_2=0+} \frac{\partial}{\partial t_1} \Big|_{t_1=0+} H_s^{(2)}(\mathbf{x}_1, t_1, A_1, \mathbf{x}_2, t_2, A_2)$ für \mathcal{H}^{2d} -fast alle $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. Dann gilt*

$$\bar{C}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \frac{\partial}{\partial t_2} \Big|_{t_2=0+} \frac{\partial}{\partial t_1} \Big|_{t_1=0+} H_s^{(2)}(\mathbf{x}_1, t_1, A_1, \mathbf{x}_2, t_2, A_2) = 4\lambda_{d-1,d-1}^+(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \mathcal{R}^{(2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, A_1, A_2) \quad (2.37)$$

für \mathcal{H}^{2d} -fast alle $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

Beweis. Es seien $g : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ eine stetige Funktion mit kompaktem Träger und abkürzend

$$h(t_1, t_2) := H_s^{(2)}(\mathbf{x}_1, t_1, A_1, \mathbf{x}_2, t_2, A_2).$$

Für alle $t_1 \geq 0$ gilt $h(t_1, 0) = 0$. Damit ist

$$\left. \frac{\partial}{\partial t_1} \right|_{t_1=0+} h(t_1, 0) = \lim_{t_1 \downarrow 0} \frac{h(t_1, 0) - h(0, 0)}{t_1} = 0.$$

Für die nachfolgende rechtsseitige partielle Ableitung nach t_2 an der Stelle $t_2 = 0+$ gilt daher

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial t_2} \right|_{t_2=0+} \left. \frac{\partial}{\partial t_1} \right|_{t_1=0+} h(t_1, t_2) &= \lim_{t_2 \downarrow 0} \frac{\left. \frac{\partial}{\partial t_1} \right|_{t_1=0+} h(t_1, t_2) - \left. \frac{\partial}{\partial t_1} \right|_{t_1=0+} h(t_1, 0)}{t_2} \\ &= \lim_{t_2 \downarrow 0} \frac{\left. \frac{\partial}{\partial t_1} \right|_{t_1=0+} h(t_1, t_2)}{t_2}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Wegen $h(0, t_2) = 0$ für beliebige t_2 gilt außerdem

$$\left. \frac{\partial}{\partial t_1} \right|_{t_1=0+} h(t_1, t_2) = \lim_{t_1 \downarrow 0} \frac{h(t_1, t_2) - h(0, t_2)}{t_1} = \lim_{t_1 \downarrow 0} \frac{h(t_1, t_2)}{t_1}.$$

Setzt man dies in (2.38) ein, folgt

$$\left. \frac{\partial}{\partial t_2} \right|_{t_2=0+} \left. \frac{\partial}{\partial t_1} \right|_{t_1=0+} h(t_1, t_2) = \lim_{t_2 \downarrow 0} \lim_{t_1 \downarrow 0} \frac{h(t_1, t_2)}{t_1 t_2}.$$

Die Differenzierbarkeitsvoraussetzung des Satzes bedeutet, dass der Grenzwert

$$\lim_{t_2 \downarrow 0} \lim_{t_1 \downarrow 0} \frac{h(t_1, t_2)}{t_1 t_2}$$

existiert. Daher gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ Zahlen $\delta_1, \delta_2 > 0$ derart, dass für alle t_1, t_2 mit $0 < t_1 < \delta_1, 0 < t_2 < \delta_2$,

$$\left| \frac{h(t_1, t_2)}{t_1 t_2} - \left. \frac{\partial}{\partial t_2} \right|_{t_2=0+} \left. \frac{\partial}{\partial t_1} \right|_{t_1=0+} h(t_1, t_2) \right| < \varepsilon$$

gilt. Wegen $\overline{C}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \leq 1$ ist damit $(t_1 t_2)^{-1} g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \overline{C}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) h(t_1, t_2)$ für $0 < t_1 < \delta_1, 0 < t_2 < \delta_2$ gleichmäßig durch

$$g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \left(\left. \frac{\partial}{\partial t_2} \right|_{t_2=0+} \left. \frac{\partial}{\partial t_1} \right|_{t_1=0+} h(t_1, t_2) + \varepsilon \right)$$

beschränkt. Die Integrierbarkeit von g sichert die Integrierbarkeit der Schranke. Dann folgt aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz (siehe z. B. Bauer, 1992, Satz 15.6),

dass es möglich ist, den Grenzübergang mit der Integration zu vertauschen. Aus Satz 2.3 ergibt sich daher unter Berücksichtigung von (2.33)

$$\begin{aligned} & \int \int g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \overline{C}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \left. \frac{\partial}{\partial t_2} \right|_{t_2=0+} \left. \frac{\partial}{\partial t_1} \right|_{t_1=0+} H_s^{(2)}(\mathbf{x}_1, t_1, A_1, \mathbf{x}_2, t_2, A_2) \mathcal{H}^{2d}(d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)) \\ &= 4 \int \int g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \lambda_{d-1, d-1}^+(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \mathcal{R}^{(2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, A_1, A_2) \mathcal{H}^{2d}(d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)), \end{aligned}$$

und die Behauptung folgt aus der Beliebigkeit von g . \square

Aufgrund der durch Satz 2.2 festgelegten Normierung der Krümmungsmaße ist nun die Aussage von Satz 2.4 sehr einfach für die zweite Produktdichte $\varrho_S^{(2)}$ des zufälligen Maßes S_Ξ formulierbar.

Folgerung 2.1. *Es seien die Voraussetzungen des Satzes 2.4 erfüllt.*

Für \mathcal{H}^{2d} -f. a. $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ gilt

$$\overline{C}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \left. \frac{\partial}{\partial t_2} \right|_{t_2=0+} \left. \frac{\partial}{\partial t_1} \right|_{t_1=0+} H_s^{(2)}(\mathbf{x}_1, t_1, \mathbf{x}_2, t_2) = \varrho_S^{(2)}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2).$$

Beweis. Man setze $A_1 := S^{d-1}$ und $A_2 := S^{d-1}$. Mit Theorem 3.9 in Hug und Last (2000) gilt für die additive Fortsetzung C_{d-1} und die nichtnegative Fortsetzung C_{d-1}^+ für $K \in \mathcal{S}^d$ $C_{d-1}(K, \cdot) = C_{d-1}^+(K, \cdot)$. Aufgrund der Definition (1.6) von S_Ξ und der durch Satz 2.2 vorgegebenen Normierung von C_{d-1}^+ ist dann $S_\Xi = 2C_{d-1}^+(\Xi, \cdot)$ \mathcal{P} -f. s. \square

Die Voraussetzungen in Satz 2.4 sind in der vorliegenden Form nur schwer nachzuprüfen. Die Aufgabe der folgenden Abschnitte ist es daher zu klären, welche hinreichenden Bedingungen an den der zufälligen Menge Ξ zugrunde liegenden markierten Punktprozess gestellt werden müssen, damit diese Voraussetzungen an Ξ erfüllt sind.

2.3 Lokale Endlichkeit und Existenz einer Dichte

In diesem Abschnitt wird untersucht, unter welchen Bedingungen die gemischten Momentenmaße zweiter Ordnung Λ_{ij}^+ eines Keim-Korn-Modells lokal endlich sind und in welchen Fällen $\Lambda_{d-1,d-1}^+$ eine Dichte bezüglich \mathcal{H}^{2d} besitzt. Ähnlich den Ergebnissen für die entsprechenden Momentenmaße erster Ordnung (Fallert, 1996; Hug und Last, 2000) sind dies Bedingungen an das Intensitätsmaß und das zweite faktorielle Momentenmaß des zugrunde liegenden Punktprozesses.

Satz 2.5. *Es seien $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(S^{d-1})$. Für einen Punktprozess Ψ in $\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d$ seien die Voraussetzungen 2.3 und 2.4 (vgl. S. 8) erfüllt. Dann sind für alle $i, j = 0, \dots, d-1$ die gemischten Momentenmaße zweiter Ordnung $\Lambda_{ij}^+(\cdot \times A_1 \times \cdot \times A_2)$ für das Keim-Korn-Modell $\Xi = T(\Psi)$ lokal endlich.*

Beweis. Sei $B \subset \mathbb{R}^{2d}$ kompakt. Dann gibt es kompakte Mengen $B_1, B_2 \subset \mathbb{R}^d$ mit $B \subseteq B_1 \times B_2$, und wegen $A_1, A_2 \subseteq S^{d-1}$ genügt es, $\Lambda_{ij}^+(B_1 \times S^{d-1} \times B_2 \times S^{d-1}) < \infty$ zu zeigen. Aufgrund von Lemma 2.1 in Fallert (1996) existieren Konstanten c_{i,d,B_1} und c_{j,d,B_2} , die nur von i, d und B_1 bzw. nur von j, d und B_2 abhängig sind, so dass die Abschätzungen

$$\Theta_i(K_1, B_1 \times S^{d-1}) \leq c_{i,d,B_1} \text{ und } \Theta_j(K_2, B_2 \times S^{d-1}) \leq c_{j,d,B_2}$$

für alle $K_1, K_2 \in \mathcal{K}^d$ richtig sind. Da für $\psi \in N_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d}$

$$\Theta_j^+(T(\psi), \cdot) \leq \sum_{(\mathbf{x}, K) \in \psi} \Theta_j(\mathbf{x} + K, \cdot)$$

gilt (siehe z. B. Beweis zu Proposition 4.10 in Hug und Last, 2000) und für $K \in \mathcal{K}^d$ der Träger von $C_j(K, \cdot)$ in K enthalten ist, folgt

$$\begin{aligned} & \Lambda_{ij}^+(B_1 \times S^{d-1} \times B_2 \times S^{d-1}) \\ &= \mathbb{E} [C_i^+(T(\Psi), B_1) C_j^+(T(\Psi), B_2)] \\ &\leq \mathbb{E} \left[\sum_{(\mathbf{x}_1, K_1) \in \Psi} \sum_{(\mathbf{x}_2, K_2) \in \Psi} C_i(\mathbf{x}_1 + K_1, B_1) C_j(\mathbf{x}_2 + K_2, B_2) \right] \\ &\leq c_{i,d,B_1} c_{j,d,B_2} \mathbb{E} \left[\sum_{(\mathbf{x}_1, K_1) \in \Psi} \sum_{(\mathbf{x}_2, K_2) \in \Psi} \mathbf{1}\{(\mathbf{x}_1 + K_1) \cap B_1 \neq \emptyset\} \mathbf{1}\{(\mathbf{x}_2 + K_2) \cap B_2 \neq \emptyset\} \right] \\ &= c_{i,d,B_1} c_{j,d,B_2} \int \mathbf{1}\{(\mathbf{x}_1 + K_1) \cap B_1 \neq \emptyset\} \mathbf{1}\{(\mathbf{x}_2 + K_2) \cap B_2 \neq \emptyset\} \alpha_\Psi^{(2)}(d(\mathbf{x}_1, K_1, \mathbf{x}_2, K_2)) \\ &\quad + c_{i,d,B_1} c_{j,d,B_2} \int \mathbf{1}\{(\mathbf{x} + K) \cap (B_1 \cap B_2) \neq \emptyset\} \alpha_\Psi(d(\mathbf{x}, K)) \\ &< \infty \end{aligned}$$

wegen der Voraussetzungen 2.3 und 2.4 und der Kompaktheit von $B_1 \cap B_2$. \square

Satz 2.6. *Es seien $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(S^{d-1})$. Für einen Punktprozess Ψ in $\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d$ mit Verteilung P seien die Voraussetzungen 2.1 und 2.2 (vgl. S. 8) erfüllt. Sei Q auf der Menge der strikt konvexen Körper konzentriert. Dann ist das Maß $\Lambda_{d-1, d-1}^+(\cdot \times A_1, \cdot \times A_2)$ für das Keim-Korn-Modell $\Xi = T(\Psi)$ absolut stetig bezüglich \mathcal{H}^{2d} .*

Beweis. Voraussetzung 2.2 bedeutet insbesondere, dass $\alpha_\Psi^{(2)}$ eine Dichte bezüglich eines σ -endlichen Maßes auf $\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d$ (nämlich $\mathcal{H}^{2d} \otimes Q_2$) besitzt. Mit

$$\Xi_n := \xi_n + Z_n \quad \text{und} \quad \Xi^{(n)} := T(\Psi \setminus \delta_{(\xi_n, Z_n)}), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.39)$$

aus der Darstellung (1.1) gilt damit nach Proposition 4.9 in Hug und Last (2000)

$$\Theta_{d-1}^+(\Xi, \cdot) = \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_{d-1}(\Xi_n, \cdot \cap ((\mathbb{R}^d \setminus \Xi^{(n)}) \times S^{d-1})), \quad \mathcal{P}\text{-f. s.} \quad (2.40)$$

Sei $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{2d})$, und sei $\mu_{A_1, A_2}(\cdot, \cdot) := \Lambda_{d-1, d-1}^+(\cdot \times A_1, \cdot \times A_2)$. Dann ist unter zweimaliger Benutzung von (2.40) sowie anschließender Anwendung von (2.9) und (2.10) zunächst folgende Zerlegung möglich:

$$\begin{aligned} & \mu_{A_1, A_2}(D) \\ &= \mathbb{E} \left[\int \int \mathbf{1}\{(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) \in D\} \mathbf{1}\{\mathbf{b}_1 \in A_1\} \mathbf{1}\{\mathbf{b}_2 \in A_2\} \Theta_{d-1}^+(\Xi, d(\mathbf{z}_1, \mathbf{b}_1)) \Theta_{d-1}^+(\Xi, d(\mathbf{z}_2, \mathbf{b}_2)) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \int \int \mathbf{1}\{(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) \in D\} \mathbf{1}\{\mathbf{b}_1 \in A_1\} \mathbf{1}\{\mathbf{b}_2 \in A_2\} \mathbf{1}\{\mathbf{z}_1 \notin \Xi^{(n)}\} \mathbf{1}\{\mathbf{z}_2 \notin \Xi^{(m)}\} \right. \\ & \quad \left. \times \Theta_{d-1}(\Xi_n, d(\mathbf{z}_1, \mathbf{b}_1)) \Theta_{d-1}(\Xi_m, d(\mathbf{z}_2, \mathbf{b}_2)) \right] \\ &= \int \sum_{(\mathbf{x}_1, K_1) \in \psi} \sum_{(\mathbf{x}_2, K_2) \in \psi} \int \int \mathbf{1}\{(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) \in D\} \mathbf{1}\{\mathbf{b}_1 \in A_1\} \mathbf{1}\{\mathbf{b}_2 \in A_2\} \mathbf{1}\{\mathbf{z}_1 \notin T(\psi \setminus \delta_{(\mathbf{x}_1, K_1)})\} \\ & \quad \times \mathbf{1}\{\mathbf{z}_2 \notin T(\psi \setminus \delta_{(\mathbf{x}_2, K_2)})\} \Theta_{d-1}(\mathbf{x}_1 + K_1, d(\mathbf{z}_1, \mathbf{b}_1)) \Theta_{d-1}(\mathbf{x}_2 + K_2, d(\mathbf{z}_2, \mathbf{b}_2)) P(d\psi) \\ &= \int \sum_{\substack{(\mathbf{x}_1, K_1), (\mathbf{x}_2, K_2) \in \psi \\ \neq}} \int \int \mathbf{1}\{(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) \in D\} \mathbf{1}\{\mathbf{b}_1 \in A_1\} \mathbf{1}\{\mathbf{b}_2 \in A_2\} \mathbf{1}\{\mathbf{z}_1 \notin T(\psi \setminus \delta_{(\mathbf{x}_1, K_1)})\} \\ & \quad \times \mathbf{1}\{\mathbf{z}_2 \notin T(\psi \setminus \delta_{(\mathbf{x}_2, K_2)})\} \Theta_{d-1}(\mathbf{x}_1 + K_1, d(\mathbf{z}_1, \mathbf{b}_1)) \Theta_{d-1}(\mathbf{x}_2 + K_2, d(\mathbf{z}_2, \mathbf{b}_2)) P(d\psi) \\ &+ \int \sum_{(\mathbf{x}, K) \in \psi} \int \int \mathbf{1}\{(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) \in D\} \mathbf{1}\{\mathbf{b}_1 \in A_1\} \mathbf{1}\{\mathbf{b}_2 \in A_2\} \mathbf{1}\{\mathbf{z}_1 \notin T(\psi \setminus \delta_{(\mathbf{x}, K)})\} \\ & \quad \times \mathbf{1}\{\mathbf{z}_2 \notin T(\psi \setminus \delta_{(\mathbf{x}, K)})\} \Theta_{d-1}(\mathbf{x} + K, d(\mathbf{z}_1, \mathbf{b}_1)) \Theta_{d-1}(\mathbf{x} + K, d(\mathbf{z}_2, \mathbf{b}_2)) P(d\psi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int \int \int \int \mathbf{1}\{(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) \in D\} \mathbf{1}\{\mathbf{b}_1 \in A_1\} \mathbf{1}\{\mathbf{b}_2 \in A_2\} \mathbf{1}\{\mathbf{z}_1 \notin T(\psi + \delta_{(\mathbf{x}_2, K_2)})\} \\
&\quad \times \mathbf{1}\{\mathbf{z}_2 \notin T(\psi + \delta_{(\mathbf{x}_1, K_1)})\} \Theta_{d-1}(\mathbf{x}_1 + K_1, d(\mathbf{z}_1, \mathbf{b}_1)) \Theta_{d-1}(\mathbf{x}_1 + K_2, d(\mathbf{z}_2, \mathbf{b}_2)) \\
&\quad \times P_{(\mathbf{x}_1, K_1), (\mathbf{x}_2, K_2)}^! (d\psi) \alpha_{\Psi}^{(2)}(d(\mathbf{x}_1, K_1, \mathbf{x}_2, K_2)) \\
&+ \int \int \int \int \mathbf{1}\{(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) \in D\} \mathbf{1}\{\mathbf{b}_1 \in A_1\} \mathbf{1}\{\mathbf{b}_2 \in A_2\} \mathbf{1}\{\mathbf{z}_1 \notin T(\psi)\} \mathbf{1}\{\mathbf{z}_2 \notin T(\psi)\} \\
&\quad \times \Theta_{d-1}(\mathbf{x} + K, d(\mathbf{z}_1, \mathbf{b}_1)) \Theta_{d-1}(\mathbf{x} + K, d(\mathbf{z}_2, \mathbf{b}_2)) P_{(\mathbf{x}, K)}^! (d\psi) \alpha_{\Psi}(d(\mathbf{x}, K)) \\
&=: \mu_{A_1, A_2}^{(2)}(D) + \mu_{A_1, A_2}^{(1)}(D)
\end{aligned}$$

Für den Anteil $\mu_{A_1, A_2}^{(2)}$ gilt mit (2.4) nach Anwendung des Satzes von Fubini sowie der Substitutionen $(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) \mapsto (\mathbf{z}_1 + \mathbf{x}_1, \mathbf{z}_2 + \mathbf{x}_2)$ und $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \mapsto (\mathbf{x}_1 - \mathbf{z}_1, \mathbf{x}_2 - \mathbf{z}_2)$

$$\begin{aligned}
&\mu_{A_1, A_2}^{(2)}(D) \\
&= \int \int \int \int \int \int \mathbf{1}\{(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) \in D\} \mathbf{1}\{\mathbf{b}_1 \in A_1\} \mathbf{1}\{\mathbf{b}_2 \in A_2\} \mathbf{1}\{\mathbf{z}_1 \notin T(\psi)\} \mathbf{1}\{\mathbf{z}_2 \notin T(\psi)\} \\
&\quad \times \mathbf{1}\{\mathbf{z}_1 \notin \mathbf{x}_2 + K_2\} \mathbf{1}\{\mathbf{z}_2 \notin \mathbf{x}_1 + K_1\} \Theta_{d-1}(\mathbf{x}_1 + K_1, d(\mathbf{z}_1, \mathbf{b}_1)) \Theta_{d-1}(\mathbf{x}_2 + K_2, d(\mathbf{z}_2, \mathbf{b}_2)) \\
&\quad \times P_{(\mathbf{x}_1, K_1), (\mathbf{x}_2, K_2)}^! (d\psi) \varrho^{(2)}(\mathbf{x}_1, K_1, \mathbf{x}_2, K_2) Q_2(d(K_1, K_2)) \mathcal{H}^d(d\mathbf{x}_1) \mathcal{H}^d(d\mathbf{x}_2) \\
&= \int \int \int \int \int \mathbf{1}\{(\mathbf{z}_1 + \mathbf{x}_1, \mathbf{z}_2 + \mathbf{x}_2) \in D\} \mathbf{1}\{\mathbf{b}_1 \in A_1\} \mathbf{1}\{\mathbf{b}_2 \in A_2\} \mathbf{1}\{\mathbf{z}_1 + \mathbf{x}_1 \notin T(\psi)\} \\
&\quad \times \mathbf{1}\{\mathbf{z}_2 + \mathbf{x}_2 \notin T(\psi)\} \mathbf{1}\{\mathbf{z}_1 + \mathbf{x}_1 \notin \mathbf{x}_2 + K_2\} \mathbf{1}\{\mathbf{z}_2 + \mathbf{x}_2 \notin \mathbf{x}_1 + K_1\} \Theta_{d-1}(K_1, d(\mathbf{z}_1, \mathbf{b}_1)) \\
&\quad \times \Theta_{d-1}(K_2, d(\mathbf{z}_2, \mathbf{b}_2)) P_{(\mathbf{x}_1, K_1), (\mathbf{x}_2, K_2)}^! (d\psi) \varrho^{(2)}(\mathbf{x}_1, K_1, \mathbf{x}_2, K_2) Q_2(d(K_1, K_2)) \mathcal{H}^{2d}(d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)) \\
&= \int \int \int \int \int \mathbf{1}\{(\mathbf{z}_1 + \mathbf{x}_1, \mathbf{z}_2 + \mathbf{x}_2) \in D\} \mathbf{1}\{\mathbf{b}_1 \in A_1\} \mathbf{1}\{\mathbf{b}_2 \in A_2\} \mathbf{1}\{\mathbf{z}_1 + \mathbf{x}_1 \notin T(\psi)\} \\
&\quad \times \mathbf{1}\{\mathbf{z}_2 + \mathbf{x}_2 \notin T(\psi)\} \mathbf{1}\{\mathbf{z}_1 + \mathbf{x}_1 \notin \mathbf{x}_2 + K_2\} \mathbf{1}\{\mathbf{z}_2 + \mathbf{x}_2 \notin \mathbf{x}_1 + K_1\} P_{(\mathbf{x}_1, K_1), (\mathbf{x}_2, K_2)}^! (d\psi) \\
&\quad \times \varrho^{(2)}(\mathbf{x}_1, K_1, \mathbf{x}_2, K_2) \Theta_{d-1}(K_1, d(\mathbf{z}_1, \mathbf{b}_1)) \Theta_{d-1}(K_2, d(\mathbf{z}_2, \mathbf{b}_2)) Q_2(d(K_1, K_2)) \mathcal{H}^{2d}(d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)) \\
&= \int \int \int \int \int \mathbf{1}\{(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in D\} \mathbf{1}\{\mathbf{b}_1 \in A_1\} \mathbf{1}\{\mathbf{b}_2 \in A_2\} \mathbf{1}\{\mathbf{x}_1 \notin T(\psi)\} \mathbf{1}\{\mathbf{x}_2 \notin T(\psi)\} \\
&\quad \times \mathbf{1}\{\mathbf{x}_1 \notin \mathbf{x}_2 - \mathbf{z}_2 + K_2\} \mathbf{1}\{\mathbf{x}_2 \notin \mathbf{x}_1 - \mathbf{z}_1 + K_1\} P_{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{z}_1, K_1), (\mathbf{x}_2 - \mathbf{z}_2, K_2)}^! (d\psi) \\
&\quad \times \varrho^{(2)}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{z}_1, K_1, \mathbf{x}_2 - \mathbf{z}_2, K_2) \Theta_{d-1}(K_1, d(\mathbf{z}_1, \mathbf{b}_1)) \Theta_{d-1}(K_2, d(\mathbf{z}_2, \mathbf{b}_2)) Q_2(d(K_1, K_2)) \\
&\quad \times \mathcal{H}^{2d}(d(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2))
\end{aligned}$$

$\mu_{A_1, A_2}^{(2)}$ ist folglich bezüglich \mathcal{H}^{2d} absolut stetig mit der Dichte

$$\begin{aligned} & \int \int \int \left(\int \mathbf{1}\{\mathbf{x}_1 \notin T(\psi)\} \mathbf{1}\{\mathbf{x}_2 \notin T(\psi)\} P_{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{z}_1, K_1), (\mathbf{x}_2 - \mathbf{z}_2, K_2)}^! (d\psi) \right) \\ & \times \mathbf{1}\{\mathbf{b}_1 \in A_1\} \mathbf{1}\{\mathbf{b}_2 \in A_2\} \mathbf{1}\{\mathbf{x}_1 \notin \mathbf{x}_2 - \mathbf{z}_2 + K_2\} \mathbf{1}\{\mathbf{x}_2 \notin \mathbf{x}_1 - \mathbf{z}_1 + K_1\} \\ & \times \varrho^{(2)}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{z}_1, K_1, \mathbf{x}_2 - \mathbf{z}_2, K_2) \Theta_{d-1}(K_1, d(\mathbf{z}_1, \mathbf{b}_1)) \Theta_{d-1}(K_2, d(\mathbf{z}_2, \mathbf{b}_2)) Q_2(d(K_1, K_2)). \end{aligned}$$

Für den Nachweis der absoluten Stetigkeit von $\mu_{A_1, A_2}^{(1)}$ wird nun die zusätzliche Voraussetzung an Q benötigt, positive Masse nur auf der Menge der strikt konvexen Körper zu haben. Es gilt zunächst

$$\begin{aligned} & \mu_{A_1, A_2}^{(1)}(D) \\ & = \int \int \int \int \int \mathbf{1}\{(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) \in D\} \mathbf{1}\{\mathbf{b}_1 \in A_1\} \mathbf{1}\{\mathbf{b}_2 \in A_2\} \mathbf{1}\{\mathbf{z}_1 \notin T(\psi)\} \mathbf{1}\{\mathbf{z}_2 \notin T(\psi)\} \\ & \quad \times \Theta_{d-1}(\mathbf{x} + K, d(\mathbf{z}_1, \mathbf{b}_1)) \Theta_{d-1}(\mathbf{x} + K, d(\mathbf{z}_2, \mathbf{b}_2)) P_{(\mathbf{x}, K)}^! (d\psi) \varrho(\mathbf{x}, K) \mathcal{H}^d(d\mathbf{x}) Q(dK) \\ & = \int \int \int \int \int \mathbf{1}\{(\mathbf{z}_1 + \mathbf{x}, \mathbf{z}_2 + \mathbf{x}) \in D\} \mathbf{1}\{\mathbf{b}_1 \in A_1\} \mathbf{1}\{\mathbf{b}_2 \in A_2\} \mathbf{1}\{\mathbf{z}_1 + \mathbf{x} \notin T(\psi)\} \\ & \quad \times \mathbf{1}\{\mathbf{z}_2 + \mathbf{x} \notin T(\psi)\} \Theta_{d-1}(K, d(\mathbf{z}_1, \mathbf{b}_1)) \Theta_{d-1}(K, d(\mathbf{z}_2, \mathbf{b}_2)) P_{(\mathbf{x}, K)}^! (d\psi) \varrho(\mathbf{x}, K) \\ & \quad \times \mathcal{H}^d(d\mathbf{x}) Q(dK) \\ & = \int \int \int \int \int \mathbf{1}\{(\mathbf{x}, \mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1 + \mathbf{x}) \in D\} \mathbf{1}\{\mathbf{b}_1 \in A_1\} \mathbf{1}\{\mathbf{b}_2 \in A_2\} \mathbf{1}\{\mathbf{x} \notin T(\psi)\} \\ & \quad \times \mathbf{1}\{\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1 + \mathbf{x} \notin T(\psi)\} P_{(\mathbf{x} - \mathbf{z}_1, K)}^! (d\psi) \varrho(\mathbf{x} - \mathbf{z}_1, K) \Theta_{d-1}(K, d(\mathbf{z}_1, \mathbf{b}_1)) \\ & \quad \times \Theta_{d-1}(K, d(\mathbf{z}_2, \mathbf{b}_2)) \mathcal{H}^d(d\mathbf{x}) Q(dK) \end{aligned} \tag{2.41}$$

nach den Substitutionen $(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) \mapsto (\mathbf{z}_1 + \mathbf{x}, \mathbf{z}_2 + \mathbf{x})$ und $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} - \mathbf{z}_1$.

Sei nun D mit $\mu_{A_1, A_2}^{(1)}(D) > 0$ gewählt. Dann ist auch

$$\int \int \int \int \mathbf{1}\{(\mathbf{x}, \mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1 + \mathbf{x}) \in D\} C_{d-1}(K, d\mathbf{z}_1) C_{d-1}(K, d\mathbf{z}_2) \mathcal{H}^d(d\mathbf{x}) Q(dK) > 0. \tag{2.42}$$

Unter den Voraussetzungen des Satzes ist nun zu zeigen, dass aus (2.42) auch $\mathcal{H}^{2d}(D) > 0$ und damit die absolute Stetigkeit von $\mu_{A_1, A_2}^{(1)}$ bezüglich \mathcal{H}^{2d} folgt. Da die Abbildung $M : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}^{2d}$ mit $M(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y} - \mathbf{x})$ umkehrbar eindeutig (und damit dimensionserhaltend) ist, ist (2.42) äquivalent zu

$$\int \int \int \int \mathbf{1}\{(\mathbf{x}, \mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1) \in M(D)\} C_{d-1}(K, d\mathbf{z}_1) C_{d-1}(K, d\mathbf{z}_2) \mathcal{H}^d(d\mathbf{x}) Q(dK) > 0.$$

Hieraus folgt, dass es eine Borel-Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ mit $\mathcal{H}^d(A) > 0$ gibt, so dass für alle $\mathbf{x} \in A$ für die (Borel-messbaren) Schnittmengen $B_{\mathbf{x}} := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in M(D)\}$

$$\int \int \int \mathbf{1}\{\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1 \in B_{\mathbf{x}}\} C_{d-1}(K, d\mathbf{z}_1) C_{d-1}(K, d\mathbf{z}_2) Q(dK) > 0 \quad (2.43)$$

gilt. Damit genügt es zu zeigen, dass aus (2.43) $\mathcal{H}^d(B_{\mathbf{x}}) > 0$ folgt, da in diesem Fall

$$0 < \int_A \mathcal{H}^d(B_{\mathbf{x}}) \mathcal{H}^d(d\mathbf{x}) \leq \mathcal{H}^{2d}(M(D))$$

gilt. Aus (2.43) folgt, dass es eine messbare Menge $\mathcal{C} \subset \mathcal{K}^d$ mit $Q(\mathcal{C}) > 0$ gibt, so dass für alle $K \in \mathcal{C}$ jeweils Mengen $Z_1(K), Z_2(K) \subseteq \partial K$ existieren, für die $C_{d-1}(K, Z_1(K)) > 0$ bzw. $C_{d-1}(K, Z_2(K)) > 0$ und $Z_2(K) \oplus \check{Z}_1(K) \subseteq B_{\mathbf{x}}$ gilt. Nach Voraussetzung sind die Körper K (fast sicher) strikt konvex, weshalb $\mathcal{H}^d(Z_2(K) \oplus \check{Z}_1(K)) > 0$ und damit auch $\mathcal{H}^d(B_{\mathbf{x}}) > 0$ gilt. \square

Auch der folgende Satz gibt ein hinreichendes Kriterium für die Existenz einer Dichte von $\Lambda_{d-1, d-1}^+$ bezüglich \mathcal{H}^{2d} . Die Voraussetzung der strikten Konvexität der Körner in Satz 2.6 wird hier durch die Voraussetzung der Drehungsinvarianz von Q ersetzt.

Satz 2.7. *Es seien $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(S^{d-1})$. Für einen Punktprozess Ψ in $\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d$ mit Verteilung P seien die Voraussetzungen 2.1 und 2.2 (vgl. S. 8) erfüllt. Sei Q drehungsinvariant. Dann ist das Maß $\Lambda_{d-1, d-1}^+(\cdot \times A_1, \cdot \times A_2)$ für das Keim-Korn-Modell $\Xi = T(\Psi)$ absolut stetig bezüglich \mathcal{H}^{2d} .*

Beweis. Der Beweis ist weitgehend identisch zu jenem von Satz 2.6. Es bleibt zu zeigen, dass nun unter der Voraussetzung der Drehungsinvarianz von Q aus

$$\int \int \int \mathbf{1}\{\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1 \in B_{\mathbf{x}}\} C_{d-1}(K, d\mathbf{z}_1) C_{d-1}(K, d\mathbf{z}_2) Q(dK) > 0 \quad (2.44)$$

$\mathcal{H}^d(B_{\mathbf{x}}) > 0$ folgt.

Unter Verwendung des invarianten Wahrscheinlichkeitsmaßes ν auf SO_d folgt mit der Drehungsinvarianz von Q aus (2.44)

$$\int \int \int \int \mathbf{1}\{\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1 \in B_{\mathbf{x}}\} C_{d-1}(\vartheta K, d\mathbf{z}_1) C_{d-1}(\vartheta K, d\mathbf{z}_2) Q(dK) \nu(d\vartheta) > 0 \quad (2.45)$$

und nach der Substitution $(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2) \mapsto (\vartheta \mathbf{z}_1, \vartheta \mathbf{z}_2)$ mit der Eigenschaft (2.23) und dem Satz von Fubini auch

$$\int \int \int \int \mathbf{1}\{\vartheta(\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1) \in B_{\mathbf{x}}\} \nu(d\vartheta) C_{d-1}(K, d\mathbf{z}_1) C_{d-1}(K, d\mathbf{z}_2) Q(dK) > 0. \quad (2.46)$$

Es gibt folglich eine messbare Menge $\mathcal{C} \subset \mathcal{K}^d$ mit $Q(\mathcal{C}) > 0$ und eine messbare Menge $\Theta \subset SO_d$ mit $\nu(\Theta) > 0$, so dass für alle $K \in \mathcal{C}$ Mengen $Z_1(K), Z_2(K) \subset \partial K$ mit

$C_{d-1}(K, Z_1(K)) > 0$ und $C_{d-1}(K, Z_2(K)) > 0$ existieren, für die für alle $\vartheta \in \Theta$ die Inklusion $\vartheta(Z_2(K) \oplus \check{Z}_1(K)) \subseteq B_{\mathbf{x}}$ gilt. Dabei kann o. B. d. A. angenommen werden, dass $Z_1(K)$ und $Z_2(K)$ zusammenhängend sind. Wenn es parallele Hyperebenen E_1 und E_2 mit $C_{d-1}(K, Z_1(K)) = C_{d-1}(K, Z_1(K) \cap E_1)$ bzw. $C_{d-1}(K, Z_2(K)) = C_{d-1}(K, Z_2(K) \cap E_2)$ gibt, folgt, da $Z_2(K) \oplus \check{Z}_1(K)$ selbst nicht d -dimensional sein muss, aber aus

$$\mathcal{H}^d \left(\bigcup_{\vartheta \in \Theta} \vartheta(Z_2(K) \oplus \check{Z}_1(K)) \right) > 0$$

auch $\mathcal{H}^d(B_{\mathbf{x}}) > 0$. Andernfalls liegt ein Fall wie im Beweis zu Satz 2.6 vor, und es gilt bereits $\mathcal{H}^d(Z_2(K) \oplus \check{Z}_1(K)) > 0$. \square

Dass auf die Voraussetzungen an das Wahrscheinlichkeitsmaß Q in den Sätzen 2.6 und 2.7 nicht vollständig verzichtet werden kann, zeigt folgendes Beispiel. Denkbar ist jedoch eine Abschwächung dieser Voraussetzungen, vgl. auch die Diskussion in Abschnitt 2.7.

Beispiel 2.1. Sei Ψ ein stationärer Poisson-Prozess in $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{K}^2$ mit Intensität $0 < \lambda < \infty$. Das typische Korn sei ein festes achsenparalleles Rechteck $K_0 = [-a, a] \times [-b, b]$ mit $a, b > 0$, d. h., $Q = \delta_{K_0}$. Sei nun

$$D = \{(x_1, x_2, x_1 + x_3, x_2) \in \mathbb{R}^4 : (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\}$$

gewählt. D ist eine Hyperebene in \mathbb{R}^4 und hat folglich \mathcal{H}^4 -Maß Null. Für das Maß $\mu_{S^1, S^1}^{(1)}$ der Menge D gilt gemäß (2.41) im Beweis zu Satz 2.6 mit der Eigenschaft (2.11) des Poisson-Prozesses in diesem Fall aber

$$\begin{aligned} & \mu_{S^1, S^1}^{(1)}(D) \\ &= \lambda \int \int \int \mathbf{1}\{(\mathbf{x}, \mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1 + \mathbf{x}) \in D\} \bar{C}(\mathbf{x}, \mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1 + \mathbf{x}) C_{d-1}(K_0, d\mathbf{z}_1) C_{d-1}(K_0, d\mathbf{z}_2) \mathcal{H}^d(d\mathbf{x}) \\ &= \lambda \int \int \int \mathbf{1}\{(\mathbf{x}, \mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1) \in \mathbb{R}^3 \times \{0\}\} \bar{C}(\mathbf{x}, \mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1 + \mathbf{x}) C_{d-1}(K_0, d\mathbf{z}_1) C_{d-1}(K_0, d\mathbf{z}_2) \mathcal{H}^d(d\mathbf{x}) \\ &> 0, \end{aligned} \tag{2.47}$$

da für alle \mathbf{z}_1 und \mathbf{z}_2 aus der Kante $[-a, a] \times \{b\}$ von K_0 $\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1 \in [-2a, 2a] \times \{0\} \subset \mathbb{R} \times \{0\}$ gilt. Daher sind sowohl $\mu_{S^1, S^1}^{(1)}$ als auch $\Lambda_{1,1}^+(\cdot \times S^1 \times \cdot \times S^1)$ nicht absolut stetig bezüglich \mathcal{H}^4 .

2.4 Eine Anwendung der Koflächenformel

Dieser Abschnitt dient der Vorbereitung des Abschnitts 2.5, wo die Existenz der rechtseitigen Ableitungen von $H_s^{(2)}(\mathbf{x}_1, t_1, A_1, \mathbf{x}_2, t_2, A_2)$ bei $(t_1, t_2) = (0, 0)$ untersucht wird. Der folgende Satz 2.9 zeigt, dass das für zwei konvexe Körper K und L durch $\mu((0, t]) := \mathcal{H}^{d-1}(\partial L \cap (K_t \setminus K))$, $t > 0$, definierte Maß auf \mathbb{R} eine Dichte bezüglich \mathcal{H}^1 hat. Er ist eine Folgerung aus der Koflächenformel für Lipschitz-stetige Abbildungen (Theoreme 3.2.12 und 3.2.22 in Federer, 1969). Der folgende Satz 2.8 gibt zunächst eine den Erfordernissen der vorliegenden Arbeit entsprechende Version der Koflächenformel wieder.

Satz 2.8 (Koflächenformel). *Sei M eine m -dimensionale eingebettete C^1 -Untermannigfaltigkeit in \mathbb{R}^d , $0 \leq m \leq d$, und $f : M \rightarrow \mathbb{R}^k$, $k < m$, eine Lipschitz-stetige Abbildung. Dann gilt für jede \mathcal{H}^m -messbare Menge $A \subseteq M$ und jede \mathcal{H}^m -integrierbare Funktion $g : A \rightarrow \mathbb{R}$*

$$\int_A g(\mathbf{y}) \mathcal{J}_f(\mathbf{y}) \mathcal{H}^m(d\mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^k} \int_{f^{-1}\{\mathbf{z}\} \cap A} g(\mathbf{y}) \mathcal{H}^{m-k}(d\mathbf{y}) \mathcal{H}^k(d\mathbf{z}), \quad (2.48)$$

wobei \mathcal{J}_f die Jacobi-Funktion von f ist.

Mit Blick auf Satz 2.9 erfolgt die Diskussion von \mathcal{J}_f nur für den Fall $k = 1$ (vgl. dazu auch Hardt und Simon, 1986). Für den allgemeinen Fall sei auf Federer (1969) verwiesen.

Da die Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig ist, folgt (Satz von Rademacher, siehe Theorem 3.1.6 in Federer, 1969), dass f in M \mathcal{H}^m -f. ü. differenzierbar ist, d. h., dass es für \mathcal{H}^m -f. a. $\mathbf{y} \in M$ einen Vektor $\mathbf{a}(\mathbf{y}) \in T_{\mathbf{y}}M$ mit

$$\lim_{\substack{\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \in M}} \frac{f(\mathbf{z}) - f(\mathbf{y}) - \langle \mathbf{a}(\mathbf{y}), \mathbf{z} - \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|} = 0, \quad (2.49)$$

gibt. Dabei bezeichne $T_{\mathbf{y}}M$ den Tangentialraum an M im Punkt \mathbf{y} . Überall da, wo $\mathbf{a}(\mathbf{y})$ existiert, ist $\mathbf{a}(\mathbf{y})$ auch eindeutig bestimmt. In diesem Fall sei durch $\nabla f(\mathbf{y}) := \mathbf{a}(\mathbf{y})$ der Gradient von f in \mathbf{y} definiert.

Vermöge $\mathbf{v} \mapsto \langle \nabla f(\mathbf{y}), \mathbf{v} \rangle$, $\mathbf{v} \in T_{\mathbf{y}}M$, ist eine durch f induzierte lineare Abbildung $df_{\mathbf{y}} : T_{\mathbf{y}}M \rightarrow \mathbb{R}^d$ (das Differential von f in \mathbf{y}) definiert. Bezeichnet $(df_{\mathbf{y}})^*$ die zugehörige adjungierte lineare Abbildung, dann folgt aus der Definition

$$\mathcal{J}_f(\mathbf{y}) = \sqrt{\det((df_{\mathbf{y}}) \circ (df_{\mathbf{y}})^*)}$$

der Jacobi-Funktion \mathcal{J}_f (für \mathcal{H}^m -f. a. $\mathbf{y} \in M$) unmittelbar

$$\mathcal{J}_f(\mathbf{y}) = \sqrt{\det((\nabla f(\mathbf{y}))^* \nabla f(\mathbf{y}))} = \|\nabla f(\mathbf{y})\|. \quad (2.50)$$

Ist $\bar{f} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ eine (beliebige) Lipschitz-stetige Fortsetzung von f auf \mathbb{R}^d , dann ist für alle $\mathbf{y} \in M$, in denen $\mathbf{a}(\mathbf{y})$ (wie in (2.49)) existiert, die Einschränkung $\bar{f}|_{(\mathbf{y} + T_{\mathbf{y}}M)}$ von \bar{f} auf $\mathbf{y} + T_{\mathbf{y}}M$ in \mathbf{y} differenzierbar mit $\mathbf{grad}(\bar{f}|_{(\mathbf{y} + T_{\mathbf{y}}M)})(\mathbf{y}) = \mathbf{a}(\mathbf{y}) = \nabla f(\mathbf{y})$ (vgl. Hardt und Simon, 1986). Damit gilt auch

$$\lim_{\substack{\mathbf{z} \rightarrow \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \in (\mathbf{y} + T_{\mathbf{y}}M)}} \frac{\bar{f}(\mathbf{z}) - \bar{f}(\mathbf{y}) - \langle \nabla f(\mathbf{y}), \mathbf{z} - \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|} = 0. \quad (2.51)$$

Satz 2.9. Seien K und L konvexe Körper in \mathbb{R}^d . L sei aus der Klasse C^1 . Außerdem sei

$$\mathcal{H}^{d-1}(\{\mathbf{y} \in \partial L : \langle \mathbf{n}(L, \mathbf{y}), \mathbf{u}(K, \mathbf{y}) \rangle^2 = 1\}) = 0 \quad (2.52)$$

erfüllt. Dann gilt für jede messbare Funktion $h : \mathbb{R}^d \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$

$$\int_{\partial L \setminus K} h(\mathbf{y}, d(K, \mathbf{y})) \mathcal{H}^{d-1}(d\mathbf{y}) = \int_0^\infty \int_{\partial L \cap \partial K_s} h(\mathbf{y}, s) \eta(L, K_s, \mathbf{y}) \mathcal{H}^{d-2}(d\mathbf{y}) ds, \quad (2.53)$$

wobei

$$\eta(L, K, \mathbf{y}) := \begin{cases} |\sin \angle(\mathbf{n}(L, \mathbf{y}), \mathbf{n}(K, \mathbf{y}))|^{-1} & \text{falls } \mathbf{y} \in \partial L \cap \text{reg}K, \mathbf{n}(L, \mathbf{y}) \nparallel \mathbf{n}(K, \mathbf{y}), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.54)$$

Beweis. Es genügt, die Behauptung für die Funktion $h(\mathbf{y}, s) := \tilde{h}(\mathbf{y}) \mathbf{1}\{s \leq t\}$ zu zeigen, wobei $\tilde{h} : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ eine messbare Funktion sei und $t > 0$ gelte.

Da L aus der Klasse C^1 ist, ist ∂L eine $(d-1)$ -dimensionale C^1 Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^d . Weiterhin ist die Abbildung $f : \partial L \cap (K_t \setminus K) \rightarrow [0, \infty)$ mit $\mathbf{x} \mapsto d(K, \mathbf{x})$ Lipschitz-stetig. Folglich kann die Koflächenformel (2.48) für Lipschitz-stetige Funktionen angewendet werden, und es gilt für eine \mathcal{H}^{d-1} -integrierbare Funktion g

$$\int_{\partial L \cap (K_t \setminus K)} g(\mathbf{y}) \mathcal{J}_f(\mathbf{y}) \mathcal{H}^{d-1}(d\mathbf{y}) = \int_0^t \int_{\partial L \cap \partial K_s} g(\mathbf{y}) \mathcal{H}^{d-2}(d\mathbf{y}) ds. \quad (2.55)$$

Es wird weiter unten gezeigt werden, dass für alle \mathcal{H}^{d-1} -f. a. \mathbf{y}

$$\mathcal{J}_f(\mathbf{y}) = |\sin \angle(\mathbf{n}(L, \mathbf{y}), \mathbf{u}(K, \mathbf{y}))|$$

gilt. Aus der Lebesgue-Messbarkeit von $\mathbf{n} : \text{reg}L \rightarrow S^{d-1}$, $\mathbf{y} \mapsto \mathbf{n}(L, \mathbf{y})$, (Lemma 2.2.10 in Schneider, 1993) und der Stetigkeit von $u_K : \mathbb{R}^d \setminus K \rightarrow S^{d-1}$, $\mathbf{y} \mapsto \mathbf{u}(K, \mathbf{y})$, (folgt aus der Stetigkeit von Abstandsfunktion und metrischer Projektion, siehe z. B. Theorem 1.2.2

in Schneider, 1993) folgt die Messbarkeit von \mathcal{J}_f . Da sowohl \mathcal{J}_f als auch \tilde{h} nichtnegativ sind, ist damit die spezielle Wahl von $g : \partial L \cap (K_t \setminus K) \rightarrow [0, \infty)$ mit

$$g(\mathbf{y}) := \begin{cases} \frac{\tilde{h}(\mathbf{y})}{\mathcal{J}_f(\mathbf{y})} & \text{falls } \mathbf{y} \in \partial L \cap (K_t \setminus K), \mathbf{n}(L, \mathbf{y}) \nparallel \mathbf{u}(K, \mathbf{y}), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \quad (2.56)$$

\mathcal{H}^{d-1} -integrierbar und damit in (2.55) einsetzbar. Da für $s > 0$ $\partial K_s = \text{reg} K_s$ gilt, kann für $\mathbf{y} \in (K_t \setminus K)$ der Richtungsvektor $\mathbf{u}(K, \mathbf{y})$ durch $\mathbf{n}(K_s, \mathbf{y})$ ersetzt werden, und die Behauptung folgt aus der Definition von η .

