

Integration geodätischer und geotechnischer Beobachtungen und Strukturinformationen für eine 3D-Strainanalyse

Von der Fakultät für Geowissenschaften, Geotechnik und Bergbau
der Technischen Universität Bergakademie Freiberg

genehmigte

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor-Ingenieur

Dr.-Ing.

vorgelegt

von Diplom-Ingenieur Paul Gerhard Michael Drobniowski
geboren am 8. Mai 1975 in Frankenberg/Sachsen

Gutachter: Prof. Dr.-Ing. habil. Rüdiger Wittenburg

Prof. Dr.-Ing. habil. Wolfgang Niemeyer

Prof. Dr.-Ing. Joachim Menz

Tag der Verleihung 3. Juni 2005

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Strain	4
2.1	Homogener Strain	4
2.2	3D-Straintensor	5
2.3	Graphische Darstellung des Straintensors	10
2.4	Unvollständige räumliche Überwachung	14
3	Verallgemeinertes universelles Schätzverfahren zur Strainanalyse	17
3.1	Schätzverfahren zur Strainanalyse	19
3.1.1	Schätzung eines Skalarfeldes	19
3.1.2	Schätzung eines Vektorfeldes	22
3.1.3	Schätzung mit linearen Funktionalen	23
3.1.4	Wahl und Anpassung der Kernfunktion	28
3.2	Trendmodell	32
3.2.1	Universelles Trendmodell	33
3.2.2	Strain-Trendmodell	37
3.3	Ablauf einer Strainschätzung	42
4	Strainanalyse – Anwendungsbeispiele	44
4.1	Pumpspeicherwerk Hohenwarthe II	44
4.1.1	Modellierung des Überwachungsgebietes	45

4.1.2	Diskussion der Ergebnisse	48
4.1.3	Fazit	61
4.2	Sprengverdichtungsversuche	65
4.2.1	Strainanalysen zum Sprengverdichtungsversuch	67
4.2.2	Trendmodell	68
4.2.3	Kovariogramm	70
4.2.4	2D-Strainanalyse	72
4.2.5	3D-Strainanalyse	79
5	Zusammenfassung	88

Kapitel 1

Einleitung

Ein beliebiges Objekt kann durch seine physikalischen und geometrischen Eigenschaften beschrieben werden. Jedes Objekt unterliegt aber im zeitlichen Ablauf Veränderungen. Wird nun über einen bestimmten Zeitraum ein Objekt mehrfach beobachtet, so werden die ermittelten physikalischen und geometrischen Meßwerte voneinander abweichen. In der Geodäsie sind die überwachten Objekte in der Regel Ingenieurbauwerke und Teile der Erdoberfläche. Aufgabe der Deformationsanalyse ist es, die beobachteten Veränderungen kritisch auszuwerten, um Aussagen zu Art und Ursache der beobachteten Veränderungen zu erlangen und gegebenenfalls Prognosen zur künftigen Entwicklung geben zu können.

Voraussetzung ist die kritische Bewertung aller Beobachtungen. Sind ihre Unterschiede Meßfehler verschiedenster Art oder stellen sie signifikante Änderungen dar? Zur Bewertung und mathematischen Beschreibung aller geometrischen Parameter eines Objektes und seiner signifikanten Änderungen kann die Strainanalyse dienen.

Es kann nun gezeigt werden, daß zu dieser Beschreibung vier Größen ausreichen, wenn der betrachtete Bereich hinreichend klein ist und als in sich homogen angesehen werden kann:

- Verschiebung,
- Rotation,
- Größenänderung und
- Formänderung.

Zum Verständnis der Strainanalyse soll das nachfolgende einfache Beispiel dienen: In Meßkameras für die Photogrammetrie ist eine Glasplatte mit einem Réseaugitter im Kameragehäuse

fest eingebaut. Das Reseauagitter definiert das Bildkoordinatensystem. Wird der Film belichtet, dann wird dieses Gitter mit abgebildet. Dadurch macht es alle geometrischen Änderungen des Filmes mit. Die Istkoordinaten im Meßbild werden von den Sollkoordinaten des Reseauagitters mehr oder weniger abweichen. Diese Differenzen werden in der photogrammetrische Praxis genutzt, um im Meßbild bestimmte Punkte vom Ist- in das Sollsystem zu transformieren.

Faßt man die Differenzen als Klaffungen zwischen einem Urzustand (Aufnahme) und einem Folgezustand (Meßbild) auf, dann kann man die Strainanalyse nutzen, um Hinweise auf die physikalischen Ursachen der Differenzen zu ermitteln. Das soll hier kurz an einem Meßbild des im Abschnitt 4.2 behandelten Sprengverdichtungsversuches dargestellt werden. In Abbildung 1.1 ist die Flächenänderung dargestellt, die aus den berechneten Differenzen folgt. Am linken und rechten Rand ist der Film geschrumpft. In der Mitte und am oberen und unteren Rand ist der Film dagegen größer geworden.

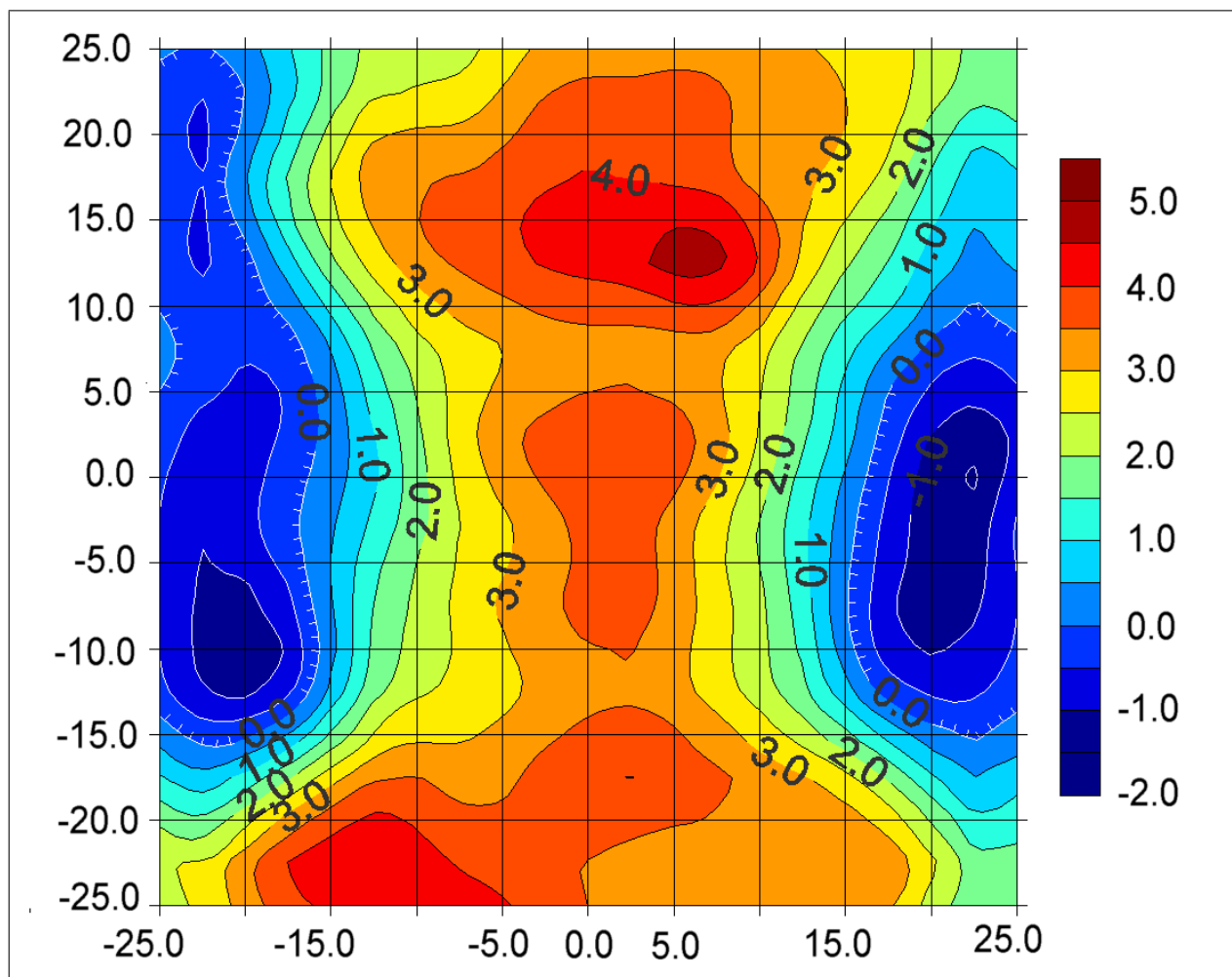


Abbildung 1.1: 2D-Dilatation (Flächenänderung) eines Meßbildes [mm/m]

Wie könnte dieses Ergebnis interpretiert werden? Bei der Herstellung der Meßbilder wird erst der Film und dann das Photopapier in der gleichen Weise beansprucht: Es wird auf zwei Seiten eingespannt, während die beiden anderen Seiten frei beweglich sind. Durch die Zugbelastung wölbt sich der Film auf, die freien Ränder werden gestaucht und in der Mitte entsteht ein Buckel. Das betrachtete Meßbild ist das mittlere aus einem Streifen von drei Meßbildern, deswegen sind auch am Rand Zerrungen vorhanden. Die auftretenden Differenzen können damit auf den Herstellungsprozeß zurückgeführt werden. So wie hier in diesem einfachen Beispiel die Strainanalyse durch eine genauere Betrachtung der Differenzen ein besseres Verständnis für die Ursachen ermöglichte, so kann sie auch bei komplexeren Anwendungsfällen die Grundlage für eine ausführlichere und gründlichere Einschätzung liefern.