Mit Blick auf (2.50) ist nun noch $\|\nabla f(\mathbf{y})\| = |\sin \angle(\mathbf{n}(L, \mathbf{y}), \mathbf{u}(K, \mathbf{y}))|$ zu zeigen. Sei dazu im Folgenden $\mathbf{y} \in \partial L \cap (K_t \setminus K)$ so gewählt, dass $\nabla f(\mathbf{y})$ existiert und außerdem $\mathbf{n}(L, \mathbf{y}) \nparallel \mathbf{u}(K, \mathbf{y})$ gilt. Abkürzend seien $\mathbf{p} := \mathbf{p}(K, \mathbf{y})$, $\mathbf{u} := \mathbf{u}(K, \mathbf{y})$, $\mathbf{n} := \mathbf{n}(L, \mathbf{y})$ und $\nabla f := \nabla f(\mathbf{y})$. Sei H die zu $\mathbf{u}(K, \mathbf{y})$ orthogonale Hyperebene durch $\mathbf{p}(K, \mathbf{y})$. Sei außerdem $\mathbf{m} \in T_{\mathbf{y}}L \cap S^{d-1}$ zunächst ein Tangentialvektor der Länge 1. Da $d(K, \mathbf{y}) > 0$ gilt, trennt H für alle r , $0 < r < d(K, \mathbf{y})$, den Punkt $\mathbf{y} + r\mathbf{m}$ und den Körper K . Folglich gilt

$$d(K, \mathbf{y} + r\mathbf{m}) \geq d(H, \mathbf{y} + r\mathbf{m}) = \langle \mathbf{y} + r\mathbf{m}, \mathbf{u} \rangle = d(K, \mathbf{y}) + r\langle \mathbf{m}, \mathbf{u} \rangle. \quad (2.57)$$

Eine Lipschitz-stetige Fortsetzung \bar{f} von f auf \mathbb{R}^d ist in natürlicher Weise durch $\bar{f}(\mathbf{x}) = d(K, \mathbf{x})$ für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ gegeben, insbesondere gilt also auch $\bar{f}(\mathbf{y} + r\mathbf{m}) = d(K, \mathbf{y} + r\mathbf{m})$. Aus (2.51) folgt daher zusammen mit (2.57) $\langle \nabla f(\mathbf{y}), \mathbf{m} \rangle \geq \langle \mathbf{m}, \mathbf{u} \rangle$ für alle $\mathbf{m} \in T_{\mathbf{y}}L \cap S^{d-1}$. Das zieht sogar die Gültigkeit von

$$\langle \nabla f(\mathbf{y}), \mathbf{m} \rangle = \langle \mathbf{m}, \mathbf{u} \rangle \quad (2.58)$$

für alle $\mathbf{m} \in T_{\mathbf{y}}L$ nach sich. Wegen (2.58) ist ∇f zu allen Tangentialvektoren \mathbf{m} orthogonal, die ihrerseits zu \mathbf{u} orthogonal sind, weshalb ∇f in der (wegen $\mathbf{u} \nparallel \mathbf{n}$ echt zweidimensionalen) affinen Hülle $A(\mathbf{u}, \mathbf{n})$, die von \mathbf{u} und \mathbf{n} aufgespannt wird, liegt.

Falls $\mathbf{n} \perp \mathbf{u}$ gilt, folgt aus (2.58) für $\mathbf{m} := \mathbf{u}$ sofort $\|\nabla f(\mathbf{y})\| = 1$. Andernfalls sei \mathbf{u}_{\perp} ein zu \mathbf{u} senkrechter Einheitsvektor in $A(\mathbf{u}, \mathbf{n})$. Mit $\mathbf{n} = \langle \mathbf{n}, \mathbf{u} \rangle \mathbf{u} + \langle \mathbf{n}, \mathbf{u}_{\perp} \rangle \mathbf{u}_{\perp}$ gilt

$$0 = \langle \nabla f, \mathbf{n} \rangle = \langle \mathbf{n}, \mathbf{u} \rangle \langle \nabla f, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{n}, \mathbf{u}_{\perp} \rangle \langle \nabla f, \mathbf{u}_{\perp} \rangle,$$

woraus

$$\langle \nabla f, \mathbf{u}_{\perp} \rangle = -\langle \nabla f, \mathbf{u} \rangle \frac{\langle \mathbf{n}, \mathbf{u} \rangle}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{u}_{\perp} \rangle} \quad (2.59)$$

folgt. Zusammen mit (2.58) ergibt sich

$$\langle \nabla f, \mathbf{u} \rangle = \langle \nabla f, \nabla f \rangle = \langle \nabla f, \mathbf{u} \rangle^2 + \langle \nabla f, \mathbf{u}_{\perp} \rangle^2 = \langle \nabla f, \mathbf{u} \rangle^2 \left(1 + \frac{\langle \mathbf{n}, \mathbf{u} \rangle^2}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{u}_{\perp} \rangle^2} \right), \quad (2.60)$$

womit man $\langle \nabla f, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{n}, \mathbf{u}_\perp \rangle^2$ und $\langle \nabla f, \mathbf{u}_\perp \rangle = -\langle \mathbf{n}, \mathbf{u}_\perp \rangle \langle \mathbf{n}, \mathbf{u} \rangle$ erhält. Folglich gilt

$$\|\nabla f(\mathbf{y})\| = \sqrt{1 - \langle \mathbf{n}(L, \mathbf{y}), \mathbf{u}(K, \mathbf{y}) \rangle^2} = |\sin \angle(\mathbf{n}(L, \mathbf{y}), \mathbf{u}(K, \mathbf{y}))|. \quad (2.61)$$

□

Bei Verwendung einer Verallgemeinerung der Koflächenformel für Lipschitz-stetige Funktionen auf rektifizierbaren Mengen (Definition 3.2.14 und Theorem 3.2.22 in Federer, 1969) kann die Forderung in Satz 2.9 an L , aus der Klasse C^1 zu sein, sogar fallen gelassen werden, da der Rand eines konvexen Körpers eine solche rektifizierbare Menge ist (Theorem 3.2.35 in Federer, 1969). Für die Anwendungen in Abschnitt 2.5 genügt aber die vorliegende Formulierung.

Das folgende Beispiel zeigt, dass auf Voraussetzung (2.52) in Satz 2.9 dagegen nicht verzichtet werden kann.

Beispiel 2.2. Es seien K und L konzentrische Kreisflächen mit Radien $r_K < r_L$ und $t > r_L - r_K$ wie in Abbildung 2.1. Dann ist

$$\int_{\partial L \setminus K} \mathbf{1}\{d(K, \mathbf{y}) \leq t\} \mathcal{H}^1(d\mathbf{y}) = 2\pi r_L.$$

Andererseits gilt wegen $\partial L \cap \partial K_s = \emptyset$ für $s \neq r_L - r_K$

$$\int_0^t \int_{\partial L \cap \partial K_s} \eta(L, K_s, \mathbf{y}) \mathcal{H}^0(d\mathbf{y}) ds = \int_{(0, r_L - r_K)} 0 ds + \int_{(r_L - r_K, t]} 0 ds = 0.$$

□

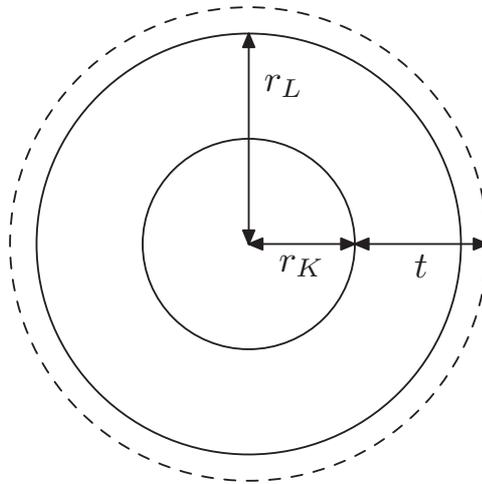


Abbildung 2.1: Illustration zu Beispiel 2.2.

Die folgenden Sätze untersuchen das Verhalten einer durch Satz 2.9 gegebenen Dichte $\int_{\partial L \cap \partial K_t} \tilde{h}(\mathbf{y}) \eta(L, K_t, \mathbf{y}) \mathcal{H}^{d-2}(d\mathbf{y})$ für $t \downarrow 0$. Mit den entsprechenden Aussagen lässt sich dann in Abschnitt 2.5 die Existenz der zweifachen rechtseitigen partiellen Ableitung von $H_s^{(2)}$ bei $(0, 0)$ nachweisen. Zunächst wird eine Aussage für den d -dimensionalen Fall unter recht starken Glattheitsvoraussetzungen an K gezeigt.

Satz 2.10. *Es seien die Voraussetzungen von Satz 2.9 erfüllt. Zusätzlich sei K aus der Klasse C^2 . Es gelte*

$$|\sin \angle(\mathbf{n}(L, \mathbf{y}), \mathbf{n}(K, \mathbf{y}))| > 0, \quad \mathbf{y} \in \partial L \cap \partial K. \quad (2.62)$$

Sei weiterhin $\tilde{h} : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ stetig mit kompaktem Träger. Dann gilt

$$\lim_{t \downarrow 0} \int_{\partial L \cap \partial K_t} \tilde{h}(\mathbf{y}) \eta(L, K_t, \mathbf{y}) \mathcal{H}^{d-2}(d\mathbf{y}) = \int_{\partial L \cap \partial K} \tilde{h}(\mathbf{y}) \eta(L, K, \mathbf{y}) \mathcal{H}^{d-2}(d\mathbf{y}). \quad (2.63)$$

Beweis. Der Beweis folgt der Argumentationskette von Abschnitt 4 in Last und Schassberger (2001), wo Aussagen im Zusammenhang mit der zweiten Ableitung der sphärischen Kontaktverteilungsfunktion bewiesen werden. An die Stelle der dort verwendeten Reichweitenfunktion tritt nun die Abstandsfunktion.

Im Fall $L \cap K = \emptyset$ gilt für alle genügend kleinen $t > 0$ auch $\partial L \cap \partial K_t = \emptyset$, und somit ist (2.63) trivialerweise erfüllt. Im Folgenden sei nun $\partial L \cap \partial K \neq \emptyset$ angenommen.

Seien B_1 und B_2 offene Teilmengen des \mathbb{R}^d , so dass $B_1 \cap \partial K$ C^2 -glatt und $B_2 \cap \partial L$ C^1 -glatt parametrisierbar seien. Die Parameterdarstellungen von $B_1 \cap \partial K$ und $B_2 \cap \partial L$ seien durch die Abbildungen $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_{d-1}) \mapsto \mathbf{x}(\mathbf{w})$ und $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_{d-1}) \mapsto \mathbf{y}(\mathbf{v})$ gegeben, wobei \mathbf{w} aus einer offenen Menge $E \subset \mathbb{R}^{d-1}$ und \mathbf{v} aus einer offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^{d-1}$ seien. Wählt man $\mathbf{w}^0 \in E$, $\mathbf{v}^0 \in D$ und $t^0 > 0$ so, dass die Gleichung

$$\mathbf{x}(\mathbf{w}) + t\mathbf{n}(K, \mathbf{x}(\mathbf{w})) = \mathbf{y}(\mathbf{v}), \quad t \in \mathbb{R}, \mathbf{w} \in E, \mathbf{v} \in D, \quad (2.64)$$

erfüllt ist, existieren wegen des Auflösungsatzes für implizit definierte Funktionen eine offene Umgebung V des Punktes $(t^0, v_2^0, \dots, v_{d-1}^0)$ und stetig differenzierbare Funktionen $(t, v_2, \dots, v_{d-1}) \mapsto \mathbf{w}(t, v_2, \dots, v_{d-1})$ und $(t, v_2, \dots, v_{d-1}) \mapsto v_1(t, v_2, \dots, v_{d-1})$ von V in \mathbb{R}^{d-1} bzw. von V in \mathbb{R} , so dass $\mathbf{w}(t^0, v_2^0, \dots, v_{d-1}^0) = \mathbf{w}^0$, $(v_1(v_2, \dots, v_{d-1}), v_2, \dots, v_{d-1}) \in D$, $\mathbf{w}(t, v_2, \dots, v_{d-1}) \in E$ und

$$\mathbf{x}(\mathbf{w}(t, v_2, \dots, v_{d-1})) + t\mathbf{n}(K, \mathbf{x}(\mathbf{w}(s, v_2, \dots, v_{d-1}))) = \mathbf{y}(v_1(s, v_2, \dots, v_{d-1}), v_2, \dots, v_{d-1}) \quad (2.65)$$

gelten. Voraussetzung für die Anwendung des Auflösungssatzes ist, dass für die durch $\mathbf{f}(t, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{x}(\mathbf{w}) + t\mathbf{n}(K, \mathbf{x}(\mathbf{w})) - \mathbf{y}(\mathbf{v})$ definierte Funktion die Bedingung

$$\frac{\partial \mathbf{f}(t, v_1, \dots, v_{d-1}, w_1, \dots, w_{d-1})}{\partial (v_1, w_1, \dots, w_{d-1})}(t^0, v_1^0, \dots, v_{d-1}^0, w_1^0, \dots, w_{d-1}^0) \neq 0 \quad (2.66)$$

gilt. Da die Vektoren $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial w_i}$, $i = 1, \dots, d-1$, zum Tangentialraum von ∂K in $\mathbf{x}(\mathbf{w})$ gehören und $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial v_1}$ im Tangentialraum von ∂L in $\mathbf{y}(\mathbf{v})$ liegt, ist (2.66) dann erfüllt, wenn der Vektor $\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial v_1}(\mathbf{v}^0)$ nicht zum Tangentialraum von ∂K im Punkt $\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}(\mathbf{w}^0)$ gehört. Dies kann wegen Voraussetzung (2.52) in Satz 2.9 angenommen werden, und o. B. d. A. dann auch $\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial v_1}(v_1(t, v_2, \dots, v_{d-1}), v_2, \dots, v_{d-1}) \notin T_{\mathbf{x}(\mathbf{w}(t, v_2, \dots, v_{d-1}))} \partial K$ für alle $(t, v_2, \dots, v_{d-1}) \in V$. Mit

$$\mathbf{z}(t, v_2, \dots, v_{d-1}) := \mathbf{y}(v_1(t, v_2, \dots, v_{d-1}), v_2, \dots, v_{d-1}) \quad (2.67)$$

erhält man eine weitere Parametrisierung von $B_2 \cap L$, d. h.

$$\{\mathbf{z}(t, v_2, \dots, v_{d-1}) : (t, v_2, \dots, v_{d-1}) \in V\} = B_2 \cap L. \quad (2.68)$$

Hier gilt nun die Eigenschaft $d(K, \mathbf{z}(t, v_2, \dots, v_{d-1})) = t$ für alle $t \geq 0$.

Wegen Voraussetzung (2.62) kann angenommen werden, dass (2.65) für $t^0 = 0$ erfüllt ist. Ebenso kann angenommen werden, dass V als $V = (t_1, t_2) \times V'$ darstellbar ist, wobei $t_1 < 0 < t_2$ gelte und V' eine offene Menge in \mathbb{R}^{d-2} sei. Wegen der Kompaktheit von $\partial L \cap \partial K$ reicht es aus, den Fall $\partial L \cap \partial K \subset B_2$ zu betrachten (vgl. die Diskussion in Last und Schassberger, 2001). Dann gilt

$$\partial L \cap \partial K = \{\mathbf{z}(0, v_2, \dots, v_{d-1}) : (v_2, \dots, v_{d-1}) \in V'\}. \quad (2.69)$$

Da die kompakten Mengen $\{\mathbf{y} \in \partial L : d(K, \mathbf{y}) \leq t\}$ für $t \downarrow 0$ monoton von oben gegen $\partial L \cap \partial K$ konvergieren, gilt dann für genügend kleines t auch $\{\mathbf{y} \in \partial L : d(K, \mathbf{y}) \leq t\} \subset B_2$, und auf beiden Seiten von (2.63) kann somit die Integration auf das Gebiet B_2 beschränkt werden.

Es sei $J_t(v_2, \dots, v_{d-1})$ die Determinante der Matrix $(\langle \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial v_i}, \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial v_j} \rangle)_{i,j=2, \dots, d-1}$. In den Koordinaten (t, v_2, \dots, v_{d-1}) ist dann durch $\sqrt{J_t(v_2, \dots, v_{d-1})} dv_2 \cdot \dots \cdot dv_{d-1}$ das Oberflächenelement von $\{\mathbf{y} \in \partial L : d(K, \mathbf{y}) = t\} = \partial L \cap \partial K_t$ gegeben. Da die Funktion $(t, v_2, \dots, v_{d-1}) \mapsto \mathbf{z}(t, v_2, \dots, v_{d-1})$ stetig differenzierbar ist, ist $(t, v_2, \dots, v_{d-1}) \mapsto J_t(v_2, \dots, v_{d-1})$ stetig auf V . Ebenso kann wegen (2.62) o. B. d. A. angenommen werden, dass $\eta(L, K_t, \mathbf{z}(t, v_2, \dots, v_{d-1}))$ stetig auf V ist und somit

$$\lim_{t \downarrow 0} \eta(L, K_t, \mathbf{z}(t, v_2, \dots, v_{d-1})) = \eta(L, K, \mathbf{z}(0, v_2, \dots, v_{d-1})) \quad (2.70)$$

erfüllt ist, wobei dieser Grenzwert für alle $(v_2, \dots, v_{d-1}) \in V'$ endlich ist. Da auch für $J_t(v_2, \dots, v_{d-1})$ Beschränktheit angenommen werden kann, folgt mit den Voraussetzungen an \tilde{h} aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz

$$\begin{aligned}
& \lim_{t \downarrow 0} \int_{\partial L \cap \partial K_t} \tilde{h}(\mathbf{y}) \eta(L, K_t, \mathbf{y}) \mathcal{H}^{d-2}(\mathrm{d}\mathbf{y}) \\
&= \lim_{t \downarrow 0} \int \cdots \int \tilde{h}(\mathbf{z}(t, v_2, \dots, v_{d-1})) \eta(L, K_t, \mathbf{z}(t, v_2, \dots, v_{d-1})) \mathbf{1}\{(t, v_2, \dots, v_{d-1}) \in V\} \\
&\quad \times \sqrt{J_t(v_2, \dots, v_{d-1})} \mathrm{d}v_2 \cdots \mathrm{d}v_{d-1} \\
&= \int \cdots \int \tilde{h}(\mathbf{z}(0, v_2, \dots, v_{d-1})) \eta(L, K, \mathbf{z}(0, v_2, \dots, v_{d-1})) \mathbf{1}\{(v_2, \dots, v_{d-1}) \in V'\} \\
&\quad \times \sqrt{J_0(v_2, \dots, v_{d-1})} \mathrm{d}v_2 \cdots \mathrm{d}v_{d-1} \\
&= \int_{\partial L \cap \partial K} \tilde{h}(\mathbf{y}) \eta(L, K, \mathbf{y}) \mathcal{H}^{d-2}(\mathrm{d}\mathbf{y}) < \infty.
\end{aligned} \tag{2.71}$$

□

Für die Dimensionen $d = 2$ und $d = 3$ werden nun entsprechende Aussagen für K mit stückweise glattem Rand gezeigt. Dies schließt insbesondere den Fall ein, dass K ein Polygon bzw. Polyeder ist.

Satz 2.11. *Es sei $d = 2$, und es seien die Voraussetzungen von Satz 2.9 erfüllt. K habe einen stückweise C^1 -glatte Rand und ein nichtleeres Inneres. Es gelte*

$$\mathcal{H}^0(\partial L \cap [\partial K \setminus \text{reg}K]) = 0 \tag{2.72}$$

und für alle $\mathbf{y} \in \partial L \cap \text{reg}K$

$$|\sin \angle(\mathbf{n}(L, \mathbf{y}), \mathbf{n}(K, \mathbf{y}))| > 0. \tag{2.73}$$

Sei weiterhin $\tilde{h} : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ stetig mit kompaktem Träger. Dann gilt

$$\lim_{t \downarrow 0} \int_{\partial L \cap \partial K_t} \tilde{h}(\mathbf{y}) \eta(L, K_t, \mathbf{y}) \mathcal{H}^0(\mathrm{d}\mathbf{y}) = \int_{\partial L \cap \partial K} \tilde{h}(\mathbf{y}) \eta(L, K, \mathbf{y}) \mathcal{H}^0(\mathrm{d}\mathbf{y}), \tag{2.74}$$

falls

$$\int_{\partial L \cap \partial K} \eta(L, K, \mathbf{y}) \mathcal{H}^0(\mathrm{d}\mathbf{y}) < \infty. \tag{2.75}$$

Anschaulich bedeuteten die Bedingungen (2.72) und (2.73), dass der Rand von L den Rand von K nicht in einem Eckpunkt von K schneidet und dass sich beide Ränder nicht berühren.

Beweis. Falls $\partial L \cap \partial K = \emptyset$ gilt, verschwindet die rechte Seite von (2.74). Außerdem gilt dann auch $\partial L \cap \partial K_t = \emptyset$ für alle genügend kleinen $t > 0$, womit (2.74) erfüllt ist.

Es gelte nun $\partial L \cap \partial K \neq \emptyset$. Aus den Voraussetzungen folgt zunächst

$$\infty > \int_{\partial L \cap \text{reg}K} \eta(L, K, \mathbf{y}) \mathcal{H}^0(d\mathbf{y}) \geq \int_{\partial L \cap \text{reg}K} \mathcal{H}^0(d\mathbf{y}).$$

Folglich besteht $\partial L \cap \partial K$ aus einer endlichen Anzahl n von Punkten $\mathbf{y}_i \in \text{reg}K$, $i = 1, \dots, n$, und für genügend kleines $\bar{t} > 0$ ist $\partial L \cap K_{\bar{t}}$ die disjunkte Vereinigung von n stetigen Kurvenstücken $\mathbf{y}_i(t) \in \partial L \cap \partial K_t$, $t \in [0, \bar{t}]$, mit $\mathbf{y}_i(0) = \mathbf{y}_i$, $i = 1, \dots, n$, womit auch $\partial L \cap \partial K_t$ aus n Punkten $\mathbf{y}_i(t)$ besteht. Da ∂K stückweise C^1 -glatt ist, gibt es für alle \mathbf{y}_i eine C^1 -glatte Umgebung, und es gilt mit $\mathbf{p}(K, \mathbf{y}_i) = \mathbf{y}_i$

$$\lim_{t \downarrow 0} \mathbf{n}(K_t, \mathbf{y}_i(t)) = \lim_{t \downarrow 0} \mathbf{u}(K, \mathbf{y}_i(t)) = \lim_{t \downarrow 0} \mathbf{n}(K, \mathbf{p}(K, \mathbf{y}_i(t))) = \mathbf{n}(K, \mathbf{y}_i) \quad (2.76)$$

wegen der Stetigkeit von $\mathbf{p}(K, \cdot)$ und $\mathbf{n}(K, \cdot)$. Da L aus der Klasse C^1 ist, folgt damit auch $\lim_{t \downarrow 0} \eta(L, K_t, \mathbf{y}_i(t)) = \eta(L, K, \mathbf{y}_i)$. Mit der Stetigkeit von \tilde{h} gilt dann

$$\begin{aligned} \lim_{t \downarrow 0} \int_{\partial L \cap \partial K_t} \tilde{h}(\mathbf{y}) \eta(L, K_t, \mathbf{y}) \mathcal{H}^0(d\mathbf{y}) &= \lim_{t \downarrow 0} \sum_{i=1}^n \int \tilde{h}(\mathbf{y}) \eta(L, K_t, \mathbf{y}) \delta_{\mathbf{y}_i(t)}(d\mathbf{y}) \\ &= \sum_{i=1}^n \lim_{t \downarrow 0} \tilde{h}(\mathbf{y}_i(t)) \eta(L, K_t, \mathbf{y}_i(t)) \\ &= \sum_{i=1}^n \tilde{h}(\mathbf{y}_i) \eta(L, K_t, \mathbf{y}_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \int \tilde{h}(\mathbf{y}) \eta(L, K_t, \mathbf{y}) \delta_{\mathbf{y}_i}(d\mathbf{y}) \\ &= \int_{\partial L \cap \partial K} \tilde{h}(\mathbf{y}) \eta(L, K, \mathbf{y}) \mathcal{H}^0(d\mathbf{y}). \end{aligned} \quad (2.77)$$

□

Satz 2.12. *Es sei $d = 3$, und es seien die Voraussetzungen von Satz 2.9 erfüllt. K habe ein nichtleeres Inneres und einen stückweise C^2 -glatten Rand mit der Darstellung*

$$\partial K = \bigcup_{i=1}^n F_i$$

gemäß (2.25), wobei zusätzlich alle $F_i \cap F_j$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$, C^2 -Untermannigfaltigkeiten seien. Es gelte für alle $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ mit $i \neq j \neq k \neq i$

$$\mathcal{H}^0(\partial L \cap F_i \cap F_j \cap F_k) = 0 \quad (2.78)$$

und für alle $\mathbf{y} \in \partial L \cap \text{reg}K$

$$|\sin \angle(\mathbf{n}(L, \mathbf{y}), \mathbf{n}(K, \mathbf{y}))| > 0. \quad (2.79)$$

Außerdem gelte für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i \neq j$ und alle Punkte $\mathbf{x} \in \partial L \cap F_i \cap F_j$

$$T_{\mathbf{x}}(F_i \cap F_j) \not\subseteq T_{\mathbf{x}}\partial L, \quad (2.80)$$

d. h., kein Tangentenvektor von $F_i \cap F_j$ in \mathbf{x} liege gleichzeitig auch in $T_{\mathbf{x}}\partial L$. Sei weiterhin $\tilde{h} : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ stetig mit kompaktem Träger. Dann gilt

$$\lim_{t \downarrow 0} \int_{\partial L \cap \partial K_t} \tilde{h}(\mathbf{y}) \eta(L, K_t, \mathbf{y}) \mathcal{H}^1(d\mathbf{y}) = \int_{\partial L \cap \partial K} \tilde{h}(\mathbf{y}) \eta(L, K, \mathbf{y}) \mathcal{H}^1(d\mathbf{y}), \quad (2.81)$$

falls

$$\int_{\partial L \cap \partial K} \eta(L, K, \mathbf{y}) \mathcal{H}^1(d\mathbf{y}) < \infty. \quad (2.82)$$

Beweis. Es sei für $t > 0$ und $i \in \{1, \dots, n\}$

$$F_i^t := \{\mathbf{y} \in \partial K_t : \mathbf{p}(K, \mathbf{y}) \in \text{relint}(F_i)\} \quad (2.83)$$

der zu $\text{relint}(F_i)$ gehörige Teil der äußeren Parallelmenge von K . Die Behauptung des Satzes folgt, falls einerseits für alle $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\lim_{t \downarrow 0} \int_{\partial L \cap F_i^t} \tilde{h}(\mathbf{y}) \eta(L, K_t, \mathbf{y}) \mathcal{H}^1(d\mathbf{y}) = \int_{\partial L \cap \text{relint}(F_i)} \tilde{h}(\mathbf{y}) \eta(L, K, \mathbf{y}) \mathcal{H}^1(d\mathbf{y}), \quad (2.84)$$

und andererseits

$$\lim_{t \downarrow 0} \mathcal{H}^1 \left(\partial L \cap \left[\partial K_t \setminus \bigcup_{i=1}^n F_i^t \right] \right) = 0 \quad (2.85)$$

erfüllt ist.

Dass ∂L und $F_i \cap F_j$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$, wegen (2.80) keine Berührungspunkte haben, impliziert

$$\mathcal{H}^1(\partial L \cap F_i \cap F_j) = 0 \quad (2.86)$$

für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i \neq j$. Mit (2.86) und (2.82) kann damit (2.84) in ähnlicher Weise wie Satz 2.10 gezeigt werden.

Es genügt wegen (2.78), zum Nachweis von (2.85) nur die Mengen $\text{relint}(F_i \cap F_j)$, $i \neq j$, zu betrachten. Abkürzend seien nun für feste Indizes $i \neq j$ $F := \text{relint}(F_i \cap F_j)$ und $F^t := \{\mathbf{y} \in \partial K_t : \mathbf{p}(K, \mathbf{y}) \in F\}$. Gilt $\partial L \cap F = \emptyset$, dann ist für genügend kleines t auch $\partial L \cap F^t = \emptyset$ erfüllt und $\lim_{t \downarrow 0} \mathcal{H}^1(\partial L \cap F^t) = 0$ ist trivialerweise richtig.

Andernfalls kann $\partial L \cap F$ nur aus endlich vielen Punkten bestehen: Angenommen $\partial L \cap F$ besteht aus unendlich vielen Punkten. Dann gibt es mindestens einen Häufungspunkt in der abgeschlossenen Menge $F_i \cap F_j$. Da auch ∂L abgeschlossen ist, müssen wegen (2.78) alle Häufungspunkte sogar in F liegen. Sei $\mathbf{x} \in \partial L \cap F$ nun solch ein Häufungspunkt. Dann gibt es eine Folge $\{\mathbf{x}_n\} \subset \partial L \cap F$ mit $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}$ für $n \rightarrow \infty$. Der Vektor

$$\mathbf{q} := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_n}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_n\|}$$

ist dann sowohl Element von $T_{\mathbf{x}}\partial L$ als auch Tangentenvektor von F in \mathbf{x} im Widerspruch zur Voraussetzung (2.80).

Bezeichne nun \mathbf{x}^0 einen der endlich vielen Punkte aus $\partial L \cap F$, und sei $\bar{t} > 0$ so gewählt, dass die Menge

$$A := \{\mathbf{p}(K, \mathbf{y}) : \mathbf{y} \in \partial L \cap F^t, 0 < t \leq \bar{t}\} \quad (2.87)$$

$\partial L \cap F \cap A = \{\mathbf{x}^0\}$ erfüllt, also keine weiteren Punkte aus $\partial L \cap F$ enthält. Für jedes $\mathbf{x} \in A$ enthält $A^t := \partial[A \oplus tB^d] \setminus \{\mathbf{y} \in A \oplus tB^d : \mathbf{p}(F, \mathbf{y}) \notin A\}$ die Menge $\mathbf{x} + tN(K, \mathbf{x})$. Da es für F eine C^2 -glatte Parametrisierung $w \mapsto \mathbf{x}(w)$ von $E \subset \mathbb{R}$ in \mathbb{R}^3 gibt, lässt sich A^t in der Form $(w, \mathbf{m}) \mapsto \mathbf{x}(w) + t\mathbf{b}(\mathbf{x}(w), \mathbf{m})$ mit $w \in \tilde{E} \subset E$ und $\mathbf{m} \in tS^1$ parametrisieren. (Der Schnitt einer zu F in \mathbf{x} senkrechten Ebene durch \mathbf{x} mit A^t ist gerade eine Kreislinie mit Radius t .) ∂L sei durch $D \ni \mathbf{v} = (v_1, v_2) \mapsto \mathbf{y}(\mathbf{v})$ parametrisiert. Wegen Voraussetzung (2.80) schneiden sich ∂L und F mit einem positiven Winkel. Daher lässt sich in einer Umgebung von \mathbf{x}^0 die Gleichung

$$\mathbf{y}(\mathbf{v}) = \mathbf{x}(w) + \mathbf{b}(\mathbf{x}(w), \mathbf{m}) \quad (2.88)$$

aufösen (Auflösungssatz für implizit definierte Funktionen). Das heißt, es gibt für jedes genügend kleine t eine relativ offene Umgebung V des Punktes \mathbf{m}^0 und stetig differenzierbare Funktionen $\mathbf{m} \mapsto w(\mathbf{m})$ und $\mathbf{m} \mapsto \mathbf{v}(\mathbf{m})$ von V in \mathbb{R} bzw. in \mathbb{R}^2 , so dass $\mathbf{x}(w(\mathbf{m}^0)) = \mathbf{x}^0$, $\mathbf{v}(\mathbf{m}) \in D$, $w(\mathbf{m}) \in E$ und

$$\mathbf{y}(\mathbf{v}(\mathbf{m})) = \mathbf{x}(w(\mathbf{m})) + \mathbf{b}(\mathbf{x}(w(\mathbf{m})), \mathbf{m}) \quad (2.89)$$

gelten. Die Funktion $\mathbf{m} \mapsto \mathbf{y}(\mathbf{v}(\mathbf{m}))$ von tS^1 in $\partial L \cap A^t$ ist für genügend kleine t stetig differenzierbar und wegen (2.80) sogar Lipschitz-stetig. Bezeichnet $c(t)$ die zugehörige Lipschitz-Konstante, gilt mit Proposition 2.10.11 in Federer (1969)

$$\mathcal{H}^1(\partial L \cap A^t) \leq c(t)\mathcal{H}^1(tS^1) = c(t) \cdot 2\pi t. \quad (2.90)$$

Wegen (2.80) ist $c(t)$ für alle genügend kleinen t beschränkt, so dass $\mathcal{H}^1(\partial L \cap A^t) \rightarrow 0$ für $t \downarrow 0$. Da \mathbf{x}^0 beliebig gewählt war, ist damit auch (2.85) gezeigt. \square

Die Voraussetzung der Sätze 2.11 und 2.12 an den Körper K , innere Punkte zu haben, ist nicht notwendig. Jedoch bedarf es bei einem $(d-1)$ -dimensionalen K einer Erweiterung der Funktion η , da es in diesem Fall keine regulären Randpunkte gibt. Für \mathcal{H}^{d-1} -f. a. Punkte $\mathbf{y} \in K$ besteht $N(K, \mathbf{z})$ dann aus genau zwei Einheitsvektoren \mathbf{b}_1 und \mathbf{b}_2 mit $\mathbf{b}_1 = -\mathbf{b}_2$. Daher sei nun für L aus der Klasse C^1 und beliebiges $K \in \mathcal{K}^d$

$$\tilde{\eta}(L, K, \mathbf{y}) := \begin{cases} \eta(L, K, \mathbf{z}) & \mathbf{y} \in \partial L \cap \partial K, K \text{ hat innere Punkte} \\ |\sin \angle(\mathbf{n}(L, \mathbf{y}), \mathbf{b})|^{-1} & \mathbf{b} \text{ beliebig aus } N(K, \mathbf{y}), \text{ falls } \mathcal{H}^0(N(K, \mathbf{y})) = 2, \\ & \mathbf{y} \in \partial L \cap K, \mathbf{n}(L, \mathbf{y}) \not\parallel \mathbf{b}, K \text{ ohne innere Punkte} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.91)$$

Mit diesem $\tilde{\eta}$ sind die Sätze 2.11 und 2.12 bis auf einen Faktor 2 unmittelbar auf $(d-1)$ -dimensionale Körper K übertragbar, d. h., es gilt unter den entsprechenden Voraussetzungen dann

$$\lim_{t \downarrow 0} \int_{\partial L \cap \partial K_t} \tilde{h}(\mathbf{y}) \tilde{\eta}(L, K_t, \mathbf{y}) \mathcal{H}^{d-2}(\mathrm{d}\mathbf{y}) = 2 \int_{\partial L \cap \partial K} \tilde{h}(\mathbf{y}) \tilde{\eta}(L, K, \mathbf{y}) \mathcal{H}^{d-2}(\mathrm{d}\mathbf{y}) \quad (2.92)$$

mit $d \in \{2, 3\}$.

Bemerkung 2.1. Satz 2.10 (und entsprechend auch Satz 2.11 und Satz 2.12) ist im Sinne von Theorem 2.2 in Last und Schassberger (2001) auch folgendermaßen lesbar.

Die durch

$$t \mapsto G(t) := \int_{\partial L \setminus K} \tilde{h}(\mathbf{y}) \mathbf{1}\{d(K, \mathbf{y}) \leq t\} \mathcal{H}^{d-1}(\mathrm{d}\mathbf{y}), \quad t \geq 0, \quad (2.93)$$

gegebene Funktion ist bei 0 rechtsseitig differenzierbar und besitzt die Ableitung

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0+} G(t) = \int_{\partial L \cap \partial K} \tilde{h}(\mathbf{y}) \eta(L, K, \mathbf{y}) \mathcal{H}^{d-2}(\mathrm{d}\mathbf{y}). \quad (2.94)$$

□

2.5 Existenz der rechtsseitigen Ableitungen bei (0,0)

Nachdem in Abschnitt 2.3 bereits für zwei wesentliche Voraussetzungen des Satzes 2.4 hinreichende Kriterien an den zugrunde liegenden Punktprozess gefunden wurden, ist nun noch zu klären, unter welchen Voraussetzungen die zweifache rechtsseitige Ableitung von $\overline{CH}_s^{(2)}$ bei (0,0) existiert.

2.5.1 Absolute Stetigkeit

Für das weitere Vorgehen erweist es sich als hilfreich, die Größe $\overline{CH}_s^{(2)}$ in zwei Terme zu zerlegen. Diese werden später getrennt untersucht.

Lemma 2.1. *Für einen Punktprozess Ψ in $\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d$ seien die Voraussetzungen 2.1 und 2.2 (vgl. S. 8) erfüllt. Es seien $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(S^{d-1})$. Dann gilt für die sphärische Kontaktverteilungsfunktion zweiter Ordnung $H_s^{(2)}$ von $\Xi = T(\Psi)$*

$$\overline{C}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)H_s^{(2)}(\mathbf{x}_1, t_1, A_1, \mathbf{x}_2, t_2, A_2) = J^{(2)}(\mathbf{x}_1, t_1, A_1, \mathbf{x}_2, t_2, A_2) + J^{(1)}(\mathbf{x}_1, t_1, A_1, \mathbf{x}_2, t_2, A_2) \quad (2.95)$$

mit

$$\begin{aligned} & J^{(2)}(\mathbf{x}_1, t_1, A_1, \mathbf{x}_2, t_2, A_2) \\ &= \int \mathbb{E}_{(\mathbf{y}_1, K_1), (\mathbf{y}_2, K_2)}^! \left[\mathbf{1}\{d(T(\Psi + \delta_{(\mathbf{y}_2, K_2)}), \mathbf{x}_1) > d(\mathbf{y}_1 + K_1, \mathbf{x}_1)\} \right. \\ & \quad \times \mathbf{1}\{d(T(\Psi + \delta_{(\mathbf{y}_1, K_1)}), \mathbf{x}_2) > d(\mathbf{y}_2 + K_2, \mathbf{x}_2)\} \left. \mathbf{1}\{0 < d(\mathbf{y}_1 + K_1, \mathbf{x}_1) \leq t_1\} \right. \\ & \quad \times \mathbf{1}\{0 < d(\mathbf{y}_2 + K_2, \mathbf{x}_2) \leq t_2\} \mathbf{1}\{\mathbf{u}(\mathbf{y}_1 + K_1, \mathbf{x}_1) \in A_1\} \mathbf{1}\{\mathbf{u}(\mathbf{y}_2 + K_2, \mathbf{x}_2) \in A_2\} \\ & \quad \times \alpha_{\Psi}^{(2)}(d(\mathbf{y}_1, K_1, \mathbf{y}_2, K_2)) \end{aligned} \quad (2.96)$$

und

$$\begin{aligned} & J^{(1)}(\mathbf{x}_1, t_1, A_1, \mathbf{x}_2, t_2, A_2) \\ &= \int \mathbb{E}_{(\mathbf{y}, K)}^! \left[\mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{x}_1) > d(\mathbf{y} + K, \mathbf{x}_1)\} \mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{x}_2) > d(\mathbf{y} + K, \mathbf{x}_2)\} \right] \quad (2.97) \\ & \quad \times \mathbf{1}\{0 < d(\mathbf{y} + K, \mathbf{x}_1) \leq t_1\} \mathbf{1}\{0 < d(\mathbf{y} + K, \mathbf{x}_2) \leq t_2\} \\ & \quad \times \mathbf{1}\{\mathbf{u}(\mathbf{y} + K, \mathbf{x}_1) \in A_1\} \mathbf{1}\{\mathbf{u}(\mathbf{y} + K, \mathbf{x}_2) \in A_2\} \alpha_{\Psi}(d(\mathbf{y}, K)) \end{aligned}$$

für \mathcal{H}^{2d} -f. a. $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

$J^{(2)}$ beschreibt dabei jenen Anteil von $\overline{CH}_s^{(2)}$, für den \mathbf{x}_1 und \mathbf{x}_2 in der t_1 -Parallelmenge bzw. t_2 -Parallelmenge zweier verschiedener Körner $\mathbf{y}_1 + K_1$ und $\mathbf{y}_2 + K_2$ liegen, während $J^{(1)}$ entsprechend den Anteil beschreibt, für den \mathbf{x}_1 und \mathbf{x}_2 in der t_1 -Parallelmenge bzw. t_2 -Parallelmenge des gleichen Kornes $\mathbf{y} + K$ liegen.

Beweis. Es sei $g : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty]$ messbar.

Unter Verwendung der verallgemeinerten Steiner-Formel in Satz 2.2, der Zerlegung (2.40) gemäß Proposition 4.9 in Hug und Last (2000) und dem Satz von Fubini (anwendbar wegen Lemma 3.11 und Korollar 3.14 in Hug und Last, 2000) erhält man

$$\begin{aligned}
& \int \int g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \overline{C}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) H_s^{(2)}(\mathbf{x}_1, t_1, A_1, \mathbf{x}_2, t_2, A_2) \mathcal{H}^d(d\mathbf{x}_2) \mathcal{H}^d(d\mathbf{x}_1) \\
&= \int \int g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \mathbb{E}[\mathbf{1}\{\mathbf{x}_1 \notin \Xi, d(\Xi, \mathbf{x}_1) \leq t_1, \mathbf{u}(\Xi, \mathbf{x}_1) \in A_1\} \\
&\quad \times \mathbf{1}\{\mathbf{x}_2 \notin \Xi, d(\Xi, \mathbf{x}_2) \leq t_2, \mathbf{u}(\Xi, \mathbf{x}_2) \in A_2\}] \mathcal{H}^d(d\mathbf{x}_2) \mathcal{H}^d(d\mathbf{x}_1) \\
&= \mathbb{E} \left[\int \int g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \mathbf{1}\{\mathbf{x}_1 \notin \Xi, d(\Xi, \mathbf{x}_1) \leq t_1, \mathbf{u}(\Xi, \mathbf{x}_1) \in A_1\} \right. \\
&\quad \left. \times \mathbf{1}\{\mathbf{x}_2 \notin \Xi, d(\Xi, \mathbf{x}_2) \leq t_2, \mathbf{u}(\Xi, \mathbf{x}_2) \in A_2\} \mathcal{H}^d(d\mathbf{x}_2) \mathcal{H}^d(d\mathbf{x}_1) \right] \\
&= \sum_{i=0}^{d-1} \sum_{j=0}^{d-1} a_i a_j \mathbb{E} \left[\int \int \int \int g(\mathbf{z}_1 + s_1 \mathbf{b}_1, \mathbf{z}_2 + s_2 \mathbf{b}_2) \right. \\
&\quad \times \mathbf{1}\{s_1 \leq t_1, \delta(\Xi, \mathbf{z}_1, \mathbf{b}_1) > s_1, \mathbf{b}_1 \in A_1\} \mathbf{1}\{s_2 \leq t_2, \delta(\Xi, \mathbf{z}_2, \mathbf{b}_2) > s_2, \mathbf{b}_2 \in A_2\} \\
&\quad \left. \times s_1^{d-i-1} s_2^{d-j-1} \Theta_i^+(\Xi, d(\mathbf{z}_1, \mathbf{b}_1)) \Theta_j^+(\Xi, d(\mathbf{z}_2, \mathbf{b}_2)) ds_1 ds_2 \right] \\
&= \sum_{i=0}^{d-1} \sum_{j=0}^{d-1} a_i a_j \mathbb{E} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int \int \int \int g(\mathbf{z}_1 + s_1 \mathbf{b}_1, \mathbf{z}_2 + s_2 \mathbf{b}_2) \right. \\
&\quad \times \mathbf{1}\{s_1 \leq t_1, \delta(\Xi, \mathbf{z}_1, \mathbf{b}_1) > s_1, \mathbf{b}_1 \in A_1\} \mathbf{1}\{s_2 \leq t_2, \delta(\Xi, \mathbf{z}_2, \mathbf{b}_2) > s_2, \mathbf{b}_2 \in A_2\} \\
&\quad \left. \times s_1^{d-i-1} s_2^{d-j-1} \mathbf{1}\{\mathbf{z}_1 \notin \Xi^{(m)}\} \mathbf{1}\{\mathbf{z}_2 \notin \Xi^{(n)}\} \Theta_i(\Xi_m, d(\mathbf{z}_1, \mathbf{b}_1)) \Theta_j(\Xi_n, d(\mathbf{z}_2, \mathbf{b}_2)) ds_1 ds_2 \right] \\
&= \sum_{i=0}^{d-1} \sum_{j=0}^{d-1} a_i a_j \mathbb{E} \left[\int \int \int \int \int \int g(\mathbf{z}_1 + s_1 \mathbf{b}_1, \mathbf{z}_2 + s_2 \mathbf{b}_2) \right. \\
&\quad \times \mathbf{1}\{s_1 \leq t_1, \delta(T(\Psi), \mathbf{z}_1, \mathbf{b}_1) > s_1, \mathbf{b}_1 \in A_1\} \mathbf{1}\{s_2 \leq t_2, \delta(T(\Psi), \mathbf{z}_2, \mathbf{b}_2) > s_2, \mathbf{b}_2 \in A_2\} \\
&\quad \times s_1^{d-i-1} s_2^{d-j-1} \mathbf{1}\{\mathbf{z}_1 \notin T(\Psi \setminus \delta_{(\mathbf{y}_1, K_1)})\} \mathbf{1}\{\mathbf{z}_2 \notin T(\Psi \setminus \delta_{(\mathbf{y}_2, K_2)})\} \\
&\quad \left. \times \Theta_i(K_1 + \mathbf{y}_1, d(\mathbf{z}_1, \mathbf{b}_1)) \Theta_j(K_2 + \mathbf{y}_2, d(\mathbf{z}_2, \mathbf{b}_2)) ds_1 ds_2 \Psi(d(\mathbf{y}_1, K_1)) \Psi(d(\mathbf{y}_2, K_2)) \right]
\end{aligned}$$

Für $(\mathbf{z}, \mathbf{b}) \in N(K + \mathbf{y})$ und $\Psi(\{(\mathbf{y}, K)\}) > 0$ gilt (vgl. auch Beweis zu Theorem 4.16 in Hug und Last, 2000) $\mathbf{z} \notin T(\Psi \setminus \delta_{(\mathbf{y}, K)})$ und $\delta(T(\Psi), \mathbf{z}, \mathbf{b}) > s$ genau dann, wenn $d(T(\Psi \setminus \delta_{(\mathbf{y}, K)}), \mathbf{z} + s\mathbf{b}) > s$ erfüllt ist. (Wenn also der Punkt $\mathbf{z} + s\mathbf{b}$ innerhalb der zu $\mathbf{y} + K$ gehörigen Zelle des äußeren Skeletts liegt, dann ist sein Abstand zur Menge $T(\Psi \setminus \delta_{(\mathbf{y}, K)})$ größer als s .)

Mit (2.9) und (2.10) kann daher die Gleichungskette fortgesetzt werden durch

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{d-1} \sum_{j=0}^{d-1} a_i a_j \mathbb{E} \left[\int \int \int \int \int \int g(\mathbf{z}_1 + s_1 \mathbf{b}_1, \mathbf{z}_2 + s_2 \mathbf{b}_2) \mathbf{1}\{s_1 \leq t_1\} \mathbf{1}\{s_2 \leq t_2\} \right. \\
&\quad \times s_1^{d-i-1} s_2^{d-j-1} \mathbf{1}\{\mathbf{b}_1 \in A_1\} \mathbf{1}\{\mathbf{b}_2 \in A_2\} \\
&\quad \times \mathbf{1}\{d(T(\Psi \setminus \delta_{(\mathbf{y}_1, K_1)}), \mathbf{z}_1 + s_1 \mathbf{b}_1) > s_1\} \mathbf{1}\{d(T(\Psi \setminus \delta_{(\mathbf{y}_2, K_2)}), \mathbf{z}_2 + s_2 \mathbf{b}_2) > s_2\} \\
&\quad \left. \times \Theta_i(K_1 + \mathbf{y}_1, d(\mathbf{z}_1, \mathbf{b}_1)) \Theta_j(K_2 + \mathbf{y}_2, d(\mathbf{z}_2, \mathbf{b}_2)) ds_1 ds_2 \Psi(d(\mathbf{y}_1, K_1)) \Psi(d(\mathbf{y}_2, K_2)) \right] \\
&= \sum_{i=0}^{d-1} \sum_{j=0}^{d-1} a_i a_j \int \mathbb{E}_{(\mathbf{y}_1, K_1), (\mathbf{y}_2, K_2)}^! \left[\int \int \int \int g(\mathbf{z}_1 + s_1 \mathbf{b}_1, \mathbf{z}_2 + s_2 \mathbf{b}_2) \right. \\
&\quad \times \mathbf{1}\{s_1 \leq t_1\} \mathbf{1}\{s_2 \leq t_2\} s_1^{d-i-1} s_2^{d-j-1} \mathbf{1}\{\mathbf{b}_1 \in A_1\} \mathbf{1}\{\mathbf{b}_2 \in A_2\} \\
&\quad \times \mathbf{1}\{d(T(\Psi + \delta_{(\mathbf{y}_2, K_2)}), \mathbf{z}_1 + s_1 \mathbf{b}_1) > s_1\} \mathbf{1}\{d(T(\Psi + \delta_{(\mathbf{y}_1, K_1)}), \mathbf{z}_2 + s_2 \mathbf{b}_2) > s_2\} \\
&\quad \left. \times \Theta_i(K_1 + \mathbf{y}_1, d(\mathbf{z}_1, \mathbf{b}_1)) \Theta_j(K_2 + \mathbf{y}_2, d(\mathbf{z}_2, \mathbf{b}_2)) ds_1 ds_2 \right] \alpha_{\Psi}^{(2)}(d(\mathbf{y}_1, K_1, \mathbf{y}_2, K_2)) \\
&+ \sum_{i=0}^{d-1} \sum_{j=0}^{d-1} a_i a_j \int \mathbb{E}_{(\mathbf{y}, K)}^! \left[\int \int \int \int g(\mathbf{z}_1 + s_1 \mathbf{b}_1, \mathbf{z}_2 + s_2 \mathbf{b}_2) \mathbf{1}\{s_1 \leq t_1\} \mathbf{1}\{s_2 \leq t_2\} \right. \\
&\quad \times s_1^{d-i-1} s_2^{d-j-1} \mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{z}_1 + s_1 \mathbf{b}_1) > s_1\} \mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{z}_2 + s_2 \mathbf{b}_2) > s_2\} \mathbf{1}\{\mathbf{b}_1 \in A_1\} \\
&\quad \left. \times \mathbf{1}\{\mathbf{b}_2 \in A_2\} \Theta_i(K + \mathbf{y}, d(\mathbf{z}_1, \mathbf{b}_1)) \Theta_j(K + \mathbf{y}, d(\mathbf{z}_2, \mathbf{b}_2)) ds_1 ds_2 \right] \alpha_{\Psi}(d(\mathbf{y}, K)) \\
&= \int \mathbb{E}_{(\mathbf{y}_1, K_1), (\mathbf{y}_2, K_2)}^! \left[\int \int g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \mathbf{1}\{0 < d(\mathbf{y}_1 + K_1, \mathbf{x}_1) \leq t_1\} \mathbf{1}\{0 < d(\mathbf{y}_2 + K_2, \mathbf{x}_2) \leq t_2\} \right. \\
&\quad \times \mathbf{1}\{\mathbf{u}(\mathbf{y}_1 + K_1, \mathbf{x}_1) \in A_1\} \mathbf{1}\{\mathbf{u}(\mathbf{y}_2 + K_2, \mathbf{x}_2) \in A_2\} \\
&\quad \times \mathbf{1}\{d(T(\Psi + \delta_{(\mathbf{y}_2, K_2)}), \mathbf{x}_1) > d(\mathbf{y}_1 + K_1, \mathbf{x}_1)\} \\
&\quad \left. \times \mathbf{1}\{d(T(\Psi + \delta_{(\mathbf{y}_1, K_1)}), \mathbf{x}_2) > d(\mathbf{y}_2 + K_2, \mathbf{x}_2)\} \mathcal{H}^d(d\mathbf{x}_1) \mathcal{H}^d(d\mathbf{x}_2) \right] \\
&\quad \times \alpha_{\Psi}^{(2)}(d(\mathbf{y}_1, K_1, \mathbf{y}_2, K_2)) \\
&+ \int \mathbb{E}_{(\mathbf{y}, K)}^! \left[\int \int g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \mathbf{1}\{0 < d(\mathbf{y} + K, \mathbf{x}_1) \leq t_1\} \mathbf{1}\{0 < d(\mathbf{y} + K, \mathbf{x}_2) \leq t_2\} \right. \\
&\quad \times \mathbf{1}\{\mathbf{u}(\mathbf{y} + K, \mathbf{x}_1) \in A_1\} \mathbf{1}\{\mathbf{u}(\mathbf{y} + K, \mathbf{x}_2) \in A_2\} \mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{x}_1) > d(\mathbf{y} + K, \mathbf{x}_1)\} \\
&\quad \left. \times \mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{x}_2) > d(\mathbf{y} + K, \mathbf{x}_2)\} \mathcal{H}^d(d\mathbf{x}_1) \mathcal{H}^d(d\mathbf{x}_2) \right] \alpha_{\Psi}(d(\mathbf{y}, K))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int \int g(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \left(\int \mathbb{E}_{(\mathbf{y}_1, K_1), (\mathbf{y}_2, K_2)}^! \left[\mathbf{1}\{0 < d(\mathbf{y}_1 + K_1, \mathbf{x}_1) \leq t_1\} \right. \right. \\
&\quad \times \mathbf{1}\{0 < d(\mathbf{y}_2 + K_2, \mathbf{x}_2) \leq t_2\} \mathbf{1}\{\mathbf{u}(\mathbf{y}_1 + K_1, \mathbf{x}_1) \in A_1\} \mathbf{1}\{\mathbf{u}(\mathbf{y}_2 + K_2, \mathbf{x}_2) \in A_2\} \\
&\quad \times \mathbf{1}\{d(T(\Psi + \delta_{(\mathbf{y}_2, K_2)}), \mathbf{x}_1) > d(\mathbf{y}_1 + K_1, \mathbf{x}_1)\} \\
&\quad \left. \times \mathbf{1}\{d(T(\Psi + \delta_{(\mathbf{y}_1, K_1)}), \mathbf{x}_2) > d(\mathbf{y}_2 + K_2, \mathbf{x}_2)\} \right] \alpha_{\Psi}^{(2)}(d(\mathbf{y}_1, K_1, \mathbf{y}_2, K_2)) \\
&+ \int \mathbb{E}_{(\mathbf{y}, K)}^! \left[\mathbf{1}\{0 < d(\mathbf{y} + K, \mathbf{x}_1) \leq t_1\} \mathbf{1}\{0 < d(\mathbf{y} + K, \mathbf{x}_2) \leq t_2\} \right. \\
&\quad \times \mathbf{1}\{\mathbf{u}(\mathbf{y} + K, \mathbf{x}_1) \in A_1\} \mathbf{1}\{\mathbf{u}(\mathbf{y} + K, \mathbf{x}_2) \in A_2\} \mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{x}_1) > d(\mathbf{y} + K, \mathbf{x}_1)\} \\
&\quad \left. \times \mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{x}_2) > d(\mathbf{y} + K, \mathbf{x}_2)\} \right] \alpha_{\Psi}(d(\mathbf{y}, K)) \Big) \mathcal{H}^d(d\mathbf{x}_1) \mathcal{H}^d(d\mathbf{x}_2),
\end{aligned}$$

unter Verwendung von Satz 2.2 und dem Satz von Fubini. Da $g : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty]$ beliebig gewählt ist, folgt die Behauptung. \square

Ohne weitere Voraussetzungen ist nun in gewisser Analogie zu Theorem 1.6 in Hug und Last (2000) zunächst für $J^{(2)}$ ein Aussage hinsichtlich absoluter Stetigkeit bezüglich \mathcal{H}^2 möglich.

Lemma 2.2. *Es seien die Voraussetzungen von Lemma 2.1 erfüllt. Dann ist die durch Lemma 2.1 definierte Größe $J^{(2)}(\mathbf{x}_1, \cdot, A_1, \mathbf{x}_2, \cdot, A_2)$ für \mathcal{H}^{2d} -f. a. $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ absolut stetig bezüglich \mathcal{H}^2 mit Dichte*

$$\begin{aligned}
&(t_1, t_2) \mapsto \\
&\sum_{i=0}^{d-1} \sum_{j=0}^{d-1} a_i a_j \int \int \int \mathbb{E}_{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{z}_1 - t_1 \mathbf{b}_1, K_1), (\mathbf{x}_1 - \mathbf{z}_2 - t_2 \mathbf{b}_2, K_2)}^! \left[\mathbf{1}\{d(T(\Psi + \delta_{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{z}_2 - t_2 \mathbf{b}_2, K_2)}), \mathbf{x}_1) > t_1\} \right. \\
&\quad \times \mathbf{1}\{d(T(\Psi + \delta_{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{z}_1 - t_1 \mathbf{b}_1, K_1)}), \mathbf{x}_2) > t_2\} \left. \right] \mathbf{1}\{\mathbf{b}_1 \in A_1\} \mathbf{1}\{\mathbf{b}_2 \in A_2\} t_1^{d-i-1} t_2^{d-j-1} \\
&\quad \times \varrho^{(2)}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{z}_1 - t_1 \mathbf{b}_1, K_1, \mathbf{x}_2 - \mathbf{z}_2 - t_2 \mathbf{b}_2, K_2) \\
&\quad \times \Theta_i(K_1, d(\mathbf{z}_1, \mathbf{b}_1)) \Theta_j(K_2, d(\mathbf{z}_2, \mathbf{b}_2)) Q_2(d(K_1, K_2)).
\end{aligned} \tag{2.98}$$

Für die zu untersuchende Existenz der zweifachen partiellen rechtseitigen Ableitung von $J^{(2)}$ bei $(t_1, t_2) = (0, 0)$ ist dann das Verhalten dieser Dichte für $(t_1, t_2) \downarrow (0, 0)$ von Interesse.

Beweis. Mit $d(K + \mathbf{y}, \mathbf{x}) = d(K - \mathbf{x}, -\mathbf{y})$, $\mathbf{u}(K + \mathbf{y}, \mathbf{x}) = \mathbf{u}(K - \mathbf{x}, -\mathbf{y})$, den Substitutionen $\mathbf{y}_1 \mapsto -\mathbf{y}_1$ und $\mathbf{y}_2 \mapsto -\mathbf{y}_2$ sowie zweimaliger Anwendung von Satz 2.2 gilt

$$\begin{aligned}
& J^{(2)}(\mathbf{x}_1, t_1, A_1, \mathbf{x}_2, t_2, A_2) \\
&= \int \int \int \mathbb{E}_{(-\mathbf{y}_1, K_1), (-\mathbf{y}_2, K_2)}^! \left[\mathbf{1}\{d(T(\Psi + \delta_{(-\mathbf{y}_2, K_2)}), \mathbf{x}_1) > d(K_1 - \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1))\} \right. \\
&\quad \times \left. \mathbf{1}\{d(T(\Psi + \delta_{(-\mathbf{y}_1, K_1)}), \mathbf{x}_2) > d(K_2 - \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2))\} \right] \mathbf{1}\{0 < d(K_1 - \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) \leq t_1\} \\
&\quad \times \mathbf{1}\{0 < d(K_2 - \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) \leq t_2\} \mathbf{1}\{\mathbf{u}(K_1 - \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) \in A_1\} \mathbf{1}\{\mathbf{u}(K_2 - \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) \in A_2\} \\
&\quad \times \varrho^{(2)}(-\mathbf{y}_1, K_1, -\mathbf{y}_2, K_2) \mathcal{H}^d(d\mathbf{y}_1) \mathcal{H}^d(d\mathbf{y}_2) Q_2(d(K_1, K_2)) \\
&= \sum_{i=0}^{d-1} \sum_{j=0}^{d-1} a_i a_j \int \int \int \int \mathbb{E}_{(-\mathbf{z}_1 - s_1 \mathbf{b}_1, K_1), (-\mathbf{z}_2 - s_2 \mathbf{b}_2, K_2)}^! \left[\mathbf{1}\{d(T(\Psi + \delta_{(-\mathbf{z}_2 - s_2 \mathbf{b}_2, K_2)}), \mathbf{x}_1) > s_1\} \right. \\
&\quad \times \left. \mathbf{1}\{d(T(\Psi + \delta_{(-\mathbf{z}_1 - s_1 \mathbf{b}_1, K_1)}), \mathbf{x}_2) > s_2\} \right] \mathbf{1}\{s_1 \leq t_1\} \mathbf{1}\{s_2 \leq t_2\} \\
&\quad \times \mathbf{1}\{\mathbf{b}_1 \in A_1\} \mathbf{1}\{\mathbf{b}_2 \in A_2\} s_1^{d-i-1} s_2^{d-j-1} \varrho^{(2)}(-\mathbf{z}_1 - s_1 \mathbf{b}_1, K_1, -\mathbf{z}_2 - s_2 \mathbf{b}_2, K_2) \\
&\quad \times \Theta_i(K_1 - \mathbf{x}_1, d(\mathbf{z}_1, \mathbf{b}_1)) \Theta_j(K_2 - \mathbf{x}_2, d(\mathbf{z}_2, \mathbf{b}_2)) ds_1 ds_2 Q_2(d(K_1, K_2)) \\
&= \int \sum_{i=0}^{d-1} \sum_{j=0}^{d-1} a_i a_j \int \int \int \mathbb{E}_{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{z}_1 - s_1 \mathbf{b}_1, K_1), (\mathbf{x}_1 - \mathbf{z}_2 - s_2 \mathbf{b}_2, K_2)}^! \left[\mathbf{1}\{d(T(\Psi + \delta_{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{z}_2 - s_2 \mathbf{b}_2, K_2)}), \mathbf{x}_1) > s_1\} \right. \\
&\quad \times \left. \mathbf{1}\{d(T(\Psi + \delta_{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{z}_1 - s_1 \mathbf{b}_1, K_1)}), \mathbf{x}_2) > s_2\} \right] \mathbf{1}\{s_1 \leq t_1\} \mathbf{1}\{s_2 \leq t_2\} \\
&\quad \times \mathbf{1}\{\mathbf{b}_1 \in A_1\} \mathbf{1}\{\mathbf{b}_2 \in A_2\} s_1^{d-i-1} s_2^{d-j-1} \varrho^{(2)}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{z}_1 - s_1 \mathbf{b}_1, K_1, \mathbf{x}_2 - \mathbf{z}_2 - s_2 \mathbf{b}_2, K_2) \\
&\quad \times \Theta_i(K_1, d(\mathbf{z}_1, \mathbf{b}_1)) \Theta_j(K_2, d(\mathbf{z}_2, \mathbf{b}_2)) Q_2(d(K_1, K_2)) \mathcal{H}^2(d(s_1, s_2)),
\end{aligned}$$

wobei bei der letzten Umformung die Substitutionen $\mathbf{z}_1 \mapsto \mathbf{z}_1 - \mathbf{x}_1$ und $\mathbf{z}_2 \mapsto \mathbf{z}_2 - \mathbf{x}_2$ unter Berücksichtigung der Eigenschaft $\Theta_i(K + \mathbf{x}, (A + \mathbf{x}) \times B) = \Theta_i(K, A \times B)$ sowie der Satz von Fubini angewendet wurden. \square

Ähnlich wie in Hug und Last (2000) erfordert die Konvergenz der Dichte für $(t_1, t_2) \downarrow (0, 0)$ u. a. zusätzliche Voraussetzungen an die reduzierten Palmischen Verteilungen. Um dies zu vermeiden, erfolgt in den folgenden Unterabschnitten eine Betrachtung bestimmter Beispiele markierter Punktprozesse einschließlich einer Diskussion der Existenz der Ableitungen von $J^{(1)}$. Neben den dabei untersuchten drei Beispielen des Poisson-Prozesses, des Matérn-Prozesses und des Gibbs-Prozesses sind in ähnlicher Weise auch Ergebnisse für z. B. Cox-Prozesse und Poisson-Cluster-Prozesse (vgl. für den Fall erster Ordnung Hug und Last, 2000) möglich.

Für die Formulierung der Sätze der folgenden Unterabschnitte werden die folgenden Integrierbarkeitsbedingungen benötigt.

Voraussetzung 2.5. Für das Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf \mathcal{K}^d gelte für alle Indizes $j = 0, \dots, d-1$

$$\int \Theta_j(K, \mathbb{R}^d \times S^{d-1})Q(dK) < \infty. \quad (2.99)$$

Voraussetzung 2.6. Für das auf der Menge der strikt konvexen Körper aus der Klasse C^1 konzentrierte Wahrscheinlichkeitsmaß Q gelte für \mathcal{H}^d -f. a. $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^d$

$$\int \int \mathbf{1}\{\mathbf{z} \in \partial K \cap [\partial K + \mathbf{r}]\} \eta(K, K + \mathbf{r}, \mathbf{z}) \mathcal{H}^{d-2}(d\mathbf{z}) Q(dK) < \infty. \quad (2.100)$$

Voraussetzung 2.7. Für das drehungsinvariante Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf \mathcal{K}^d gelte für \mathcal{H}^1 -f. a. $r > 0$

$$\int \int \int \mathbf{1}\{\mathbf{y} \in \partial K \cap \partial B^d(\mathbf{z}, r)\} \tilde{\eta}(B^d(\mathbf{z}, r), K, \mathbf{y}) \mathcal{H}^{d-2}(d\mathbf{y}) C_{d-1}(K, d\mathbf{z}) Q(dK) < \infty. \quad (2.101)$$

2.5.2 Poisson-Prozess

Satz 2.13. Es seien $A_1, A_2 \in \mathcal{B}(S^{d-1})$. Sei Ψ ein Poisson-Prozess in $\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d$, der die Voraussetzungen 2.1, 2.3 (vgl. S. 8) und 2.5 erfüllt. Außerdem sei ϱ beschränkt und $\varrho(\cdot, K)$ \mathcal{H}^d -f.ü. stetig für Q -f.a. $K \in \mathcal{K}^d$. Dann ist für das Boolesche Modell $\Xi = T(\Psi)$ die Größe $J^{(2)}(\mathbf{x}_1, t_1, A_1, \mathbf{x}_2, t_2, A_2)$ für \mathcal{H}^{2d} -fast alle $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathbb{R}^{2d}$ zweimal partiell rechtseitig differenzierbar bei $(t_1, t_2) = (0, 0)$, und es gilt

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial}{\partial t_2} \right|_{t_2=0+} \left. \frac{\partial}{\partial t_1} \right|_{t_1=0+} J^{(2)}(\mathbf{x}_1, t_1, A_1, \mathbf{x}_2, t_2, A_2) \\ &= 4\bar{C}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \int \int \mathbf{1}\{\mathbf{y} \notin \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + K\} \varrho(\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}, K) \Theta_{d-1}(K, d\mathbf{y} \times A_1) Q(dK) \\ & \quad \times \int \int \mathbf{1}\{\mathbf{y} \notin \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 + K\} \varrho(\mathbf{x}_2 - \mathbf{y}, K) \Theta_{d-1}(K, d\mathbf{y} \times A_2) Q(dK). \end{aligned} \quad (2.102)$$

Beweis. Mit den Eigenschaften $\alpha_\Psi^{(2)} = \alpha_\Psi \otimes \alpha_\Psi$ und (2.12) des Poisson-Prozesses ist mit Lemma 2.2 eine Dichte von $J^{(2)}(\mathbf{x}_1, t_1, A_1, \mathbf{x}_2, t_2, A_2)$ durch

$$\begin{aligned} (t_1, t_2) & \mapsto \sum_{i=0}^{d-1} \sum_{j=0}^{d-1} a_i a_j t_1^{d-i-1} t_2^{d-j-1} \int \int \int \int \mathbb{E} \left[\mathbf{1}\{d(T(\Psi + \delta_{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{z}_2 - t_2 \mathbf{b}_2, K_2)}), \mathbf{x}_1) > t_1\} \right. \\ & \quad \times \left. \mathbf{1}\{d(T(\Psi + \delta_{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{z}_1 - t_1 \mathbf{b}_1, K_1)}), \mathbf{x}_2) > t_2\} \right] \mathbf{1}\{\mathbf{b}_1 \in A_1\} \mathbf{1}\{\mathbf{b}_2 \in A_2\} \\ & \quad \times \varrho(\mathbf{x}_1 - \mathbf{z}_1 - t_1 \mathbf{b}_1, K_1) \varrho(\mathbf{x}_2 - \mathbf{z}_2 - t_2 \mathbf{b}_2, K_2) \\ & \quad \times \Theta_i(K_1, d(\mathbf{z}_1, \mathbf{b}_1)) \Theta_j(K_2, d(\mathbf{z}_2, \mathbf{b}_2)) Q(dK_1) Q(dK_2) \end{aligned} \quad (2.103)$$

gegeben. Die Beschränktheit von ϱ und die Integrabilitätsbedingung (2.99) sichern für jeden Integranden der Summe die Existenz einer von (t_1, t_2) unabhängigen und bezüglich des Maßes $P(d\psi)\Theta_i(K_1, d(\mathbf{z}_1, \mathbf{b}_1))\Theta_j(K_2, d(\mathbf{z}_2, \mathbf{b}_2))Q(dK_1)Q(dK_2)$ integrierbaren Majorante. Es genügt daher zu zeigen, dass für $\Theta_{d-1}(K_1, \cdot)$ -f.a. $(\mathbf{z}_1, \mathbf{b}_1) \in \partial K_1 \times S^{d-1}$, $\Theta_{d-1}(K_2, \cdot)$ -f.a. $(\mathbf{z}_2, \mathbf{b}_2) \in \partial K_2 \times S^{d-1}$, Q -f.a. $K_1 \in \mathcal{K}^d$ und Q -f.a. $K_2 \in \mathcal{K}^d$

$$\begin{aligned} & \mathbf{1}\{d(T(\Psi + \delta_{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{z}_2 - t_2 \mathbf{b}_2, K_2)}), \mathbf{x}_1) > t_1\} \mathbf{1}\{d(T(\Psi + \delta_{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{z}_1 - t_1 \mathbf{b}_1, K_1)}), \mathbf{x}_2) > t_2\} \\ & \times \varrho(\mathbf{x}_1 - \mathbf{z}_1 - t_1 \mathbf{b}_1, K_1) \varrho(\mathbf{x}_2 - \mathbf{z}_2 - t_2 \mathbf{b}_2, K_2) \end{aligned} \quad (2.104)$$

für $(t_1, t_2) \downarrow (0, 0)$ P -f.s. gegen

$$\begin{aligned} & \mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{x}_1) > 0\} \mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{x}_2) > 0\} \mathbf{1}\{d(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 + K_2, \mathbf{z}_2) > 0\} \\ & \times \mathbf{1}\{d(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + K_1, \mathbf{z}_1) > 0\} \varrho(\mathbf{x}_1 - \mathbf{z}_1, K_1) \varrho(\mathbf{x}_2 - \mathbf{z}_2, K_2) \end{aligned} \quad (2.105)$$

konvergiert, da in diesem Fall die Behauptung des Satzes unter Berücksichtigung von $t_1^{d-i-1} t_2^{d-j-1} \rightarrow 0$, $(i, j) \neq (d-1, d-1)$, für $(t_1, t_2) \downarrow (0, 0)$, unmittelbar aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz folgt.

Es gilt die Zerlegung

$$\mathbf{1}\{d(T(\Psi + \delta_{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{z}_1 - t_1 \mathbf{b}_1, K_1)}), \mathbf{x}_2) > t_2\} = \mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{x}_2) > t_2\} \mathbf{1}\{d(K_1 - \mathbf{z}_1 - t_1 \mathbf{b}_1, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) > t_2\}.$$

Für \mathcal{H}^{2d} -f.a. $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathbb{R}^{2d}$ und für

$$\Theta_{d-1}(K_1, \cdot) \otimes \Theta_{d-1}(K_2, \cdot) \otimes Q \otimes Q\text{-f.a. } (\mathbf{z}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{b}_2, K_1, K_2)$$

sind weder $\mathbf{x}_1 - \mathbf{z}_1$ und $\mathbf{x}_2 - \mathbf{z}_2$ Unstetigkeitsstellen von $\varrho(\cdot, K_1)$ bzw. $\varrho(\cdot, K_2)$, noch gilt $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 \in \partial K_1 - \mathbf{z}_1$ oder $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \partial K_2 - \mathbf{z}_2$. Es seien im Folgenden $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathbb{R}^{2d}$ entsprechend gewählt.

Falls $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 \notin K_1 - \mathbf{z}_1$ gilt, ist $\mathbf{1}\{d(K_1 - \mathbf{z}_1, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) > 0\} = 1$. Es gibt daher ein ε mit $0 < \varepsilon < d(K_1 - \mathbf{z}_1, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) < \infty$. Damit gilt $0 < \frac{\varepsilon}{2} < d(K_1 - \mathbf{z}_1 - t_1 \mathbf{b}_1, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$ für alle $0 \leq t_1 < \frac{\varepsilon}{2}$. Für alle $0 \leq t_2 < \frac{\varepsilon}{2}$ ist dann $\mathbf{1}\{d(K_1 - \mathbf{z}_1 - t_1 \mathbf{b}_1, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) > t_2\} = 1$. Ähnlich kann für $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \notin K_2 - \mathbf{z}_2$, $\mathbf{x}_1 \notin T(\Psi)$ und $\mathbf{x}_2 \notin T(\Psi)$ argumentiert werden. Beim gleichzeitigen Eintreten aller vier Fälle wird folglich die Konvergenz von (2.104) gegen (2.105) durch die Stetigkeit von $\varrho(\cdot, K)$ für Q -f.a. K gesichert.

Für den Fall $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 \in K_1 - \mathbf{z}_1$ kann wegen $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 \notin \partial K_1 - \mathbf{z}_1$ angenommen werden, dass K_1 innere Punkte besitzt. Dann liegt $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ im Inneren von $K_1 - \mathbf{z}_1$, weshalb es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass auch eine offene Kugel um $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ mit Radius ε noch ganz in $K_1 - \mathbf{z}_1$ liegt. Damit liegt für $0 \leq t_1 < \frac{\varepsilon}{2}$ auch $B^d(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1, \frac{\varepsilon}{2})$ noch ganz in $K_1 - \mathbf{z}_1 - t_1 \mathbf{b}_1$, weshalb für alle $t_2 \geq 0$ $\mathbf{1}\{d(K_1 - \mathbf{z}_1 - t_1 \mathbf{b}_1, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) > t_2\} = 0$ gilt. Analog kann für $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in K_2 - \mathbf{z}_2$ argumentiert werden. Falls $\mathbf{x}_1 \in T(\Psi)$ oder $\mathbf{x}_2 \in T(\Psi)$ gilt, verschwinden ebenfalls sowohl (2.104) als auch (2.105). Tritt also mindestens einer dieser Fälle ein, ist damit wiederum die Konvergenz von (2.104) gegen (2.105) gesichert. \square

Um für $J^{(1)}$ ein ähnliches Ergebnis zu erhalten, sind zusätzliche Voraussetzungen an Q notwendig.

Satz 2.14. *Sei Ψ ein Poisson-Prozess in $\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d$, der die Voraussetzungen 2.1 und 2.3 (vgl. S. 8) erfüllt. Q sei auf der Menge der strikt konvexen Körper aus der Klasse C^2 konzentriert und genüge der Voraussetzung 2.6 (vgl. S. 45). Außerdem sei ϱ beschränkt und $\varrho(\cdot, K)$ \mathcal{H}^d -f.ü. stetig für Q -f.a. $K \in \mathcal{K}^d$. Seien A_1 und A_2 offen in S^{d-1} . Dann ist für das Boolesche Modell $\Xi = T(\Psi)$ die Größe $J^{(1)}(\mathbf{x}_1, t_1, A_1, \mathbf{x}_2, t_2, A_2)$ für \mathcal{H}^{2d} -fast alle $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathbb{R}^{2d}$ zweimal partiell rechtsseitig differenzierbar bei $(t_1, t_2) = (0, 0)$, und es gilt*

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial}{\partial t_2} \right|_{t_2=0+} \left. \frac{\partial}{\partial t_1} \right|_{t_1=0+} J^{(1)}(\mathbf{x}_1, t_1, A_1, \mathbf{x}_2, t_2, A_2) \\ &= \overline{C}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \int \int \mathbf{1}\{\mathbf{y} \in [\partial K + \mathbf{x}_1] \cap [\partial K + \mathbf{x}_2]\} \eta(K + \mathbf{x}_1, K + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) \varrho(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 - \mathbf{y}, K) \\ & \quad \times \mathbf{1}\{\mathbf{n}(K + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) \in A_1\} \mathbf{1}\{\mathbf{n}(K + \mathbf{x}_1, \mathbf{y}) \in A_2\} \mathcal{H}^{d-2}(d\mathbf{y}) Q(dK). \end{aligned} \tag{2.106}$$

Beweis. Aus der Darstellung gemäß Lemma 2.1 folgt mit der Eigenschaft (2.11) des Poisson-Prozesses, der Voraussetzung 2.1 über das Intensitätsmaß α_Ψ , der Substitution $\mathbf{y} \mapsto -\mathbf{y} + \mathbf{x}_1$ und einer Anwendung der verallgemeinerten Steiner-Formel in Satz 2.2

$$\begin{aligned} & J^{(1)}(\mathbf{x}_1, t_1, A_1, \mathbf{x}_2, t_2, A_2) \\ &= \int \int \mathbb{E} \left[\mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{x}_1) > d(\mathbf{y} + K, \mathbf{x}_1)\} \mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{x}_2) > d(\mathbf{y} + K, \mathbf{x}_2)\} \right] \\ & \quad \times \mathbf{1}\{0 < d(\mathbf{y} + K, \mathbf{x}_1) \leq t_1\} \mathbf{1}\{0 < d(\mathbf{y} + K, \mathbf{x}_2) \leq t_2\} \\ & \quad \times \mathbf{1}\{\mathbf{u}(\mathbf{y} + K, \mathbf{x}_1) \in A_1\} \mathbf{1}\{\mathbf{u}(\mathbf{y} + K, \mathbf{x}_2) \in A_2\} \varrho(\mathbf{y}, K) \mathcal{H}^d(d\mathbf{y}) Q(dK) \\ &= \int \int \mathbb{E} \left[\mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{x}_1) > d(K, \mathbf{y})\} \mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{x}_2) > d(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + K, \mathbf{y})\} \right] \\ & \quad \times \mathbf{1}\{0 < d(K, \mathbf{y}) \leq t_1\} \mathbf{1}\{0 < d(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + K, \mathbf{y}) \leq t_2\} \\ & \quad \times \mathbf{1}\{\mathbf{u}(K, \mathbf{y}) \in A_1\} \mathbf{1}\{\mathbf{u}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + K, \mathbf{y}) \in A_2\} \varrho(\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}, K) \mathcal{H}^d(d\mathbf{y}) Q(dK) \\ &= \sum_{i=0}^{d-1} a_i \int \int \int \mathbb{E} \left[\mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{x}_1) > s\} \mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{x}_2) > d(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + K, \mathbf{z} + s\mathbf{b})\} \right] \\ & \quad \times \mathbf{1}\{s \leq t_1\} \mathbf{1}\{0 < d(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + K, \mathbf{z} + s\mathbf{b}) \leq t_2\} \varrho(\mathbf{x}_1 - \mathbf{z} - s\mathbf{b}, K) \mathbf{1}\{\mathbf{b} \in A_1\} \\ & \quad \times \mathbf{1}\{\mathbf{u}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + K, \mathbf{z} + s\mathbf{b}) \in A_2\} s^{d-i-1} \Theta_i(K, d(\mathbf{z}, \mathbf{b})) Q(dK) ds \end{aligned} \tag{2.107}$$

Wegen der Beschränktheit von ϱ und der Integrierbarkeitsbedingung (2.99) existiert für jeden Integranden in der Dichte

$$\begin{aligned}
t_1 \mapsto & \sum_{i=0}^{d-1} a_i \int \int \mathbb{E} \left[\mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{x}_1) > t_1\} \mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{x}_2) > d(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + K, \mathbf{z} + t_1 \mathbf{b})\} \right] \\
& \times \mathbf{1}\{0 < d(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + K, \mathbf{z} + t_1 \mathbf{b}) \leq t_2\} \varrho(\mathbf{x}_1 - \mathbf{z} - t_1 \mathbf{b}, K) \mathbf{1}\{\mathbf{b} \in A_1\} \\
& \times \mathbf{1}\{\mathbf{u}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + K, \mathbf{z} + t_1 \mathbf{b}) \in A_2\} t_1^{d-i-1} \Theta_i(K, d(\mathbf{z}, \mathbf{b})) Q(dK)
\end{aligned} \tag{2.108}$$

von $J^{(1)}$ eine von (t_1, t_2) unabhängige und bezüglich $P(d\psi) \Theta_i(K, d(\mathbf{z}, \mathbf{b})) Q(dK)$ integrierbare Majorante. Für $\Theta_{d-1}(K, \cdot)$ -f.a. $(\mathbf{z}, \mathbf{b}) \in \partial K \times S^{d-1}$ und Q -f.a. $K \in \mathcal{K}^d$ konvergiert

$$\begin{aligned}
& \mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{x}_1) > t_1\} \mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{x}_2) > d(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + K, \mathbf{z} + t_1 \mathbf{b})\} \\
& \times \mathbf{1}\{0 < d(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + K, \mathbf{z} + t_1 \mathbf{b}) \leq t_2\} \varrho(\mathbf{x}_1 - \mathbf{z} - t_1 \mathbf{b}, K) \\
& \times \mathbf{1}\{\mathbf{u}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + K, \mathbf{z} + t_1 \mathbf{b}) \in A_2\}
\end{aligned} \tag{2.109}$$

für $t_1 \downarrow 0$ P -f.s. gegen

$$\begin{aligned}
& \mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{x}_1) > 0\} \mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{x}_2) > d(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + K, \mathbf{z})\} \mathbf{1}\{0 < d(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + K, \mathbf{z}) \leq t_2\} \\
& \times \varrho(\mathbf{x}_1 - \mathbf{z}, K) \mathbf{1}\{\mathbf{u}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + K, \mathbf{z}) \in A_2\}.
\end{aligned} \tag{2.110}$$

Dieses kann auf ähnliche Weise wie im Beweis zu Satz 2.13 gezeigt werden: Für \mathcal{H}^{2d} -f. a. $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ und für $\Theta_{d-1}(K, \cdot) \otimes Q$ -f. a. $(\mathbf{z}, \mathbf{b}, K)$ ist P -f. s. weder $\mathbf{x}_1 - \mathbf{z}$ eine Unstetigkeitsstelle von $\varrho(\cdot, K)$, noch gilt $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 \in \partial K - \mathbf{z}$, $d(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + K, \mathbf{z}) = t_2$ oder $d(T(\Psi), \mathbf{x}_2) = d(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + K, \mathbf{z})$, noch liegt wegen der Stetigkeit von $\mathbf{u}(K, \cdot)$ der Vektor $\mathbf{u}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + K, \mathbf{z})$ auf dem Rand von A_2 relativ zu S^{d-1} . Seien nun $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ entsprechend gewählt.

Die Argumentation für die Terme $\mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{x}_1) > t_1\}$, $\mathbf{1}\{0 < d(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + K, \mathbf{z} + t_1 \mathbf{b}) \leq t_2\}$ und $\mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{x}_2) > d(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + K, \mathbf{z} + t_1 \mathbf{b})\}$ hinsichtlich der Konvergenz von (2.109) gegen (2.110) verläuft nun völlig analog zu jener im Beweis von Satz 2.13. Beispielsweise gibt es für den Fall $d(T(\Psi), \mathbf{x}_2) > d(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + K, \mathbf{z})$ ein ε , $0 < \varepsilon < d(T(\Psi), \mathbf{x}_2) - d(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + K, \mathbf{z})$, so dass für alle $t_1 \leq \varepsilon$ auch $d(T(\Psi), \mathbf{x}_2) > d(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + K, \mathbf{z} + t_1 \mathbf{b})$ richtig ist, usw. Da A_2 offen in S^{d-1} ist, folgt aufgrund der Stetigkeit von $\mathbf{u}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + K, \cdot)$ aus $\mathbf{u}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + K, \mathbf{z}) \in A_2$ auch $\mathbf{u}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + K, \mathbf{z} + t_1 \mathbf{b}) \in A_2$ für alle genügend kleinen t_1 . Ist hingegen $\mathbf{u}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + K, \mathbf{z}) \notin A_2$, liegt für \mathcal{H}^{2d} -f.a. $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathbb{R}^{2d}$ $\mathbf{u}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + K, \mathbf{z})$ im bezüglich S^{d-1} relativen Inneren von $S^{d-1} \setminus A_2$, und für alle genügend kleinen t_1 ist auch $\mathbf{u}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + K, \mathbf{z} + t_1 \mathbf{b}) \notin A_2$ richtig. Aus der Stetigkeit von $\varrho(\cdot, K)$ für Q -f.a. K folgt somit die Konvergenz von (2.109)

gegen (2.110), so dass sich schließlich mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz für \mathcal{H}^{2d} -f.a. $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial}{\partial t_1} \right|_{t_1=0+} J^{(1)}(\mathbf{x}_1, t_1, A_1, \mathbf{x}_2, t_2, A_2) \\ &= a_{d-1} \int \int \mathbb{E} \left[\mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{x}_1) > 0\} \mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{x}_2) > d(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + K, \mathbf{z})\} \right] \\ & \quad \times \mathbf{1}\{0 < d(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + K, \mathbf{z}) \leq t_2\} \mathbf{1}\{\mathbf{b} \in A_1\} \mathbf{1}\{\mathbf{u}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + K, \mathbf{z}) \in A_2\} \\ & \quad \times \varrho(\mathbf{x}_1 - \mathbf{z}, K) \Theta_{d-1}(K, d(\mathbf{z}, \mathbf{b})) Q(dK) \end{aligned} \quad (2.111)$$

ergibt.

Da Q auf der Menge der strikt konvexen Körper aus der Klasse C^2 konzentriert ist, gilt für Q -f.a. K sowohl $\mathbf{b} = \mathbf{n}(K, \mathbf{z})$ aufgrund der Glattheit als auch

$$a_{d-1} \Theta_{d-1}(K, d\mathbf{z} \times S^{d-1}) = \mathbf{1}\{\mathbf{z} \in \partial K\} \mathcal{H}^{d-1}(d\mathbf{z}),$$

da die strikte Konvexität impliziert, dass K innere Punkte hat und folglich Theorem 4.2.5 in Schneider (1993) angewendet werden kann. Damit ist (2.111) in die für Satz 2.9 notwendige Form gebracht, und es gilt

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial}{\partial t_1} \right|_{t_1=0+} J^{(1)}(\mathbf{x}_1, t_1, A_1, \mathbf{x}_2, t_2, A_2) \\ &= \int \int \int \mathbb{E} \left[\mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{x}_1) > 0\} \mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{x}_2) > s\} \right] \mathbf{1}\{\mathbf{z} \in \partial K \cap \partial[K_s + \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2]\} \\ & \quad \times \eta(K, K_s + \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{z}) \mathbf{1}\{s \leq t_2\} \mathbf{1}\{\mathbf{n}(K, \mathbf{z}) \in A_1\} \mathbf{1}\{\mathbf{u}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + K, \mathbf{z}) \in A_2\} \\ & \quad \times \varrho(\mathbf{x}_1 - \mathbf{z}, K) \mathcal{H}^{d-2}(d\mathbf{z}) Q(dK) ds. \end{aligned} \quad (2.112)$$

Folglich existiert eine Dichte

$$\begin{aligned} t \mapsto & \mathbb{E} \left[\mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{x}_1) > 0\} \mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{x}_2) > t\} \right] \int \int \mathbf{1}\{\mathbf{z} \in \partial K \cap \partial[K_t + \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2]\} \\ & \quad \times \eta(K, K_t + \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{z}) \mathbf{1}\{\mathbf{n}(K, \mathbf{z}) \in A_1\} \mathbf{1}\{\mathbf{u}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + K, \mathbf{z}) \in A_2\} \\ & \quad \times \varrho(\mathbf{x}_1 - \mathbf{z}, K) \mathcal{H}^{d-2}(d\mathbf{z}) Q(dK). \end{aligned} \quad (2.113)$$

Im Sinne der obigen Diskussion folgt zunächst für \mathcal{H}^{2d} -f. a. $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathbb{R}^{2d}$ für $t \downarrow 0$ die Konvergenz

$$\mathbb{E} \left[\mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{x}_1) > 0\} \mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{x}_2) > t\} \right] \rightarrow \mathbb{E} \left[\mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{x}_1) > 0\} \mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{x}_2) > 0\} \right].$$

Ebenso kann argumentiert werden, dass für genügend kleines t $\mathbf{1}\{\mathbf{n}(K, \mathbf{z}) \in A_1\}$ und $\mathbf{1}\{\mathbf{u}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + K, \mathbf{z}) \in A_2\} = \mathbf{1}\{\mathbf{n}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + K, \mathbf{p}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + K, \mathbf{z})) \in A_2\}$ stetig in \mathbf{z} sind. Da K Q -f. s. strikt konvex ist, sind die Normalenvektoren $\mathbf{n}(K, \mathbf{z})$ und $\mathbf{n}(K + \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{z})$ für \mathcal{H}^{2d} -f. a. $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathbb{R}^{2d}$ nicht parallel, womit

$$\sin \angle(\mathbf{n}(K, \mathbf{z}), \mathbf{n}(K + \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{z})) > 0$$

gilt. Aus der Integrabilitätsbedingung (2.100) folgt nun für Q -f. a. K auch

$$\int \mathbf{1}\{\mathbf{z} \in \partial K \cap \partial[K + \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2]\} \eta(K, K + \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \mathbf{z}) \mathcal{H}^{d-2}(d\mathbf{z}) < \infty,$$

so dass mit der Stetigkeit von $\varrho(\cdot, K)$ für Q -f. a. K die Voraussetzungen des Satzes 2.10 erfüllt sind. Mit Integrabilitätsbedingung (2.100) existiert dann eine von t unabhängige und bezüglich des Maßes $P(d\psi) \mathcal{H}^{d-2}(d\mathbf{z}) Q(dK)$ integrierbare Majorante für den Integranden in (2.113), und die Behauptung folgt aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz und der Substitution $\mathbf{z} \mapsto \mathbf{z} - \mathbf{x}_2$. \square

Im Fall drehungsinvarianter Kornverteilungen kann insbesondere die Forderung nach strikter Konvexität fallen gelassen werden.

Satz 2.15. *Sei Ψ ein stationärer und isotroper Poisson-Prozess in $\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d$, $d \in \{2, 3\}$, mit Intensität λ , $0 < \lambda < \infty$, und Kornverteilung Q , der die Voraussetzungen 2.1 und 2.3 (vgl. S. 8) erfüllt. Q genüge der Voraussetzung 2.7 (vgl. S. 45) und sei im Fall $d = 2$ auf der Menge der konvexen Körper mit stückweise C^1 -glattem Rand und im Fall $d = 3$ auf der Menge der konvexen Körper mit stückweise C^2 -glattem Rand konzentriert. Dann ist die Größe $J^{(1)}(\mathbf{x}_1, t_1, S^{d-1}, \mathbf{x}_2, t_2, S^{d-1})$ für \mathcal{H}^{2d} -fast alle $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathbb{R}^{2d}$ zweimal partiell rechtsseitig differenzierbar bei $(t_1, t_2) = (0, 0)$, und es gilt mit $r := \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|$*

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial}{\partial t_2} \right|_{t_2=0+} \left. \frac{\partial}{\partial t_1} \right|_{t_1=0+} J^{(1)}(\mathbf{x}_1, t_1, A_1, \mathbf{x}_2, t_2, A_2) \\ &= \bar{C}(r) \frac{2c\lambda}{db dr^{d-1}} \int \int_{\partial K \cap \partial B^d(\mathbf{z}, r)} \tilde{\eta}(B^d(\mathbf{z}, r), K, \mathbf{y}) \mathcal{H}^{d-2}(d\mathbf{y}) C_{d-1}(K, d\mathbf{z}) Q(dK) \end{aligned} \quad (2.114)$$

mit

- $c = 1$, falls Q auf der Menge der konvexen Körper mit inneren Punkten konzentriert ist,
- $c = 2$, falls Q auf der Menge der konvexen Körper ohne innere Punkte konzentriert ist.

Beweis. Es sei $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$. Da im ersten Teil des Beweises von Satz 2.14 die Glattheit und die strikte Konvexität der Körner nicht verwendet wurde, lässt sich dieser unmittelbar übertragen, und es gilt mit (2.111) und der Drehungsinvarianz von Q

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{\partial}{\partial t_1} \right|_{t_1=0+} J^{(1)}(\mathbf{x}_1, t_1, S^{d-1}, \mathbf{x}_2, t_2, S^{d-1}) \\
&= 2\lambda \int \int \mathbb{E} \left[\mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{x}_1) > 0\} \mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{x}_2) > d(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + K, \mathbf{z})\} \right] \\
&\quad \times \mathbf{1}\{0 < d(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + K, \mathbf{z}) \leq t_2\} C_{d-1}(K, d\mathbf{z}) Q(dK) \\
&= 2\lambda \int \int \int \mathbb{E} \left[\mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{x}_1) > 0\} \mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{x}_2) > d(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + \vartheta K, \mathbf{z})\} \right] \\
&\quad \times \mathbf{1}\{0 < d(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + \vartheta K, \mathbf{z}) \leq t_2\} C_{d-1}(\vartheta K, d\mathbf{z}) Q(dK) \nu(d\vartheta) \\
&= 2\lambda \int \int \int \mathbb{E} \left[\mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{x}_1) > 0\} \mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{x}_2) > d(\vartheta^{-1}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + K, \mathbf{z})\} \right] \\
&\quad \times \mathbf{1}\{0 < d(\vartheta^{-1}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) + K, \mathbf{z}) \leq t_2\} \nu(d\vartheta) C_{d-1}(K, d\mathbf{z}) Q(dK) \\
&= 2\lambda \int \int \int \mathbb{E} \left[\mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{x}_1) > 0\} \mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{x}_2) > d(K, \mathbf{z} + \vartheta^{-1}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1))\} \right] \\
&\quad \times \mathbf{1}\{0 < d(K, \mathbf{z} + \vartheta^{-1}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)) \leq t_2\} \nu(d\vartheta) C_{d-1}(K, d\mathbf{z}) Q(dK), \tag{2.115}
\end{aligned}$$

wobei weiterhin die Substitution $\mathbf{z} \mapsto \vartheta \mathbf{z}$, die Invarianzeigenschaften von $d(\cdot, \cdot)$ und C_{d-1} bei Drehungen und Verschiebungen und der Satz von Fubini angewendet wurden. Da mit $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ ein Vektor gedreht wird, kann die Integration bezüglich ν durch eine Integration bezüglich des sphärischen Lebesguemaßes σ_{d-1} auf S^{d-1} bei Normierung mit db_d ersetzt werden. Die Gleichungskette ist damit fortsetzbar durch

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\lambda}{db_d} \int \int \int \mathbb{E} \left[\mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{x}_1) > 0\} \mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{x}_2) > d(K, \mathbf{z} + \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| \mathbf{u})\} \right] \\
&\quad \times \mathbf{1}\{0 < d(K, \mathbf{z} + \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| \mathbf{u}) \leq t_2\} \sigma_{d-1}(d\mathbf{u}) C_{d-1}(K, d\mathbf{z}) Q(dK) \\
&= \frac{2\lambda}{db_d \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|^{d-1}} \int \int \int \mathbb{E} \left[\mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{x}_1) > 0\} \mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{x}_2) > d(K, \mathbf{y})\} \right] \\
&\quad \times \mathbf{1}\{0 < d(K, \mathbf{y}) \leq t_2\} \mathbf{1}\{\mathbf{y} \in \partial B^d(\mathbf{z}, \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|)\} \mathcal{H}^{d-1}(d\mathbf{y}) C_{d-1}(K, d\mathbf{z}) Q(dK)
\end{aligned}$$

unter Verwendung der Substitution $\mathbf{y} = \mathbf{z} + \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| \mathbf{u}$. Auf das innere Integral bezüglich \mathcal{H}^{d-1} ist Satz 2.9 mit den konvexen Körpern $B^d(\mathbf{z}, \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|)$ und K anwendbar, da

$B^d(\mathbf{z}, \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|)$ aus der Klasse C^1 ist und (2.52) für \mathcal{H}^{2d} -f. a. $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ und $C_{d-1}(K, \cdot)$ -f. a. \mathbf{z} erfüllt ist, und es gilt

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial}{\partial t_1} \right|_{t_1=0+} J^{(1)}(\mathbf{x}_1, t_1, S^{d-1}, \mathbf{x}_2, t_2, S^{d-1}) \\ &= \frac{2\lambda}{db_d \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|^{d-1}} \int \int \int \int \mathbb{E} \left[\mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{x}_1) > 0\} \mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{x}_2) > s\} \right] \mathbf{1}\{s \leq t_2\} \\ & \quad \times \tilde{\eta}(B^d(\mathbf{z}, \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|), K_s, \mathbf{y}) \mathbf{1}\{\mathbf{y} \in \partial B^d(\mathbf{z}, \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|) \cap \partial K_s\} \\ & \quad \times \mathcal{H}^{d-2}(d\mathbf{y}) ds C_{d-1}(K, d\mathbf{z}) Q(dK). \end{aligned} \tag{2.116}$$

Auf die Dichte

$$\begin{aligned} t \mapsto & \frac{2\lambda}{db_d \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|^{d-1}} \mathbb{E} \left[\mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{x}_1) > 0\} \mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{x}_2) > t\} \right] \\ & \times \int \int \int \tilde{\eta}(B^d(\mathbf{z}, \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|), K_t, \mathbf{y}) \mathbf{1}\{\mathbf{y} \in \partial B^d(\mathbf{z}, \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|) \cap \partial K_t\} \\ & \times \mathcal{H}^{d-2}(d\mathbf{y}) C_{d-1}(K, d\mathbf{z}) Q(dK) \end{aligned} \tag{2.117}$$

sind die Sätze 2.11 und 2.12 bzw. (2.92) anwendbar, da auch hier für \mathcal{H}^{2d} -f. a. $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ und $C_{d-1}(K, \cdot) \otimes Q$ -f. a. (\mathbf{z}, K) die entsprechenden Bedingungen erfüllt sind. Zusammen mit Integrabilitätsbedingung 2.101 ist dann der Grenzübergang für $t \downarrow 0$ gesichert, womit die Behauptung gezeigt ist. \square

Folgerung 2.2. *Sei Ψ ein stationärer und isotroper Poisson-Prozess in $\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d$, $d \in \{2, 3\}$, mit Intensität λ , $0 < \lambda < \infty$, und Kornverteilung Q , der die Voraussetzungen 2.1 und 2.3 (vgl. S. 8) erfüllt. Q genüge den Voraussetzungen 2.5 und 2.7 (vgl. S. 45) und sei im Fall $d = 2$ auf der Menge der konvexen Körper mit stückweise C^1 -glattem Rand und im Fall $d = 3$ auf der Menge der konvexen Körper mit stückweise C^2 -glattem Rand konzentriert. Dann ist $H_s^{(2)}(r, t_1, t_2)$ für \mathcal{H}^1 -fast alle $r > 0$ zweimal partiell rechtsseitig differenzierbar bei $(t_1, t_2) = (0, 0)$, und es gilt mit $r = \|\mathbf{r}\|$*

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial}{\partial t_2} \right|_{t_2=0+} \left. \frac{\partial}{\partial t_1} \right|_{t_1=0+} H_s^{(2)}(r, t_1, t_2) \\ &= \lambda^2 \left(2 \int V_{d-1}(K) - C_{d-1}(K, K - \mathbf{r}) Q(dK) \right)^2 \\ & \quad + \frac{2c\lambda}{db_d r^{d-1}} \int \int \int \tilde{\eta}(B^d(\mathbf{z}, r), K, \mathbf{y}) \mathcal{H}^{d-2}(d\mathbf{y}) C_{d-1}(K, d\mathbf{z}) Q(dK) \end{aligned} \tag{2.118}$$

mit

- $c = 1$, falls Q auf der Menge der konvexen Körper mit inneren Punkten konzentriert ist,
- $c = 2$, falls Q auf der Menge der konvexen Körper ohne innere Punkte konzentriert ist.