Für geodätische Anwendungen ist die Strainanalyse für den 3D-Fall in [Grafarend 1967] veröffentlicht worden. In der Folgezeit ist diese Theorie vor allem für 2D-Fälle weiterentwickelt worden (z.B. [Welsch 1989], [Uhrig 1989]). Die Hauptursache dafür dürfte die Schwierigkeit bei der Erfassung der Strainkomponenten in X_3 -Richtung sein. Klassische Triangulations- und Nivellementsnetze erfassen nur Teile des Verschiebungsfeldes. Mit GPS ist es möglich, 3D-Verschiebungen an Punkten zu messen. Dennoch sind die erforderlichen Ableitungen $\frac{\partial u_i}{\partial X_3}$ durch Messungen an der Oberfläche eines Überwachungsobjektes nicht bestimmbar. Sollen zur Bestimmung des 3D-Strains nicht Hypothesen verwendet werden, dann bleibt nur der Weg, durch zusätzliche Messungen die Ableitungen zu bestimmen. Diese zusätzlichen Messungen können mit geotechnischen Instrumenten gewonnen werden. Damit bleibt die Frage offen: Wie können geotechnische Beobachtungen in die Strainanalyse integriert werden? [Teskey 1988] beschreibt die Integration über Differentialgleichungen.

Als Alternative ist eine Erweiterung geostatistischer Schätzverfahren wie dem Kriging denkbar. Mit diesem Verfahren würde dann an beliebigen Punkten des Raumes das Verschiebungs- bzw. das Strainfeldes geschätzt. Durch Verallgemeinerung des Gradientenkrigings ([Menz 1991], [Renard und Ruffo 1992]) ergibt sich eine elegante Methode, mit Mitteln der Geostatistik geodätische und geotechnische Beobachtungen in eine Strainanalyse zu integrieren und darüber hinaus Strukturinformationen zu beachten.

Die entwickelte Theorie wurde mit MATLAB 6.0 umgesetzt. Alle Darstellungen sind mit diesem Programm berechnet worden. Die Isoliniendarstellungen wurden mit SURFER sowie MATLAB 6.0 und die Vektordarstellungen mit METAPOST erzeugt. Die Arbeit selbst wurde mit PDFL^AT_EX und BibT_EX gesetzt.

Kapitel 2

Strain

2.1 Homogener Strain

Unter Strain wird die Deformation bzw. Verformung eines Körpers verstanden. Die geodätische Strainanalyse ist die Bestimmung von Parametern zur geometrischen Beschreibung dieser Verformung aus geodätischen Beobachtungen. Es finden sich deshalb Darstellungen zum (homogenen) Strain sowohl in der geodätischen Literatur – z.B. [Grafarend 1967], [Welsch 1984] und [Wittenburg 1998] – als auch in der Literatur zur Kontinuumsmechanik – z.B. [Salençon 2001], [Schmutzer 1989] und [Landau und Lifschitz 1989] – oder der der Gebirgsmechanik – z.B. [Jaeger und Cooks 1979] und [Charlez 1991].

Die Einwirkung innerer und äußerer Kräfte auf einen Körper führt zu Spannungen innerhalb des Körpers. In Abhängigkeit von den physikalischen Materialeigenschaften verursachen diese Spannungen Verformungen. Sind die Stoffgesetze bekannt, kann in einfachen Fällen mit der Elastizitätstheorie der Zusammenhang zwischen den Spannungen (stress) innerhalb des Körpers und den Verformungen (strain) des Körpers hergestellt werden [Uhrig 1989].

Grundlage für die Beschreibung der Verformungen ist die Annahme, daß der betrachtete Körper ein Kontinuum ist. Daraus folgt, daß die Verformungen stetige Funktionen des Ortes sind. Diese Annahme gilt natürlich nicht über Grenzflächen wie Störungen hinweg, so daß in der Strainanalyse diese Grenzflächen durch Zerlegung des Gesamtkörpers in Kontinua berücksichtigt werden müssen.

Ein Strain kann je nach Gegebenheit unterschieden werden in homogenen oder inhomogenen Strain einerseits sowie finiten und infinitesimalen Strain andererseits. Wirkt in allen Punkten des Kontinuums die gleiche Deformation, dann liegt ein homogener Strain vor, der sich

geometrisch durch eine affine Abbildung beschreiben läßt. Ändern sich hingegen die Deformationsparameter, dann liegt ein inhomogener Strain vor. In diesem Fall wird anstelle des Strains des gesamten Körpers der Strain an einzelnen Punkten des Körpers betrachtet. In einer hinreichend kleinen Umgebung dieser Punkte kann der Körper durch Hilfsflächen an diese Punkte angenähert werden. Diese Hilfsflächen sind meist die Tangentenebenen, die durch die Gradienten des Vektorfeldes an den jeweiligen Punkten aufgespannt werden. Als Alternative können Flächen höherer Ordnung genutzt werden. So können durch Schmiegeflächen 2. Ordnung neben dem Strain auch die Krümmungen an diesen Punkten beschrieben werden.

Ein finiter Strain liegt dann vor, wenn durch größere Verzerrungen ein nichtlineares System vorliegt. Die mathematische Beschreibung ist äußerst problematisch. Infinit ist ein Strain dann, wenn die Verformungen so klein sind, daß sie mit hinreichender Genauigkeit durch einen linearen Zusammenhang beschrieben werden können.