Bemerkung 2.2. Anhand von Folgerung 2.2 wird im Fall des stationären und isotropen Booleschen Modells das Verhalten der Produktdichte $\varrho_S^{(2)}(r)$ bei $r = 0$ deutlich. Wegen Voraussetzung 2.5 ist der Koeffizient von λ^2 für alle r nach oben beschränkt. Dagegen verhält sich der Koeffizient vor λ in der Nähe von $r = 0$ wie $\frac{1}{r}$ (siehe auch Abschnitt 2.6):

Da sich der Mittelpunkt \mathbf{z} von $B^d(\mathbf{z}, r)$ auf dem Rand von K befindet, sind für kleine r die beiden Normalenvektoren in $\mathbf{y} \in \partial K \cap \partial B^d(\mathbf{z}, r)$ senkrecht oder näherungsweise senkrecht zueinander, und für \mathcal{H}^{d-2} -f.a. \mathbf{y} ist $\tilde{\eta}(B^d(\mathbf{z}, r), K, \mathbf{y}) \approx 1$. Damit gleicht das innere Integral bezüglich \mathcal{H}^{d-2} näherungsweise dem Oberflächeninhalt einer $(d-1)$ -dimensionalen Kugel mit Radius r und ist somit näherungsweise proportional zu r^{d-2} . \square

Im Sinne von Bemerkung 2.1 ist das Ergebnis von Folgerung 2.2 auch in folgender Form darstellbar:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_2} \Big|_{t_2=0+} \frac{\partial}{\partial t_1} \Big|_{t_1=0+} H_s^{(2)}(r, t_1, t_2) &= \lambda^2 \left(2 \int V_{d-1}(K) - C_{d-1}(K, K - \mathbf{r}) Q(dK) \right)^2 \\ &\quad + \lambda \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0+} \left(2 \int C_{d-1}(K, K_t - \mathbf{r}) Q(dK) \right). \end{aligned} \quad (2.119)$$

In dieser Form ist die Bestimmung von $\varrho_S^{(2)}$ für die Beispiele im Anhang A etwas einfacher. (2.119) kann dabei im Übrigen aus der durch das Kapazitätsfunktional für Poisson-Prozesse gegebenen Darstellung von $H_s^{(2)}(r, t_1, t_2)$ gefolgert werden.

2.5.3 Matérn-Prozess

Als weiteres Beispiel sei im Folgenden der aus einem Poisson-Prozess in $\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d$ abgeleitete Matérn-Prozess (vgl. dazu insbesondere Kapitel 3) betrachtet.

Satz 2.16. Sei Ψ ein Poisson-Prozess in $\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d$ mit Verteilung P , der die Voraussetzungen 2.1 und 2.3 (vgl. S. 8) erfüllt. Q sei auf der Menge strikt konvexen Körper aus der Klasse C^2 konzentriert und genüge den Voraussetzungen 2.5 und 2.6 (vgl. S. 45). Außerdem sei ϱ beschränkt und $\varrho(\cdot, K)$ \mathcal{H}^d -f.ü. stetig für Q -f.a. $K \in \mathcal{K}^d$. Seien A_1 und A_2 offen in S^{d-1} . Für den von Ψ abgeleiteten Matérn-Prozess ist $\bar{C}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) H_s^{(2)}(\mathbf{x}_1, t_1, A_1, \mathbf{x}_2, t_2, A_2)$

für \mathcal{H}^{2d} -f. a. $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathbb{R}^{2d}$ zweimal partiell rechtsseitig differenzierbar bei $(t_1, t_2) = (0, 0)$, und es gilt

$$\begin{aligned}
& \bar{C}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \left. \frac{\partial}{\partial t_2} \right|_{t_2=0+} \left. \frac{\partial}{\partial t_1} \right|_{t_1=0+} H_s^{(2)}(\mathbf{x}_1, t_1, A_1, \mathbf{x}_2, t_2, A_2) \\
&= 4 \int \int \int \int \mathbb{E} \left[\mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{x}_1) > 0\} \mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{x}_2) > 0\} h(\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1, K_1, \mathbf{x}_2 - \mathbf{y}_2, K_2, \Psi) \right] \\
&\quad \times \mathbf{1}\{\mathbf{y}_1 \notin \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + K_1\} \mathbf{1}\{\mathbf{y}_2 \notin \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 + K_2\} \varrho(\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1, K_1) \varrho(\mathbf{x}_2 - \mathbf{y}_2, K_2) \\
&\quad \times \Theta_{d-1}(K_1, d\mathbf{y}_1 \times A_1) Q(dK_1) \Theta_{d-1}(K_2, d\mathbf{y}_2 \times A_2) Q(dK_2) \\
&+ \int \int \mathbb{E} \left[\mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{x}_1) > 0\} \mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{x}_2) > 0\} \frac{1}{1 + \Psi(Z(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 - \mathbf{y}, K))} \right] \\
&\quad \times \mathbf{1}\{\mathbf{y} \in \partial[K + \mathbf{x}_1] \cap \partial[K + \mathbf{x}_2]\} \eta(K + \mathbf{x}_1, K + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) \varrho(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 - \mathbf{y}, K) \\
&\quad \times \mathbf{1}\{\mathbf{n}(K + \mathbf{x}_1, \mathbf{y}) \in A_2\} \mathbf{1}\{\mathbf{n}(K + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) \in A_1\} \mathcal{H}^{d-2}(d\mathbf{y}) Q(dK)
\end{aligned} \tag{2.120}$$

mit $X(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) = \{(K_1, K_2) \in \mathcal{K}^d \times \mathcal{K}^d : [\mathbf{y}_1 + K_1] \cap [\mathbf{y}_2 + K_2] = \emptyset\}$ und

$$\begin{aligned}
& h(\mathbf{y}_1, K_1, \mathbf{y}_2, K_2, \psi) \\
&= \frac{\mathbf{1}_{X(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)}(K_1, K_2)}{2 + \psi(Z(\mathbf{y}_1, K_1) \cup Z(\mathbf{y}_2, K_2))} \left(\frac{1}{1 + \psi(Z(\mathbf{y}_1, K_1))} + \frac{1}{1 + \psi(Z(\mathbf{y}_2, K_2))} \right).
\end{aligned}$$

Beweis. Wegen der Sätze 3.1 und 3.2 kann die Integration bezüglich der Campbell-Maße des Matérn-Prozesses in Lemma 2.1 durch eine Integration der entsprechenden Campbell-Maße des zugrundeliegenden Poisson-Prozesses Ψ mit den Dichten $\frac{1}{1 + \psi(Z(\mathbf{y}, K))}$ bzw. $h(\mathbf{y}_1, K_1, \mathbf{y}_2, K_2, \psi)$ ersetzt werden. Die Argumentation in den Beweisen von Lemma 2.2 und der Sätze 2.13 und 2.14 kann folglich auch im vorliegenden Fall angewendet werden. Da beide Dichten offenbar durch 1 nach oben beschränkt sind, sind lediglich noch die P -f. s. Konvergenzen

$$\frac{1}{1 + \psi(Z(\mathbf{x}_1 - \mathbf{z} - t\mathbf{b}, K))} \rightarrow \frac{1}{1 + \psi(Z(\mathbf{x}_1 - \mathbf{z}, K))} \tag{2.121}$$

für $\Theta_{d-1}(K, \cdot)$ -f. a. $(\mathbf{z}, \mathbf{b}) \in \partial K \times S^{d-1}$ und Q -f. a. $K \in \mathcal{K}^d$ für $t \downarrow 0$ und

$$h(\mathbf{x}_1 - \mathbf{z}_1 - t_1 \mathbf{b}_1, K_1, \mathbf{x}_2 - \mathbf{z}_2 - t_2 \mathbf{b}_2, K_2, \psi) \rightarrow h(\mathbf{x}_1 - \mathbf{z}_1, K_1, \mathbf{x}_2 - \mathbf{z}_2, K_2, \psi) \tag{2.122}$$

für $\Theta_{d-1}(K_1, \cdot)$ -f. a. $(\mathbf{z}_1, \mathbf{b}_1) \in \partial K_1 \times S^{d-1}$, $\Theta_{d-1}(K_2, \cdot)$ -f. a. $(\mathbf{z}_2, \mathbf{b}_2) \in \partial K_2 \times S^{d-1}$, Q -f. a. $K_1 \in \mathcal{K}^d$ und Q -f. a. $K_2 \in \mathcal{K}^d$ für $t_1 \downarrow 0$, $t_2 \downarrow 0$ für \mathcal{H}^{2d} -f. a. $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathbb{R}^{2d}$ zu zeigen.

Ist $\psi(Z(\mathbf{x}_1 - \mathbf{z}, K)) = 0$, gibt es in ψ keinen Punkt (\mathbf{y}, L) , so dass $\mathbf{y} + L$ $\mathbf{x}_1 - \mathbf{z} + K$ schneidet. Da ψ P -f. s. lokal endlich ist und alle $\mathbf{y} + L$ abgeschlossen sind, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $t \leq \varepsilon$ auch der verschobene Körper $\mathbf{x}_1 - \mathbf{z} - t\mathbf{b} + K$ kein $\mathbf{y} + L$ für (\mathbf{y}, L) aus

ψ schneidet, womit auch $\psi(Z(\mathbf{x}_1 - \mathbf{z} - t\mathbf{b}, K)) = 0$ ist und (2.121) gilt. Ist andernfalls $\psi(Z(\mathbf{x}_1 - \mathbf{z}, K)) = n > 0$, kann angenommen werden, dass keiner der n Körper $\mathbf{y}_j + L_j$, $j = 1, \dots, n$, für (\mathbf{y}_j, L_j) aus ψ den Körper $\mathbf{x}_1 - \mathbf{z} + K$ nur berührt. (Das Auftreten mindestens einer solchen Berührung ist nur für eine Menge von Punkten $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ vom \mathcal{H}^{2d} -Maß Null möglich.) Daher gibt es Zahlen $\varepsilon_j > 0$, $j = 1, \dots, n$, so dass für alle $t \leq \varepsilon_j$ auch noch $[\mathbf{y}_j + L_j] \cap [\mathbf{x}_1 - \mathbf{z} - t\mathbf{b} + K] \neq \emptyset$ richtig ist. Damit ist $\psi(Z(\mathbf{x}_1 - \mathbf{z} - t\mathbf{b}, K)) = n$ für alle $t \leq \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ erfüllt, und (2.121) gilt. Der Nachweis von (2.122) erfolgt analog. \square

Satz 2.17. *Sei Ψ ein stationärer und isotroper Poisson-Prozess in $\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d$, $d \in \{2, 3\}$, mit Intensität λ , $0 < \lambda < \infty$, und Kornverteilung Q , der die Voraussetzungen 2.1 und 2.3 (vgl. S. 8) erfüllt. Q genüge den Voraussetzungen 2.5 und 2.7 (vgl. S. 45) und sei im Fall $d = 2$ auf der Menge der konvexen Körper mit stückweise C^1 -glattem Rand und im Fall $d = 3$ auf der Menge der konvexen Körper mit stückweise C^2 -glattem Rand konzentriert. Für den von Ψ abgeleiteten Matérn-Prozess ist $\overline{C}(r)H_s^{(2)}(r, t_1, t_2)$ für \mathcal{H}^1 -fast alle $r > 0$ zweimal partiell rechtsseitig differenzierbar bei $(t_1, t_2) = (0, 0)$, und es gilt mit $r = \|\mathbf{r}\|$, $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^d$, und h wie in Satz 2.16*

$$\begin{aligned} & \overline{C}(r) \left. \frac{\partial}{\partial t_2} \right|_{t_2=0+} \left. \frac{\partial}{\partial t_1} \right|_{t_1=0+} H_s^{(2)}(r, t_1, t_2) \\ &= 4\lambda^2 \int \int \int \int \mathbb{E} \left[\mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{o}) > 0\} \mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{r}) > 0\} h(-\mathbf{y}_1, K_1, \mathbf{r} - \mathbf{y}_2, K_2, \Psi) \right] \\ & \quad \times \mathbf{1}\{\mathbf{y}_1 \notin K_1 - \mathbf{r}\} \mathbf{1}\{\mathbf{y}_2 \notin K_2 + \mathbf{r}\} C_{d-1}(K_1, d\mathbf{y}_1) Q(dK_1) C_{d-1}(K_2, d\mathbf{y}_2) Q(dK_2) \\ & \quad + \frac{2c\lambda}{db_d r^{d-1}} \int \int \int \mathbb{E} \left[\mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{o}) > 0\} \mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{y} - \mathbf{z}) > 0\} \frac{1}{1 + \Psi(Z(-\mathbf{z}, K))} \right] \\ & \quad \times \mathbf{1}\{\mathbf{y} \in \partial B^d(\mathbf{z}, r) \cap \partial K\} \tilde{\eta}(B^d(\mathbf{z}, r), K, \mathbf{y}) \mathcal{H}^{d-2}(d\mathbf{y}) C_{d-1}(K, d\mathbf{z}) Q(dK). \end{aligned} \tag{2.123}$$

mit

- $c = 1$, falls Q auf der Menge der konvexen Körper mit inneren Punkten konzentriert ist,
- $c = 2$, falls Q auf der Menge der konvexen Körper ohne innere Punkte konzentriert ist.

Beweis. Aus einer zu den Beweisen der Sätze 2.15 und 2.16 völlig analogen Argumentation folgt die Behauptung mit der Isotropie von Ψ , Eigenschaft (2.16) und $T(\vartheta\psi) = \vartheta T(\psi)$ für alle $\vartheta \in SO_d$ und alle $\psi \in N_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d}$. \square

2.5.4 Gibbs-Prozess

Ein Gibbs-Prozess Ψ in $\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d$ mit Verteilung P ist durch die Gleichung (basierend auf Nguyen und Zessin, 1979; vgl. auch Kallenberg, 1983)

$$\begin{aligned} & \int \int \mathbf{1}\{(\mathbf{x}, K, \psi) \in \cdot\} \psi(d(\mathbf{x}, K)) P(d\psi) \\ &= \int \int \int \mathbf{1}\{(\mathbf{x}, K, \psi + \delta_{(\mathbf{x}, K)}) \in \cdot\} \lambda(\mathbf{x}, K, \psi) P(d\psi) \mathcal{H}^d(d\mathbf{x}) Q(dK) \end{aligned} \quad (2.124)$$

charakterisiert. Dabei ist $\lambda : \mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d \times N_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d} \rightarrow [0, \infty)$ eine Borel-messbare Funktion und Q ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathcal{K}^d . Das Maß $\mathcal{H}^d \otimes Q$ ist dabei als das Intensitätsmaß eines dem Gibbs-Prozess zugrunde liegenden Poisson-Prozesses interpretierbar. Q sei auch als *Vorschlagskornverteilung* bezeichnet. $-\ln \lambda$ ist die zugehörige lokale Energiefunktion.

Satz 2.18. *Sei Ψ ein Gibbs-Prozess in $\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d$ mit lokaler Energiefunktion $-\ln \lambda$ und Vorschlagskornverteilung Q , der die Voraussetzungen 2.1 und 2.3 (vgl. S. 8) erfüllt. Q sei auf der Menge der strikt konvexen Körper aus der Klasse C^2 konzentriert und genüge den Voraussetzungen 2.5 und 2.6 (vgl. S. 45). Außerdem sei λ beschränkt und $\lambda(\cdot, K, \psi)$ \mathcal{H}^d -f.ü. stetig für $Q \otimes P$ -f.a. $(K, \psi) \in \mathcal{K}^d \times N_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d}$. Seien A_1 und A_2 offen in S^{d-1} . Dann ist die Funktion $\bar{C}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) H_s^{(2)}(\mathbf{x}_1, t_1, A_1, \mathbf{x}_2, t_2, A_2)$ für \mathcal{H}^{2d} -fast alle $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathbb{R}^{2d}$ zweimal partiell rechtsseitig differenzierbar bei $(t_1, t_2) = (0, 0)$, und es gilt*

$$\begin{aligned} & \bar{C}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \left. \frac{\partial}{\partial t_2} \right|_{t_2=0+} \left. \frac{\partial}{\partial t_1} \right|_{t_1=0+} H_s^{(2)}(\mathbf{x}_1, t_1, A_1, \mathbf{x}_2, t_2, A_2) \\ &= 4 \int \int \int \int \mathbb{E} \left[\mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{x}_1) > 0\} \mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{x}_2) > 0\} \lambda(\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1, K_1, \Psi) \right. \\ & \quad \times \lambda(\mathbf{x}_2 - \mathbf{y}_2, K_2, \Psi + \delta_{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1, K_1)}) \left. \mathbf{1}\{\mathbf{y}_1 \notin \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + K_1\} \mathbf{1}\{\mathbf{y}_2 \notin \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 + K_2\} \right. \\ & \quad \times \Theta_{d-1}(K_1, d\mathbf{y}_1 \times A_1) Q(dK_1) \Theta_{d-1}(K_2, d\mathbf{y}_2 \times A_2) Q(dK_2) \\ & \quad \left. + \int \int \mathbb{E} \left[\mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{x}_1) > 0\} \mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{x}_2) > 0\} \lambda(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 - \mathbf{y}, K, \Psi) \right] \right. \\ & \quad \times \mathbf{1}\{\mathbf{y} \in \partial[K + \mathbf{x}_1] \cap \partial[K + \mathbf{x}_2]\} \eta(K + \mathbf{x}_1, K + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) \\ & \quad \left. \times \mathbf{1}\{\mathbf{n}(K + \mathbf{x}_1, \mathbf{y}) \in A_2\} \mathbf{1}\{\mathbf{n}(K + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) \in A_1\} \mathcal{H}^{d-2}(d\mathbf{y}) Q(dK) \right]. \end{aligned} \quad (2.125)$$

Beweis. Aus (2.124) und der Definition der reduzierten Campbell-Maße folgt für nicht-negative messbare Funktionen g und h

$$\int \int g(\mathbf{x}, K, \psi) P_{(\mathbf{x}, K)}^1(d\psi) \alpha_\Psi(d(\mathbf{x}, K)) = \int \int \int g(\mathbf{x}, K, \psi) \lambda(\mathbf{x}, K, \psi) P(d\psi) \mathcal{H}^d(d\mathbf{x}) Q(dK) \quad (2.126)$$

sowie

$$\begin{aligned} & \iint h(\mathbf{x}, K, \mathbf{y}, L, \psi) P_{(\mathbf{x},K),(\mathbf{y},L)}^! (d\psi) \alpha_{\Psi}^{(2)}(d(\mathbf{x}, K, \mathbf{y}, L)) \\ &= \iiint \iiint h(\mathbf{x}, K, \mathbf{y}, L, \psi) \lambda(\mathbf{x}, K, \psi) \lambda(\mathbf{y}, L, \psi + \delta_{(\mathbf{x},K)}) P(d\psi) \\ & \quad \times \mathcal{H}^d(d\mathbf{x}) Q(dK) \mathcal{H}^d(d\mathbf{y}) Q(dL). \end{aligned} \quad (2.127)$$

Nach einer Anwendung der Identitäten (2.126) und (2.127) auf die Darstellung der Funktion $\bar{C}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) H_s^{(2)}(\mathbf{x}_1, t_1, A_1, \mathbf{x}_2, t_2, A_2)$ in Lemma 2.1 kann wegen der Voraussetzungen an λ ganz analog zu den Beweisen von Lemma 2.2 und der Sätze 2.13 und 2.14 für den Poisson-Prozess argumentiert werden. \square

Satz 2.19. *Sei Ψ ein stationärer und isotroper Gibbs-Prozess in $\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d$, $d \in \{2, 3\}$, mit lokaler Energiefunktion $-\ln \lambda$ und Vorschlagskornverteilung Q , der die Voraussetzungen 2.1 und 2.3 (vgl. S. 8) erfüllt. Q sei drehungsinvariant, genüge den Voraussetzungen 2.5 und 2.7 (vgl. S. 45) und sei im Fall $d = 2$ auf der Menge der konvexen Körper mit stückweise C^1 -glattem Rand und im Fall $d = 3$ auf der Menge der konvexen Körper mit stückweise C^2 -glattem Rand konzentriert. Für alle $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ und alle $\vartheta \in SO_d$ gelte $\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}, K, \psi_{\mathbf{y}}) = \lambda(\mathbf{x}, K, \psi) = \lambda(\vartheta \mathbf{x}, \vartheta K, \vartheta \psi)$ für $\mathcal{H}^d \otimes Q \otimes P$ -f. a. (\mathbf{x}, K, ψ) . Außerdem sei λ beschränkt und $\lambda(\cdot, K, \psi)$ \mathcal{H}^d -f.ü. stetig für $Q \otimes P$ -f. a. $(K, \psi) \in \mathcal{K}^d \times N_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d}$. Dann ist $\bar{C}(r) H_s^{(2)}(r, t_1, t_2)$ für \mathcal{H}^1 -fast alle $r > 0$ zweimal partiell rechtsseitig differenzierbar bei $(t_1, t_2) = (0, 0)$, und es gilt mit $r = \|\mathbf{r}\|$*

$$\begin{aligned} & \bar{C}(r) \left. \frac{\partial}{\partial t_2} \right|_{t_2=0+} \left. \frac{\partial}{\partial t_1} \right|_{t_1=0+} H_s^{(2)}(r, t_1, t_2) \\ &= 4 \int \int \int \int \mathbb{E} \left[\mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{o}) > 0\} \mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{r}) > 0\} \lambda(-\mathbf{y}_1, K_1, \Psi) \right. \\ & \quad \left. \times \lambda(\mathbf{r} - \mathbf{y}_2, K_2, \Psi + \delta_{(-\mathbf{y}_1, K_1)}) \right] \mathbf{1}\{\mathbf{y}_1 \notin K_1 - \mathbf{r}\} \mathbf{1}\{\mathbf{y}_2 \notin \mathbf{r} + K_2\} \\ & \quad \times C_{d-1}(K_1, d\mathbf{y}_1) Q(dK_1) C_{d-1}(K_2, d\mathbf{y}_2) Q(dK_2) \\ & + c \int \int \int \mathbb{E} \left[\mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{o}) > 0\} \mathbf{1}\{d(T(\Psi), \mathbf{y} - \mathbf{z}) > 0\} \lambda(-\mathbf{z}, K, \Psi) \right] \\ & \quad \times \mathbf{1}\{\mathbf{y} \in \partial B^d(\mathbf{z}, r) \cap \partial K\} \tilde{\eta}(B^d(\mathbf{z}, r), K, \mathbf{y}) \mathcal{H}^{d-2}(d\mathbf{y}) C_{d-1}(K, d\mathbf{z}) Q(dK) \end{aligned} \quad (2.128)$$

mit

- $c = 1$, falls Q auf der Menge der konvexen Körper mit inneren Punkten konzentriert ist,
- $c = 2$, falls Q auf der Menge der konvexen Körper ohne innere Punkte konzentriert ist.

Beweis. Analog zum Beweis von Satz 2.18. \square

2.6 Stationäres und isotropes Boolesches Modell

In diesem Abschnitt soll die Produktdichte $\varrho_S^{(2)}$ des von einem stationären und isotropen Booleschen Modell erzeugten zufälligen Oberflächenmaßes für einige Beispiele von Kornverteilungen unter Verwendung der Folgerungen 2.1 und 2.2 angegeben werden. Aufgrund der Voraussetzungen „Stationarität“ und „Isotropie“ reduziert sich die Abhängigkeit von $\varrho_S^{(2)}$ von $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \mathbb{R}^{2d}$ auf $r = \|\mathbf{r}\| = \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| \in [0, \infty)$, und es sei abkürzend $\varrho_S^{(2)}(r) := \varrho_S^{(2)}(\mathbf{o}, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)$.

Im Fall des stationären und isotropen Booleschen Modells mit der Intensität λ , $0 < \lambda < \infty$, und der Verteilung Q des typischen Korns gilt (vgl. z. B. Stoyan, Kendall und Mecke, 1995) für \bar{C}

$$\bar{C}(r) = \exp \left(-\lambda \left(2 \int \mathcal{H}^d(K) Q(dK) - \int \mathcal{H}^d(K \cap [K - \mathbf{r}]) Q(dK) \right) \right) \quad (2.129)$$

und für die Oberflächenintensität $S_V^{(d)}$

$$S_V^{(d)} = 2\lambda \int V_{d-1}(K) Q(dK) \exp \left(-\lambda \int \mathcal{H}^d(K) Q(dK) \right), \quad (2.130)$$

was sich zu $\bar{C}(r) \equiv 1$ und $S_V^{(d)} = 2\lambda \int V_{d-1}(K) Q(dK)$ vereinfacht, falls Q auf der Menge der konvexen Körper ohne innere Punkte konzentriert ist. In Übereinstimmung mit der Literatur (vgl. z. B. Stoyan, Kendall und Mecke, 1995) gelten im Folgenden die Bezeichnungen $L_A = S_V^{(2)}$ und $S_V = S_V^{(3)}$.

Ähnlich wie im Fall eines Punktprozesses ist es sinnvoll, die zweite Produktdichte $\varrho_S^{(2)}$ des zufälligen Oberflächenmaßes mit dem Quadrat der Intensität $S_V^{(d)}$ zu normieren. So erhält man mit

$$g_S(r) := \frac{\varrho_S^{(2)}(r)}{\left(S_V^{(d)}\right)^2}, \quad r > 0, \quad (2.131)$$

die *Paarkorrelationsfunktion* des zufälligen Oberflächenmaßes.

Im Fall des hier betrachteten stationären und isotropen Booleschen Modells lässt sich einfach zeigen, dass die Paarkorrelation $C(r)/(V_V^{(d)})^2$ des zufälligen Volumenmaßes V_{Ξ} (siehe auch Abschnitt 1.1) als Funktion der Intensität λ für jedes r monoton fallend in λ ist. ($C(r)$ ist dagegen immer monoton wachsend in λ .) Diese Art der Monotonie ist bei $g_S(r)$ nicht gegeben. Mit der aus den Folgerungen 2.1 und 2.2 resultierenden Darstellung

$$\varrho_S^{(2)}(r) = \bar{C}(r) \left[\lambda^2 \left(2 \int V_{d-1}(K) - C_{d-1}(K, K - \mathbf{r}) Q(dK) \right)^2 + \frac{2c\lambda}{db_d r^{d-1}} \iint \int_{\partial K \cap \partial B^d(\mathbf{z}, r)} \tilde{\eta}(B^d(\mathbf{z}, r), K, \mathbf{y}) \mathcal{H}^{d-2}(d\mathbf{y}) C_{d-1}(K, d\mathbf{z}) Q(dK) \right] \quad (2.132)$$

ergibt sich unter Berücksichtigung von (2.129) und (2.130) für $g_S(r)$ qualitativ die Form

$$g_S(r) = \exp(\lambda T_0(r)) \left[T_1(r) + \frac{T_2(r)}{\lambda} \right]. \quad (2.133)$$

Dabei sind T_0 , T_1 und T_2 nichtnegativ. Dies impliziert, dass $g_S(r)$ für jedes $r > 0$ eine in λ *konvexe* Funktion ist, wobei für $T_0, T_1, T_2 > 0$ die Minimumsstelle durch

$$\lambda_{\min}(r) = -\frac{T_2(r)}{2T_1(r)} + \sqrt{\frac{T_2(r)^2}{4T_1(r)^2} + \frac{T_2(r)}{T_0(r)T_1(r)}} \quad (2.134)$$

gegeben ist. Damit lässt sich für jede Kornverteilung Q eine untere Schranke für $g_S(r)$ bestimmen, die in der Regel selbst aber keine Paarkorrelationsfunktion des zufälligen Oberflächenmaßes zu dieser Kornverteilung ist (vgl. auch Abbildung 2.3).

2.6.1 Kreisscheiben und Kugeln

Kreisscheiben in \mathbb{R}^2

Das typische Korn sei eine Kreisscheibe in \mathbb{R}^2 , deren zufälliger Radius auf $[0, \infty)$ gemäß der Verteilung M verteilt sei, wobei zur Gewährleistung der Voraussetzungen 2.5 und 2.6 (vgl. S. 45) $\int s^2 M(ds) < \infty$ sowie $\int_{(r/2, \infty)} s^2 / \sqrt{4s^2 - r^2} M(ds) < \infty$ für \mathcal{H}^1 -f. a. $r > 0$ gelte.

Die Randlänge einer Kreisscheibe K mit Radius s , die außerhalb von $K + \mathbf{r}$ liegt, beträgt $2\pi s - 2s \arccos\left(\frac{r}{2s}\right) \mathbf{1}_{(0, 2s]}(r)$, vgl. Abbildung 2.2 bzw. (A.3). Für den Winkel β zwischen den beiden Normalenvektoren in den Schnittpunkten von K und $K + \mathbf{r}$ gilt $\beta = 2 \arccos\left(\frac{r}{2s}\right)$, falls $K \cap (K + \mathbf{r}) \neq \emptyset$.

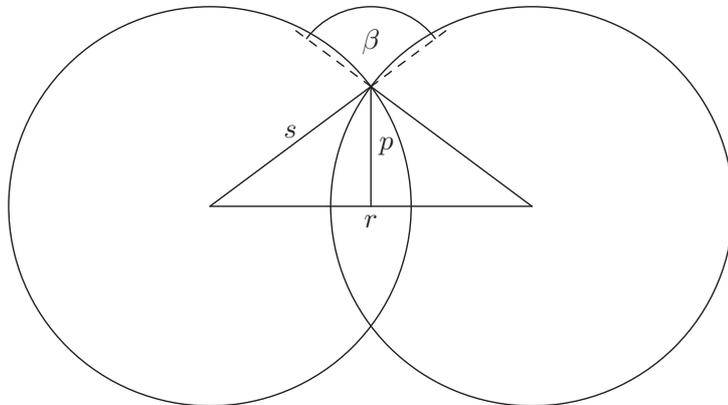


Abbildung 2.2: Schnitt zweier Kreise mit Radius s und Abstand r der Mittelpunkte.

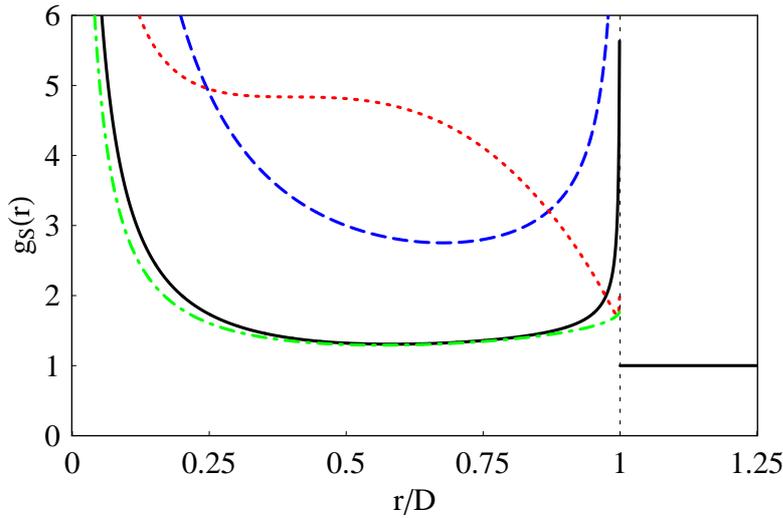


Abbildung 2.3: Paarkorrelationsfunktion $g_S(r) = \varrho_S^{(2)}(r)/L_A^2$ des von einem stationären Booleschen Modell mit Kreisscheiben des konstanten Durchmessers D erzeugten zufälligen Oberflächenmaßes für die Intensitäten $\lambda = 0,5/D^2$ (—), $\lambda = 0,1/D^2$ (---) und $\lambda = 3,0/D^2$ (····). Eine untere Schranke für $g_S(r)$ ist durch --- dargestellt.

Unter Berücksichtigung von

$$\sin \beta = \sin \left(2 \arccos \left(\frac{r}{2s} \right) \right) = \frac{r\sqrt{4s^2 - r^2}}{2s^2} \quad (2.135)$$

und $\mathcal{H}^0(\partial K \cap [\partial K + \mathbf{r}]) = 2$ für $0 < r < 2s$ gilt mit Satz 2.13 und Satz 2.14 für die Produktdichte des zugehörigen Oberflächenmaßes für alle $r > 0$

$$\varrho_S^{(2)}(r) = \left[\lambda^2 \left(\int_{(\frac{r}{2}, \infty)} 2\pi s M(ds) - \int_{(\frac{r}{2}, \infty)} 2s \arccos \left(\frac{r}{2s} \right) M(ds) \right)^2 + \lambda \int_{(\frac{r}{2}, \infty)} \frac{4s^2}{r\sqrt{4s^2 - r^2}} M(ds) \right] \bar{C}(r), \quad (2.136)$$

wobei

$$\bar{C}(r) = \exp \left(-\lambda \left(2\pi \int_{(\frac{r}{2}, \infty)} s^2 M(ds) - \int_{(\frac{r}{2}, \infty)} 2s^2 \arccos \left(\frac{r}{2s} \right) - \frac{1}{2} r \sqrt{4s^2 - r^2} M(ds) \right) \right). \quad (2.137)$$

Abbildung 2.3 zeigt die zugehörige Paarkorrelationsfunktion $g_S(r) = \varrho_S^{(2)}/L_A^2$ für den speziellen Fall gleich großer Kreisscheiben (also $M = \delta_{\frac{D}{2}}$) für verschiedene Intensitäten. Sehr deutlich ist dabei zu erkennen, dass sich die Kurven hinsichtlich der Intensität nicht monoton verhalten.

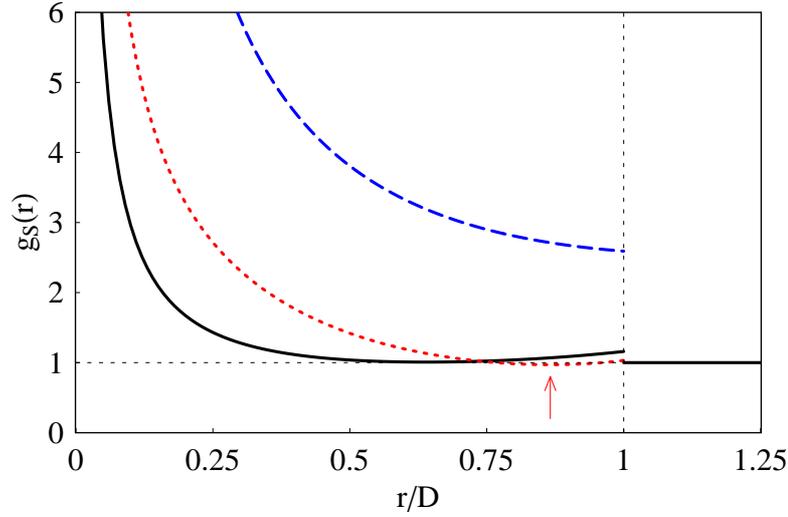


Abbildung 2.4: Paarkorrelationsfunktion $g_S(r) = \varrho_S^{(2)}(r)/S_V^2$ des von einem stationären Booleschen Modell mit Kugeln des konstanten Durchmessers D erzeugten zufälligen Oberflächenmaßes für die Intensitäten $\lambda = 1,0/D^2$ (—), $\lambda = 0,1/D^2$ (- - -) und $\lambda = 5,0/D^2$ (· · ·). Es sind Werte von $g_S(r)$ unterhalb von 1 möglich, wie es die Grafik beispielsweise für $\lambda = 5,0/D^2$ (· · ·) zeigt (roter Pfeil, Minimum 0,970466 bei $r = 0,866049$).

Kugeln in \mathbb{R}^3

Das typische Korn sei eine Kugel in \mathbb{R}^3 , deren zufälliger Radius gemäß der Verteilung M auf $[0, \infty)$ verteilt sei, wobei $\int s^3 M(ds) < \infty$ gelte.

Der Inhalt der Oberfläche einer Kugel K mit Radius s , der in $K + \mathbf{r}$ enthalten ist, beträgt $(2\pi s^2 - \pi sr)\mathbf{1}_{(0,2s]}(r)$. Für den Winkel β zwischen den beiden Normalenvektoren in den Schnittpunkten von K und $K + \mathbf{r}$ gilt wieder (2.135). Unter Berücksichtigung von $\mathcal{H}^1(\partial K \cap [\partial K + \mathbf{r}]) = 2\pi p = 2\pi\sqrt{s^2 - r^2/4}$ für $0 < r < 2s$ (vgl. auch Abbildung 2.2) erhält man mit Satz 2.13 und Satz 2.14 für die Produktdichte des zugehörigen Oberflächenmaßes für alle $r > 0$

$$\varrho_S^{(2)}(r) = \left[(4\pi\lambda)^2 \left(\int s^2 M(ds) - \int_{(\frac{r}{2}, \infty)} \left(\frac{s^2}{2} - \frac{rs}{4} \right) M(ds) \right)^2 + 4\pi\lambda \int_{(\frac{r}{2}, \infty)} \frac{s^2}{2r} M(ds) \right] \bar{C}(r), \quad (2.138)$$

wobei

$$\bar{C}(r) = \exp \left(-\lambda \left(\frac{8\pi}{3} \int s^3 M(ds) - \int_{(\frac{r}{2}, \infty)} \frac{4\pi}{3} s^3 \left(1 - \frac{3r}{4s} + \frac{r^3}{16s^3} \right) M(ds) \right) \right). \quad (2.139)$$

Eine Formel für $\varrho_S^{(2)}$ für den Fall konstanter Radien, also $M = \delta_{\frac{D}{2}}$ für $D > 0$, ist bereits bei Doi (1976) bekannt; in Torquato (2002, S. 165) ist die Verallgemeinerung (2.138) angegeben. Abbildung 2.4 zeigt die zugehörige Paarkorrelationsfunktion g_S des Oberflächenmaßes für diesen speziellen Fall. Für $0 < r < D$ gilt

$$g_S(r) = \frac{1}{(\lambda\pi D^2)^2} \left[(\lambda\pi D^2)^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{r}{2D} \right)^2 + \pi\lambda \frac{D^2}{2r} \right] \exp \left(\lambda \frac{\pi}{6} D^3 \left(1 - \frac{3r}{2D} + \frac{r^3}{2D^3} \right) \right). \quad (2.140)$$

Wegen

$$\lim_{r \uparrow D} g_S(r) = 1 + \frac{1}{\lambda 2\pi D^3}$$

hat $g_S(r)$ an der Stelle $r = D$ eine Sprungstelle.

Die Unstetigkeiten im Fall konstanter Kreise (Pol, siehe Abbildung 2.3) bzw. konstanter Kugeln (Sprungstelle, siehe Abbildung 2.4) bei $r = D$ resultieren aus der speziellen Radienverteilung $M = \delta_{\frac{D}{2}}$, da die jeweiligen Normalenvektoren in $K \cap (K + D)$ parallel sind.

Jedoch hängt die Art der Unstetigkeit von der Dimension d ab. Diese bestimmt, ob und wie schnell $\mathcal{H}^{d-2}(K \cap [K + r])$ für $r \rightarrow D$ gegen 0 konvergiert. Im Fall $d = 2$ ist dieser Grenzwert 2, also größer als Null, was zu dem Pol führt. Im Fall $d = 3$ konvergiert für $r \rightarrow D$ $\mathcal{H}^1(K \cap [K + r])$ mit der gleichen Geschwindigkeit gegen 0 wie η gegen ∞ . Dass für die Dimensionen $d > 3$ im vergleichbaren Fall konstanter Kugeln K $\mathcal{H}^{d-2}(K \cap [K + r])$ für $r \rightarrow D$ stärker fällt als η wächst, lässt vermuten, dass dann die Unstetigkeit bei $r = D$ verschwindet. Dies kann tatsächlich an dem Koeffizienten von λ (siehe Satz 2.14) – nur dieser Term kann hier überhaupt zu Unstetigkeitsstellen von $\varrho_S^{(2)}$ beitragen – abgelesen werden. Für alle $d \geq 2$ ist dieser Koeffizient

$$\begin{aligned} \int_{\partial K \cap [\partial K + \mathbf{r}]} \eta(K, K + \mathbf{r}, \mathbf{y}) \mathcal{H}^{d-2}(d\mathbf{y}) &= \mathcal{H}^{d-2}(\partial K \cap [\partial K + \mathbf{r}]) \cdot \frac{1}{\sin \beta} \\ &= (d-1)b_{d-1} \left(\frac{\sqrt{D^2 - r^2}}{2} \right)^{d-2} \cdot \frac{D^2}{2r\sqrt{D^2 - r^2}} \quad (2.141) \\ &= \frac{(d-1)b_{d-1}}{2^{d-1}} \frac{\sqrt{D^2 - r^2}^{d-3} D^2}{r}, \end{aligned}$$

falls $0 < r < D$ gilt.

Eine Diskussion der Unstetigkeitsstellen kann in ähnlicher Weise auch für die beiden folgenden Beispiele für Kornverteilungen geführt werden.

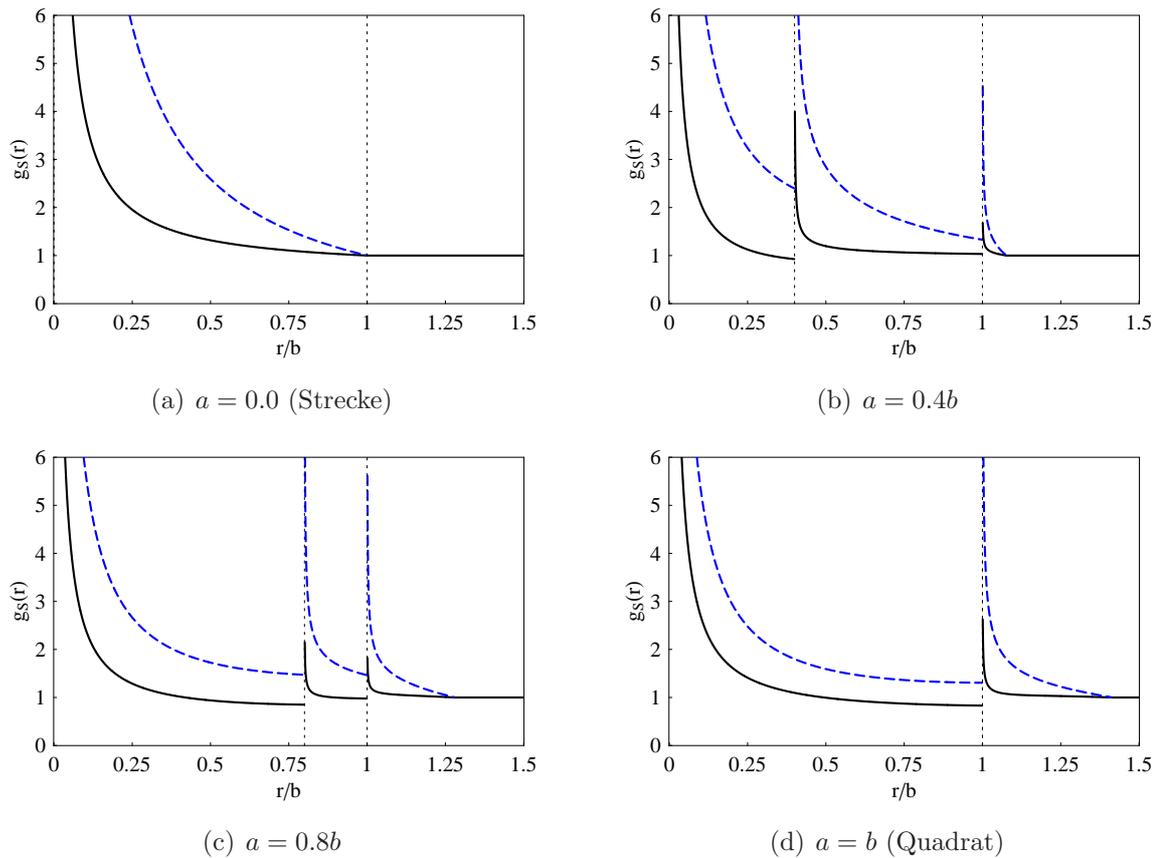


Abbildung 2.5: Paarkorrelationsfunktion $g_S(r) = \varrho_S^{(2)}(r)/L_A^2$ des von einem stationären und isotropen Booleschen Modell mit Rechtecken der konstanten Kantenlängen a und b erzeugten zufälligen Oberflächenmaßes für die Intensitäten $\lambda = 1, 0/b^2$ (—) und $\lambda = 0,2/b^2$ (---). Unstetigkeitsstellen in Form rechtsseitiger Pole gibt es gerade in den Punkten $r = a$ und $r = b$.

2.6.2 Rechtecke

Das typische Korn sei ein zufällig gemäß der Gleichverteilung auf SO_2 gedrehtes Rechteck in \mathbb{R}^2 mit konstanten Seitenlängen a und b , $a \leq b$. Dabei sei mit $0 = a < b$ auch der Spezialfall der Strecke (vgl. auch Example 9.1 in Stoyan, Kendall und Mecke, 1995) zugelassen.

Für die zugehörige Produktdichte des zufälligen Oberflächenmaßes gilt mit den Folgerungen 2.1 und 2.2 sowie den Rechnungen in Abschnitt A.1 für $0 = a < b$

$$\varrho_S^{(2)}(r) = 4\lambda^2 b^2 + \frac{4\lambda}{\pi} \left(\frac{b}{r} - 1 \right) \mathbf{1}_{(0,b]}(r)$$

sowie für $0 < a \leq b$

$$\varrho_S^{(2)}(r) = \begin{cases} \left[\lambda^2 \left(a + b + \frac{4r}{\pi} \right)^2 + \lambda \frac{2}{\pi} \left(\frac{a+b}{r} + \pi - 2 \right) \right] \\ \quad \times \exp \left(-\lambda \left(ab + \frac{2r(a+b)}{\pi} - \frac{r^2}{\pi} \right) \right), & 0 < r \leq a, \\ \left[\lambda^2 \left(a + b + \frac{2(a+b)}{\pi} \arccos \frac{a}{r} - \frac{2}{\pi} \sqrt{r^2 - a^2} + \frac{2(r+a)}{\pi} \right)^2 \right. \\ \quad \left. + \lambda \frac{2}{\pi} \left(\frac{b}{r} + \frac{b}{\sqrt{r^2 - a^2}} - 2 \arccos \frac{a}{r} + \pi - 2 \right) \right] \\ \quad \times \exp \left(-\lambda \left(ab + \frac{2ab}{\pi} \arccos \frac{a}{r} - \frac{2b}{\pi} \sqrt{r^2 - a^2} + \frac{2br - a^2}{\pi} \right) \right), & a < r \leq b, \\ \left[\lambda^2 \left(\frac{2(a+b)}{\pi} \left(\pi - \arcsin \frac{b}{r} + \arcsin \frac{a}{r} + 1 \right) - \frac{2}{\pi} \sqrt{r^2 - a^2} \right. \right. \\ \quad \left. \left. - \frac{2}{\pi} \sqrt{r^2 - b^2} \right)^2 \right. \\ \quad \left. + \lambda \frac{2}{\pi} \left(\frac{b}{\sqrt{r^2 - a^2}} + \frac{a}{\sqrt{r^2 - b^2}} - 2 \arccos \frac{a}{r} + 2 \arcsin \frac{b}{r} - 2 \right) \right] \\ \quad \times \exp \left(-\lambda \left(\frac{2ab}{\pi} \left(\pi - \arcsin \frac{b}{r} + \arccos \frac{a}{r} - \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{a} \right. \right. \right. \\ \quad \left. \left. \left. - \frac{\sqrt{r^2 - b^2}}{b} \right) + \frac{a^2 + b^2 + r^2}{\pi} \right) \right), & b < r \leq \sqrt{a^2 + b^2}, \\ \lambda^2 4(a+b)^2 \exp(-\lambda 2ab), & r > \sqrt{a^2 + b^2}. \end{cases}$$

2.6.3 Zylinder

Das typische Korn sei ein zufällig gemäß der Gleichverteilung auf SO_3 gedrehter gerader Kreiszylinder mit konstanter Höhe h und konstantem Radius R der Grundfläche mit $h \leq 2R$. Dabei sei mit $0 = h < 2R$ auch der Spezialfall der Kreisscheibe zugelassen.

Für die zugehörige Produktdichte des zufälligen Oberflächenmaßes gilt für $0 = h < 2R$

$$\varrho_S^{(2)}(r) = 4\lambda^2 \pi^2 R^4 + \frac{4\lambda}{\pi} \left(\frac{2R^2}{r} \arccos \left(\frac{r}{2R} \right) - \frac{1}{2} \sqrt{4R^2 - r^2} \right) \mathbf{1}_{(0, R/2]}(r).$$

Für den Fall $0 < h \leq 2R$ ergibt sich mit den Folgerungen 2.1 und 2.2 sowie den Rechnungen in Abschnitt A.2 unter Verwendung der Abkürzungen

$$q_V(\alpha, r, R, h) = \frac{2}{\pi} (h - r \cos \alpha) \left(2R^2 \arccos \left(\frac{r \sin \alpha}{2R} \right) - \frac{r \sin \alpha}{2} \sqrt{4R^2 - r^2 \sin^2 \alpha} \right) \sin \alpha,$$

$$q_S(\alpha, r, R, h) = \frac{2}{\pi} \left(2R(h + R - r \cos \alpha) \arccos \left(\frac{r \sin \alpha}{2R} \right) - \frac{r \sin \alpha}{2} \sqrt{4R^2 - r^2 \sin^2 \alpha} \right) \sin \alpha$$

und

$$q_T(\alpha, r, R, h) = \frac{8R \sin \alpha}{\pi} \arccos \left(\frac{r \sin \alpha}{2R} \right) + \frac{8R^2 h}{\pi r \sqrt{4R^2 - r^2 \sin^2 \alpha}}$$

$$\varrho_S^{(2)}(r) = \begin{cases} \left[\lambda^2 \left(2\pi R(R+h) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} q_S(\alpha, r, R, h) d\alpha \right)^2 \right. \\ \left. + \lambda \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} q_T(\alpha, r, R, h) d\alpha + \frac{12R^2}{\pi r} \arccos\left(\frac{r}{2R}\right) - \frac{4R^2}{r} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\sqrt{4R^2-r^2}}{\pi} \right) \right] & 0 < r \leq h, \\ \times \exp \left(-\lambda \left(2\pi R^2 h - \int_0^{\frac{\pi}{2}} q_V(\alpha, r, R, h) d\alpha \right) \right), \\ \\ \left[\lambda^2 \left(2\pi R(R+h) - \int_{\arccos \frac{h}{r}}^{\frac{\pi}{2}} q_S(\alpha, r, R, h) d\alpha \right)^2 \right. \\ \left. + \lambda \left(\int_{\arccos \frac{h}{r}}^{\frac{\pi}{2}} q_T(\alpha, r, R, h) d\alpha + \frac{12R^2}{\pi r} \arccos\left(\frac{r}{2R}\right) - \frac{\sqrt{4R^2-r^2}}{\pi} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{4R^2}{\pi r} \arccos\left(\frac{\sqrt{r^2-h^2}}{2R}\right) - \frac{\sqrt{r^2-h^2}}{\pi r} \sqrt{4R^2-(r^2-h^2)} \right) \right] & h < r \leq 2R, \\ \times \exp \left(-\lambda \left(2\pi R^2 h - \int_{\arccos \frac{h}{r}}^{\frac{\pi}{2}} q_V(\alpha, r, R, h) d\alpha \right) \right), \\ \\ \left[\lambda^2 \left(2\pi R(R+h) - \int_{\arccos \frac{h}{r}}^{\arcsin \frac{2R}{r}} q_S(\alpha, r, R, h) d\alpha \right)^2 \right. \\ \left. + \lambda \left(\int_{\arccos \frac{h}{r}}^{\arcsin \frac{2R}{r}} q_T(\alpha, r, R, h) d\alpha - \frac{4R^2}{\pi r} \arccos\left(\frac{\sqrt{r^2-h^2}}{2R}\right) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\sqrt{r^2-h^2}}{\pi r} \sqrt{4R^2-(r^2-h^2)} \right) \right] & 2R < r \leq \sqrt{h^2+4R^2}, \\ \times \exp \left(-\lambda \left(2\pi R^2 h - \int_{\arccos \frac{h}{r}}^{\arcsin \frac{2R}{r}} q_V(\alpha, r, R, h) d\alpha \right) \right), \\ \\ \lambda^2 4\pi^2 R^2 (R+h)^2 \exp(-\lambda 2\pi R^2 h), & r > \sqrt{h^2+4R^2}. \end{cases}$$

Die geometrische Form des typischen Korns führt hier zu zwei unterschiedlichen Arten der Unstetigkeit. Bei $r = h$ liegt i. A. eine Sprungstelle vor, bei $r = 2R$ dagegen eine Polstelle, die in der Formel für $\varrho_S^{(2)}$ in q_T ablesbar ist.

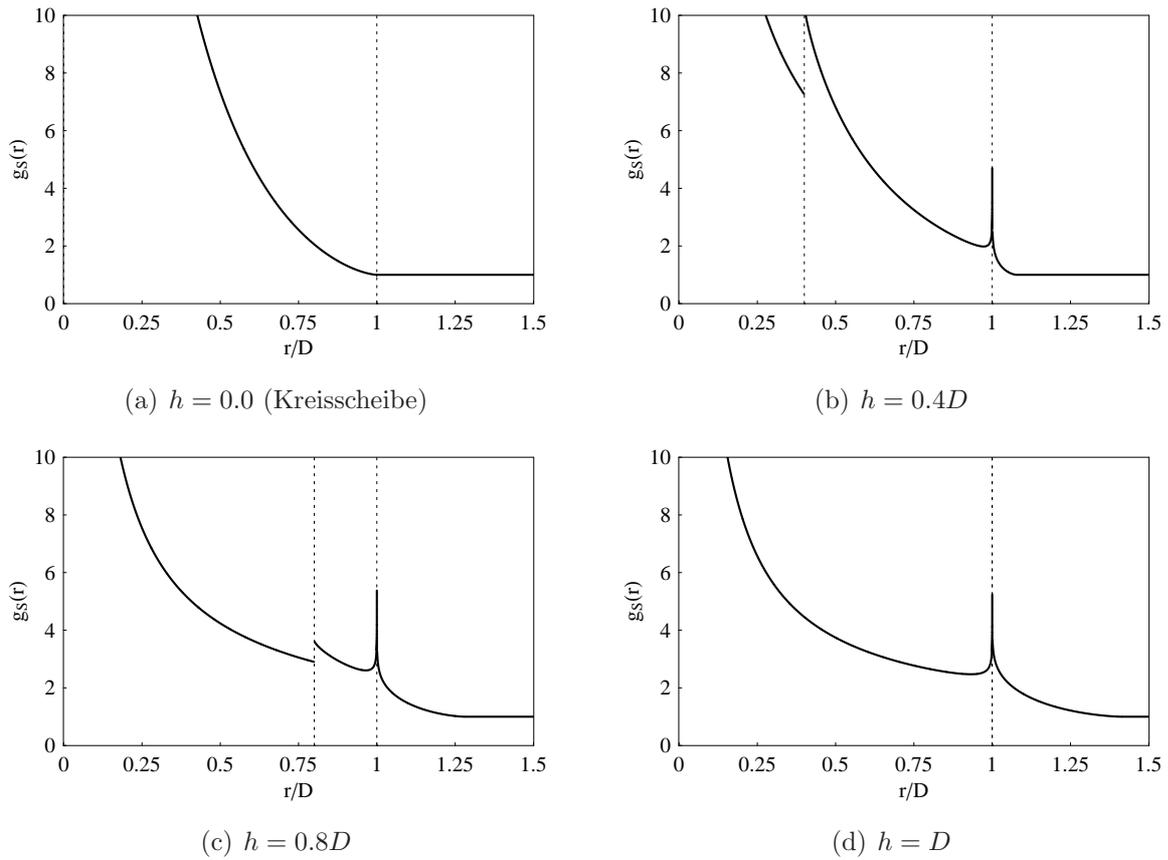


Abbildung 2.6: Paarkorrelationsfunktion $g_S(r) = \varrho_S^{(2)}(r)/S_V^2$ des von einem stationären und isotropen Booleschen Modell mit Zylindern der konstanten Höhe h und des Grundflächendurchmessers D erzeugten zufälligen Oberflächenmaßes für die Intensität $\lambda = 0,05/D^3$.

2.7 Bemerkungen und offene Probleme

Einige der zur Thematik dieses Kapitels gehörenden Fragen konnten durch den Autor während der Erstellung der vorliegenden Arbeit nicht geklärt werden. U. a. auf diese sei im Folgenden in Form kurzer Bemerkungen hingewiesen.

Die in den Abschnitten 2.3 und 2.5 angegebenen Bedingungen an den der zufälligen abgeschlossenen Menge Ξ zugrunde liegenden markierten Punktprozess Ψ für die Existenz der Produktdichte $\rho_S^{(2)}$ und der Ableitungen von $\overline{CH}_s^{(2)}$ sind vermutlich nicht notwendig.

Eine notwendige Bedingung für die Existenz der Produktdichte im stationären Fall wird durch Beispiel 2.1 angedeutet: Das mittlere $(d-1)$ -dimensionale Oberflächenmaß

$$\overline{S}_{d-1}(\cdot) := \int \Theta_{d-1}(K, \mathbb{R} \times \cdot) Q(dK) \quad (2.142)$$

auf $\mathcal{B}(S^{d-1})$ muss diffus sein. Andernfalls enthält \overline{S}_{d-1} ein Atom $\mathbf{v} \in S^{d-1}$, und es lässt sich ähnlich wie im Beispiel 2.1 in Abhängigkeit von \mathbf{v} eine Menge $D \subset \mathbb{R}^{2d}$ finden, für die $\mathcal{H}^{2d}(D) = 0$ und $\mu_{S^{d-1}, S^{d-1}}^{(1)}(D) > 0$ gilt. Diese notwendige Bedingung ist durch die Voraussetzungen der Sätze 2.6 und 2.7 gewährleistet, da beispielsweise bei strikter Konvexität bereits $\Theta_{d-1}(K, \mathbb{R} \times \cdot)$ diffus ist. Ob im stationären Fall die Diffusität von \overline{S}_{d-1} sogar hinreichend ist, konnte durch den Autor nicht geklärt werden.

Ebenso bleibt offen, inwiefern die Voraussetzungen der Sätze 2.10, 2.11 und 2.12 an die Glattheit der konvexen Körper abgeschwächt werden können und welche Bedingungen notwendig sind.

Im Beispiel des Booleschen Modells mit Kugeln in \mathbb{R}^3 (vgl. Unterabschnitt 2.6.1) ist offensichtlich, dass Voraussetzung 2.7 bereits durch Voraussetzung 2.5 (vgl. S. 45) impliziert wird und nicht extra gefordert werden muss. Es wurde nicht allgemeiner untersucht, in welchen Fällen die Integrabilitätsbedingungen 2.6 bzw. 2.7 aus anderen Voraussetzungen folgen und somit redundant sind.

Für Fragen der Messbarkeit sei weiterhin auf Schneider (1993), Schneider und Weil (2000), Hug und Last (2000) sowie Last und Schassberger (2001) verwiesen. Insbesondere kann die Messbarkeit der Abbildung $(L, K, \mathbf{y}) \mapsto (\mathbf{1}\{\mathbf{y} \in \partial L \cap \text{reg}K\}, \eta(L, K, \mathbf{y}))$ von der Menge $(\mathcal{K}^d \cap C^1) \times \mathcal{K}^d \times \mathbb{R}^d$ in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ z. B. mit Hilfe von Lemma 5.1 in Last und Schassberger (2001) gefolgert werden.

Kapitel 3

Der Matérn-Prozess mit konvexen Körnern

3.1 Das Modell

3.1.1 Definition

Es sei Υ ein Poisson-Prozess in $\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d$ mit Intensitätsmaß

$$\alpha_{\Upsilon}(d(\mathbf{x}, K)) = \varrho(\mathbf{x}, K) \mathcal{H}^d(d\mathbf{x}) Q(dK), \quad (3.1)$$

wobei $\varrho : \mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d \rightarrow [0, \infty)$ eine messbare Funktion und Q ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf \mathcal{K}^d sei. Außerdem gelte

$$\int \mathbf{1}\{(K + \mathbf{x}) \cap B \neq \emptyset\} \alpha_{\Upsilon}(d(\mathbf{x}, K)) < \infty \text{ für alle kompakten Mengen } B \subset \mathbb{R}^d. \quad (3.2)$$

Diese Wahl von α_{Υ} berücksichtigt die Erfordernisse von Abschnitt 2.5.3 und macht Υ zu einem i. A. inhomogenen Poisson-Prozess.

Da α_{Υ} atomfrei ist, ist Υ ein einfacher Punktprozess (Schneider und Weil, 2000, Lemma 3.2.1) und kann somit sowohl als zufälliges Zählmaß als auch als zufällige lokal endliche Teilmenge in $\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d$ aufgefasst werden.

Jeder Punkt von Υ sei unabhängig von den anderen durch eine auf $(0, 1)$ gleich verteilte Zahl markiert. Um ein System *sich nicht schneidender* konvexer Körper zu erhalten, wird Υ auf folgende Weise ausgedünnt: Jeder Punkt (\mathbf{x}, K) aus Υ mit Marke s wird gelöscht, falls Υ einen weiteren Punkt (\mathbf{y}, L) mit Marke t enthält, so dass $[\mathbf{x} + K] \cap [\mathbf{y} + L] \neq \emptyset$ und $s > t$ gilt. Die Menge aller verbleibenden Punkte bildet wieder einen einfachen Punktprozess Ψ in $\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d$. Ψ ist damit eine Verallgemeinerung des von Matérn (1960) eingeführten

(zweiten) Hard-Core-Prozesses, wo alle Partikeln K Kugeln gleicher Größe sind (betrachtet wird dort der gewöhnliche Punktprozess $\Psi(\cdot \times \mathcal{K}^d)$), und sei daher auch *der von Υ abgeleitete Matérn-Prozess* genannt.

Für einen Punkt $(\mathbf{x}, K) \in \mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d$ sei im Folgenden

$$Z(\mathbf{x}, K) := \{(\mathbf{y}, L) \in \mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d : \mathbf{x} + K \cap \mathbf{y} + L \neq \emptyset\}. \quad (3.3)$$

Weiterhin sei für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$

$$X(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \{(K, L) \in \mathcal{K}^d \times \mathcal{K}^d : \mathbf{x} + K \cap \mathbf{y} + L = \emptyset\}. \quad (3.4)$$

In Analogie zu $N_{\mathbb{R} \times \mathcal{K}^d}$ bezeichne nun $N_{\mathbb{R} \times \mathcal{K}^d \times (0,1)}$ die Menge aller der Zählmaße ω auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d \times (0, 1))$, für die $\omega(B \times \mathcal{K}^d \times (0, 1)) < \infty$ für alle kompakten Mengen $B \subset \mathbb{R}^d$ erfüllt ist.

3.1.2 Campbell-Maße

Die reduzierten faktoriellen Campbell-Maße (siehe Kallenberg, 1983; Hanisch, 1982) erster Ordnung \mathfrak{C}_Ψ und zweiter Ordnung $\mathfrak{C}_\Psi^{(2)}$, gegeben durch

$$\mathfrak{C}_\Psi(\cdot) := \mathbb{E} \left[\int \mathbf{1}\{(\mathbf{x}, K, \Psi \setminus \delta_{(\mathbf{x}, K)}) \in \cdot\} \Psi(d(\mathbf{x}, K)) \right], \quad (3.5)$$

$$\mathfrak{C}_\Psi^{(2)}(\cdot) := \mathbb{E} \left[\int \int \mathbf{1}\{(\mathbf{x}, K, \mathbf{y}, L, \Psi \setminus \delta_{(\mathbf{x}, K)} \setminus \delta_{(\mathbf{y}, L)}) \in \cdot\} (\Psi \setminus \delta_{(\mathbf{x}, K)})(d(\mathbf{y}, L)) \Psi(d(\mathbf{x}, K)) \right], \quad (3.6)$$

sind für den Matérn-Prozess Ψ durch die Bestimmungsstücke des zugrunde liegenden Poisson-Prozesses Υ festgelegt:

Satz 3.1. *Sei Υ ein Poisson-Prozess in $\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d$ mit Intensitätsmaß α_Υ gemäß (3.1) und (3.2) und Verteilung P . Für das erste reduzierte faktorielle Campbell-Maß \mathfrak{C}_Ψ des von Υ abgeleiteten Matérn-Prozesses Ψ gilt mit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d) \otimes \mathcal{N}_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d}$*

$$\mathfrak{C}_\Psi(B) = \int \int \mathbf{1}_B(\mathbf{x}, K, \psi) \frac{1}{1 + \psi(Z(\mathbf{x}, K))} P(d\psi) \alpha_\Upsilon(d(\mathbf{x}, K)). \quad (3.7)$$

Beweis. Es sei P_Ψ die Verteilung von Ψ und

$$Y = \{(\mathbf{x}, K, s; \omega) \in \mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d \times (0, 1) \times N_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d \times (0,1)} : \omega(Z(\mathbf{x}, K) \times (0, s)) = 0\}.$$

Weiterhin sei \bar{P} die Verteilung des Poisson-Prozesses $\bar{\Upsilon}$ auf $\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d \times (0, 1)$ mit Intensitätsmaß $\alpha_\Upsilon \times \mathcal{H}^1(\cdot \cap (0, 1))$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_\Psi(B) &= \int \int \mathbf{1}_B(\mathbf{x}, K, \psi \setminus \delta_{(\mathbf{x}, K)}) \psi(d(\mathbf{x}, K)) P_\Psi(d\psi) \\ &= \int \int \mathbf{1}_B(\mathbf{x}, K, \omega(\cdot \times (0, 1)) \setminus \delta_{(\mathbf{x}, K)}) \mathbf{1}_Y(\mathbf{x}, K, s; \omega) \omega(d(\mathbf{x}, K, s)) \bar{P}(d\omega). \end{aligned}$$

Der Punkt (\mathbf{x}, K) mit Marke s ist nur dann auch ein Punkt des ausgedünnten Punktmusters, wenn alle anderen Punkte in $Z(\mathbf{x}, K)$ eine Marke größer als s haben. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist jeweils $1 - s$. Wegen der Unabhängigkeit der Marken folgt daher

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_\Psi(B) &= \int \int \mathbf{1}_B(\mathbf{x}, K, \psi \setminus \delta_{(\mathbf{x}, K)}) \int_0^1 (1-s)^{\psi(Z(\mathbf{x}, K))-1} ds \psi(d(\mathbf{x}, K)) P(d\psi) \\ &= \int \int \mathbf{1}_B(\mathbf{x}, K, \psi \setminus \delta_{(\mathbf{x}, K)}) \frac{1}{\psi(Z(\mathbf{x}, K))} \psi(d(\mathbf{x}, K)) P(d\psi) \\ &= \int \int \mathbf{1}_B(\mathbf{x}, K, \psi) \frac{1}{(\psi + \delta_{(\mathbf{x}, K)})(Z(\mathbf{x}, K))} P_{(\mathbf{x}, K)}^!(d\psi) \alpha_\Upsilon(d(\mathbf{x}, K)) \\ &= \int \int \mathbf{1}_B(\mathbf{x}, K, \psi) \frac{1}{1 + \psi(Z(\mathbf{x}, K))} P(d\psi) \alpha_\Upsilon(d(\mathbf{x}, K)), \end{aligned}$$

wobei aufgrund der aus (3.1) folgenden σ -Endlichkeit von α_Υ Beziehung (2.9) angewendet werden kann und sich die letzte Gleichung mit der Eigenschaft (2.11) des Poisson-Prozesses und $(\mathbf{x}, K) \in Z(\mathbf{x}, K)$ ergibt. \square

Satz 3.2. Sei Υ ein Poisson-Prozess in $\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d$ mit Intensitätsmaß α_Υ gemäß (3.1) und (3.2) und Verteilung P . Für das zweite reduzierte faktorielle Campbell-Maß $\mathfrak{C}_\Psi^{(2)}$ des von Υ abgeleiteten Matérn-Prozesses Ψ gilt mit $B \in \mathcal{B}((\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d)^2) \otimes \mathcal{N}_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d}$

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_\Psi^{(2)}(B) &= \int \int \int \mathbf{1}_B(\mathbf{x}, K, \mathbf{y}, L, \psi) \mathbf{1}_{X(\mathbf{x}, \mathbf{y})}(K, L) \frac{1}{2 + \psi(Z(\mathbf{x}, K) \cup Z(\mathbf{y}, L))} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{1 + \psi(Z(\mathbf{x}, K))} + \frac{1}{1 + \psi(Z(\mathbf{y}, L))} \right) P(d\psi) \alpha_\Upsilon(d(\mathbf{x}, K)) \alpha_\Upsilon(d(\mathbf{y}, L)). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Beweis. Sei P_Ψ wieder die Verteilung von Ψ und \bar{P} die Verteilung des Poisson-Prozesses $\bar{\Upsilon}$ auf $\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d \times (0, 1)$ mit Intensitätsmaß $\alpha_\Upsilon \times \mathcal{H}^1(\cdot \cap (0, 1))$. Weiterhin sei nun

$$\begin{aligned} Y = \{ \mathbf{x}, K, s, \mathbf{y}, L, t; \omega \} &\in \mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d \times (0, 1) \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d \times (0, 1) \times \mathcal{N}_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d \times (0, 1)} : \\ &\omega(Z(\mathbf{x}, K) \times (0, s) = 0, \omega(Z(\mathbf{y}, L) \times (0, t) = 0). \end{aligned}$$

Dann ist (vgl. auch Beweis zu Theorem 1 in Stoyan und Stoyan, 1985)

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_\Psi^{(2)}(B) &= \int \int \int \mathbf{1}_B(\mathbf{x}, K, \mathbf{y}, L, \psi \setminus \delta_{(\mathbf{x}, K)} \setminus \delta_{(\mathbf{y}, L)}) (\psi \setminus \delta_{(\mathbf{x}, K)})(d(\mathbf{y}, L)) \psi(d(\mathbf{x}, K)) P_\Psi(d\psi) \\ &= \int \int \int \mathbf{1}_B(\mathbf{x}, K, \mathbf{y}, L, \omega(\cdot \times (0, 1)) \setminus \delta_{(\mathbf{x}, K)} \setminus \delta_{(\mathbf{y}, L)}) \\ &\quad \times \mathbf{1}_{X(\mathbf{x}, \mathbf{y})}(K, L) \mathbf{1}_Y(\mathbf{x}, K, s, \mathbf{y}, L, t; \omega) (\omega \setminus \delta_{(\mathbf{x}, K, s)})(d(\mathbf{y}, L, t)) \omega(d(\mathbf{x}, K, s)) \bar{P}(d\omega) \end{aligned}$$

Unter Ausnutzung der Unabhängigkeit der Marken ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_{\Psi}^{(2)}(B) &= \int \int \int \mathbf{1}_B(\mathbf{x}, K, \mathbf{y}, L, \psi \setminus \delta_{(\mathbf{x}, K)} \setminus \delta_{(\mathbf{y}, L)}) \mathbf{1}_{X(\mathbf{x}, \mathbf{y})}(K, L) \\ &\quad \times \int_0^1 \int_0^1 h(\mathbf{x}, K, \mathbf{y}, L; \psi) dt ds (\psi \setminus \delta_{(\mathbf{x}, K)})(d(\mathbf{y}, L)) \psi(d(\mathbf{x}, K)) P(d\psi), \end{aligned}$$

wobei die Überlebenswahrscheinlichkeit h der Punkte (\mathbf{x}, K) und (\mathbf{y}, L) durch

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}, K, \mathbf{y}, L; \psi) &= (1-s)^{\psi(Z(\mathbf{x}, K) \setminus Z(\mathbf{y}, L))^{-1}} \cdot (1-t)^{\psi(Z(\mathbf{y}, L) \setminus Z(\mathbf{x}, K))^{-1}} \\ &\quad \times (1 - \max(s, t))^{\psi(Z(\mathbf{x}, K) \cap Z(\mathbf{y}, L))} \end{aligned}$$

gegeben ist, da sowohl $(\mathbf{x}, K) \in Z(\mathbf{x}, K)$ als auch $(\mathbf{y}, L) \in Z(\mathbf{y}, L)$ und wegen $(K, L) \in X(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ andererseits $(\mathbf{y}, L) \notin Z(\mathbf{x}, K)$ und $(\mathbf{x}, K) \notin Z(\mathbf{y}, L)$ gilt. Mit

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 h(\mathbf{x}, K, \mathbf{y}, L; \psi) dt ds &= \int_0^1 \int_0^s (1-s)^{\psi(Z(\mathbf{x}, K))^{-1}} (1-t)^{\psi(Z(\mathbf{y}, L) \setminus Z(\mathbf{x}, K))^{-1}} dt ds \\ &\quad + \int_0^1 \int_s^1 (1-s)^{\psi(Z(\mathbf{x}, K) \setminus Z(\mathbf{y}, L))^{-1}} (1-t)^{\psi(Z(\mathbf{y}, L))^{-1}} dt ds \end{aligned}$$

und

$$\int_0^1 \int_0^s (1-s)^n (1-t)^m dt ds = \frac{1}{(n+1)(m+n+2)}$$

sowie

$$\int_0^1 \int_s^1 (1-s)^n (1-t)^m dt ds = \frac{1}{(m+1)(m+n+2)}$$

folgt bei nachfolgender Anwendung von (2.10) und (2.12)

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_{\Psi}^{(2)}(B) &= \int \int \int \mathbf{1}_B(\mathbf{x}, K, \mathbf{y}, L, \psi \setminus \delta_{(\mathbf{x}, K)} \setminus \delta_{(\mathbf{y}, L)}) \mathbf{1}_{X(\mathbf{x}, \mathbf{y})}(K, L) \frac{1}{\psi(Z(\mathbf{x}, K) \cup Z(\mathbf{y}, L))} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{\psi(Z(\mathbf{x}, K))} + \frac{1}{\psi(Z(\mathbf{y}, L))} \right) (\psi \setminus \delta_{(\mathbf{x}, K)})(d(\mathbf{y}, L)) \psi(d(\mathbf{x}, K)) P(d\psi) \\ &= \int \int \int \mathbf{1}_B(\mathbf{x}, K, \mathbf{y}, L, \psi) \mathbf{1}_{X(\mathbf{x}, \mathbf{y})}(K, L) \frac{1}{(\psi + \delta_{(\mathbf{x}, K)} + \delta_{(\mathbf{y}, L)})(Z(\mathbf{x}, K) \cup Z(\mathbf{y}, L))} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{(\psi + \delta_{(\mathbf{x}, K)} + \delta_{(\mathbf{y}, L)})(Z(\mathbf{x}, K))} + \frac{1}{(\psi + \delta_{(\mathbf{x}, K)} + \delta_{(\mathbf{y}, L)})(Z(\mathbf{y}, L))} \right) \\ &\quad \times P_{(\mathbf{x}, K), (\mathbf{y}, L)}^1(\psi) \alpha_{\Upsilon}(d(\mathbf{x}, K)) \alpha_{\Upsilon}(d(\mathbf{y}, L)) \\ &= \int \int \int \mathbf{1}_B(\mathbf{x}, K, \mathbf{y}, L, \psi) \mathbf{1}_{X(\mathbf{x}, \mathbf{y})}(K, L) \frac{1}{2 + \psi(Z(\mathbf{x}, K) \cup Z(\mathbf{y}, L))} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{1 + \psi(Z(\mathbf{x}, K))} + \frac{1}{1 + \psi(Z(\mathbf{y}, L))} \right) P(d\psi) \alpha_{\Upsilon}(d(\mathbf{x}, K)) \alpha_{\Upsilon}(d(\mathbf{y}, L)) \end{aligned}$$

□

3.1.3 Faktorielle Momentenmaße und Produktdichten

Eng verknüpft mit den reduzierten faktoriellen Campbell-Maßen eines Punktprozesses sind die faktoriellen Momentenmaße. Unter Verwendung des vorhergehenden Abschnitts erhält man die zwei folgenden Aussagen.

Satz 3.3. *Sei Υ ein Poisson-Prozess in $\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d$ mit Intensitätsmaß α_Υ gemäß (3.1) und (3.2) und Verteilung P . Das Intensitätsmaß α_Ψ des von Υ abgeleiteten Matérn-Prozesses Ψ ist absolut stetig bezüglich α_Υ mit der Dichte*

$$\varrho_\Psi(\mathbf{x}, K) = \frac{1 - \exp(-\alpha_\Upsilon(Z(\mathbf{x}, K)))}{\alpha_\Upsilon(Z(\mathbf{x}, K))}.$$

Beweis. Es ist für $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d)$ nach (3.5)

$$\alpha_\Psi(B) = \mathfrak{C}_\Psi(B \times N_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d}).$$

Daher gilt mit Satz 3.1

$$\alpha_\Psi(B) = \int \mathbf{1}_B(\mathbf{x}, K) \int \frac{1}{1 + \psi(Z(\mathbf{x}, K))} P(d\psi) \alpha_\Upsilon(d(\mathbf{x}, K)).$$

Folglich existiert $\varrho_\Psi(\mathbf{x}, K)$, und es gilt

$$\begin{aligned} \varrho_\Psi(\mathbf{x}, K) &= \int \frac{1}{1 + \psi(Z(\mathbf{x}, K))} P(d\psi) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j+1} P(\{\psi : \psi(Z(\mathbf{x}, K)) = j\}) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j+1} \frac{[\alpha_\Upsilon(Z(\mathbf{x}, K))]^j}{j!} \exp(-\alpha_\Upsilon(Z(\mathbf{x}, K))) \\ &= \frac{1 - \exp(-\alpha_\Upsilon(Z(\mathbf{x}, K)))}{\alpha_\Upsilon(Z(\mathbf{x}, K))}, \end{aligned}$$

womit die Behauptung gezeigt ist. □

Satz 3.4. *Sei Υ ein Poisson-Prozess in $\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d$ mit Intensitätsmaß α_Υ gemäß (3.1) und (3.2) und Verteilung P . Das zweite faktorielle Momentenmaß $\alpha_\Psi^{(2)}$ des von Υ abgeleiteten Matérn-Prozesses Ψ ist absolut stetig bezüglich $\alpha_\Upsilon \otimes \alpha_\Upsilon$ mit der Dichte*

$$\varrho_\Psi^{(2)}(\mathbf{x}, K, \mathbf{y}, L) = \mathbf{1}_{X(\mathbf{x}, \mathbf{y})}(K, L) (f(\mathbf{x}, K, \mathbf{y}, L) + f(\mathbf{y}, L, \mathbf{x}, K)),$$

wobei

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, K, \mathbf{y}, L) &= \frac{1}{\alpha_\Upsilon(Z(\mathbf{y}, L) \setminus Z(\mathbf{x}, K))} \left(\frac{1 - \exp(-\alpha_\Upsilon(Z(\mathbf{x}, K)))}{\alpha_\Upsilon(Z(\mathbf{x}, K))} - \frac{1 - \exp(-\alpha_\Upsilon(Z(\mathbf{x}, K) \cup Z(\mathbf{y}, L)))}{\alpha_\Upsilon(Z(\mathbf{x}, K) \cup Z(\mathbf{y}, L))} \right). \end{aligned}$$

Beweis. Es ist für $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d)$ gemäß (3.6)

$$\alpha_{\Psi}^{(2)}(B) = \mathfrak{C}_{\Psi}^{(2)}(B \times N_{\mathbb{R}^d \times \mathcal{K}^d}).$$

Daher gilt mit Satz 3.2

$$\begin{aligned} \alpha_{\Psi}^{(2)}(B) &= \int \int \mathbf{1}_B((\mathbf{x}, K), (\mathbf{y}, L)) \mathbf{1}_{X(\mathbf{x}, \mathbf{y})}(K, L) \int \frac{1}{2 + \psi(Z(\mathbf{x}, K) \cup Z(\mathbf{y}, L))} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{1 + \psi(Z(\mathbf{x}, K))} + \frac{1}{1 + \psi(Z(\mathbf{y}, L))} \right) P(d\psi) \alpha_{\Upsilon}(d(\mathbf{x}, K)) \alpha_{\Upsilon}(d(\mathbf{y}, L)), \end{aligned}$$

und die Dichte $\varrho_{\Psi}^{(2)}(\mathbf{x}, K, \mathbf{y}, L)$ existiert. Es ist

$$\begin{aligned} &\int \frac{1}{2 + \psi(Z(\mathbf{x}, K) \cup Z(\mathbf{y}, L))} \left(\frac{1}{1 + \psi(Z(\mathbf{x}, K))} + \frac{1}{1 + \psi(Z(\mathbf{y}, L))} \right) P(d\psi) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j+k+2} \frac{1}{j+1} P(\{\psi : \psi(Z(\mathbf{x}, K)) = j, \psi(Z(\mathbf{y}, L) \setminus Z(\mathbf{x}, K)) = k\}) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j+k+2} \frac{1}{j+1} P(\{\psi : \psi(Z(\mathbf{y}, L)) = j, \psi(Z(\mathbf{y}, L) \setminus Z(\mathbf{x}, K)) = k\}), \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} &P(\{\psi : \psi(Z(\mathbf{x}, K)) = j, \psi(Z(\mathbf{y}, L) \setminus Z(\mathbf{x}, K)) = k\}) \\ &= \frac{[\alpha_{\Upsilon}(Z(\mathbf{x}, K))]^j [\alpha_{\Upsilon}(Z(\mathbf{y}, L) \setminus Z(\mathbf{x}, K))]^k}{j! k!} \exp(-\alpha_{\Upsilon}(Z(\mathbf{x}, K) \cup Z(\mathbf{y}, L))), \end{aligned}$$

da die Mengen $Z(\mathbf{x}, K)$ und $Z(\mathbf{y}, L) \setminus Z(\mathbf{x}, K)$ disjunkt sind. In Analogie zum Beweis von Theorem 1 in Stoyan und Stoyan (1985) gilt für $a, b \geq 0$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j+k+2} \frac{1}{j+1} \frac{a^j}{j!} \frac{b^k}{k!} \exp(-a-b) &= \frac{\exp(-a-b)}{a} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{(a+b)^{n-1}}{n!} - \frac{b^{n-1}}{n!} \right) \\ &= \frac{1}{b} \left(\frac{1 - \exp(-a)}{a} - \frac{1 - \exp(-a-b)}{a+b} \right), \end{aligned}$$

womit die Behauptung gezeigt ist. \square

Es sei im Folgenden $\Phi = \Psi(\cdot \times \mathcal{K}^d)$ der von einem Matérn-Prozess Ψ abgeleitete gewöhnliche Punktprozess in \mathbb{R}^d . Fasst man Ψ als markierten Punktprozess in \mathbb{R}^d mit Marken in \mathcal{K}^d auf, dann ist Φ der zugehörige unmarkierte Punktprozess.

Da in dem verbleibenden Teil dieses Kapitels nur der stationäre Fall von Interesse sein wird, sei Υ von nun an immer ein homogener markierter Poisson-Prozess in \mathbb{R}^d mit Intensität $0 < \lambda_{\Upsilon} < \infty$ und Marken in \mathcal{K}^d , die gemäß der Kornverteilung Q auf \mathcal{K}^d verteilt seien. Damit (3.2) erfüllt ist, gelte für Q

$$\int \mathcal{H}^d(K \oplus B) Q(dK) < \infty \text{ für alle kompakten Mengen } B \subset \mathbb{R}^d. \quad (3.9)$$

Ist insbesondere $Q = \delta_{\{b(\mathbf{o}, R)\}}$ für festes R , $0 \leq R < \infty$, dann ist Φ der ursprünglich von Matérn (1960) eingeführten zweite Hard-Core-Punktprozess.

Aus Satz 3.3 ergibt sich mit $\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{x} + K \cap \mathbf{y} + L \neq \emptyset\} = \mathbf{x} + K \oplus \check{L}$ unmittelbar

Folgerung 3.1. *Sei Υ ein homogener markierter Poisson-Prozess in \mathbb{R}^d mit Marken in \mathcal{K}^d , Intensität $0 < \lambda_\Upsilon < \infty$ und Kornverteilung Q , für die (3.9) erfüllt ist. Dann ist der von Υ abgeleitete gewöhnliche Matérn-Punktprozess Φ stationär mit der Intensität*

$$\lambda_\Phi = \int \frac{1 - \exp(-\lambda_\Upsilon \int \mathcal{H}^d(K \oplus \check{L})Q(dL))}{\int \mathcal{H}^d(K \oplus \check{L})Q(dL)} Q(dK).$$

Das Resultat von Folgerung 3.1 findet sich für spezielle Kornverteilungen bereits in Stoyan und Stoyan (1985) und Månsson und Rudemo (2002).

Insbesondere folgende Kornverteilung ist dabei auch hier von Interesse: Sei $K_0 \in \mathcal{K}^d$ ein fester konvexer Körper und ϑ eine zufällige, von K_0 unabhängige Drehung, die gemäß der Gleichverteilung ν auf der Drehgruppe SO_d des \mathbb{R}^d verteilt ist. Dann sei ein gemäß Q verteilter konvexer Körper K die zufällige Drehung ϑK_0 von K_0 . Damit ist die Kornverteilung Q drehungsinvariant, und das Resultat in Folgerung 3.1 vereinfacht sich zu

$$\lambda_\Phi = \frac{1 - \exp(-\lambda_\Upsilon c)}{c}, \quad (3.10)$$

da

$$c := \int \mathcal{H}^d(K \oplus \check{L})Q(dL) \quad (3.11)$$

Q -f. s. unabhängig von K ist. Wie u. a. in Månsson and Rudemo (2002) vorgeschlagen, kann c mit Hilfe einer Verallgemeinerung der Steiner-Formel (vgl. z. B. Stoyan, Kendall und Mecke, 1995, S. 199) bestimmt werden.

Mit der obigen Kornverteilung im Sinne eines zufällig gemäß der Gleichverteilung auf SO_d gedrehten festen konvexen Körpers K_0 erhält man weiterhin aus Satz 3.4

Folgerung 3.2. *Sei Υ ein homogener markierter Poisson-Prozess in \mathbb{R}^d mit Intensität $0 < \lambda_\Upsilon < \infty$ und mit Marken in \mathcal{K}^d , die durch eine zufällige, auf SO_d gleichverteilte Drehung eines festen Körpers K_0 hervorgehen. Das zweite faktorielle Momentenmaß $\alpha_\Phi^{(2)}$ des von Υ abgeleiteten gewöhnlichen Matérn-Punktprozesses Φ ist absolut stetig bezüglich \mathcal{H}^{2d} . Für die zweite Produktdichte $\varrho_\Phi^{(2)}(r) := \varrho_\Phi^{(2)}(\mathbf{o}, \mathbf{r})$, $r = \|\mathbf{r}\|$, gilt*

$$\varrho_\Phi^{(2)}(r) = 2 \int \int \mathbf{1}_{X(\mathbf{o}, \mathbf{r})}(K, L) \left(\frac{1 - \exp(-\lambda_\Upsilon c)}{c(c - v(\mathbf{r}, K, L))} - \frac{1 - \exp(-\lambda_\Upsilon (2c - v(\mathbf{r}, K, L)))}{(c - v(\mathbf{r}, K, L))(2c - v(\mathbf{r}, K, L))} \right) Q(dL)Q(dK), \quad (3.12)$$

wobei $v(\mathbf{r}, K, L) := \int \mathcal{H}^d([K \oplus \check{M}] \cap [\mathbf{r} + L \oplus \check{M}]) Q(dM)$.

3.2 Zwei Beispiele

Dieser Abschnitt untersucht zwei Beispiele stationärer und isotroper Matérn-Prozesse. Dabei sei Υ_I ein homogener markierter Poisson-Prozess in $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{K}^2$, dessen typisches Korn eine Strecke konstanter Länge $D > 0$ mit Mittelpunkt im Ursprung und zufälligem, gemäß der Gleichverteilung auf S^1 verteilten Normalenvektor ist. Weiterhin sei Υ_{II} ein homogener markierter Poisson-Prozess in $\mathbb{R}^3 \times \mathcal{K}^3$, dessen typisches Korn eine Kreisscheibe konstanten Durchmessers $D > 0$ mit Mittelpunkt im Ursprung und zufälligem, gemäß der Gleichverteilung auf S^2 verteilten Normalenvektor ist. Die Wahl dieser Kornverteilungen dient dabei vor allem dem Studium zufälliger Systeme stark von der Kreis- bzw. Kugelform abweichender Körner. Außerdem ist die geometrische Form der typischen Körner verhältnismäßig einfach, so dass die entsprechenden Formeln für die zweite Produktdichte der abgeleiteten Matérnschen Punktprozesse Φ_I und Φ_{II} zumindest für eine numerische Bewertung geeignet sind.

3.2.1 Charakteristiken

Aus (3.10) erhält man die Intensitäten λ_I von Φ_I und λ_{II} von Φ_{II} . Wegen $c = 2D^2/\pi$ im Fall der Strecken in \mathbb{R}^2 und $c = \pi^2 D^3/8$ im Fall der Kreisscheiben in \mathbb{R}^3 gilt

$$\lambda_I = \frac{1 - \exp(-\lambda_{\Upsilon_I} 2D^2/\pi)}{2D^2/\pi} \quad \text{und} \quad \lambda_{II} = \frac{1 - \exp(-\lambda_{\Upsilon_{II}} \pi^2 D^3/8)}{\pi^2 D^3/8}. \quad (3.13)$$

Beide Intensitäten sind offensichtlich nach oben beschränkt, und zwar λ_I durch $\pi/(2D^2)$ bzw. λ_{II} durch $8/(\pi^2 D^3)$.

Für die zweiten Produktdichten $\varrho_I^{(2)}$ und $\varrho_{II}^{(2)}$ erhält man keine ähnlich einfache Form wie für die Intensitäten. Jedoch kann die Darstellung in (3.12) für eine numerische Bewertung verwendet werden. Ebenso können einige qualitative Eigenschaften der zweiten Produktdichten hergeleitet werden. Für $r = 0$ ist die Menge $X(\mathbf{o}, \mathbf{r})$ leer und daher $\varrho_{I/II}^{(2)}(0) = 0$. Für $r > 2D$ verschwindet die Größe $v(\mathbf{r}, K, L)$, so dass $\varrho_{I/II}^{(2)}(r) = \lambda_{I/II}^2$. Für $D < r \leq 2D$ ist $\mathbf{1}_{X(\mathbf{o}, \mathbf{r})} \equiv 1$, und da

$$\frac{1 - \exp(-\lambda_{\Upsilon} c)}{c(c - v(\mathbf{r}, K, L))} - \frac{1 - \exp(-\lambda_{\Upsilon}(2c - v(\mathbf{r}, K, L)))}{(c - v(\mathbf{r}, K, L))(2c - v(\mathbf{r}, K, L))}$$

monoton fallend in r ist, gilt Gleiches auch für $\varrho_{I/II}^{(2)}(r)$. Daher muss $\varrho_{I/II}^{(2)}$ für $r \leq D$ (mindestens) ein (globales) Maximum haben, vgl. dazu auch Abbildung 3.1 (a).

Bemerkung 3.1. Im Fall der Kreisscheiben in \mathbb{R}^3 (wie auch bei den meisten anderen konvexen Körpern) kann der Term $\mathcal{H}^d([K \oplus \check{M}] \cap [\mathbf{r} + L \oplus \check{M}])$ nicht exakt, sondern nur näherungsweise bestimmt werden, was neben der numerischen Integration bei höherer

gewünschter Genauigkeit nochmals zusätzlichen numerischen Aufwand bedeutet. Im Gegensatz dazu kann $\mathcal{H}^d([K \oplus \check{M}] \cap [\mathbf{r} + L \oplus \check{M}])$ für konvexe Polyeder (einschließlich dem betrachteten Fall mit Strecken in \mathbb{R}^2) prinzipiell exakt berechnet werden: Die Eckpunkte der ebenfalls konvexen Polyeder $K \oplus \check{M}$ und $L \oplus \check{M}$ ergeben sich aus den Eckpunkten von K , L und M . Die Schnittmenge $[K \oplus \check{M}] \cap [\mathbf{r} + L \oplus \check{M}]$ ist wiederum ein konvexes Polyeder, dessen Eckpunkte über lineare Gleichungssysteme bestimmbar sind. Bei Kenntnis der Eckpunktvektoren ist das Volumen eines konvexen Polyeders über eine Simplicialzerlegung im Sinne der Elementargeometrie (siehe Hadwiger, 1957) berechenbar.