Da der Schwerpunkt der Arbeit die Strainschätzung mit geostatistischen Verfahren ist, die lineare Zusammenhänge erfordern, wird im folgenden die Strainanalyse für räumliche Kontinua dargestellt, die einem infiniten und mindestens punktweise homogenen Strain unterliegen. Die mathematische Beschreibung der vollständigen 3D-Strainanalyse gilt bei entsprechender Reduzierung der Parameter auch für die unvollständige 3D-Strainanalyse und für die 2D-Strainanalyse.

2.2 3D-Straintensor

Voraussetzung für die Beschreibung der Deformation eines Körpers mit den Mitteln einer Strainanalyse ist die geeignete Beschreibung des Körpers selbst. Dazu wird hier die Lagrangsche Beschreibung mit einem Kartesischen Koordinatensystem verwendet. Das bedeutet:

- In einer Referenz- oder Nullepoche ist jedem Punkt \underline{P} , der ein Masseteilchen des Körpers repräsentiert, ein Ortsvektor \underline{X} zugeordnet, der sich mit einem festen Ursprung \underline{O} und mit den Basisvektoren \underline{e}_i darstellen läßt als:

$$\overrightarrow{OP} = \underline{X} = X_1 \underline{e}_1 + X_2 \underline{e}_2 + X_3 \underline{e}_3 = \sum_{i=1}^3 X_i \underline{e}_i. \quad (2.1)$$

- In einer Folgepoche werden die physikalischen Eigenschaften durch eine Funktion der Zeit t und des Ortes \underline{X} beschrieben. Im besonderen lauten die Koordinaten des Punktes \underline{P}

in der Folgeepoche:

$$\overrightarrow{OP'} = \underline{X}' = \sum_{i=1}^3 X'_i \underline{e}_i = \sum_{i=1}^3 \varphi_i(\underline{X}, t) \underline{e}_i = \Phi(\underline{X}, t) . \quad (2.2)$$

Die Verschiebungen der Punkte zwischen den Epochen ist die Differenz der Ortsvektoren \underline{X} und \underline{X}' (Abb. 2.1):

$$\underline{u} = \underline{u}(\underline{X}, t) = \underline{X}' - \underline{X} = \sum_{i=1}^3 X'_i \underline{e}_i - \sum_{i=1}^3 X_i \underline{e}_i = \sum_{i=1}^3 (X'_i - X_i) \underline{e}_i = \sum_{i=1}^3 u_i \underline{e}_i . \quad (2.3)$$

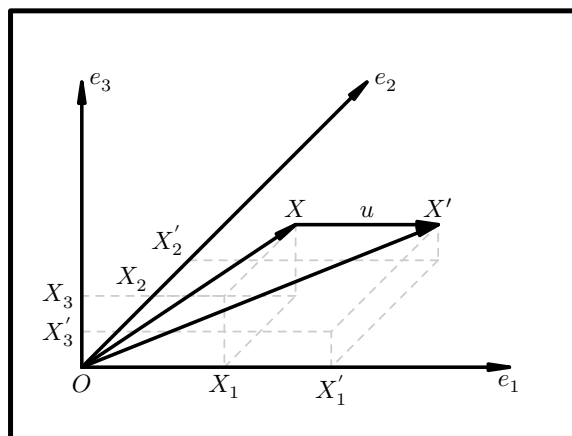


Abbildung 2.1: Verschiebungsvektor zwischen Nullepoche und Folgepoche

Die Vektorfunktion $\underline{u}(\underline{X}, t)$ beschreibt das Verschiebungsfeld für den untersuchten Körper. Für die Betrachtung zweier Epochen gilt:

$$t = \Delta t = \text{const.} \quad (2.4)$$

und damit kann (2.3) vereinfacht werden zu:

$$\underline{u}(\underline{X}, t) = \underline{u}(\underline{X}, \Delta t) = \underline{u}(\underline{X}) = \underline{u} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix}^t . \quad (2.5)$$

Die Funktion $\underline{u}(\underline{X})$ kann für einen hinreichend kleinen und damit homogenen Bereich um einen Punkt \underline{X}_0 durch eine Taylorreihe angenähert werden.

$$\underline{u}_i = d_i + \sum_{j=1}^3 f_{ij}(X_j - X_{0,j}) + \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 k_{ijk}(X_j - X_{0,j})(X_k - X_{0,k}) + \dots \quad (2.6)$$

Durch die Taylorreihenentwicklung mit n Gliedern wird von der Betrachtung des Körpers in \underline{X}_0 selbst zur Betrachtung des Schmiegraumes n -Ordnung an \underline{X}_0 übergegangen. Die Reihe wird nach dem Glied der zweiten Ableitungen abgebrochen, so daß sich ergibt:

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{d}_i + \sum_{j=1}^3 f_{ij}(\mathbf{X}_j - \mathbf{X}_{0,j}) + \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 k_{ijk}(\mathbf{X}_j - \mathbf{X}_{0,j})(\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{0,k}) + \mathbf{o}_i . \quad (2.7)$$