Im hier nicht betrachteten Fall, dass K , L und M Kugeln sind (siehe dazu Stoyan und Stoyan, 1985), ist $\mathcal{H}^d([K \oplus \check{M}] \cap [\mathbf{r} + L \oplus \check{M}])$ als Volumen des Schnitts zweier Kugeln noch wesentlich einfacher und direkter erhältlich (vgl. für $d = 2$ beispielsweise Appendix K in Stoyan und Stoyan, 1994). \square

In den aus Υ_I und Υ_{II} abgeleiteten Matérn-Prozessen Ψ_I und Ψ_{II} – fasst man diese als markierte Punktprozesse auf – sind die Marken im Gegensatz zum zugrunde liegenden Poisson-Prozess wegen der Ausdünnungsprozedur nicht mehr unabhängig. Insbesondere ist zu erwarten, dass zwei sehr dicht beieinander liegende Strecken oder Kreisscheiben ähnlich ausgerichtet sind, da sie sich nicht schneiden. Dieses Verhalten lässt sich u. a. durch die Richtungskorrelationsfunktion k_d (siehe Stoyan und Stoyan, 1994, S. 263) beschreiben. $k_d(r)$ ist dabei der normierte mittlere Winkel zwischen den Normalenvektoren zweier Strecken (Kreisscheiben) unter der Bedingung, dass deren Mittelpunkte den Abstand r haben. Die Normierungskonstante bestimmt sich aus dem entsprechenden mittleren Winkel bei Unabhängigkeit der Strecken (Kreisscheiben) und ist im Fall der Strecken $\pi/4$ und im Fall der Kreisscheiben 2. Weitere Markenkorrelationsfunktionen, die Richtungsinformationen berücksichtigen, sind beispielsweise in Beisbart u. a. (2002) zu finden.

Da kleine Winkel zwischen zwei Strecken (Kreisscheiben) weniger zu k_d beitragen als große, spiegeln Werte von k_d unterhalb von 1 eine Tendenz zur gegenseitigen Ausrichtung (Parallelisierung) der Strecken (Kreisscheiben) wider. Im Fall *harter* Strecken (Kreisscheiben) muss es für kleine Mittelpunktabstände eine solche gegenseitige Ausrichtung geben, da die Forderung des Nichtüberlappens nur solche Anordnungen zulässt. Abbildung 3.1 (b) zeigt für beide Beispiele genau dieses Verhalten. Ähnlich wie bei den Paarkorrelationsfunktionen reichen die Korrelationen bis $2D$. Allerdings sind diese für $r > D$ offenbar sehr klein.

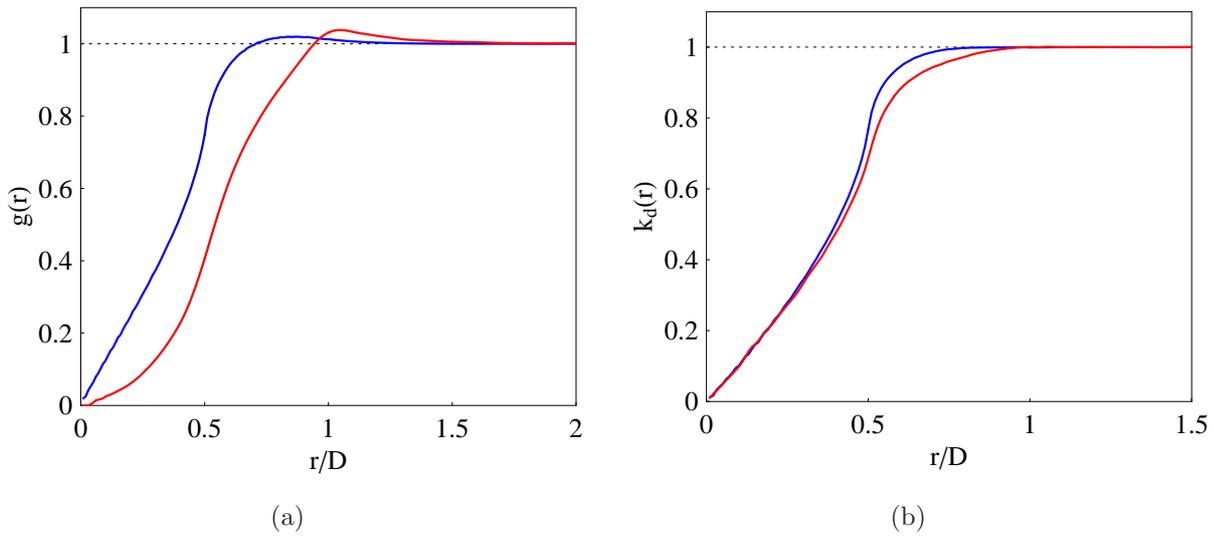


Abbildung 3.1: (a) Paarkorrelationsfunktion $g(r) = \varrho_\Phi^{(2)}(r)/\lambda_\Phi^2$ und (b) Richtungskorrelationsfunktion k_d des Matérn-Prozesses mit Strecken der Länge D bei einer Intensität von $\lambda_I = 1,4035/D^2$ ($\lambda_\Gamma = 3,518/D^2$) (—, durch numerische Auswertung von (3.12)) und des Matérn-Prozesses mit Kreisscheiben des Durchmessers D bei einer Intensität von $\lambda_{II} = 0,8/D^3$ ($\lambda_\Gamma = 3,518/D^3$) (—, durch Monte-Carlo-Simulation).

3.2.2 Vergleich mit Gibbs-Modell und RSA-Modell

Mit den bereits in Kapitel 1 in der Einleitung zum vorliegenden Kapitel erwähnten Modellen, dem Gibbs-Modell und dem RSA-Modell, sind weitere Möglichkeiten für zufällige Konfigurationen harter Partikeln bekannt. Um das Verhalten der im vorangegangenen Abschnitt betrachteten Größen zweiter Ordnung für den Matérn-Prozess mit Kreisscheiben, dem aus physikalischer Sicht sicher interessanteren Beispiel der beiden, einordnen zu können, sollen diese im Folgenden mit den entsprechenden Größen des Gibbs-Modells bzw. des RSA-Modells mit Kreisscheiben verglichen werden. Wegen der Beschränktheit der Intensität des Matérn-Prozesses mit Kreisscheiben ist ein Vergleich nur für Intensitäten unterhalb von $8/(\pi^2 D^3)$ möglich, obwohl in diesem speziellen Fall nicht echt dreidimensionaler Kreisscheiben sowohl im Gibbs-Modell als auch im RSA-Modell prinzipiell beliebig hohe Intensitäten erreichbar wären.

In ähnlicher Weise wie das stationäre Gibbs-Modell mit harten Kugeln (siehe dazu Mase u. a., 2001; Stoyan, Kendall und Mecke, 1995; sowie Kapitel 4) kann das entsprechende stationäre Modell mit harten Kreisscheiben in \mathbb{R}^3 definiert werden. Auch hier sind interessierende Charakteristiken wie beispielsweise die Paarkorrelationsfunktion des zugehörigen Punktprozesses der Kreisscheibenmittelpunkte meist nur über Simulationen erhältlich, da keine einfach auswertbaren Formeln bekannt sind. Im Kugelfall sind je-

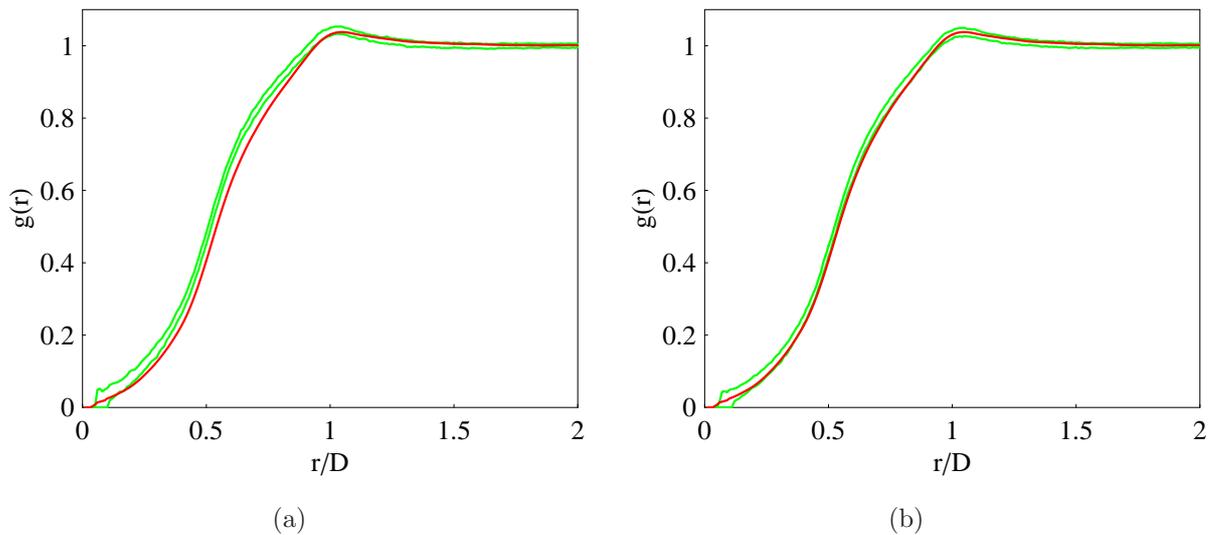


Abbildung 3.2: Paarkorrelationsfunktion des Matérn-Prozesses mit Kreisscheiben (—) und die 95%-Konfidenzbänder (---) der Paarkorrelationsfunktion (a) des Gibbs-Modells mit Kreisscheiben und (b) des RSA-Modells mit Kreisscheiben, jeweils für die Intensität $0,8/D^3$.

doch Näherungslösungen einiger Größen (Percus-Yevick-Theorie, Virial-Entwicklung, siehe u. a. Hansen und McDonald, 1986; Löwen, 2000) herleitbar, was zum Teil auch auf den Kreisscheibenfall übertragbar ist, für eine akzeptable Genauigkeit aber als zu aufwändig erscheint. Hinsichtlich der möglichen Simulationenmethoden sei auf Geyer (1999), Møller (1999) sowie Møller und Waagepetersen (2003) verwiesen.

Die vorliegenden Ergebnisse für die Paarkorrelationsfunktion und die Richtungskorrelationsfunktion wurden durch Simulationen endlicher Konfigurationen mit fester Anzahl (kanonische Ensembles) mit Hilfe des Gibbs-Samplers bestimmt. Dabei wurden im Würfel $[0, 20)^3$ unter Verwendung periodischer Randbedingungen 1000 Kreisscheibenkonfigurationen mit jeweils 6400 Scheiben des Durchmessers $D = 1$ erzeugt. Die einzelnen Korrelationsfunktionen wurden dann mit Hilfe eines Kernschätzers mit dem Epanečnikov-Kern (vgl. Stoyan, Kendall und Mecke, 1995) geschätzt.

Für das RSA-Modell (siehe Kapitel 4 für eine detailliertere Beschreibung des Simulationsprinzips) mit harten Kreisscheiben, für das ebenfalls keine Formeln bekannt sind, wurde die ursprüngliche Simulation für harte Kugeln etwas abgeändert. Da die Kreisscheiben nicht echt dreidimensional sind, wird beim sukzessiven Hinzufügen der Scheiben in ein beschränktes Gebiet (theoretisch) niemals ein Zustand erreicht, bei dem im Gegensatz zum Kugelfall kein neues Objekt mehr so Platz fände, dass es die schon vorhandenen Objekte nicht schneidet. Daher wird der Prozess des Hinzufügens dann beendet, wenn eine gewünschte Anzahl von Kreisscheiben erfolgreich in dem Gebiet platziert wurde.

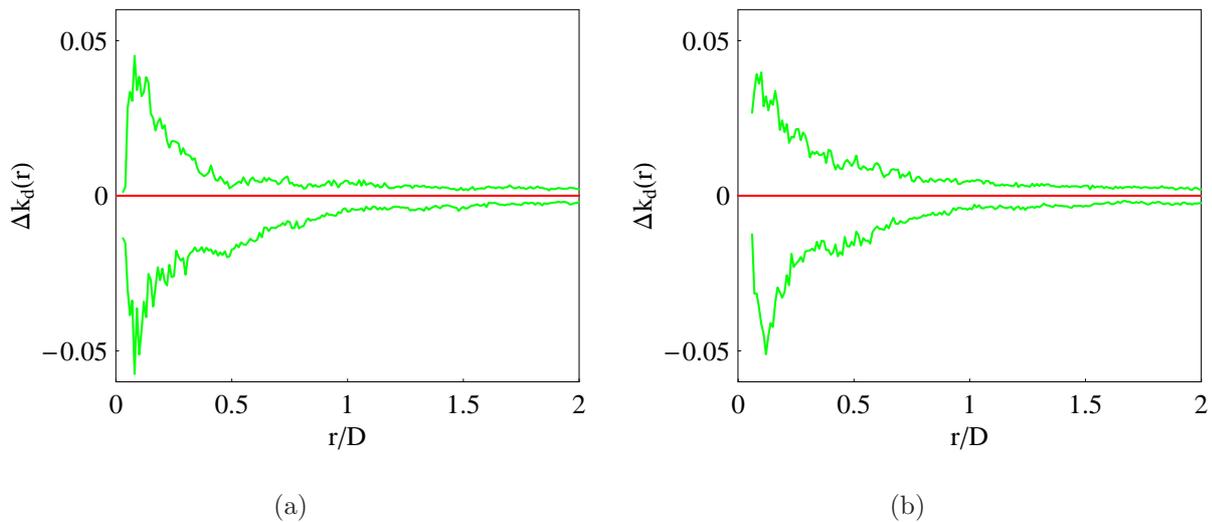


Abbildung 3.3: Differenzen der 95%-Konfidenzbänder (—) der Richtungskorrelationsfunktion (a) des Gibbs-Modells mit Kreisscheiben und (b) des RSA-Modells mit Kreisscheiben von der Richtungskorrelationsfunktion des Matérn-Prozesses mit Kreisscheiben (—), jeweils für die Intensität $0,8/D^3$.

Ebenso wie für das Gibbs-Modell wurden im Würfel $[0, 20)^3$ unter Verwendung periodischer Randbedingungen 1000 Kreisscheibenkonfigurationen mit jeweils 6400 Scheiben des Durchmessers $D = 1$ erzeugt und die Korrelationsfunktionen geschätzt.

Auf Grundlage der jeweils 1000 durch Simulation gewonnenen Paarkorrelationsfunktionen wurden Monte-Carlo-Konfidenzbänder bestimmt, innerhalb derer jeweils 95% der Paarkorrelationsfunktionen verlaufen, siehe Abbildung 3.2. Das Verhalten der Paarkorrelationsfunktionen ist offenbar ähnlich, insbesondere beim Vergleich von Matérn-Modell und Gibbs-Modell gibt es jedoch signifikante Unterschiede. Dagegen sind beim Vergleich der Richtungskorrelationsfunktionen praktisch keine Unterschiede erkennbar, d. h., k_d ist für das Gibbs-Modell und das RSA-Modell sehr ähnlich zu k_d in Abbildung 3.1 (b), vgl. dazu auch Abbildung 3.3.

Kapitel 4

Modellierung zweier Proben eines Feuerbetons

4.1 Die Betonproben

Dieser Abschnitt enthält zunächst einige Angaben zur Herstellung der Betonproben, geht dann auf die Rekonstruktion der Punktprozessdaten aus den CT-Bildern ein und beschreibt diese schließlich mit Hilfe verschiedener Statistiken.

4.1.1 Herstellung

Das untersuchte Material gehört zur Klasse der selbstfließenden Feuerbetone und besteht aus zwei Komponenten, wobei eine Komponente von Partikeln („refractory aggregates“) gebildet wird und die zweite Komponente eine die Partikeln umgebende Zementmatrix ist. Unvermeidlich sind auch immer Luftbläschen vorhanden, die aber im Weiteren als vernachlässigbar angesehen und bei der späteren Rekonstruktion der Matrix zugeschlagen werden. Im Allgemeinen haben die verwendeten Partikeln eine sehr unregelmäßige Form, häufig ähnlich der von konvexen Polyedern. Zu Forschungszwecken wurden am Institut für Keramik, Glas- und Baustofftechnik der Technischen Universität Bergakademie Freiberg spezielle Proben eines Feuerbetons u. a. unter ausschließlicher Verwendung *kugelförmiger* Partikeln hergestellt. Hauptzweck dieses Experiments war zu untersuchen, welchen Einfluss der Volumenanteil der Partikeln auf das Bruchverhalten des Betons bei hohen Kompressionsdrücken hat, vgl. dazu Hubálková und Stoyan (2003).

Für die Herstellung des Feuerbetons wurden Korund-Kugeln (Al_2O_3), Zement sowie neben Wasser auch ein Verflüssiger verwendet, der wesentlich zu dem Attribut „selbstfließend“ beiträgt. Diese Zutaten wurden zunächst ohne Wasser vier Minuten lang in einem Hobart-Mixer gemischt. Nach dem Hinzufügen von Wasser erfolgte ein erneutes vierminütiges

Mischen. Anschließend erfolgte einer Aushärtung der Masse für 24 Stunden bei einer relativen Luftfeuchte von 90 Prozent und danach für weitere 24 Stunden bei einer Temperatur von 110°C. Den Abschluss bildete ein (ebenfalls namensgebendes) fünfstündiges Brennen bei 1000°C.

Aus mehreren Proben mit unterschiedlich hohen Volumenanteilen an Korund-Kugeln wurden für eine computertomografische (CT) Untersuchung kleine Würfel ausgeschnitten. Die Untersuchungen dieses Kapitels basieren dabei auf zwei solcher würfelförmigen Proben der Kantenlänge 10 mm, welche im Folgenden mit *Probe A* und *Probe B* bezeichnet seien. Die CT-Aufnahmen wurden am Fraunhofer-Institut für Zerstörungsfreie Prüfverfahren in Saarbrücken mit einem XCT-System auf der Basis von Röntgenschwächung erzeugt. Für die Bestimmung der dreidimensionalen CT-Bilder wurde der Feldkamp-Algorithmus (Feldkamp u. a., 1984) zusammen mit einer besonderen Regularisierungsmethode zur Stabilisierung der Ergebnisse (Schmitt u. a., 2002) verwendet. Anschließend wurden zur Kontrasterhöhung noch eine Shadingkorrektur und eine Kontrastspreizung vorgenommen. Dadurch sind die Bilder sehr gut segmentierbar. Die Pixelgröße in den Bildern beträgt 32,3 μm .

4.1.2 Rekonstruktion

Die Tatsache, dass bei der Herstellung dieses Forschungsbetons kugelförmige Partikeln verwendet wurden, eröffnete die ungewöhnliche Möglichkeit, auf der Grundlage der CT-Bilder die geometrische Struktur des durch die Partikeln gebildeten Kugelsystems etwas genauer zu untersuchen. Mit Hilfe von Methoden aus der Bayesschen Bildanalyse (van Lieshout, 1995; Winkler, 2003) wurden dazu zunächst die kugelförmigen Partikeln als ideale Kugeln segmentiert. Dazu wurden diejenigen Konfigurationen X nicht überlappender Kugeln $B^3(\mathbf{x}_i, r_i)$ mit Mittelpunkten \mathbf{x}_i aus einem quaderförmigen Fenster $W \subset \mathbb{R}^3$ und Radien r_i in einem gewissen Intervall $I = [r_{\min}, r_{\max}]$, $0 < r_{\min} < r_{\max}$, gesucht, die in einem gewissen Sinn am besten zu den CT-Bildern passen. Eine solche Kugelkonfiguration soll im Folgenden auch *Rekonstruktion* des CT-Bildes bzw. der Betonprobe heißen.

Zur Vereinfachung des Rekonstruktionsverfahrens wurden die CT-Bilder zunächst binarisiert, wobei der entsprechende Schwellwert mit einer Methode ähnlich der Diskriminanzanalyse (vgl. Klette und Zamperoni, 1995) ermittelt wurde. Abbildung 4.1 zeigt die Grauwertverteilung für die Proben A und B. Es sind jeweils deutlich drei Gipfel erkennbar, die zu den Luftblasen (kleine Grauwerte, schwarz), der Zementmatrix und den Partikeln (große Grauwerte, weiß) gehören, siehe auch Abbildung 4.2(a). Um zwischen den Pixeln der Matrix und der Partikeln noch etwas besser trennen zu können, wurde der Schwellwert nur auf der Grundlage der Grauwertverteilung für Grauwerte größer als 100 bestimmt.

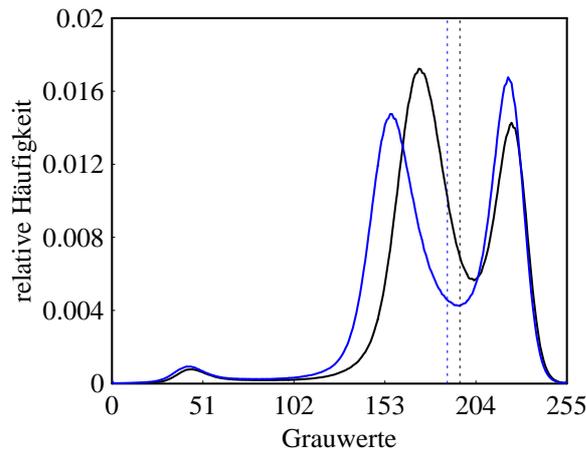


Abbildung 4.1: Grauwertverteilung für Probe A (—) mit Schwellwert 195 (---) und Probe B (—) mit Schwellwert 188 (---).

Zur Lösung des Optimierungsproblems, zu einem nun binarisierten CT-Bild eine möglichst gut passende Kugelkonfiguration zu finden, wurde das Verfahren der simulierten Abkühlung („simulated annealing“) verwendet, vgl. insbesondere Winkler (2003). Es soll für den vorliegenden Fall im Folgenden kurz beschrieben werden.

Bezeichne G die Menge aller weißen Pixel des binarisierten CT-Bildes. Das ist hier die Menge aller im Wesentlichen zur Partikelkomponente gehörenden Pixel. Weiterhin sei $S(X)$ die Silhouette von X (vgl. van Lieshout, 1995), d. h. die Menge aller der Pixel, die die Vereinigung aller Kugeln aus X in einem (binären) Bild repräsentieren. Eine Möglichkeit, den Abstand zwischen einer Kugelkonfiguration X und dem binarisierten CT-Bild zu messen, ist durch $|S(X) \triangle G|$ gegeben. Somit ist diejenige Kugelkonfiguration X gesucht, die die Anzahl $|S(X) \triangle G|$ der unterschiedlichen Pixel minimiert und die gleichzeitig nur aus nicht überlappenden Kugeln besteht. Letztere Bedingung ist mit Hilfe einer Energie $E(X)$ formalisierbar, die den Wert ∞ annimmt, wenn sich mindestens zwei Kugeln aus X schneiden, und die andernfalls verschwindet (Hartkugel-Potential, siehe z. B. Stoyan, Kendall und Mecke, 1995). Bezeichnet zusätzlich $n(X)$ die Anzahl der Kugeln in X , dann soll außerdem stets $X \in (W \times I)^{n(X)}$ gelten. Es ist dann eine Minimumsstelle von

$$H(X) = |S(X) \triangle G| + E(X) + \infty \cdot \mathbf{1}\{X \notin (W \times I)^{n(X)}\}$$

gesucht. Dazu wird mit Hilfe eines Metropolis-Algorithmus mit Energie $H(X)$ und einer (nicht zu schnell) fallenden Temperatur T eine Markov-Kette erzeugt. Ausgehend von der jeweils aktuellen Konfiguration X wird eine neue Konfiguration Y durch die Operationen (a) Hinzufügen, (b) Entfernen, (c) Verschieben und (d) Verkleinern/Vergrößern einer Kugel mit den Wahrscheinlichkeiten p_a, p_b, p_c bzw. $p_d = 1 - p_a - p_b - p_c$ vorgeschlagen.

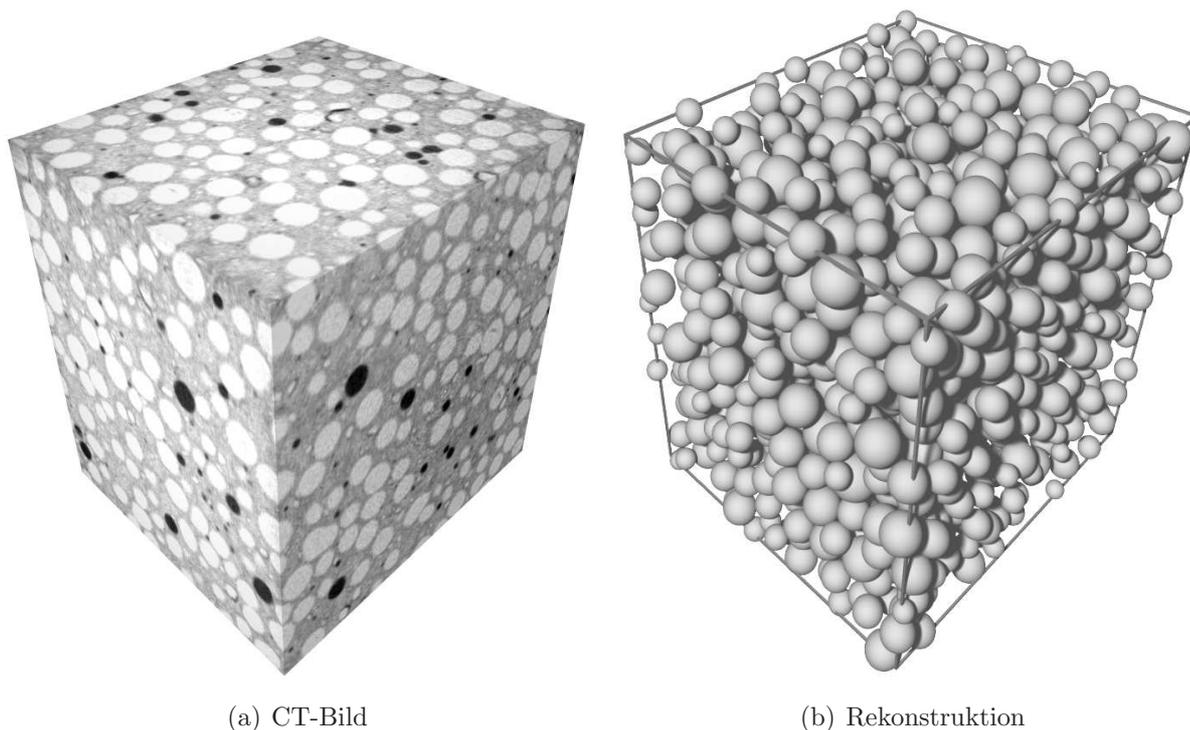


Abbildung 4.2: Veranschaulichung von Probe A. Die schwarzen Einschlüsse in (a) sind Luftporen.

Falls $n(X) = 0$ gilt, wird bei (b), (c) oder (d) $Y = X$ gesetzt. Andernfalls sehen die Operationen im Einzelnen folgendermaßen aus:

- (a) Hinzufügen einer Kugel mit auf W gleichverteiltem Mittelpunkt und auf I gleichverteiltem Radius zur Konfiguration X ,
- (b) Entfernen einer Kugel $B^3(\mathbf{x}_i, r_i)$ aus X , wobei i gemäß der Gleichverteilung auf $\{1, \dots, n(X)\}$ bestimmt wird,
- (c) Verschieben einer Kugel $B^3(\mathbf{x}_i, r_i)$ aus X um einen auf $[-c, c]^3$, $c > 0$, gleichverteilten Vektor $\Delta \mathbf{x}$, Wahl von i wie in (b),
- (d) Verkleinern/Vergrößern einer Kugel $B^3(\mathbf{x}_i, r_i)$ aus X durch Neubestimmung von r_i gemäß der Gleichverteilung auf I , Wahl von i wie in (b).

Falls $H(Y) \leq H(X)$ gilt, wird die Konfiguration Y immer als neuer Zustand akzeptiert. Andernfalls wird Y nur mit einer Wahrscheinlichkeit von $\exp((H(X) - H(Y))/T)$ angenommen, und X beibehalten, wenn Y nicht angenommen wird.

In der Theorie ist die Konvergenz dieses Algorithmus gegen ein globales Minimum von $H(X)$ gesichert (Winkler, 2003). Der in der Anwendung notwendige Abbruch nach endlich vielen Schritten gewährleistet ein Erreichen des globalen Minimums i. A. zwar nicht,

jedoch sind im vorliegenden Fall angesichts der im Vorhinein vorgenommen, immer fehlerbehafteten Prozeduren (CT-Aufnahme, Binarisierung) die entstehenden kleinen Abweichungen hinnehmbar.

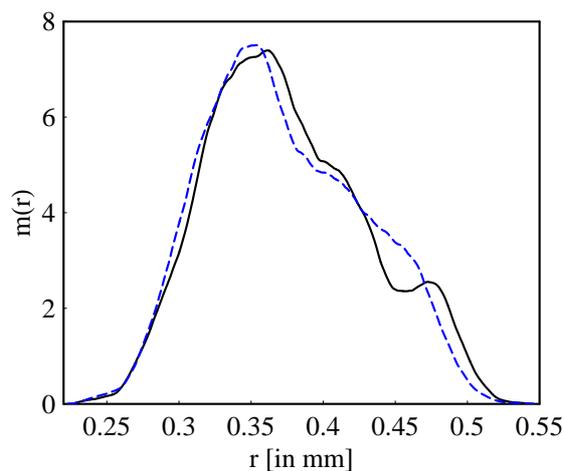
Die auf diese Weise erhaltenen Daten werden im Folgenden als Realisierungen eines markierten Punktprozesses angesehen, wobei hier die Kugelzentren die Punkte und die Kugelradien die Marken darstellen. Abbildung 4.2 zeigt für Probe A sowohl das CT-Bild als auch das entsprechende zur Rekonstruktion gehörende Bild mit idealen Kugeln. Alle nun folgenden Betrachtungen basieren auf den Rekonstruktionen der Betonproben.

4.1.3 Statistische Analyse

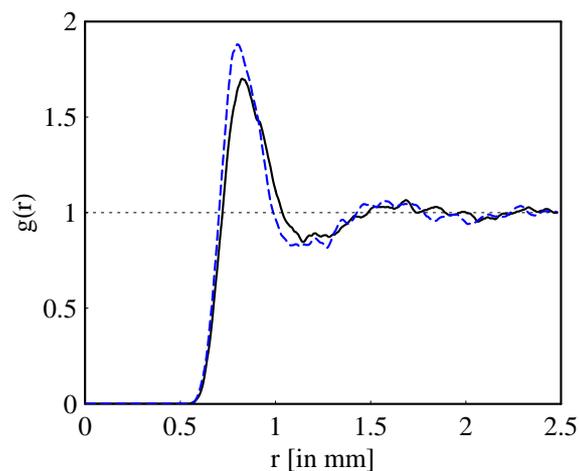
Die Rekonstruktionen bestehen aus 1454 (Probe A) und 1862 (Probe B) Kugeln, deren jeweilige Vereinigungsmenge einen Volumenanteil von 0,368 (A) bzw. 0,423 (B) hat und deren Radien empirische Verteilungen mit den in Abbildung 4.3(a) gezeigten Dichtefunktionen besitzen. Da die in beiden Proben verwendeten Partikeln aus derselben Grundgesamtheit stammen, sind die Unterschiede in Abbildung 4.3(a) vorwiegend statistischer Natur. Ein Einfluss durch die CT-Analyse und die Rekonstruktion ist dennoch vorhanden. Wesentlich und nachprüfbar sind dabei nur Auswirkungen durch die Wahl des Schwellwertes. Dabei stellt sich heraus, dass kleine Änderungen des Schwellwertes zwar kleine Verschiebungen der Dichtefunktionen zur Folge haben, die Konfiguration der Kugelmittelpunkte aber nahezu unverändert bleibt, und somit auch das Wesen der im Folgenden betrachteten strukturellen Größen.

Zur weiteren statistischen Untersuchung der Kugelsysteme wurden übliche Methoden der Räumlichen Statistik, vor allem jene für markierte Punktprozesse und zufällige abgeschlossene Mengen verwendet (vgl. Stoyan, Kendall und Mecke, 1995). Abbildung 4.3(b) zeigt die empirischen Paarkorrelationsfunktionen für die Punktmuster der Kugelzentren. Sie wurden mit den in Stoyan und Stoyan (1994, S. 284) sowie Møller und Waagepetersen (2003) beschriebenen Methoden unter Verwendung des Epanečnikov-Kerns geschätzt. Im vorliegenden Fall deuten sie auf eine sicherlich zu erwartende Nahordnung hin, die etwa bis 1,5 mm reicht.

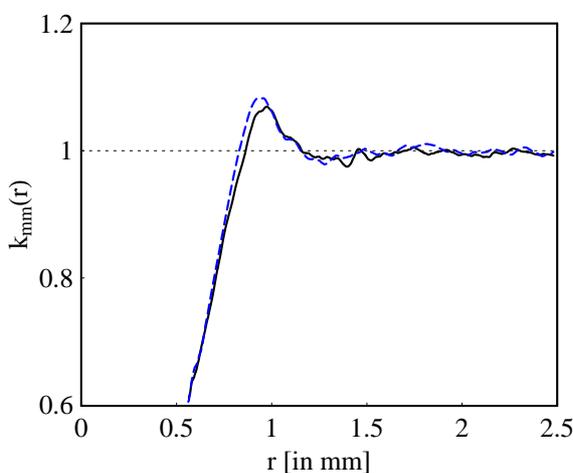
Die räumliche Abhängigkeit der Kugeln aufgrund der Nichtüberlappungsbedingung wirkt sich auch auf die Kugelradien aus. Dabei ist zu erwarten, dass die räumlichen Korrelationen zwischen den Radien mit steigendem Volumenanteil des Kugelsystems zunehmen. Eine Charakteristik, die diese Eigenschaft gut beschreibt, ist die Markenkorrrelationsfunktion $k_{mm}(r)$ für die Radiusmarken, siehe Stoyan und Stoyan (1994, Seiten 264 und 291). $k_{mm}(r)$ ist das normierte mittlere Produkt der Radien zweier Kugeln unter der Bedingung,



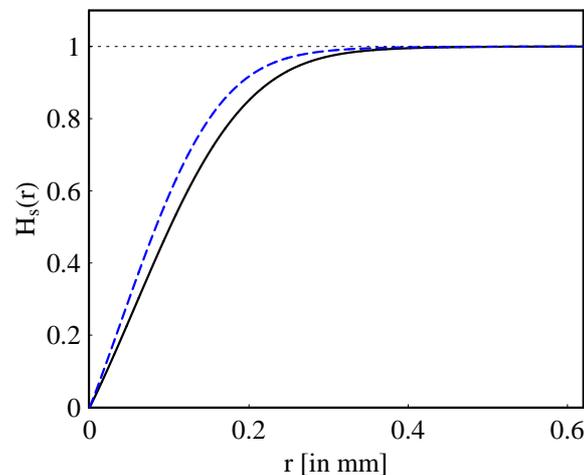
(a) Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Radien



(b) Paarkorrelationsfunktion



(c) Markenkorrelationsfunktion



(d) sphärische Kontaktverteilungsfunktion

Abbildung 4.3: Empirische Größen für Probe A (—) und Probe B (---).

dass deren Mittelpunkte den Abstand r haben, wobei $k_{mm}(r)$ so normiert ist, dass im Fall unabhängiger Marken k_{mm} identisch 1 ist. Die Schätzungen von k_{mm} für die Betonproben in Abbildung 4.3(c) zeigen die räumlichen Korrelationen sehr deutlich. Eng beieinander liegende Kugeln haben im Mittel beide Radien, die kleiner als der mittlere Radius sind.

Schließlich werden auch die schon aus Kapitel 2 bekannte sphärische Kontaktverteilungsfunktion $H_s(r)$ (siehe Abbildung 4.3(d)) und später in Abschnitt 4.3.3 die Kovarianz $C(r)$ für die Vereinigungsmenge der Kugeln betrachtet. Die Schätzung von $H_s(r)$ erfolgte dabei mit dem in Stoyan, Kendall und Mecke (1995, Formel 6.3.7) angegebenen Horvitz-Thompson-Schätzer.

4.2 Klassische Modelle für Hartkugelsysteme

Die aus der Räumlichen Statistik und der Statistischen Physik bekannten Modelle für dichte zufällige Systeme harter Kugeln können in die folgenden drei Klassen unterteilt werden.

4.2.1 Dichte zufällige Packungen

Diese Modelle versuchen Strukturen nachzuempfinden, die dabei entstehen, wenn harte Kugeln in einen Behälter gefüllt und durch Schütteln so verdichtet werden, dass sie eine dichte, aber dennoch zufällige Konfiguration bilden. Während es bislang keine mathematische Definition einer dichten zufälligen Packung gibt (siehe Abschnitt 3.5 in Torquato, 2002), existieren hingegen wohldefinierte und gut getestete Algorithmen zur Simulation solcher Packungen. Dazu zählen der Lubachevsky-Stillinger-Algorithmus (Lubachevsky und Stillinger, 1990) und der force-biased-Algorithmus von Bargiel und Moscinski (1991). Letzterer basiert auf einem Algorithmus von Jodrey und Tory (1985) und wurde von Bezrukov u. a. (2002) für den Fall verschieden großer Kugeln verallgemeinert. All diese Algorithmen gehören zur Klasse der kollektiven Umordnungsalgorithmen, die sich von realen physikalischen und technologischen Sedimentationsprozessen unterscheiden, die ebenfalls zu Packungen führen (vgl. den Überblick in Stoyan, 2002). Algorithmen, die versuchen, diese Prozesse nachzuempfinden (Jodrey und Tory, 1979; To und Stachurski, 2004), modellieren allerdings keine Verdichtungs Vorgänge.

Es wurde das durch den force-biased-Algorithmus definierte Packungsmodell verwendet. Proben mit jeweils 10000 Kugeln – diese Zahl ist etwa sechsmal größer als in den ursprünglichen Proben – wurden simuliert, wobei die in Abbildung 4.3(a) dargestellten empirischen Radienverteilungen nahezu vollständig realisiert wurden. Abbildung 4.4 zeigt die zugehörigen Paarkorrelationsfunktionen im Vergleich mit jenen der rekonstruierten Betonproben. Insbesondere für Probe A sind dabei deutliche Unterschiede erkennbar. Diese sind durch einen höheren und schmaleren ersten Gipfel der Kurven zum Packungsmodell dahingehend deutbar, dass es in den simulierten Proben zum Packungsmodell im Vergleich zu den Betonproben mehr Kugeln geben muss, die sich berühren oder zumindest sehr nah beieinander liegen. Letzteres ist insofern nicht allzu verwunderlich, als es wesentliches Ziel und inherenter Bestandteil des force-biased-Algorithmus ist. Damit muss auch das Packungsmodell als Modell für die rekonstruierten Betonproben verworfen werden. Die Tendenz geringerer Unterschiede in Abbildung 4.4 von Probe A zu Probe B, und somit vom geringeren zum höheren Volumenanteil, deutet jedoch an, dass das Packungsmodell für entsprechende Betonproben mit höheren Volumenanteilen durchaus passend sein könnte.

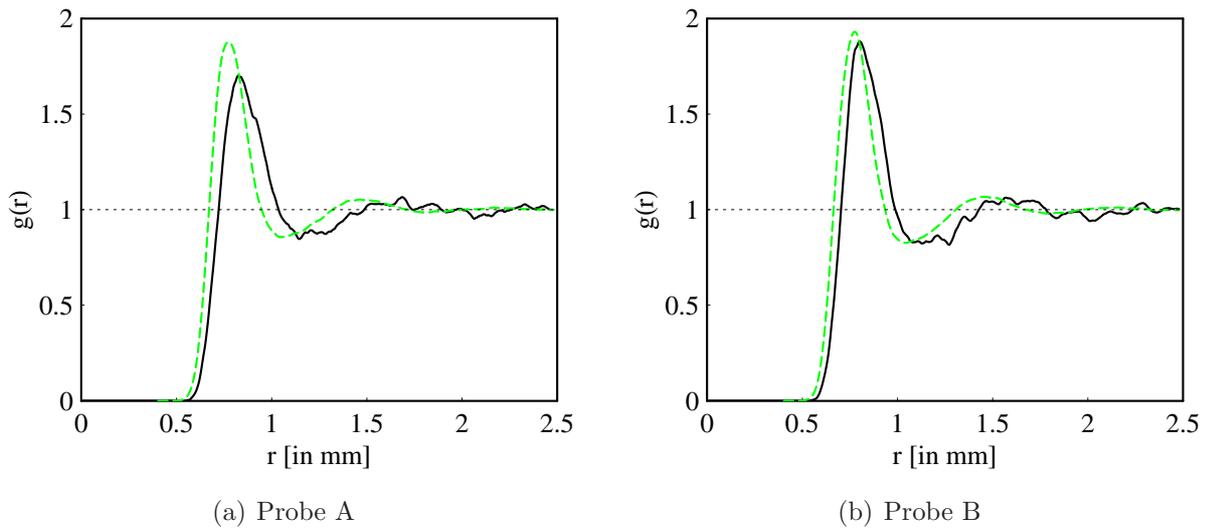


Abbildung 4.4: Paarkorrelationsfunktionen der Betonprobe (—) und des Packungsmodells (---).

4.2.2 Klassisches RSA-Modell

Ursprünglich wurde das RSA-Modell („random sequential addition/ adsorption model“) in folgender Weise für ein beschränktes Gebiet W in \mathbb{R}^3 definiert: Kugeln mit zufälligen Radien werden nacheinander und zufällig in W platziert. Bei jedem Versuch, eine neue Kugel in W zu platzieren, wird getestet, ob die neue Kugel bereits vorhandene Kugeln schneiden würde. Ist dies nicht der Fall, wird die neue Kugel akzeptiert und der Konfiguration hinzugefügt. Andernfalls wird diese Kugel verworfen und ein neuer Versuch mit einem zufällig in W gleichverteilten Mittelpunkt und einem zufälligen, gemäß einer vorgegebenen Verteilung verteilten Radius gestartet. Dieser Vorgang wird dann beendet, wenn es unmöglich ist, der vorhandenen Konfiguration eine zusätzliche Kugel ohne Überschneidungen hinzuzufügen (Sättigungszustand, „jammed state“). Die Vorgehensweise erklärt den Namen „random sequential addition“.

Es ist möglich, mit Hilfe eines räumlichen Geburtsprozesses ein entsprechendes stationäres Modell zu definieren, vgl. dazu Stoyan und Schlather (2000). Sowohl im endlichen als auch im stationären Fall unterscheidet sich die Radienverteilung der tatsächlich platzierten Kugeln von der der vorgeschlagenen Kugeln. Es ist also wichtig, diesen Unterschied zwischen *Vorschlagsverteilung* und *resultierender Verteilung* zu berücksichtigen (Stoyan und Schlather, 2000). Dass es abgesehen vom trivialen Fall gleich großer Kugeln keine analytische Beziehung zwischen beiden Verteilungen gibt, macht eine Anpassung des RSA-Modells an reale Situationen i. A. recht schwierig.

Für das RSA-Modell mit gleich großen Kugeln im \mathbb{R}^3 konnte gezeigt werden, dass der größtmögliche Volumenanteil der Kugeln bei etwa 0.38 liegt (vgl. z. B. Torquato, 2000).

Es ist intuitiv klar, dass sich dieser maximale Volumenanteil bei Verwendung verschieden großer Kugeln erhöht (siehe auch Stroeven und Stroeven, 1999). Verglichen mit den Volumenanteilen 0.368 und 0.423 der beiden Betonproben erscheint eine Modellierung mit Hilfe des RSA-Modells zumindest unter diesem Gesichtspunkt als nicht aussichtslos.

Mit dem Ziel sowohl entsprechende Volumenanteile als auch gleichzeitig die in Abbildung 4.3(a) gezeigten resultierenden Radienverteilungen zu erreichen, hat der Autor verschiedene Vorschlagsverteilungen getestet. Typischerweise wurde aber der Sättigungszustand zu früh erreicht, und es war insbesondere schwierig, eine ausreichende Zahl größerer Kugeln im Gebiet W unterzubringen. Dieses „klassische“ RSA-Modell scheidet damit als Modell für die beiden Betonproben aus. Deshalb wird in Abschnitt 4.3 eine Modifizierung dieses Modells betrachtet. Diese Modifizierung ist keinesfalls neu; sie wird schon seit etwa zwei Jahrzehnten von Ingenieuren verwendet.

4.2.3 Stationärer markierter Gibbs-Prozess

Gibbs-Prozesse mit Kugeln basieren auf Ideen aus der Statistischen Physik. Während es für den Fall gleich großer Kugeln eine umfangreiche Literatur gibt (siehe den Überblick in Löwen, 2000), ist die Zahl der Publikationen für Kugeln mit zufälligen Radien geringer (siehe z. B. Mase, 1986; Sollich, 2002), dennoch wird in einigen auch statistischen Fragestellungen sowohl für den kanonischen als auch großkanonischen (und damit stationären) Fall nachgegangen (Wilding und Sollich, 2002; Döge und Stoyan, 2002).

Für eine exakte Definition des stationären markierten Gibbs-Prozesses mit unterschiedlich großen Kugeln sei auf Mase (1986), Sollich (2002) sowie Stoyan und Stoyan (1994) verwiesen. Heuristisch ist im vorliegenden Fall ein markierter Gibbs-Prozess als ein unabhängig markierter Poisson-Prozess unter der Bedingung definiert, dass sich die Kugeln, die durch die als Marken zu betrachtenden Radien gegeben sind, nicht schneiden.

Der zugrunde liegende stationäre markierte Poisson-Prozess ist vollständig durch eine Intensität λ und eine Dichtefunktion $m(r)$ der Radienverteilung gegeben, wobei letztere wie in Stoyan und Schlather (2000) *Vorschlagsverteilung* heiße. Wieder sind die Radien in akzeptierten Kugelkonfigurationen tendenziell kleiner als die gemäß $m(r)$ verteilten Radien, was besonders durch eine Simulationsmethode für den stationären markierten Gibbs-Prozess, nämlich den Metropolis-Hastings-Algorithmus (vgl. Møller und Waagepetersen, 2003) deutlich wird: Versucht man einer vorliegenden Kugelkonfiguration eine weitere Kugel, deren Radius gemäß $m(r)$ verteilt ist, hinzuzufügen, ist es aufgrund der Nichtüberlappungsbedingung wahrscheinlicher, dass eine kleinere Kugel akzeptiert wird. Es gibt also auch hier eine weitere Radienverteilung, die Radienverteilung des Gibbs-

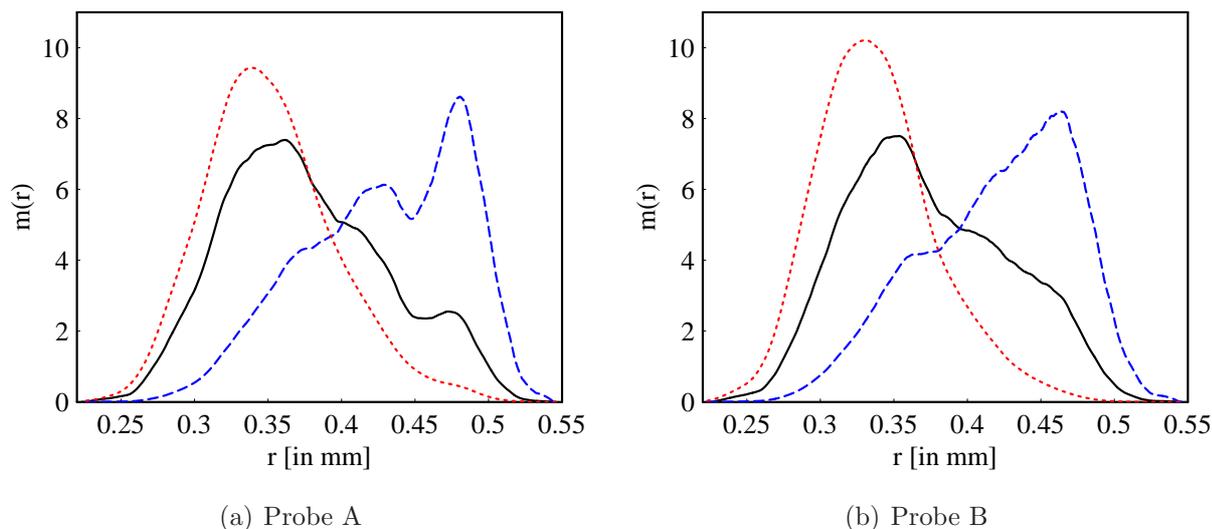


Abbildung 4.5: Dichtefunktionen zu Radienverteilungen: empirische Verteilung (—), Vorschlagsverteilung (---), resultierende Verteilung (····).

Prozesses, welche wiederum *resultierende Radienverteilung* heißen soll. Die zugehörige Dichtefunktion sei durch $m^*(r)$ bezeichnet¹.