Dabei sind

- $\underline{\mathbf{d}} = (\mathbf{d}_i)$ der Vektor der Translation des Entwicklungspunktes \underline{X}_0 :

$$\underline{\mathbf{d}} = (\mathbf{d}_i) = \underline{\mathbf{u}}(\underline{X}_0) = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_1 & \mathbf{d}_2 & \mathbf{d}_3 \end{pmatrix}^t = \underline{X}'_0 - \underline{X}_0 \quad (2.8)$$

- $\underline{\underline{\mathbf{f}}} = (f_{ij})$ der Tensor der ersten Ableitungen des Verschiebungsfeldes, der die Rotation und Deformation des Vektorfeldes in \underline{X}_0 beschreibt

$$\underline{\underline{\mathbf{f}}} = (f_{ij}) = \left(\frac{\partial \mathbf{u}_i(\underline{\mathbf{X}})}{\partial X_j} \right) = \begin{pmatrix} \underline{\mathbf{f}}_1 \\ \underline{\mathbf{f}}_2 \\ \underline{\mathbf{f}}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}_1(\underline{\mathbf{X}})}{\partial X_1} & \frac{\partial \mathbf{u}_1(\underline{\mathbf{X}})}{\partial X_2} & \frac{\partial \mathbf{u}_1(\underline{\mathbf{X}})}{\partial X_3} \\ \frac{\partial \mathbf{u}_2(\underline{\mathbf{X}})}{\partial X_1} & \frac{\partial \mathbf{u}_2(\underline{\mathbf{X}})}{\partial X_2} & \frac{\partial \mathbf{u}_2(\underline{\mathbf{X}})}{\partial X_3} \\ \frac{\partial \mathbf{u}_3(\underline{\mathbf{X}})}{\partial X_1} & \frac{\partial \mathbf{u}_3(\underline{\mathbf{X}})}{\partial X_2} & \frac{\partial \mathbf{u}_3(\underline{\mathbf{X}})}{\partial X_3} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

- $\underline{\underline{\mathbf{k}}} = (k_{ijk})$ der Tensor der zweiten Ableitungen des Verschiebungsfeldes, der u.a. Krümmungen, Verwindungen und Torsionen beschreibt

$$\underline{\underline{\mathbf{k}}} = (k_{ijk}) = \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_i(\underline{\mathbf{X}})}{\partial X_j \partial X_k} \right) \quad (2.10)$$

- X_0 die Schwerpunktkoordinaten
- und $\underline{\mathbf{o}}$ das Restglied der Taylorreihenentwicklung.

Entsprechend [Salençon 2001] werden mit dem Tensor der ersten Ableitung der Cauchy-Deformationstensor $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}} = (\underline{\underline{\mathbf{1}}} + \underline{\underline{\mathbf{f}}})^t (\underline{\underline{\mathbf{1}}} + \underline{\underline{\mathbf{f}}}) \quad (2.11)$$

und der Green-Lagrange-Straintensor $\underline{\underline{\mathbf{e}}}$

$$\underline{\underline{\mathbf{e}}} = \frac{1}{2} \left((\underline{\underline{\mathbf{1}}} + \underline{\underline{\mathbf{f}}})^t (\underline{\underline{\mathbf{1}}} + \underline{\underline{\mathbf{f}}}) - \underline{\underline{\mathbf{1}}} \right) \quad (2.12)$$

gebildet. Beide beschreiben vollständig die Änderung der Metrik, d.h. die Deformation des Körpers zwischen der Referenz- und der Folgeperiode. Nutzt man den Gradienten des Verschiebungsfeldes $\underline{\nabla \mathbf{u}}$ zur Darstellung des Green-Lagrange-Straintensors:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\nabla \mathbf{u}} + \underline{\nabla \mathbf{u}}^t + \underline{\nabla \mathbf{u}}^t \cdot \underline{\nabla \mathbf{u}} \right) \quad (2.13)$$

bzw.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \right) \quad (2.14)$$

wird deutlich, daß das Strainfeld nichtlinear ist.

Die in Kapitel 3 dargestellte integrierte Strainschätzung beschränkt sich auf die Schätzung infinitesimaler Strains, also eines linearen Strainfeldes. Ein infinitesimaler Strain liegt vor, wenn für alle Punkte des Körpers gilt:

$$\|\underline{\nabla \mathbf{u}}(\mathbf{X})\| \ll 1 \quad (2.15)$$

Wenn die Bedingung (2.15) erfüllt ist, dann kann der Tensor der ersten Ableitungen $\underline{\underline{\mathbf{f}}}$ (2.9) additiv zerlegt werden in den symmetrischen linearisierten Green-Lagrange-Straintensor $\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}$ und in den antisymmetrischen linearisierten Rotationstensor $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{f}}} &= \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} + \underline{\underline{\mathbf{R}}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\mathbf{f}}} + \underline{\underline{\mathbf{f}}}^t \right) + \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{\mathbf{f}}} - \underline{\underline{\mathbf{f}}}^t \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\underline{\nabla \mathbf{u}} + \underline{\nabla \mathbf{u}}^t \right) - \frac{1}{2} \left(\underline{\nabla \mathbf{u}} - \underline{\nabla \mathbf{u}}^t \right) \end{aligned} \quad (2.16)$$

bzw.

$$f_{ij} = \varepsilon_{ij} + R_{ij} = \frac{1}{2} (f_{ij} + f_{ji}) + \frac{1}{2} (f_{ij} - f_{ji}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} - \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right). \quad (2.17)$$

Darin ist $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$ der linearisierte Rotationstensor. Bei der Beschreibung dreidimensionaler Probleme lautet der linearisierte 3D-Rotationstensor $\underline{\underline{\mathbf{R}}}_{3D}$:

$$\underline{\underline{\mathbf{R}}}_{3D} = \underline{\underline{\mathbf{R}}}_{x_1} + \underline{\underline{\mathbf{R}}}_{x_2} + \underline{\underline{\mathbf{R}}}_{x_3} = \frac{1}{2} (f_{ij} - f_{ji}) = \begin{pmatrix} 0 & \vartheta_3 & -\vartheta_2 \\ -\vartheta_3 & 0 & \vartheta_1 \\ \vartheta_2 & -\vartheta_1 & 0 \end{pmatrix} \text{ mit } i, j = 1, 2, 3 \quad (2.18)$$

Seine Komponenten beschreiben die Rotationen um die Koordinatenachsen bezogen auf den Entwicklungspunkt \underline{X}_0 .

Der symmetrische linearisierte Green-Lagrange-Straintensor $\underline{\underline{\varepsilon}}$ lautet ausführlich:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{f}} + \underline{\underline{f}}^t \right) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Die Hauptdiagonalelemente des Straintensors $\underline{\underline{\varepsilon}}$ beschreiben die Zerrung in Richtung der Koordinatenachsen und die Nebendiagonalelemente beschreiben die Scherungen senkrecht zu den Koordinatenachsen.

Der Straintensor $\underline{\underline{\varepsilon}}$ läßt sich weiter zerlegen in einen spurlosen Tensor und ein Vielfaches des Einheitstensors $\underline{\underline{1}}$:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \cdot \underline{\underline{1}} + \left(\underline{\underline{\varepsilon}} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \cdot \underline{\underline{1}} \right) = \underline{\underline{V}} + \underline{\underline{D}} \quad \text{mit: } \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ii} \quad (2.20)$$

Darin sind

$$\underline{\underline{V}} = \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \cdot \underline{\underline{1}} \quad (2.21)$$

der Kugeltensor, der die Volumenänderung ohne Formänderung beschreibt und

$$\underline{\underline{D}} = \left(\underline{\underline{\varepsilon}} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \cdot \underline{\underline{1}} \right) \quad (2.22)$$

der Deviator, der die Formänderung ohne Volumenänderung beschreibt. Der Kugeltensor und der Deviator sind zur anschaulichen Darstellung des Strains geeignet. Zur Beschreibung des Strains durch Maßzahlen kann der Straintensor $\underline{\underline{\varepsilon}}$ außerdem durch Eigenwertzerlegung in die Matrix der Eigenvektoren – die Spektralmatrix $\underline{\underline{S}}$ – und die Diagonalmatrix mit den Eigenwerten – die Modalmatrix $\underline{\underline{\Lambda}}$ – aufgespaltet werden.

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{S}}^t \underline{\underline{\Lambda}} \underline{\underline{S}} \quad \text{mit} \quad \underline{\underline{\Lambda}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \quad \text{wobei } \lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 \quad (2.23)$$

Die Spektralmatrix $\underline{\underline{S}}$ beschreibt die Lage der Hauptachsen des deformierten Systems. Die Hauptdiagonalelemente λ_i der Modalmatrix $\underline{\underline{\Lambda}}$ sind die Hauptverzerrung in Richtung der Hauptachsen.

Als mögliche Maßzahlen können u.a. die in Tabelle 2.1 angegebenen Größen genutzt werden.

	2D	3D
Dilatation	$\Delta_2 = \lambda_1 + \lambda_2$	$\Delta_3 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$
Winkelverzerrung	$\gamma_2 = \lambda_1 - \lambda_2$	$\gamma_3 = \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + (\lambda_1 - \lambda_3)^2 + (\lambda_2 - \lambda_3)^2}$
Scherung	$\gamma_{12} = 2 \cdot \varepsilon_{12}$	$\gamma_{ij} = 2 \cdot \varepsilon_{ij}$ mit $i \neq j$

Tabelle 2.1: Mögliche Maßzahlen für den Strain (vgl. [Welsch 1989], [Wittenburg 1998])

2.3 Graphische Darstellung des Straintensors

Die Darstellung des Straintensors sollte:

1. einen Überblick über das Verhalten des Strains in verschiedenen Raumrichtungen ermöglichen und
2. ausmeßbar sein.