Wenn man annimmt, dass eine vorliegende Kugelkonfiguration die Realisierung eines solchen markierten Gibbs-Prozesses ist, dann ist zwar $m^*(r)$ beobachtbar, aber nicht die für eine Simulation nötigen Größen λ und $m(r)$. Es ist aber durch Mase (1986) gezeigt worden, dass Vorschlagsgrößen und resultierende Größen durch die analytische Beziehung

$$\lambda^* m^*(r) = \lambda m(r) (1 - V_V) (1 - H_s(r)) \quad (4.1)$$

miteinander verbunden sind. Dabei sind λ^* die Intensität des Gibbs-Prozesses, $H_s(r)$ die (resultierende) sphärische Kontaktverteilungsfunktion der durch die Vereinigung der Kugeln des Gibbs-Prozesses bestimmten zufälligen Menge und V_V der zugehörige (resultierende) Volumenanteil.

Da die Größen λ^* , $m^*(r)$, $H_s(r)$ und V_V geschätzt werden können, ist ähnlich der Momentenmethode mit Gleichung (4.1) auch ein Schätzer $\widehat{\lambda m(r)}$ für $\lambda m(r)$ konstruierbar. Eigenschaften von $\widehat{\lambda m(r)}$ sind dabei jedoch nicht bekannt. Abbildung 4.5 zeigt die mit dieser Methode geschätzten Dichtefunktionen der Vorschlagsverteilung und die aus der Metropolis-Hastings-Simulation des Gibbs-Prozesses mit $\widehat{\lambda m(r)}$ erhaltene zugehörige resultierende Dichtefunktion. Offenbar unterscheiden sich die resultierende und die empirische Dichtefunktion für beide Proben deutlich. Wäre das Modell passend, sollten beide Dichtefunktionen eng beieinander liegen.

¹Mit (4.1) lässt sich zeigen: Ein gemäß $m^*(r)$ verteilter zufälliger Radius ist *kleiner im Sinne der gewöhnlichen stochastischen Ordnung* \leq_{st} als ein gemäß $m(r)$ verteilter zufälliger Radius, siehe zu \leq_{st} z. B. Müller und Stoyan (2002).

Um die Richtigkeit dieser Schließweise zu testen, wurde nun ausgehend von den resultierenden Radienverteilungen in Abbildung 4.5 und den zugehörigen Größen $H_s(r)$ und V_V das Schätzverfahren wiederholt. In diesem Fall wurden tatsächlich die Vorschlagsgrößen reproduziert. Das legt nahe, auch den stationären markierten Gibbs-Prozess als Modell für die Betonproben zu verwerfen. Auch hier wird sich aber zeigen, dass ein verändertes, endliches Modell (Abschnitt 4.3.2) besser in der Lage ist, die Betonproben zu beschreiben.

4.3 Modifizierte Modelle

Die Untersuchungen in Abschnitt 4.2 haben gezeigt, dass eine Modellierung der beiden Betonproben durch das klassische RSA-Modell, den üblichen (stationären) markierten Gibbs-Prozess und das durch den force-biased-Algorithmus definierte Packungsmodell nicht sinnvoll ist. Insbesondere bereitet offenbar die Existenz *zweier* verschiedener Radienverteilungen in einem Modell Schwierigkeiten bei der Anwendung auf die Betonproben, da es zur Vorschlagsverteilung keinen Gegenpart im Herstellungsprozess gibt. Im Folgenden werden daher nun Modifizierungen der beiden erstgenannten Modelle betrachtet, die mit *einer* Radienverteilung auskommen.

4.3.1 Geordnetes RSA-Modell

Bentz u. a. (1999) beschreiben das Modell auf folgende Weise:

„The first step in the computer program is to place the hard core particles at random locations in the 3-*D* cubic volume. The particles are placed from largest to smallest and are not allowed to overlap. . . [being so] ordered to assure that the larger particles can be placed; if the placement were totally at random, there often would not be any remaining space for the placement of a larger particle after many of the smaller particles had been (randomly) placed. . . . Periodic boundaries are maintained during the placement process, such that if a portion of a particle extends across one or more faces of the 3-*D* [region], it is completed on the opposing [face]s.“

Ist ein Versuch, eine neue Kugel zu platzieren, nicht erfolgreich, wird im nächsten Versuch eine Kugel mit dem *gleichen Radius*, aber einem neuen zufälligen Mittelpunkt verwendet. Ziel dieses Algorithmus ist es immer, eine feste Anzahl harter Kugeln mit einem vorgegebenen Satz an Radien in einem beschränkten Gebiet $W \subset \mathbb{R}^3$ unterzubringen. Dabei kann es durchaus vorkommen, dass die Simulation fehlschlägt. Das heißt, durch „ungünstig“ liegende Kugeln kann es unmöglich sein, alle Kugeln entsprechend unterzubringen. Solche Versuche sollen verworfen werden. Somit ist dieses Modell unter der Bedingung definiert, dass tatsächlich alle Kugeln untergebracht werden können.

4.3.2 Schiebemodell

Auch dieses Modell ist wiederum durch eine Simulationsvorschrift für eine feste Anzahl n von Kugeln in einem quaderförmigen endlichen Gebiet $W \subset \mathbb{R}^3$ definiert, wobei für W periodische Randbedingungen gelten sollen. Die Radien der Kugeln bleiben während der gesamten Simulation fest. Sie können zu Beginn auf zufällige oder deterministische Weise bestimmt werden.

Der Simulationsalgorithmus beginnt mit einer überlappungsfreien Konfiguration dieser Kugeln in W , die beispielsweise als Ergebnis einer entsprechenden Simulation des geordneten RSA-Modells wählbar ist. Es wird im Folgenden schrittweise gemäß der Methode von Metropolis u. a. (1953) zur Simulation des Gibbs-Prozesses mit gleich großen Kugeln vorgegangen. In jedem Schritt wird gemäß der Gleichverteilung auf $\{1, \dots, n\}$ eine Kugel ausgewählt und um einen gemäß der Gleichverteilung auf $[0, c]^3$ (c klein im Vergleich zu den Kantenlängen von W) zufälligen Vektor verschoben. Führt dies wieder zu einer überlappungsfreien Kugelkonfiguration, wird diese als neuer Zustand des Algorithmus akzeptiert, ansonsten wird die zu Beginn des Schritts vorliegende Konfiguration beibehalten. Diese Verschiebungsprozedur wird solange fortgesetzt, bis ein Gleichgewichtszustand für die Konfiguration der harten Kugeln erreicht ist.

Der Algorithmus gehört mit dieser Vorschrift zu den MCMC-Simulationen. Von den notwendigen theoretischen Voraussetzungen (siehe z. B. den Überblick in Gilks u. a., 1996) für die entsprechende Markov-Kette fehlt insbesondere für die Irreduzibilität eine ähnliche einfache Überprüfung wie im Fall zufälliger Kugelanzahlen. Jedoch erscheint die Irreduzibilität bei den hier betrachteten moderaten Volumenanteilen der Kugeln als äußerst plausibel.

4.3.3 Überprüfung der modifizierten Modelle

Für die Simulationen des geordneten RSA-Modells und des Schiebemodells wurden genau die Radien verwendet, die sich aus den Rekonstruktionen der Betonproben ergaben. Somit sind Unterschiede der im Folgenden betrachteten Charakteristiken allein auf die Art des Modells zurückzuführen. Die Kurven für die beiden Modelle basieren dabei auf jeweils 1000 Simulationen in einem zur jeweiligen Betonprobe vergleichbaren Fenster.

Abbildung 4.6 zeigt die durch Simulation gewonnenene Paarkorrelationsfunktionen des geordneten RSA-Modells und des Schiebemodells. Die Unterschiede zu den empirischen Kurven sind relativ gering, insbesondere im Vergleich zu Abbildung 4.4.

Um diese Unterschiede noch etwas besser bewerten zu können, wurde jeweils ein L -Test (siehe Stoyan und Stoyan, 1994; Møller und Waagepetersen, 2003) durchgeführt. In Møller

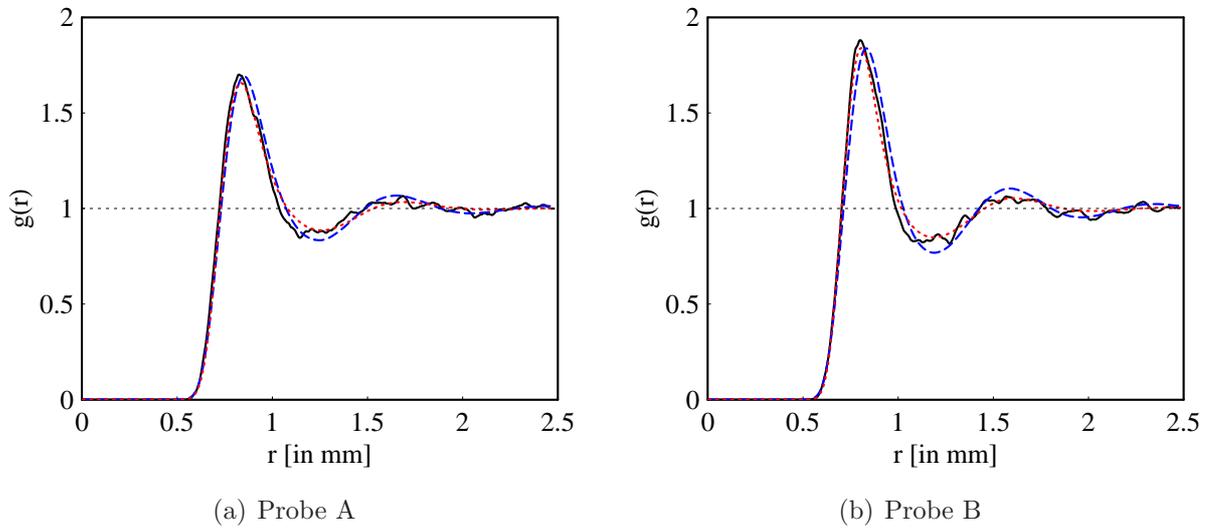


Abbildung 4.6: Paarkorrelationsfunktioncorrelationen der Betonprobe (—), des Schiebemodells (---) und des geordneten RSA-Modells (····).

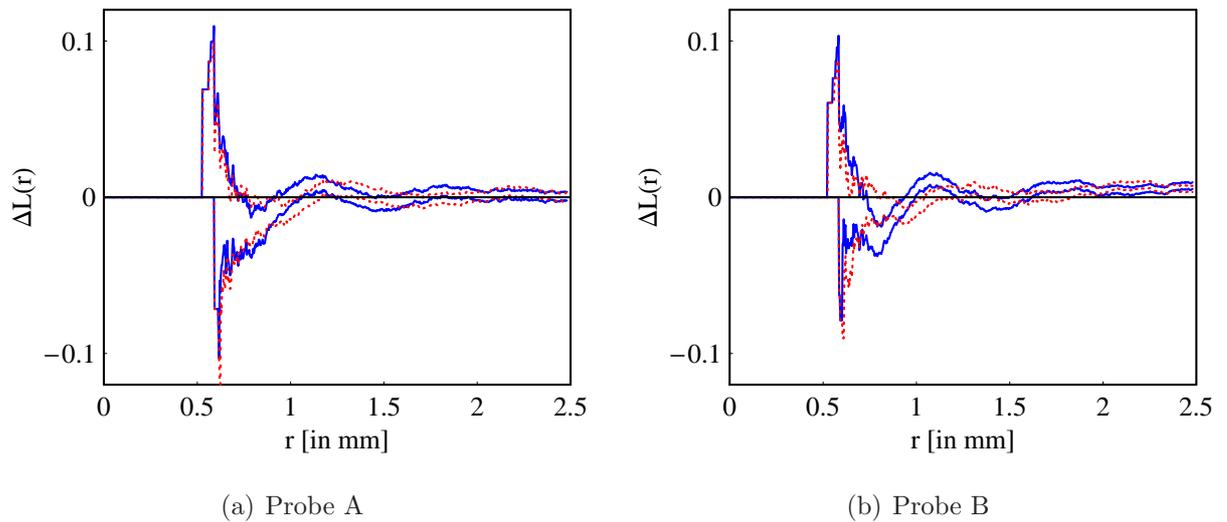


Abbildung 4.7: 99% Einhüllende der L -Funktion (dargestellt sind die Abweichungen von der empirischen L -Funktion der Betonprobe) für das Schiebemodell (—) und das geordnete RSA-Modell(····).

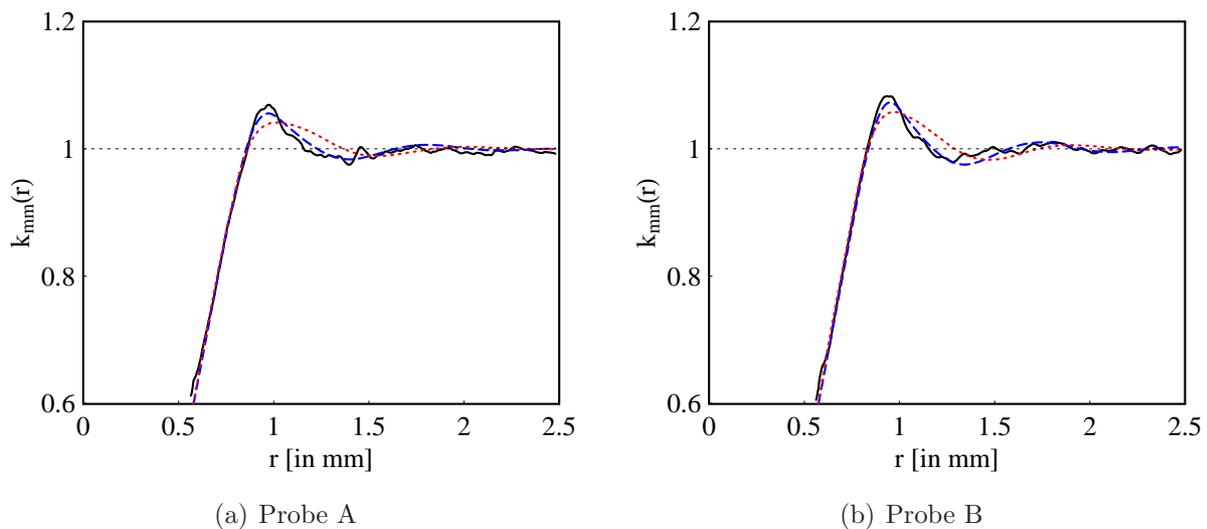


Abbildung 4.8: Markenkorrelationsfunktionen der Betonprobe (—), des Schiebemodells (---) und des geordneten RSA-Modells (....).

und Waagepetersen (2003) wird dafür die Darstellung der Funktion $L(r) - r$, $r > 0$, vorgeschlagen. Für Werte von r unterhalb des kleinstmöglichen Kugelmittelpunktabstands ist $L(r) = 0$ und damit $L(r) - r = -r$. Das ist betragsmäßig sehr viel größer als die Unterschiede zwischen den entsprechenden L -Funktionen für größere r . Abbildung 4.7 zeigt deshalb stattdessen die Abweichungen der aus jeweils 999 Simulationen bestimmten 99% Einhüllenden der zum Modell gehörenden L -Funktion von der empirischen L -Funktion. Es ist daher nun von Interesse, ob die r -Achse, die hier die empirische L -Funktion repräsentiert, innerhalb der Einhüllenden liegt.

Abbildung 4.7 zeigt, dass dieser formale Test für beide Proben sowohl das Schiebemodell als auch das geordnete RSA-Modell ablehnt, für Probe B sogar etwas deutlicher als für Probe A. Diese formale Ablehnung wird ihre Ursache vor allem darin haben, dass beide Modelle eben nicht vollständig zutreffend sind. Aus statistischer Sicht kann diese Ablehnung jedoch auch eine Folge der relativ großen Anzahl von Kugeln (Größenordnung 10^3) in den simulierten Proben sein, die aufgrund von Mischungseigenschaften schon zu jeweils relativ „genauen“ Schätzungen der L -Funktion führen und somit den Bereich der Einhüllenden entsprechend schmal werden lassen.

Ein Vergleich der Markenkorrelationsfunktionen für die Kugelradien in Abbildung 4.8 zeigt starke Ähnlichkeiten zwischen den Kurven für die Betonproben und das Schiebemodell, während vor allem im Bereich zwischen $r = 0,8$ mm und $r = 1,5$ mm für die Kurven des geordneten RSA-Modells deutlichere Unterschiede festzustellen sind.

In Abbildung 4.9 ist ein Vergleich der sphärischen Kontaktverteilungsfunktionen dargestellt. Darin ist wiederum eine größere Ähnlichkeit zwischen den entsprechenden Kurven

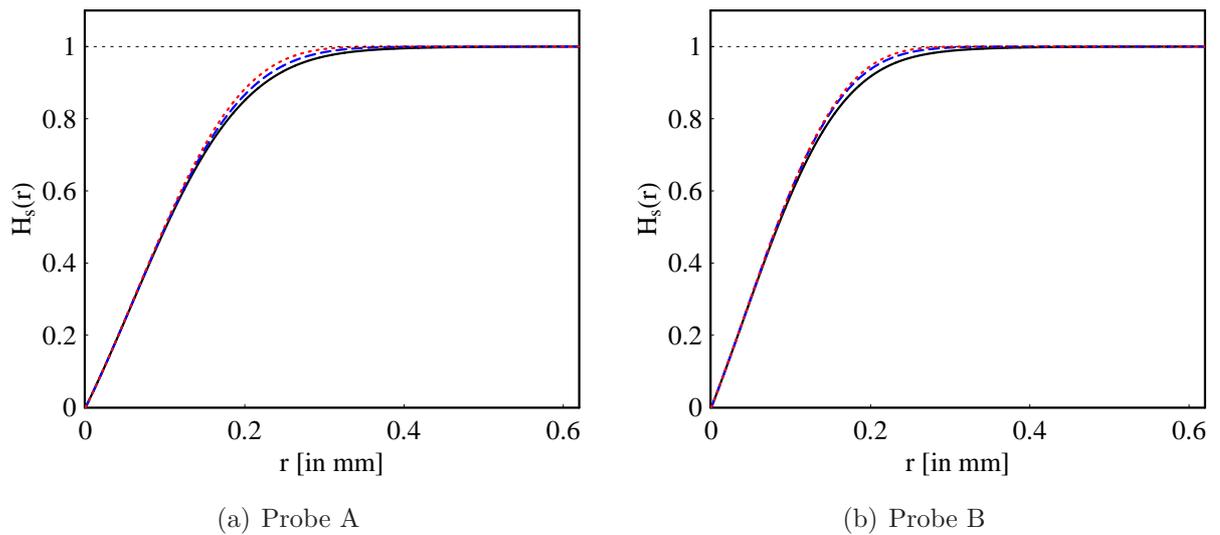


Abbildung 4.9: Sphärische Kontaktverteilungsfunktionen der Betonprobe (—), des Schiebemodells (---) und des geordneten RSA-Modells (⋯).

der Betonprobe und des Schiebemodells als zwischen den Kurven der Betonprobe und des geordneten RSA-Modells erkennbar. Jedoch führt auch hier ein dem L -Test entsprechender Test – nun unter Verwendung von H_s – zur Ablehnung beider Modelle.

Als weitere Charakteristik aus der Theorie der zufälligen Mengen wird nun noch die Kovarianz $C(r)$ betrachtet. Zur Schätzung von $C(r)$ wurde dabei die Methode des Minus-Sampling (Stoyan, Kendall und Mecke, 1995, S. 215) verwendet. Abbildung 4.10 zeigt dabei weder eine völlige Übereinstimmung von empirischen und „theoretischen“ Kurven, noch wird die eindeutige Bevorzugung eines der beiden betrachteten Modelle angedeutet.

4.4 Schlussfolgerungen

Die aus der Räumlichen Statistik und der Statistischen Physik bekannten Modelle für zufällige Konfigurationen harter Kugeln sind meist einfach beschreibbar und nicht zuletzt aus diesem Grund auf vielfältige Situationen anwendbar. Für die hier betrachteten rekonstruierten Proben eines speziellen Betons konnte jedoch gezeigt werden, dass diese durch die klassischen Modelle (RSA-Modell, markierter Gibbs-Prozess, Packungsmodell gemäß force-biased-Algorithmus) nicht gut beschrieben werden können. Auch zwei weitere, modifizierte Modelle werden aus formaler Sicht abgelehnt, scheinen aber dennoch deutlich besser als die klassischen Modelle angepasst zu sein.

Im Vergleich des geordneten RSA-Modells und des Schiebemodells sollte insbesondere mit Blick auf die Abbildungen 4.8 und 4.9 dem Schiebemodell der Vorzug gegeben werden. Dies mag insofern nicht überraschend sein, als das Schiebemodell den realen Vorgängen bei der

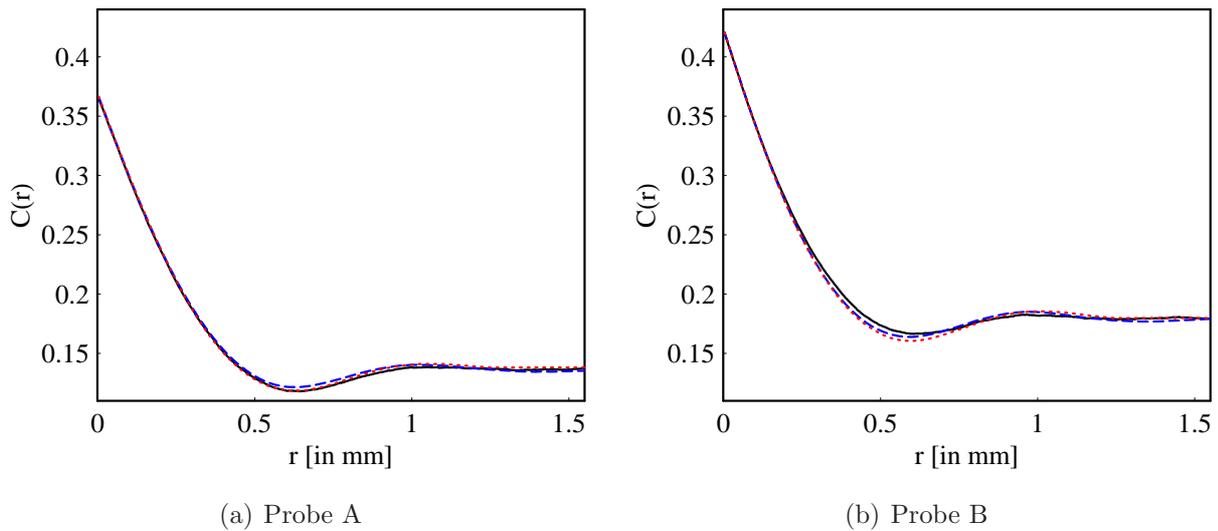


Abbildung 4.10: Kovarianzen der Betonprobe (—), des Schiebemodells (---) und des geordneten RSA-Modells (⋯).

Herstellung des Betons möglicherweise näher als das geordnete RSA-Modell kommt. Der sicherlich recht wesentliche Durchmischungsprozess der Korundkugeln während der Herstellung könnte durch das Verschieben der Kugeln im Metropolis-Algorithmus wesentlich besser modelliert sein als durch die ortsunveränderlichen Anlagerungen im (geordneten) RSA-Modell.

Anhang A

Herleitungen der Produktdichte des Oberflächenmaßes

Im Fall des Booleschen Modells ist es möglich, die Produktdichte des zufälligen Oberflächenmaßes für bestimmte Kornverteilungen mit Hilfe von Folgerung 2.2 zu bestimmen, wobei hier (2.119) verwendet wird. Die folgenden Rechnungen sind die Grundlage für die Ergebnisse in den Abschnitten 2.6.2 und 2.6.3.

A.1 Boolesches Modell mit Rechtecken

Das typische Korn Ξ_0 sei ein zufällig gemäß der Gleichverteilung auf SO_2 gedrehtes Rechteck in \mathbb{R}^2 mit Kantenlängen $0 < a \leq b$. Für die mittlere Schnittfläche des typischen Rechtecks mit dessen um den Vektor \mathbf{r} , $\|\mathbf{r}\| = r$, verschobenen Translat gilt (siehe auch Abbildung A.1)

$$\mathbb{E}\mathcal{H}^d(\Xi_0 \cap [\Xi_0 - \mathbf{r}]) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a - r \cos \alpha)(b - r \sin \alpha) d\alpha, & 0 < r \leq a, \\ \frac{2}{\pi} \int_{\arccos \frac{a}{r}}^{\frac{\pi}{2}} (a - r \cos \alpha)(b - r \sin \alpha) d\alpha, & a < r \leq b, \\ \frac{2}{\pi} \int_{\arccos \frac{a}{r}}^{\arcsin \frac{b}{r}} (a - r \cos \alpha)(b - r \sin \alpha) d\alpha, & b < r \leq \sqrt{a^2 + b^2}, \\ 0, & r > \sqrt{a^2 + b^2}, \end{cases}$$
$$= \begin{cases} ab - \frac{2(a+b)}{\pi} r + \frac{r^2}{\pi}, & 0 < r \leq a, \\ ab - \frac{2ab}{\pi} \arccos \frac{a}{r} + \frac{2b}{\pi} \sqrt{r^2 - a^2} - \frac{2b}{\pi} r - \frac{a^2}{\pi}, & a < r \leq b, \\ \frac{2ab}{\pi} \arcsin \frac{b}{r} - \frac{2ab}{\pi} \arccos \frac{a}{r} + \frac{2b}{\pi} \sqrt{r^2 - a^2} + \frac{2a}{\pi} \sqrt{r^2 - b^2} - \frac{a^2 + b^2 + r^2}{\pi}, & b < r \leq \sqrt{a^2 + b^2}, \\ 0, & r > \sqrt{a^2 + b^2}. \end{cases}$$

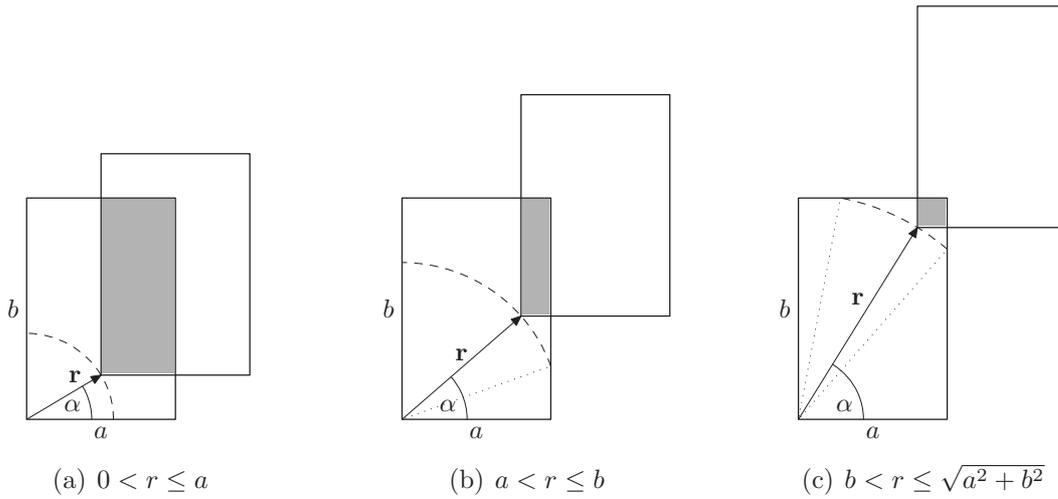


Abbildung A.1: Schnittfläche zwischen einem Rechteck und dem um \mathbf{r} verschobenen Translat des Rechtecks (graue Fläche).

Dabei ist eine Drehung des Rechtecks um den Winkel α äquivalent zu einer Drehung des Vektors $(r, 0)^T$ um den Winkel $-\alpha$. Es sei daher $\mathbf{r} = (r \cos \alpha, r \sin \alpha)^T$. Wegen der Symmetrien des Rechtecks genügt es, α nur im Intervall $[0, \pi/2)$ zu betrachten. Die betrachtete mittlere Fläche ist im vorliegenden Fall nichts anderes als die isotropisierte Mengenkovarianz eines Rechteckes, vgl. dazu z. B. Stoyan und Stoyan (1994, S. 123).

Weiterhin ist (siehe auch Abbildung A.2)

$$2\mathbb{E}C_{d-1}(\Xi_0, \Xi_0 - \mathbf{r})$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a + b - r \cos \alpha - r \sin \alpha) d\alpha, & 0 < r \leq a, \\ \frac{2}{\pi} \int_{\arccos \frac{a}{r}}^{\frac{\pi}{2}} (a + b - r \cos \alpha - r \sin \alpha) d\alpha, & a < r \leq b, \\ \frac{2}{\pi} \int_{\arccos \frac{a}{r}}^{\arcsin \frac{b}{r}} (a + b - r \cos \alpha - r \sin \alpha) d\alpha, & b < r \leq \sqrt{a^2 + b^2}, \\ 0, & r > \sqrt{a^2 + b^2}, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} a + b - \frac{4r}{\pi}, & 0 < r \leq a, \\ a + b - \frac{2(a+b)}{\pi} \arccos \frac{a}{r} + \frac{2}{\pi} \sqrt{r^2 - a^2} - \frac{2r+2a}{\pi}, & a < r \leq b, \\ \frac{2(a+b)}{\pi} \arcsin \frac{b}{r} - \frac{2(a+b)}{\pi} \arccos \frac{a}{r} + \frac{2}{\pi} \sqrt{r^2 - a^2} + \frac{2}{\pi} \sqrt{r^2 - b^2} - \frac{2a+2b}{\pi}, & b < r \leq \sqrt{a^2 + b^2}, \\ 0, & r > \sqrt{a^2 + b^2}. \end{cases}$$

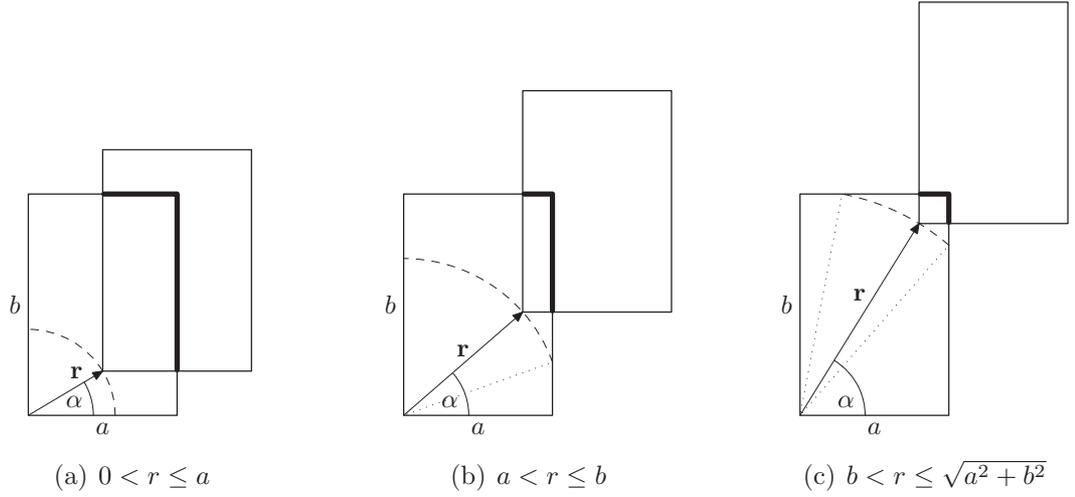


Abbildung A.2: Rand des Rechtecks, der in dem um \mathbf{r} verschobenen Translat des Rechtecks enthalten ist (dicke schwarze Linie).

Etwas umfangreicher ist die Berechnung von $2 \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0+} \mathbb{E}C_{d-1}(\Xi_0, (\Xi_0)_t - \mathbf{r})$. Es sei im Folgenden K ein achsenparalleles Rechteck mit Mittelpunkt im Ursprung und Kantenlängen a und b . Für $0 \leq t < r$ sei

$$I_1(t, r) = \int_0^{\arcsin \frac{t}{r}} \sqrt{t^2 - r^2 \sin^2 \alpha} d\alpha,$$

und für $0 \leq a < r$ und $0 \leq t < \min\{\sqrt{r^2 - a^2}, a\}$ sei

$$I_2(t, a, r) = \int_{\arccos \frac{a+t}{r}}^{\arccos \frac{a}{r}} \sqrt{t^2 - (r \cos \alpha - a)^2} d\alpha.$$

Wegen $I_1(0, r) = 0$ und $\sqrt{t^2 - r^2 \sin^2 \alpha} \leq t$ gilt

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0+} I_1(t, r) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{I_1(t, r)}{t} \leq \lim_{t \rightarrow +0} \int_0^{\arcsin \frac{t}{r}} 1 d\alpha = 0.$$

Analoges gilt für $I_2(t, a, r)$. Daher gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0+} I_1(t, r) = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0+} I_2(t, a, r) = 0 \quad (\text{A.1})$$

Mit der Substitution $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ gilt auch

$$I_1(t, r) = \int_{\arccos \frac{t}{r}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{t^2 - r^2 \cos^2 \beta} d\beta \quad \text{und} \quad I_2(t, b, r) = \int_{\arcsin \frac{b}{r}}^{\arcsin \frac{b+t}{r}} \sqrt{t^2 - (r \sin \beta - b)^2} d\beta.$$

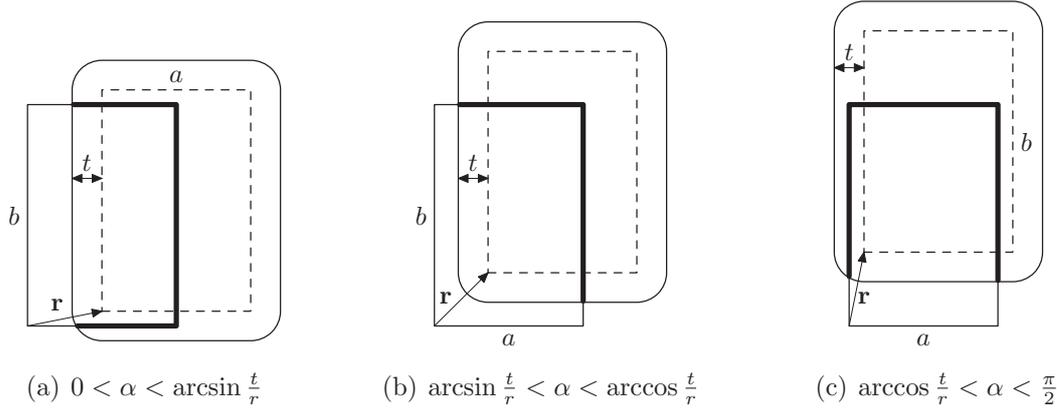


Abbildung A.3: Rand des Rechtecks, der in der um \mathbf{r} verschobenen Parallelmenge des Rechtecks enthalten ist (dicke schwarze Linie), im Fall $0 < r \leq a$.

1. Fall: $0 < r \leq a$ (siehe auch Abbildung A.3).

Es sei $0 \leq t < \frac{\sqrt{2}}{2}r$. Damit gilt $\arcsin \frac{t}{r} < \arccos \frac{t}{r}$. Mit $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ gibt es folgende Fälle:

$$2C_{d-1}(K, K_t - \mathbf{r}) = \begin{cases} 2a + b + t - 2r \cos \alpha + \sqrt{t^2 - r^2 \sin^2 \alpha}, & 0 < \alpha < \arcsin \frac{t}{r}, \\ a + b + 2t - r \sin \alpha - r \cos \alpha, & \arcsin \frac{t}{r} < \alpha < \arccos \frac{t}{r}, \\ a + 2b + t - 2r \sin \alpha + \sqrt{t^2 - r^2 \cos^2 \alpha}, & \arccos \frac{t}{r} < \alpha < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Damit gilt

$$2\mathbb{E}C_{d-1}(\Xi_0, (\Xi_0)_t - \mathbf{r})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\arcsin \frac{t}{r}} (2a + b + t - 2r \cos \alpha + \sqrt{t^2 - r^2 \sin^2 \alpha}) d\alpha + \frac{2}{\pi} \int_{\arcsin \frac{t}{r}}^{\arccos \frac{t}{r}} (a + b + 2t - r \sin \alpha - r \cos \alpha) d\alpha \\ &\quad + \frac{2}{\pi} \int_{\arccos \frac{t}{r}}^{\frac{\pi}{2}} (a + 2b + t - 2r \sin \alpha + \sqrt{t^2 - r^2 \cos^2 \alpha}) d\alpha \\ &= \frac{2}{\pi} \left((2a + b + t) \arcsin \frac{t}{r} - 2t + I_1(t, r) + (a + b + 2t) \arccos \frac{t}{r} + t - \sqrt{r^2 - t^2} \right. \\ &\quad \left. - (a + b + 2t) \arcsin \frac{t}{r} - \sqrt{r^2 - t^2} + t + (a + 2b + t) \frac{\pi}{2} + I_1(t, r) - \arccos \frac{t}{r} - 2t \right). \end{aligned}$$

Dann ist

$$2 \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{E}C_{d-1}(\Xi_0, (\Xi_0)_t - \mathbf{r}) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{a + b - 2t}{\sqrt{r^2 - t^2}} - 2 \arcsin \frac{t}{r} + \pi - 2 + \frac{2t}{\sqrt{r^2 - t^2}} + 2 \frac{\partial}{\partial t} I_1(t, r) \right)$$

und folglich

$$2 \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0+} \mathbb{E}C_{d-1}(\Xi_0, (\Xi_0)_t - \mathbf{r}) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{a + b}{r} + \pi - 2 \right).$$

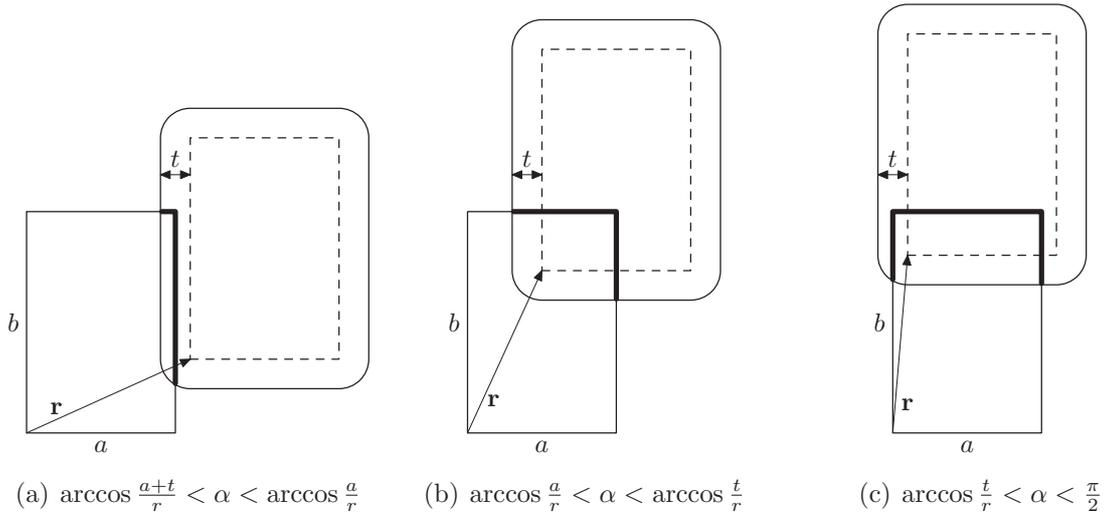


Abbildung A.4: Rand des Rechtecks, der in der um \mathbf{r} verschobenen Parallelmenge des Rechtecks enthalten ist (dicke schwarze Linie), im Fall $a < r \leq b$.

2.Fall: $a < r \leq b$ (siehe auch Abbildung A.4).

Es sei $t < \min\{\sqrt{r^2 - a^2}, a\}$. Aus $t < a$ folgt $\arccos \frac{a}{r} < \arccos \frac{t}{r}$. Wegen $t < \sqrt{r^2 - a^2}$ genügt es, folgende Fälle mit $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ zu betrachten:

$$2C_{d-1}(K, K_t - \mathbf{r}) = \begin{cases} b - r \sin \alpha + \sqrt{t^2 - (r \cos \alpha - a)^2}, & \arccos \frac{a+t}{r} < \alpha < \arccos \frac{a}{r}, \\ a + b + 2t - r \sin \alpha - r \cos \alpha, & \arccos \frac{a}{r} < \alpha < \arccos \frac{t}{r}, \\ a + 2b + t - 2r \sin \alpha + \sqrt{t^2 - r^2 \cos^2 \alpha}, & \arccos \frac{t}{r} < \alpha < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} & 2\mathbb{E}C_{d-1}(\Xi_0, (\Xi_0)_t - \mathbf{r}) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{\arccos \frac{a+t}{r}}^{\arccos \frac{a}{r}} (b - r \sin \alpha + \sqrt{t^2 - (r \cos \alpha - a)^2}) d\alpha + \frac{2}{\pi} \int_{\arccos \frac{a}{r}}^{\arccos \frac{t}{r}} (a + b + 2t - r \sin \alpha - r \cos \alpha) d\alpha \\ &+ \frac{2}{\pi} \int_{\arccos \frac{t}{r}}^{\frac{\pi}{2}} (a + 2b + t - 2r \sin \alpha + \sqrt{t^2 - r^2 \cos^2 \alpha}) d\alpha \\ &= \frac{2}{\pi} \left(b \arccos \frac{a}{r} + a - b \arccos \frac{a+t}{r} - (a+t) + I_2(t, a, r) + (a+b+2t) \arccos \frac{t}{r} \right. \\ &+ t - \sqrt{r^2 - t^2} - (a+b+2t) \arccos \frac{a}{r} - a + \sqrt{r^2 - a^2} + (a+2b+t) \frac{\pi}{2} \\ &\left. - (a+2b+t) \arccos \frac{t}{r} - 2t + I_1(t, r) \right). \end{aligned}$$

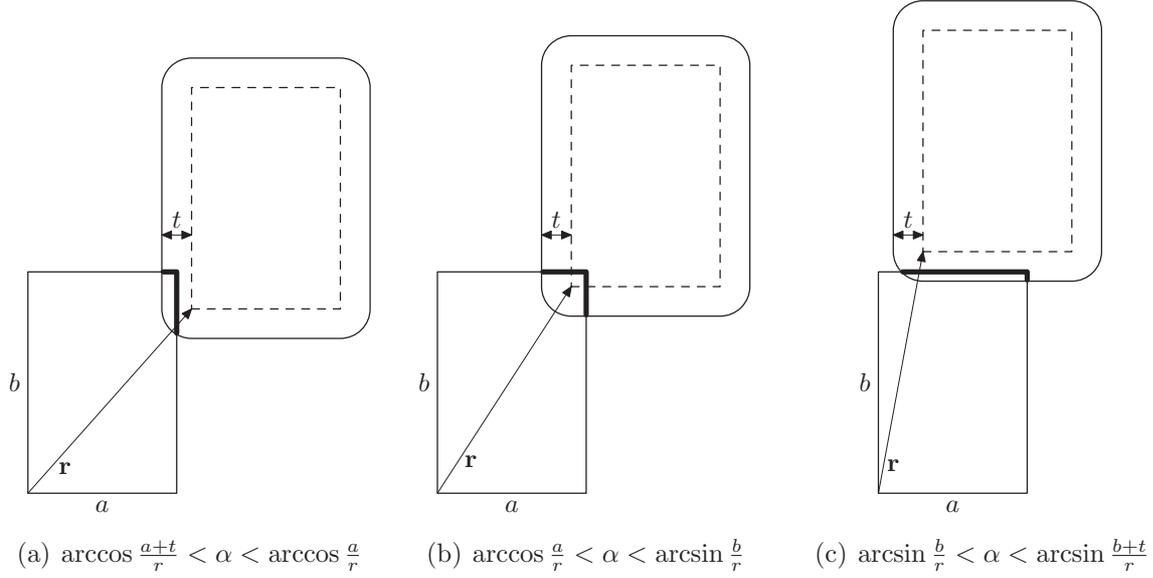


Abbildung A.5: Oberfläche des Rechtecks, die in der um \mathbf{r} verschobenen Parallelmengung des Rechtecks enthalten ist (dicke schwarze Linie), im Fall $b < r \leq \sqrt{a^2 + b^2}$.

Dann ist

$$2 \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{E}C_{d-1}(\Xi_0, (\Xi_0)_t - \mathbf{r}) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{b}{\sqrt{r^2 - (a+t)^2}} + \frac{\partial}{\partial t} I_2(t, a, r) + \arccos \frac{t}{r} + \frac{b-t}{\sqrt{r^2 - t^2}} \right. \\ \left. + \frac{t}{\sqrt{r^2 - t^2}} - 2 \arccos \frac{a}{r} + \frac{\pi}{2} - 2 + \frac{\partial}{\partial t} I_1(t, r) \right)$$

und folglich

$$2 \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0+} \mathbb{E}C_{d-1}(\Xi_0, (\Xi_0)_t - \mathbf{r}) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{b}{r} + \frac{b}{\sqrt{r^2 - a^2}} - 2 \arccos \frac{a}{r} + \pi - 2 \right).$$

3.Fall: $b < r \leq \sqrt{a^2 + b^2}$ (siehe auch Abbildung A.5).

Es sei $t < \min\{\sqrt{r^2 - b^2}, b\}$. Aus $r \leq \sqrt{a^2 + b^2}$ folgt $\arccos \frac{a}{r} \leq \arcsin \frac{b}{r}$. Wegen $t < \sqrt{r^2 - b^2}$ genügt es, folgende Fälle mit $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ zu betrachten:

$$2C_{d-1}(K, K_t - \mathbf{r}) = \begin{cases} b - r \sin \alpha + \sqrt{t^2 - (r \cos \alpha - a)^2}, & \arccos \frac{a+t}{r} < \alpha < \arccos \frac{a}{r}, \\ a + b + 2t - r \sin \alpha - r \cos \alpha, & \arccos \frac{a}{r} < \alpha < \arcsin \frac{b}{r}, \\ a - r \cos \alpha + \sqrt{t^2 - (r \sin \alpha - b)^2}, & \arcsin \frac{b}{r} < \alpha < \arcsin \frac{b+t}{r}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit

$$\begin{aligned}
& 2\mathbb{E}C_{d-1}(\Xi_0, (\Xi_0)_t - \mathbf{r}) \\
&= \frac{2}{\pi} \int_{\arccos \frac{a+t}{r}}^{\arccos \frac{a}{r}} (b - r \sin \alpha + \sqrt{t^2 - (r \cos \alpha - a)^2}) d\alpha + \frac{2}{\pi} \int_{\arccos \frac{a}{r}}^{\arcsin \frac{b}{r}} (a + b + 2t - r \sin \alpha - r \cos \alpha) d\alpha \\
&+ \frac{2}{\pi} \int_{\arcsin \frac{b}{r}}^{\arcsin \frac{b+t}{r}} (a - r \cos \alpha + \sqrt{t^2 - (r \sin \alpha - b)^2}) d\alpha \\
&= \frac{2}{\pi} \left(b \arccos \frac{a}{r} + a - b \arccos \frac{a+t}{r} - (a+t) + I_2(t, a, r) + (a+b+2t) \arcsin \frac{b}{r} \right. \\
&\quad + \sqrt{r^2 - b^2} - b - (a+b+2t) \arccos \frac{a}{r} - a + \sqrt{r^2 - a^2} + a \arcsin \frac{b+t}{r} - (b+t) \\
&\quad \left. - a \arcsin \frac{b}{r} + b + I_2(t, b, r) \right).
\end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
2 \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{E}C_{d-1}(\Xi_0, (\Xi_0)_t - \mathbf{r}) &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{b}{\sqrt{r^2 - (a+t)^2}} - 1 + \frac{\partial}{\partial t} I_2(t, a, r) + 2 \arcsin \frac{b}{r} \right. \\
&\quad \left. - 2 \arccos \frac{a}{r} + \frac{a}{\sqrt{r^2 - (b+t)^2}} - 1 + \frac{\partial}{\partial t} I_2(t, b, r) \right)
\end{aligned}$$

und folglich

$$2 \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0+} \mathbb{E}C_{d-1}(\Xi_0, (\Xi_0)_t - \mathbf{r}) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{b}{\sqrt{r^2 - a^2}} + \frac{a}{\sqrt{r^2 - b^2}} - 2 \arccos \frac{a}{r} + 2 \arcsin \frac{b}{r} - 2 \right).$$

4.Fall: $r > \sqrt{a^2 + b^2}$. Für $t < r - \sqrt{a^2 + b^2}$ kommt es nie zum Schnitt, weshalb

$$2 \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0+} \mathbb{E}C_{d-1}(\Xi_0, (\Xi_0)_t - \mathbf{r}) = 0.$$

A.2 Boolesches Modell mit Kreiszyklindern

Es sei $d = 3$. Das typische Korn X_0 sei ein gerader Kreiszyklinder mit Höhe h , Radius R der Grundfläche, wobei $0 < h \leq 2R$, sowie zufälligem Richtungsvektor \mathbf{u} , der gemäß $\frac{1}{4\pi}\sigma_2$ (Gleichverteilung auf der Kugeloberfläche S^2) verteilt ist. Es werden hier also nur Zylinder betrachtet, deren Grundflächendurchmesser größer als die Höhe ist.