Beide Ziele sind in Darstellungen des 3D-Strains nicht gemeinsam erreichbar. So ist die Darstellung als Ellipsoid zwar gut geeignet, um sich ein Bild vom Verhalten des Strains in unterschiedlichen Raumrichtungen zu machen, aber sie ist nicht ausmeßbar. Dagegen ist die Mohrsche Darstellung des Strains ausmeßbar, aber – zumindest für Ungeübte – weniger anschaulich. Betrachtet man die Lage des beobachteten Körpers in der Referenzepoche als Original und die Lage in der Folgepoche als Bild, dann liefert die Strainanalyse die geometrische Abbildungsvorschrift, die das Original auf das Bild abbildet. Diese Abbildungsvorschrift ist der Green-Lagrangesche-Straintensor $\underline{\underline{\varepsilon}}$. Wählt man als abzubildenden Körper eine Kugel mit dem Radius r , dann erhält man das charakteristische Deformationsellipsoid. Durch die Tensorquadrik mit dem Straintensor $\underline{\underline{\varepsilon}}$

$$r = \pm \sqrt{\sum_{i,j=1}^3 (\delta_{ij} + \varepsilon_{ij}) X_i X_j} \quad (2.24)$$

wird eine Fläche zweiten Grades beschrieben [Brieskorn 1985]. Da die Eigenwerte der Deformationsmatrix alle positiv sind, beschreibt (2.24) genau das gesuchte Deformationsellipsoid (Abb. 2.2). Für den Radius r wird in der Regel $r = 1$ gewählt, so daß sich die Darstellung auf die Einheitskugel bezieht [Salençon 2001]. Die Längen der Hauptachsen \mathbf{a} , \mathbf{b} und \mathbf{c} des Ellipsoids ergeben sich aus den Eigenwerten λ_1 , λ_2 und λ_3 der Strainmatrix $\underline{\underline{\varepsilon}}$:

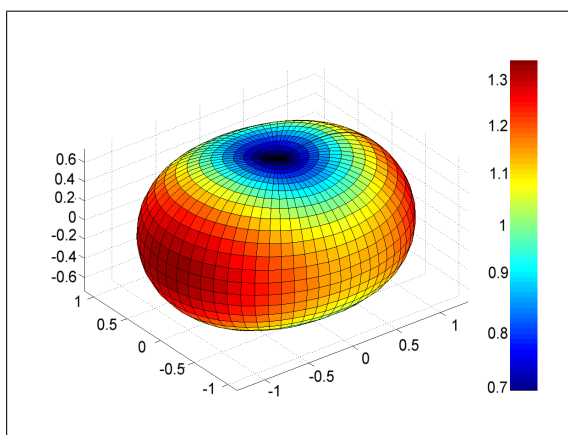
$$\mathbf{a} = \sqrt{1 + \lambda_1}, \quad \mathbf{b} = \sqrt{1 + \lambda_2} \quad \text{und} \quad \mathbf{c} = \sqrt{1 + \lambda_3} \quad (2.25)$$

Werden die Punkte \underline{X}_μ in Polarkoordinaten dargestellt, dann lautet die Gleichung des Deformationsellipsoids:

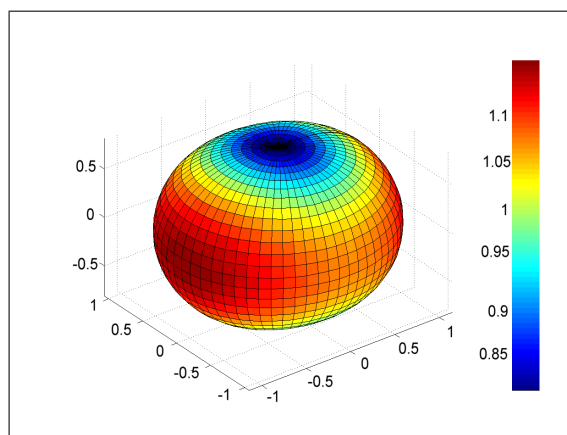
$$r_{\text{Ellipsoid}} = \sqrt{\begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \zeta \\ \sin \varphi \cos \zeta \\ \sin \zeta \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & 1 + \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & 1 + \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \zeta \\ \sin \varphi \cos \zeta \\ \sin \zeta \end{pmatrix}} \quad (2.26)$$

Da neben der Größe des Strains auch die Differenzen des Ellipsoids gegenüber der Einheitskugel interessieren, wäre eine gemeinsame Darstellung von Deformationsellipsoid und Einheitskugel entsprechend der gemeinsamen Darstellung von Deformationsellipse und Einheitskreis in der Ebene denkbar. Allerdings verdecken sich in der 3D-Darstellung die Kugel und das Ellipsoid gegenseitig, so daß diese Form wenig sinnvoll erscheint. Günstiger ist die Darstellung der Differenzen selbst (Abb. 2.3). Die Gleichung des Differenzkörpers mit Polarkoordinaten lautet (vgl. [Funcke 1984]):

$$r_{\text{Differenzkörper}} = \sqrt{\begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \zeta \\ \sin \varphi \cos \zeta \\ \sin \zeta \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & 1 + \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & 1 + \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \zeta \\ \sin \varphi \cos \zeta \\ \sin \zeta \end{pmatrix} - 1} \quad (2.27)$$



Fußpunktfläche des
Deformationsellipsoids



Deformationsellipsoid

Abbildung 2.2: Deformationsellipsoid und zugehörige Fußpunktfläche für $\varepsilon_{11} = 0,3188$, $\varepsilon_{22} = 0,1353$, $\varepsilon_{33} = -0,3042$ und $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{21} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{32} = 0$