Mit der Darstellung $\mathbf{u} = (\sin \alpha \cos \beta, \sin \alpha \sin \beta, \cos \alpha)^T$ durch die üblichen Polarkoordinaten $\alpha \in [0, \pi]$ und $\beta \in [0, 2\pi)$ gilt $\sigma_2(d\mathbf{u}) = \sin \alpha d\alpha d\beta$. Wegen der Rotationssymmetrie des Zylinders sind alle im Folgenden betrachteten Größen unabhängig von β , und es wird nur bezüglich α integriert. Dabei reicht es wegen der Symmetrien des geraden Kreiszyklinders aus, α nur im Intervall $[0, \frac{\pi}{2})$ zu betrachten. Die Drehung des Zylinders kann wie im Fall der Rechtecke im vorhergehenden Abschnitt äquivalent durch eine Drehung des Abstandsvektors \mathbf{r} ersetzt werden. Für die Bestimmung der einzelnen Terme der Funktion g_S sind die folgenden zwei Größen des Schnitts zweier Kreisscheiben in \mathbb{R}^2 hilfreich.

Die Schnittfläche zweier Kreisscheiben mit Radien $s_1 \leq s_2$ und Mittelpunktabstand p , $s_2 - s_1 < p < s_1 + s_2$, ist durch

$$\begin{aligned} A(p, s_1, s_2) &= s_1^2 \arccos\left(\frac{p^2 + s_1^2 - s_2^2}{2ps_1}\right) - \frac{p^2 + s_1^2 - s_2^2}{4p^2} \sqrt{4p^2 s_1^2 - (p^2 + s_1^2 - s_2^2)^2} \\ &\quad + s_2^2 \arccos\left(\frac{p^2 + s_2^2 - s_1^2}{2ps_2}\right) - \frac{p^2 + s_2^2 - s_1^2}{4p^2} \sqrt{4p^2 s_2^2 - (p^2 + s_2^2 - s_1^2)^2} \\ &= s_1^2 \arccos\left(\frac{p^2 + s_1^2 - s_2^2}{2ps_1}\right) + s_2^2 \arccos\left(\frac{p^2 + s_2^2 - s_1^2}{2ps_2}\right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sqrt{4p^2 s_2^2 - (p^2 + s_2^2 - s_1^2)^2} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

gegeben, siehe z.B. Stoyan und Stoyan (1994). Weiterhin gilt für die Länge $l(p, s_1, s_2)$ des Randes des kleineren Kreises, der innerhalb des größeren Kreises liegt,

$$l(p, s_1, s_2) = 2s_1 \arccos\left(\frac{p^2 + s_1^2 - s_2^2}{2ps_1}\right). \quad (\text{A.3})$$

Mit (A.2) für gleich große Kreisscheiben gilt

$$\mathbb{E}\mathcal{H}^d(\Xi_0 \cap [\Xi_0 - \mathbf{r}]) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (h - r \cos \alpha) A(r \sin \alpha, R, R) \sin \alpha d\alpha, & 0 < r \leq h, \\ \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (h - r \cos \alpha) A(r \sin \alpha, R, R) \sin \alpha d\alpha, & h < r \leq 2R, \\ \frac{2}{\pi} \int_{\arccos \frac{h}{r}}^{\arcsin \frac{2R}{r}} (h - r \cos \alpha) A(r \sin \alpha, R, R) \sin \alpha d\alpha, & 2R < r \leq \sqrt{h^2 + 4R^2}, \\ 0, & r > \sqrt{h^2 + 4R^2}. \end{cases}$$

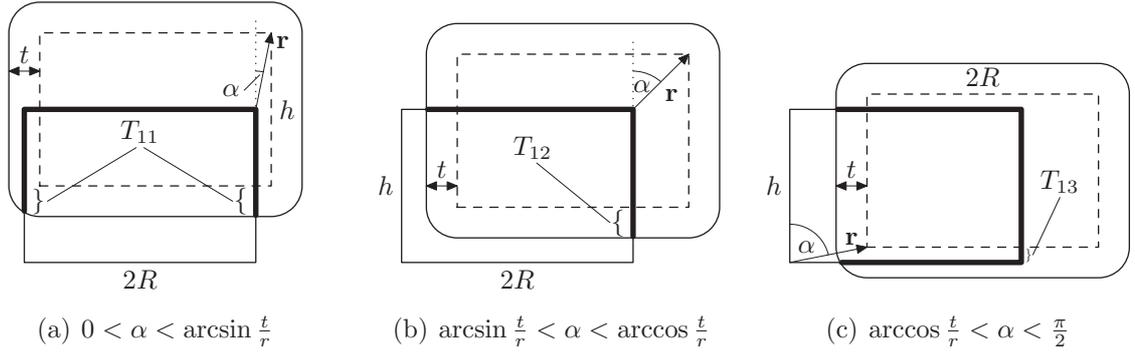


Abbildung A.6: Schnitt entlang der Ebene, die durch die beiden Achsen (jeweils durch Grund- und Deckflächenmittelpunkt) des Zylinders und seiner um \mathbf{r} verschobenen Parallelmenge geht. Die Oberfläche des Zylinders, die im Fall $0 < r \leq h$ in der Parallelmenge enthalten ist, ist hervorgehoben (dicke schwarze Linie).

Weiterhin ist mit (A.2) und (A.3) für gleich große Kreisscheiben

$$\begin{aligned}
& 2\mathbb{E}C_{d-1}(\Xi_0, \Xi_0 - \mathbf{r}) \\
&= \begin{cases} \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(h-r \cos \alpha)l(r \sin \alpha, R, R) + A(r \sin \alpha, R, R)] \sin \alpha \, d\alpha, & 0 < r \leq h, \\ \frac{2}{\pi} \int_{\arccos \frac{h}{r}}^{\frac{\pi}{2}} [(h-r \cos \alpha)l(r \sin \alpha, R, R) + A(r \sin \alpha, R, R)] \sin \alpha \, d\alpha, & h < r \leq 2R, \\ \frac{2}{\pi} \int_{\arccos \frac{h}{r}}^{\arcsin \frac{2R}{r}} [(h-r \cos \alpha)l(r \sin \alpha, R, R) + A(r \sin \alpha, R, R)] \sin \alpha \, d\alpha, & 2R < r \leq \sqrt{h^2 + 4R^2}, \\ 0, & r > \sqrt{h^2 + 4R^2}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Die Berechnung von $2 \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0+} \mathbb{E}C_{d-1}(\Xi_0, (\Xi_0)_t - \mathbf{r})$ erfolgt wie im Fall der Rechtecke über eine Fallunterscheidung. Dabei sei K ein entsprechender Kreiszyklinder, dessen Achse durch die Grund- und Deckflächenmittelpunkte mit der z -Achse zusammenfällt.

1.Fall: $0 < r \leq h$.

Es sei $0 \leq t < \frac{\sqrt{2}}{2}r$. Damit gilt $\arcsin \frac{t}{r} < \arccos \frac{t}{r}$. Mit $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ gibt es folgende Fälle:

$$\begin{aligned}
& 2C_{d-1}(K, K_t - \mathbf{r}) \\
&= \begin{cases} \pi R^2 + 2\pi R(h - r \cos \alpha) + T_{11}(t, \alpha), & 0 < \alpha < \arcsin \frac{t}{r}, \\ A(r \sin \alpha, R, R + t) + l(r \sin \alpha, R, R + t)(h - r \cos \alpha) \\ + T_{12}(t, \alpha), & \arcsin \frac{t}{r} < \alpha < \arccos \frac{t}{r}, \\ A(r \sin \alpha, R, R + t) + A(r \sin \alpha, R, R + \sqrt{t^2 - r^2 \cos^2 \alpha}) \\ + l(r \sin \alpha, R, R + t)(h - r \cos \alpha) + T_{13}(t, \alpha), & \arccos \frac{t}{r} < \alpha < \frac{\pi}{2}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Dabei gilt (siehe auch Abbildung A.6) $T_{11}(t, \alpha) \leq 2\pi Rt$, $T_{13}(t, \alpha) \leq 2\pi Rt$ und

$$T_{12}(t, \alpha) = \int_0^t l(r \sin \alpha, R, R + \sqrt{t^2 - s^2}) ds.$$

Folglich

$$\begin{aligned} & 2 \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0+} \mathbb{E}C_{d-1}(\Xi_0, (\Xi_0)_t - \mathbf{r}) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0+} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\arcsin \frac{t}{r}} (\pi R^2 + 2\pi R(h - r \cos \alpha) + T_{11}(t, \alpha)) \sin \alpha \, d\alpha \right. \\ & \quad + \frac{2}{\pi} \int_{\arcsin \frac{t}{r}}^{\arccos \frac{t}{r}} (A(r \sin \alpha, R, R + t) + l(r \sin \alpha, R, R + t)(h - r \cos \alpha) + T_{12}(t, \alpha)) \sin \alpha \, d\alpha \\ & \quad + \frac{2}{\pi} \int_{\arccos \frac{t}{r}}^{\frac{\pi}{2}} (A(r \sin \alpha, R, R + t) + A(r \sin \alpha, R, R + \sqrt{t^2 - r^2 \cos^2 \alpha}) \\ & \quad \left. + l(r \sin \alpha, R, R + t)(h - r \cos \alpha) + T_{13}(t, \alpha)) \sin \alpha \, d\alpha \right). \end{aligned}$$

Dabei gilt wegen $\arcsin 0 = 0$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0+} \int_0^{\arcsin \frac{t}{r}} T_{11}(t, \alpha) \sin \alpha \, d\alpha = \lim_{t \downarrow 0} \left(\frac{1}{t} \int_0^{\arcsin \frac{t}{r}} T_{11}(t, \alpha) \sin \alpha \, d\alpha \right) \\ &\leq \lim_{t \downarrow 0} \left(\frac{1}{t} \int_0^{\arcsin \frac{t}{r}} 2\pi Rt \sin \alpha \, d\alpha \right) = \lim_{t \downarrow 0} \int_0^{\arcsin \frac{t}{r}} 2\pi R \sin \alpha \, d\alpha = 0. \end{aligned} \tag{A.4}$$

Analoges gilt für T_{13} . Folglich

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0+} \int_0^{\arcsin \frac{t}{r}} T_{11}(t, \alpha) \sin \alpha \, d\alpha = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0+} \int_{\arccos \frac{t}{r}}^{\frac{\pi}{2}} T_{13}(t, \alpha) \sin \alpha \, d\alpha = 0. \tag{A.5}$$

Es ist

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0+} \int_{\alpha_{\min}(t)}^{\alpha_{\max}(t)} A(r \sin \alpha, R, R+t) \sin \alpha \, d\alpha \\
&= \lim_{t \downarrow 0} \int_{\alpha_{\min}(t)}^{\alpha_{\max}(t)} \frac{\partial}{\partial t} A(r \sin \alpha, R, R+t) \sin \alpha \, d\alpha \\
&\quad + A(r \sin \alpha_{\max}(0), R, R) \sin \alpha_{\max}(0) \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0+} \alpha_{\max}(t) \\
&\quad - A(r \sin \alpha_{\min}(0), R, R) \sin \alpha_{\min}(0) \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0+} \alpha_{\min}(t) \\
&= \int_{\alpha_{\min}(0)}^{\alpha_{\max}(0)} 2R \arccos \left(\frac{r \sin \alpha}{2R} \right) \sin \alpha \, d\alpha \\
&\quad + \left(2R^2 \arccos \left(\frac{r \sin \alpha_{\max}(0)}{2R} \right) - \frac{1}{2} r \sin \alpha_{\max}(0) \sqrt{4R^2 - r^2 \sin^2 \alpha_{\max}(0)} \right) \\
&\quad \quad \times \sin \alpha_{\max}(0) \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0+} \alpha_{\max}(t) \\
&\quad - \left(2R^2 \arccos \left(\frac{r \sin \alpha_{\min}(0)}{2R} \right) - \frac{1}{2} r \sin \alpha_{\min}(0) \sqrt{4R^2 - r^2 \sin^2 \alpha_{\min}(0)} \right) \\
&\quad \quad \times \sin \alpha_{\min}(0) \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0+} \alpha_{\min}(t). \tag{A.6}
\end{aligned}$$

Daher

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0+} \left(\int_{\arcsin \frac{t}{r}}^{\arccos \frac{t}{r}} A(r \sin \alpha, R, R+t) \sin \alpha \, d\alpha + \int_{\arccos \frac{t}{r}}^{\frac{\pi}{2}} A(r \sin \alpha, R, R+t) \sin \alpha \, d\alpha \right) \\
&= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0+} \int_{\arcsin \frac{t}{r}}^{\frac{\pi}{2}} A(r \sin \alpha, R, R+t) \sin \alpha \, d\alpha \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2R \arccos \left(\frac{r \sin \alpha}{2R} \right) \sin \alpha \, d\alpha. \tag{A.7}
\end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0+} \int_{\alpha_{\min}(t)}^{\alpha_{\max}(t)} l(r \sin \alpha, R, R+t)(h - r \cos \alpha) \sin \alpha \, d\alpha \\
&= \lim_{t \downarrow 0} \int_{\alpha_{\min}(t)}^{\alpha_{\max}(t)} (h - r \cos \alpha) \frac{\partial}{\partial t} l(r \sin \alpha, R, R+t) \sin \alpha \, d\alpha \\
&\quad + l(r \sin \alpha_{\max}(0), R, R)(h - r \cos \alpha_{\max}) \sin \alpha_{\max}(0) \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0+} \alpha_{\max}(t) \\
&\quad - l(r \sin \alpha_{\min}(0), R, R)(h - r \cos \alpha_{\min}) \sin \alpha_{\min}(0) \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0+} \alpha_{\min}(t) \\
&= \int_{\alpha_{\min}(0)}^{\alpha_{\max}(0)} \frac{4R^2}{r \sqrt{4R^2 - r^2 \sin^2 \alpha}} (h - r \cos \alpha) \, d\alpha \\
&\quad + 2R \arccos \left(\frac{r \sin \alpha_{\max}(0)}{2R} \right) (h - r \cos \alpha_{\max}(0)) \sin \alpha_{\max}(0) \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0+} \alpha_{\max}(t) \\
&\quad - 2R \arccos \left(\frac{r \sin \alpha_{\min}(0)}{2R} \right) (h - r \cos \alpha_{\min}(0)) \sin \alpha_{\min}(0) \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0+} \alpha_{\min}(t) \\
&= \int_{\alpha_{\min}(0)}^{\alpha_{\max}(0)} \frac{4R^2 h}{r \sqrt{4R^2 - r^2 \sin^2 \alpha}} \, d\alpha \\
&\quad + \frac{4R^2}{r} \arccos \left(\frac{r \sin \alpha_{\max}(0)}{2R} \right) - \frac{4R^2}{r} \arccos \left(\frac{r \sin \alpha_{\min}(0)}{2R} \right) \\
&\quad + 2R \arccos \left(\frac{r \sin \alpha_{\max}(0)}{2R} \right) (h - r \cos \alpha_{\max}(0)) \sin \alpha_{\max}(0) \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0+} \alpha_{\max}(t) \\
&\quad - 2R \arccos \left(\frac{r \sin \alpha_{\min}(0)}{2R} \right) (h - r \cos \alpha_{\min}(0)) \sin \alpha_{\min}(0) \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0+} \alpha_{\min}(t).
\end{aligned} \tag{A.8}$$

Daher

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0+} \left(\int_{\arcsin \frac{t}{r}}^{\arccos \frac{t}{r}} l(r \sin \alpha, R, R+t)(h - r \cos \alpha) \sin \alpha \, d\alpha \right. \\
&\quad \left. + \int_{\arccos \frac{t}{r}}^{\frac{\pi}{2}} l(r \sin \alpha, R, R+t)(h - r \cos \alpha) \sin \alpha \, d\alpha \right) \\
&= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0+} \int_{\arcsin \frac{t}{r}}^{\frac{\pi}{2}} l(r \sin \alpha, R, R+t)(h - r \cos \alpha) \sin \alpha \, d\alpha \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4R^2 h}{r \sqrt{4R^2 - r^2 \sin^2 \alpha}} \, d\alpha - \frac{4R^2}{r} \arcsin \left(\frac{r}{2R} \right).
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Weiterhin

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0+} \int_{\alpha_{\min}(t)}^{\alpha_{\max}(t)} \int_0^t l(r \sin \alpha, R, R + \sqrt{t^2 - s^2}) ds \sin \alpha d\alpha \\
&= \lim_{t \downarrow 0} \int_{\alpha_{\min}(t)}^{\alpha_{\max}(t)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t l(r \sin \alpha, R, R + \sqrt{t^2 - s^2}) ds \sin \alpha d\alpha \\
&\quad + \lim_{t \downarrow 0} \left(\int_0^t l(r \sin \alpha_{\max}(t), R, R + \sqrt{t^2 - s^2}) ds \sin \alpha_{\max}(t) \frac{\partial}{\partial t} \alpha_{\max}(t) \right) \\
&\quad - \lim_{t \downarrow 0} \left(\int_0^t l(r \sin \alpha_{\min}(t), R, R + \sqrt{t^2 - s^2}) ds \sin \alpha_{\min}(t) \frac{\partial}{\partial t} \alpha_{\min}(t) \right) \quad (\text{A.10}) \\
&= \lim_{t \downarrow 0} \int_{\alpha_{\min}(t)}^{\alpha_{\max}(t)} \left(\int_0^t \frac{\partial}{\partial t} l(r \sin \alpha, R, R + \sqrt{t^2 - s^2}) ds + l(r \sin \alpha, R, R) \right) \sin \alpha d\alpha \\
&= \int_{\alpha_{\min}(0)}^{\alpha_{\max}(0)} l(r \sin \alpha, R, R) \sin \alpha d\alpha \\
&= \int_{\alpha_{\min}(0)}^{\alpha_{\max}(0)} 2R \arccos \left(\frac{r \sin \alpha}{2R} \right) \sin \alpha d\alpha,
\end{aligned}$$

da $\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0+} \alpha_{\max}(t)$ beziehungsweise $\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0+} \alpha_{\min}(t)$ beschränkt und

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} l(r \sin \alpha, R, R + \sqrt{t^2 - s^2}) ds \\
&= \int_0^t 2(R + \sqrt{t^2 - s^2}) \frac{t}{\sqrt{t^2 - s^2}} \frac{1}{\sqrt{4R^2 r^2 \sin^2 \alpha - (r^2 \sin^2 \alpha + R^2 - (R + \sqrt{t^2 - s^2})^2)^2}} ds \\
&\leq \frac{2(R + t)}{\sqrt{4R^2 r^2 \sin^2 \alpha - r^2 \sin^2 \alpha}} t \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t^2 - s^2}} ds \\
&= \frac{2(R + t)}{\sqrt{4R^2 r^2 \sin^2 \alpha - r^2 \sin^2 \alpha}} \frac{\pi}{2} t.
\end{aligned}$$

Daher

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0+} \int_{\arcsin \frac{t}{r}}^{\arccos \frac{t}{r}} T_{12}(t, \alpha) \sin \alpha d\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2R \arccos \left(\frac{r \sin \alpha}{2R} \right) \sin \alpha d\alpha. \quad (\text{A.11})$$

Mit der Substitution $x = \frac{r}{t} \cos \alpha$ gilt wegen der Beschränktheit der Schnittfläche A

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0+} \int_{\arccos \frac{t}{r}}^{\frac{\pi}{2}} A \left(r \sin \alpha, R, R + \sqrt{t^2 - r^2 \cos^2 \alpha} \right) \sin \alpha \, d\alpha \\
&= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0+} \int_0^1 A \left(\sqrt{r^2 - t^2 x^2}, R, R + t\sqrt{1 - x^2} \right) \frac{t}{r} \, dx \\
&= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1}{t} \int_0^1 A \left(\sqrt{r^2 - t^2 x^2}, R, R + t\sqrt{1 - x^2} \right) \frac{t}{r} \, dx \\
&= \lim_{t \rightarrow 0+} \int_0^1 A \left(\sqrt{r^2 - t^2 x^2}, R, R + t\sqrt{1 - x^2} \right) \frac{1}{r} \, dx = \int_0^1 A(r, R, R) \frac{1}{r} \, dx = \frac{1}{r} A(r, R, R).
\end{aligned} \tag{A.12}$$

Wegen

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0+} \int_0^{\arcsin \frac{t}{r}} (\pi R^2 + 2\pi R(h - r \cos \alpha)) \sin \alpha \, d\alpha = 0$$

gilt folglich mit (A.5), (A.7), (A.9) und (A.11)

$$\begin{aligned}
& 2 \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0+} \mathbb{E}C_{d-1}(\Xi_0, (\Xi_0)_t - \mathbf{r}) \\
&= \frac{8R}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \arccos \left(\frac{r \sin \alpha}{2R} \right) \sin \alpha \, d\alpha + \frac{8R^2 h}{\pi r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{4R^2 - r^2 \sin^2 \alpha}} \, d\alpha \\
&\quad + \frac{12R^2}{\pi r} \arccos \left(\frac{r}{2R} \right) - \frac{4R^2}{r} - \frac{1}{\pi} \sqrt{4R^2 - r^2}.
\end{aligned}$$

2.Fall: $h < r \leq 2R$.

Es sei $t < \min\{\sqrt{r^2 - h^2}, h\}$. Aus $t < h$ folgt $\arccos \frac{h}{r} < \arccos \frac{t}{r}$. Wegen $t < \sqrt{r^2 - h^2}$ genügt es, folgende Fälle mit $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ zu betrachten:

$$\begin{aligned}
& 2C_{d-1}(K, K_t - \mathbf{r}) \\
&= \begin{cases} A(r \sin \alpha, R, R + \sqrt{t^2 - (r \cos \alpha - h)^2}) + T_{21}(t, \alpha), & \arccos \frac{h+t}{r} < \alpha < \arccos \frac{h}{r}, \\ A(r \sin \alpha, R, R + t) + l(r \sin \alpha, R, R + t)(h - r \cos \alpha) \\ \quad + T_{22}(t, \alpha), & \arccos \frac{h}{r} < \alpha < \arccos \frac{t}{r}, \\ A(r \sin \alpha, R, R + t) + A(r \sin \alpha, R, R + \sqrt{t^2 - r^2 \cos^2 \alpha}) \\ \quad + l(r \sin \alpha, R, R + t)(h - r \cos \alpha) + T_{23}(t, \alpha), & \arccos \frac{t}{r} < \alpha < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Dabei gilt $T_{21}(t, \alpha) \leq 2\pi Rt$, $T_{23}(t, \alpha) \leq 2\pi Rt$ und $T_{22}(t, \alpha) = T_{12}(t, \alpha)$. Mit der gleichen Argumentation wie in (A.4) folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0+} \int_{\arccos \frac{h+t}{r}}^{\arccos \frac{h}{r}} T_{21}(t, \alpha) \sin \alpha \, d\alpha = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0+} \int_{\arccos \frac{t}{r}}^{\frac{\pi}{2}} T_{23}(t, \alpha) \sin \alpha \, d\alpha = 0. \quad (\text{A.13})$$

Mit (A.6) gilt

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0+} \left(\int_{\arccos \frac{h}{r}}^{\arccos \frac{t}{r}} A(r \sin \alpha, R, R+t) \sin \alpha \, d\alpha + \int_{\arccos \frac{t}{r}}^{\frac{\pi}{2}} A(r \sin \alpha, R, R+t) \sin \alpha \, d\alpha \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0+} \int_{\arccos \frac{h}{r}}^{\frac{\pi}{2}} A(r \sin \alpha, R, R+t) \sin \alpha \, d\alpha \\ &= \int_{\arccos \frac{h}{r}}^{\frac{\pi}{2}} 2R \arccos \left(\frac{r \sin \alpha}{2R} \right) \sin \alpha \, d\alpha. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Mit (A.8) gilt

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0+} \left(\int_{\arccos \frac{h}{r}}^{\arccos \frac{t}{r}} l(r \sin \alpha, R, R+t)(h - r \cos \alpha) \sin \alpha \, d\alpha \right. \\ & \quad \left. + \int_{\arccos \frac{t}{r}}^{\frac{\pi}{2}} l(r \sin \alpha, R, R+t)(h - r \cos \alpha) \sin \alpha \, d\alpha \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0+} \int_{\arccos \frac{h}{r}}^{\frac{\pi}{2}} l(r \sin \alpha, R, R+t)(h - r \cos \alpha) \sin \alpha \, d\alpha \\ &= \int_{\arccos \frac{h}{r}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{4R^2 h}{r \sqrt{4R^2 - r^2 \sin^2 \alpha}} \, d\alpha + \frac{4R^2}{r} \arccos \left(\frac{r}{2R} \right) - \frac{4R^2}{r} \arccos \left(\frac{\sqrt{r^2 - h^2}}{2R} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Mit (A.10) folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0+} \int_{\arccos \frac{h}{r}}^{\arccos \frac{t}{r}} T_{22}(t, \alpha) \sin \alpha \, d\alpha = \int_{\arccos \frac{h}{r}}^{\frac{\pi}{2}} 2R \arccos \left(\frac{r \sin \alpha}{2R} \right) \sin \alpha \, d\alpha.$$

Mit der Substitution $x = \frac{r \cos \alpha - h}{t}$ gilt wegen der Beschränktheit der Schnittfläche A

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0+} \int_{\arccos \frac{h+t}{r}}^{\arccos \frac{h}{r}} A \left(r \sin \alpha, R, R + \sqrt{t^2 - (r \cos \alpha - h)^2} \right) \sin \alpha \, d\alpha \\
&= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0+} \int_0^1 A \left(\sqrt{r^2 - (tx + h)^2}, R, R + t\sqrt{1 - x^2} \right) \frac{t}{r} \, dx \\
&= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{t} \int_0^1 A \left(\sqrt{r^2 - (tx + h)^2}, R, R + t\sqrt{1 - x^2} \right) \frac{t}{r} \, dx \quad (\text{A.16}) \\
&= \lim_{t \rightarrow +0} \int_0^1 A \left(\sqrt{r^2 - (tx + h)^2}, R, R + t\sqrt{1 - x^2} \right) \frac{1}{r} \, dx \\
&= \int_0^1 A(\sqrt{r^2 - h^2}, R, R) \frac{1}{r} \, dx = \frac{1}{r} A(\sqrt{r^2 - h^2}, R, R).
\end{aligned}$$

Daher gilt mit (A.12), (A.13), (A.14) und (A.15)

$$\begin{aligned}
& 2 \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0+} \mathbb{E}C_{d-1}(\Xi_0, (\Xi_0)_t - \mathbf{r}) \\
&= \frac{8R}{\pi} \int_{\arccos \frac{h}{r}}^{\frac{\pi}{2}} \arccos \left(\frac{r \sin \alpha}{2R} \right) \sin \alpha \, d\alpha + \frac{8R^2 h}{\pi r} \int_{\arccos \frac{h}{r}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{4R^2 - r^2 \sin^2 \alpha}} \, d\alpha \\
&+ \frac{12R^2}{\pi r} \arccos \left(\frac{r}{2R} \right) - \frac{4R^2}{\pi r} \arccos \left(\frac{\sqrt{r^2 - h^2}}{2R} \right) - \frac{1}{\pi} \sqrt{4R^2 - r^2} \\
&- \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{r^2 - h^2}}{r} \sqrt{4R^2 - (r^2 - h^2)}.
\end{aligned}$$

3. Fall: $2R < r \leq \sqrt{h^2 + 4R^2}$.

Es sei $t < \min\{\sqrt{r^2 - 4R^2}, 2R\}$. Aus $r \leq \sqrt{h^2 + 4R^2}$ folgt $\arccos \frac{h}{r} \leq \arcsin \frac{2R}{r}$. Wegen $t < \sqrt{r^2 - 4R^2}$ genügt es, folgende Fälle mit $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ zu betrachten:

$$\begin{aligned}
& 2C_{d-1}(K, K_t - \mathbf{r}) \\
&= \begin{cases} A(r \sin \alpha, R, R + \sqrt{t^2 - (r \cos \alpha - h)^2}) + T_{31}(t, \alpha), & \arccos \frac{h+t}{r} < \alpha < \arccos \frac{h}{r}, \\ A(r \sin \alpha, R, R + t) + l(r \sin \alpha, R, R + t)(h - r \cos \alpha) \\ + T_{32}(t, \alpha), & \arccos \frac{h}{r} < \alpha < \arcsin \frac{2R}{r}, \\ A(r \sin \alpha, R, R + t) + l(r \sin \alpha, R, R + t)(h - r \cos \alpha) \\ + T_{33}(t, \alpha), & \arcsin \frac{2R}{r} < \alpha < \arcsin \frac{2R+t}{r}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Dabei gilt $T_{31}(t, \alpha) \leq 2\pi Rt$, $T_{33}(t, \alpha) \leq 2\pi Rt$ und $T_{32}(t, \alpha) = T_{12}(t, \alpha)$ Mit der gleichen Argumentation wie in (A.4) folgt

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0+} \int_{\arccos \frac{h+t}{r}}^{\arccos \frac{h}{r}} T_{31}(t, \alpha) \sin \alpha \, d\alpha = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0+} \int_{\arcsin \frac{2R}{r}}^{\arcsin \frac{2R+t}{r}} T_{33}(t, \alpha) \sin \alpha \, d\alpha = 0. \quad (\text{A.17})$$

Mit (A.6) gilt

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0+} \left(\int_{\arccos \frac{h}{r}}^{\arcsin \frac{2R}{r}} A(r \sin \alpha, R, R+t) \sin \alpha \, d\alpha + \int_{\arcsin \frac{2R}{r}}^{\arcsin \frac{2R+t}{r}} A(r \sin \alpha, R, R+t) \sin \alpha \, d\alpha \right) \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0+} \int_{\arccos \frac{h}{r}}^{\arcsin \frac{2R+t}{r}} A(r \sin \alpha, R, R+t) \sin \alpha \, d\alpha \\ &= \int_{\arccos \frac{h}{r}}^{\arcsin \frac{2R}{r}} 2R \arccos \left(\frac{r \sin \alpha}{2R} \right) \sin \alpha \, d\alpha. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Mit (A.8) gilt

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0+} \left(\int_{\arccos \frac{h}{r}}^{\arcsin \frac{2R}{r}} l(r \sin \alpha, R, R+t)(h - r \cos \alpha) \sin \alpha \, d\alpha \right. \\ & \quad \left. + \int_{\arcsin \frac{2R}{r}}^{\arcsin \frac{2R+t}{r}} l(r \sin \alpha, R, R+t)(h - r \cos \alpha) \sin \alpha \, d\alpha \right) \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0+} \int_{\arccos \frac{h}{r}}^{\arcsin \frac{2R+t}{r}} l(r \sin \alpha, R, R+t)(h - r \cos \alpha) \sin \alpha \, d\alpha \\ &= \int_{\arccos \frac{h}{r}}^{\arcsin \frac{2R}{r}} \frac{4R^2 h}{r \sqrt{4R^2 - r^2 \sin^2 \alpha}} \, d\alpha - \frac{4R^2}{r} \arccos \left(\frac{\sqrt{r^2 - h^2}}{2R} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Mit (A.10) folgt

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0+} \int_{\arccos \frac{h}{r}}^{\arcsin \frac{2R}{r}} T_{32}(t, \alpha) \sin \alpha \, d\alpha = \int_{\arccos \frac{h}{r}}^{\arcsin \frac{2R}{r}} 2R \arccos \left(\frac{r \sin \alpha}{2R} \right) \sin \alpha \, d\alpha.$$

Daher gilt mit (A.16), (A.17), (A.18) und (A.19)

$$\begin{aligned}
& 2 \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0+} \mathbb{E}C_{d-1}(\Xi_0, (\Xi_0)_t - \mathbf{r}) \\
&= \frac{8R}{\pi} \int_{\arccos \frac{h}{r}}^{\arcsin \frac{2R}{r}} \arccos \left(\frac{r \sin \alpha}{2R} \right) \sin \alpha \, d\alpha + \frac{8R^2 h}{\pi r} \int_{\arccos \frac{h}{r}}^{\arcsin \frac{2R}{r}} \frac{1}{\sqrt{4R^2 - r^2 \sin^2 \alpha}} \, d\alpha \\
&\quad - \frac{4R^2}{\pi r} \arccos \left(\frac{\sqrt{r^2 - h^2}}{2R} \right) - \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{r^2 - h^2}}{r} \sqrt{4R^2 - (r^2 - h^2)}.
\end{aligned}$$

4.Fall: $r > \sqrt{h^2 + 4R^2}$. Für $t < r - \sqrt{h^2 + 4R^2}$ kommt es nie zum Schnitt, weshalb

$$2 \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0+} \mathbb{E}C_{d-1}(\Xi_0, (\Xi_0)_t - \mathbf{r}) = 0.$$

Einige der Integrale in $\mathbb{E}\mathcal{H}^d(\Xi_0 \cap [\Xi_0 - \mathbf{r}])$ und $2\mathbb{E}C_{d-1}(\Xi_0, \Xi_0 - \mathbf{r})$ sowie die Integrale in $2 \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0+} \mathbb{E}C_{d-1}(\Xi_0, (\Xi_0)_t - \mathbf{r})$ können nicht in geschlossener Form dargestellt werden. Eine Bewertung ist aber in allen Fällen durch eine einfache numerische Integration möglich.

Literaturverzeichnis

- BALLANI, F. (2006). On modelling of refractory castables by marked Gibbs and Gibbsian-like processes. In: Mateu, J., u. a. (Hg.) *Case Studies in Spatial Point Process Modelling*. Lecture Notes in Statistics **185**, 153–167, Springer-Verlag, Berlin.
- BALLANI, F., DALEY, D. J., UND STOYAN, D. (2006). Modelling the microstructure of concrete with spherical grains. *Comp. Mat. Science* **35**(4), 399–407.
- BARGIEL, M., UND MOSCINSKI, J. (1991). C language program for irregular packing of hard spheres. *Computer Phys. Comm.* **64**, 183–192.
- BAUER, H. (1992). *Maß- und Integrationstheorie*. Walter de Gruyter, Berlin.
- BEISBART, C., KERSCHER, M., UND MECKE, K. (2002). Mark correlations: relating physical properties to spatial distributions. In: Mecke, K. R., Stoyan, D. (Hg.) *Morphology of Condensed Matter: Physics and Geometry of Spatially Complex Systems*. Lecture Notes in Physics **600**, 358–390, Springer-Verlag, Berlin.
- BENTZ, D. P., GARBOCZI, E. J., UND SNYDER, K. A. (1999). *A hard core/soft shell microstructural model for studying percolation and transport in three-dimensional composite media*. Building and Fire Research Laboratory, National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, Maryland,
<http://ciks.cbt.nist.gov/~garbocz/hcss/useguide.html>.
- BEZRUKOV, A., BARGIEL, M., UND STOYAN, D. (2002). Statistical analysis of simulated random packings of spheres. *Part. Part. Charact.* **19**, 111–118.
- BINDER, K. (2001). How Monte Carlo simulations can clarify complex problems in statistical physics. *Int. J. Mod. Phys. B.* **21**(9), 1193–1211.
- BLAAK, R., FRENKEL, D., UND MULDER, B. M. (1999). Do cylinders exhibit a cubatic phase? *J. Chem. Phys.* **110**(23), 11652–11659.
- DALEY, D. J., UND VERE-JONES, D. (1988). *An Introduction to the Theory of Point Processes*. Springer-Verlag, New York.
- DÖGE, G. (2001). Perfect simulation for random sequential adsorption of d -dimensional spheres with random radii. *J. Statist. Comput. Simul.* **69**(2), 141–156.

- DÖGE, G., UND STOYAN, D. (2002). Statistics for non-sparse homogeneous Gibbs point processes. In: Mecke, K. R., Stoyan, D. (Hg.) *Morphology of Condensed Matter. Physics and Geometry of Spatially Complex Systems*. Lecture Notes in Physics **600**, 418–427, Springer-Verlag, Berlin.
- DOI, M. (1976). A new variational approach to the diffusion and the flow problems in porous media. *J. Phys. Soc. Japan* **40**, 567–572.
- EPPENGA, R., UND FRENKEL, D. (1984). Monte Carlo simulation of the isotropic and nematic phases of infinitely thin hard platelets. *Mol. Phys.* **52**, 1303–1334.
- EVANS, J. W. (1993). Random and cooperative sequential adsorption. *Rev. Mod. Phys.* **65**, 1281–1304.
- FALLERT, H. (1996). Quermaßdichten für Punktprozesse konvexer Körper und Boolesche Modelle. *Math. Nachr.* **181**, 165–184.
- FEDERER, H. (1969). *Geometric Measure Theory*. Springer-Verlag, Berlin.
- FELDKAMP, L. A., DAVIS, L. C., UND KRESS, J. W. (1984). Practical cone-beam algorithm. *J. Opt. Soc. Amer.* **1**, 612–619.
- GEYER, C. J. (1999). Likelihood inference for spatial point processes. In: Barndorff-Nielsen, O., Kendall, W., Lieshout, M. N. N. (Hg.) *Stochastic Geometry. Likelihood and Computation*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton.
- GILKS, W. R., RICHARDSON, S., UND SPIEGELHALTER, D. J. (Hg.) (1996). *Markov Chain Monte Carlo in Practice*. Chapman & Hall, London.
- HADWIGER, H. (1957). *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*. Springer-Verlag, Berlin.
- HÄGGSTRÖM, O., UND MEESTERS, R. (1996). Nearest neighbour and hard sphere models in continuum percolation. *Random Struct. Algor.* **9**, 295–315.
- HAHN, U., MICHELETTI, A., POHLINK, R., STOYAN, D., UND WENDROCK, H. (1999). Stereological analysis and modelling of gradient structures. *J. Microscopy* **195**, 113–124.
- HANISCH, K.-H. (1982). On inversion formulae for n -fold Palm distributions of point processes in LCS-spaces. *Math. Nachr.* **106**, 171–179.
- HANSEN, J. P., UND McDONALD, I. R. (1986). *Theory of Simple Liquids*. Academic Press, London.
- HANSEN, M. B., BADDELEY, A. J., UND GILL, R. D. (1999). First contact distributions for spatial patterns: Regularity and estimation. *Adv. Appl. Prob.* **31**, 15–33.
- HARDT, R., UND SIMON, L. (1986). *Seminar on Geometric Measure Theory*. Birkhäuser-Verlag, Basel.

- HEINRICH, L., UND MOLCHANOV, I. S. (1999). Central limit theorem for a class of random measures associated with germ-grain models. *Adv. Appl. Prob.* **31**, 283–314.
- HUBÁLKOVÁ, J., UND STOYAN, D. (2003). On a quantitative relationship between degree of inhomogeneity and cold crushing strength of refractory castables. *Cement Concrete Research* **33**, 747–753.
- HUG, D., UND LAST, G. (2000). On support measures in Minkowski spaces and contact distributions in stochastic geometry. *Ann. Prob.* **28**(2), 796–850.
- HUG, D., LAST, G., UND WEIL, W. (2002). Generalized contact distributions of inhomogeneous Boolean models. *Adv. Appl. Prob.* **34** 21–47.
- HUG, D., LAST, G., UND WEIL, W. (2004). A local Steiner-type formula for general closed sets and applications. *Mathematische Zeitschrift* **246**, 237–272.
- JEULIN, D. (1997). Dead leaves model: From space tessellation to random functions. In: Jeulin, D. (Hg.) *Advances in Theory and Applications of Random Sets*. World scientific Press, Singapore, 137–156.
- JODREY, W. S., UND TORY, E. M. (1979). Simulation of random packing of spheres. *J. Simulation* **32**, 1–12.
- JODREY, W. S., UND TORY, E. M. (1985). Computer simulation of close random packing of equal spheres. *Physical Rev. A* **32**, 2347–2351.
- KALLENBERG, O. (1983). *Random Measures*. Akademie-Verlag, Berlin, und Academic Press, London.
- KLETTE, R., UND ZAMPERONI, P. (1995). *Handbuch der Operatoren für die Bildverarbeitung*. Vieweg, Braunschweig.
- LAST, G., UND SCHAßBERGER, R. (1996). On the spherical contact distribution of stationary random sets. *TU Braunschweig, Bericht 96/06*, 1–18.
- LAST, G., UND SCHAßBERGER, R. (1998). On the distribution of the spherical contact vector of stationary germ-grain models. *Adv. Appl. Prob.* **30**, 36–52.
- LAST, G., UND SCHAßBERGER, R. (2001). On the second derivative of the spherical contact distribution function of smooth grain models. *Prob. Theory Relat. Fields* **121**, 49–72.
- LÉGER, D., UND LEVESQUE, D. (2002). Monte Carlo simulations of charged platelet systems. *J. Chem. Phys.* **116**(5), 2251–2260.
- LÖWEN, H. (2000). Fun with hard spheres. In: Mecke, K. R., Stoyan, D. (Hg.) *Statistical Physics and Spatial Statistics. The Art of Analyzing Spatial Structures and Pattern Formation*. Lecture Notes in Physics **554**, 295–331, Springer-Verlag, Berlin.

- LUBACHEVSKY, B. D., UND STILLINGER, F. H. (1990). Geometric properties of random disk packings. *J. Statist. Phys.* **60**, 561–583.
- MÅNSSON, M., UND RUDEMO, M. (2002). Random patterns of nonoverlapping convex grains. *Adv. Appl. Prob.* **34**, 718–738.
- MASE, S. (1986). On the possible form of size distributions for Gibbsian processes of mutually non-intersecting balls. *J. Appl. Prob.* **23**, 646–659.
- MASE, S., MØLLER, J., STOYAN, D., WAAGEPETERSEN, R. P., UND DÖGE, G. (2001). Packing densities and simulated tempering for hard core Gibbs point processes. *Ann. Inst. Statist. Math.* **53**(4), 661–680.
- MATÉRN, B. (1960). Spatial Variation. *Meddelanden fran Statens Skogsforskningsinstitut* **49**(5), 1–144. Nachdruck in: *Lecture Notes in Statistics* 36. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- MATTHES, K., WARMUTH, W., UND MECKE, J. (1979). Bemerkungen zu einer Arbeit von Nguyen Xuan Xanh und Hans Zessin. *Math. Nachr.* **88**, 117–127.
- MECKE, J. (1967). Stationäre zufällige Maße auf lokalkompakten Abelschen Gruppen. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.* **9**, 36–58.
- MECKE, K. R. (2001). Exact moments of curvature measures in the Boolean model. *J. Statist. Phys.* **102**(5/6), 1343–1381.
- METROPOLIS, N., ROSENBLUTH, A. W., ROSENBLUTH, M. N., TELLER, H., UND TELLER, E. (1953). Equation of state calculations by fast computing machines. *J. Chem. Phys.* **21**(6), 1087–1092.
- MICHELETTI, A., UND STOYAN, D. (1998). *Volume fraction and surface density for inhomogeneous random sets. Quaderno n. 17/1998*. Dipartimento di Matematica ‘F. Enriques’. Università degli Studio di Milano.
- MØLLER, J. (1999). Markov chain Monte Carlo and spatial point processes. In: Barndorff-Nielsen, O., Kendall, W., Lieshout, M. N. N. (Hg.) *Stochastic Geometry. Likelihood and Computation*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton.
- MØLLER, J., UND WAAGEPETERSEN, R. P. (2003). *Statistical Inference and Simulation for Spatial Point Processes*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton.
- MÜLLER, A., UND STOYAN, D. (2002). *Comparison Methods for Stochastic Models and Risks*. John Wiley & Sons, Chichester.
- NGUYEN, X. X., UND ZESSIN, H. (1979). Integral and differential characterizations of the Gibbs process. *Math. Nachr.* **88**, 105–115.
- RAO, M. M. (1993). *Conditional Measures and Applications*. Marcel Dekker Inc., New York.

- SAHIMI, M. (2003). *Heterogeneous Materials II: Nonlinear and Breakdown Properties and Atomistic Modeling*. Springer-Verlag, New York.
- SCHMID, F., UND PHUONG, N. H. (2002). Computer simulations of systems of ellipsoids. In: Mecke, K. R., Stoyan, D. (Hg.) *Morphology of Condensed Matter: Physics and Geometry of Spatially Complex Systems*. Lecture Notes in Physics **600**, 179–194, Springer-Verlag, Berlin.
- SCHMITT, U., LOUIS, A. K., WOLTERS, C., UND VAUKHONEN, M. (2002). Efficient algorithms for the regularization of dynamic inverse problems: II. Applications. *Inverse Problems* **18**, 659–676.
- SCHNEIDER, R. (1993). *Convex Bodies: the Brunn-Minkowski Theory*. Cambridge University press, Cambridge.
- SCHNEIDER, R., UND WEIL, W. (2000). *Stochastische Geometrie*. B. G. Teubner, Stuttgart.
- SOLLICH, P. (2002). Predicting phase equilibria in polydisperse systems. *J. Phys.: Condens. Matter* **14**, R79–R117.
- STOYAN, D. (1998). Models of random systems of non-intersecting spheres. In: Prague Stochastics '98, JCMF, 543–547.
- STOYAN, D. (2002). Random systems of hard particles: models and statistics. *Chinese J. Stereol. Image Analysis* **7**(1), 1–14.
- STOYAN, D., KENDALL, W. S., UND MECKE, J. (1995). *Stochastic Geometry and its Applications*. John Wiley & Sons, Chichester.
- STOYAN, D., MECKE, J., UND POHLMANN, S. (1980). Formulas for stationary planar fibre processes II – Partially oriented fibre systems. *Math. Operationsf. Statist., Ser. Statistics* **11**, 281–286.
- STOYAN, D., UND SCHLATHER, M. (2000). Random sequential adsorption: Relation ship to dead leaves and characterization of variability. *J. Statist. Phys.* **100**, 969–979.
- STOYAN, D., UND STOYAN, H. (1985). On one of Matérn's hard-core point process models. *Math. Nachr.* **122**, 205–214.
- STOYAN, D., UND STOYAN, H. (1994). *Fractals, Random Shapes and Point Fields*. John Wiley & Sons, Chichester.
- STROEVEN, P., UND STROEVEN, M. (1999). Assessment of packing characteristics by computer simulation. *Cement Concrete Research* **29**, 1201–1206.
- TALBOT, J., TARJUS, G., VAN TASSEL, P. R., UND VIOT, P. (2000). From car parking to protein adsorption: An overview of sequential adsorption processes. *Colloids Surf. A: Physicochem. Eng. Asp.* **165**, 287–324.

- TO, L. T., UND STACHURSKI, Z. H. (2004). Random close packing of spheres in a round cell. *Non-cryst. Solids* **333**, 161–171.
- TORQUATO, S. (1986). Interfacial surface statistics arising in diffusion and flow problems in porous media. *J. Chem. Phys.* **85**(8), 4622–4628.
- TORQUATO, S. (2002). *Random Heterogeneous Materials. Microstructure and Macroscopic Properties*. Springer-Verlag, New York.
- VAN LIESHOUT, M. N. M. (1995). *Stochastic Geometry Models in Image Analysis and Spatial Statistics*. CWI Tract, 108, Amsterdam.
- WEIL, W., UND WIEACKER, J. A. (1988). A representation theorem for random sets. *Prob. Math. Statist.* **9**, 147–151.
- WILDING, N. B., UND SOLLICH, P. (2002). Grand canonical ensemble simulation studies of polydisperse fluids. *J. Chem. Phys.* **116**(16), 7116–7126.
- WINKLER, G. (2003). *Image Analysis, Random Fields and Markov Chain Monte Carlo Methods*. Springer-Verlag, Berlin.
- WINSLOW, D. N., COHEN, M. D., BENTZ, D. P., SNYDER, K. A., UND GARBOCZI, E. J. (1994). Percolation and pore structure in mortars and concrete. *Cement Concrete Research* **24**, 25–37.