Anstelle des Deformationsellipsoids kann auch die Fußpunktfäche des Deformationsellipsoids (Abb. 2.2) dargestellt werden, die durch die quadrierte Gleichung (2.26) gegeben ist:

$$r_{\text{Fußpunkt}} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \zeta \\ \sin \varphi \cos \zeta \\ \sin \zeta \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & 1 + \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & 1 + \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \zeta \\ \sin \varphi \cos \zeta \\ \sin \zeta \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

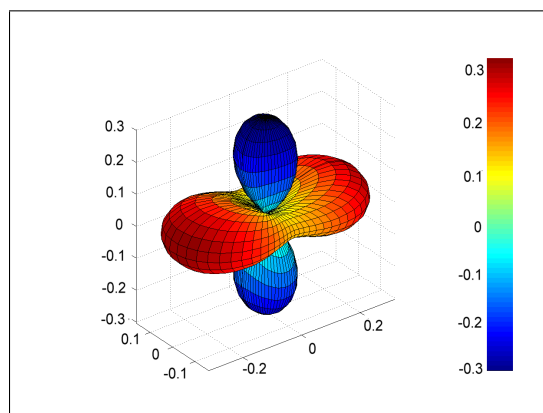
Der Vorteil dieser Darstellung liegt darin, daß die Radien dieser Figur den linearen Streckenänderungen in der jeweiligen Raumrichtung entsprechen (vgl. [Pielok und Pielok 2002]).

Neben diesen Varianten, die den Deformationstensor als Fläche darstellen, kann der Deformationstensor auch in einem Dehnungs-Scherungs-Diagramm im Sinne des Mohrschen Spannungsdiagramms dargestellt werden, indem anstelle der Normalspannungen σ die Dehnungen e_{ii} und anstelle der Schubspannungen τ_{ij} die Scherungen e_{ij} eingesetzt werden [Grafarend 1967]. Die drei Mohrschen Kreise ergeben sich aus den Eigenwerten des Straintensors $\underline{\underline{\varepsilon}}$ mit den Mittelpunkten:

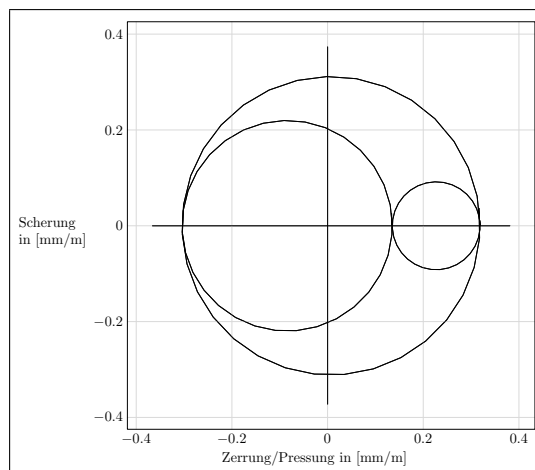
$$M_{12} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \quad M_{13} = \frac{\lambda_1 + \lambda_3}{2} \quad M_{23} = \frac{\lambda_2 + \lambda_3}{2} \quad (2.29)$$

und den Radien

$$r_{12} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} \quad r_{13} = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{2} \quad r_{23} = \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{2} \quad (2.30)$$



Differenzkörper



Mohrscher Darstellung

Abbildung 2.3: Straindarstellungen als Differenzkörper und in Mohrscher Darstellung für $\varepsilon_{11} = 0,3188$, $\varepsilon_{22} = 0,1353$, $\varepsilon_{33} = -0,3042$ und $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{21} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{32} = 0$

Aus den resultierenden Deformationskreisen kann der Strain jeweils in einer gesuchten Richtung φ abgelesen bzw. aus:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ii} &= M_{ij} + r_{ij} \cos(2\varphi) \\ \varepsilon_{jj} &= M_{ij} - r_{ij} \cos(2\varphi) \\ \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ji} = r_{ij} \sin(2\varphi)\end{aligned}\tag{2.31}$$

berechnet werden [Salençon 2001]. Ein Beispiel für diese vier Darstellungsvarianten ist in den Abbildungen 2.2 und 2.3 dargestellt.

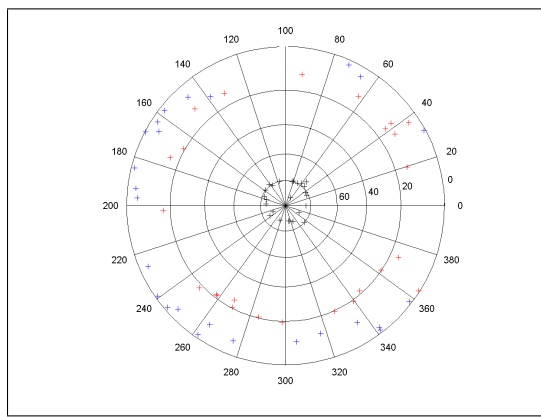


Abbildung 2.4: Hauptachsrichtungen der Deformationsellipse; λ_1 — rot, λ_2 — blau und λ_3 — schwarz

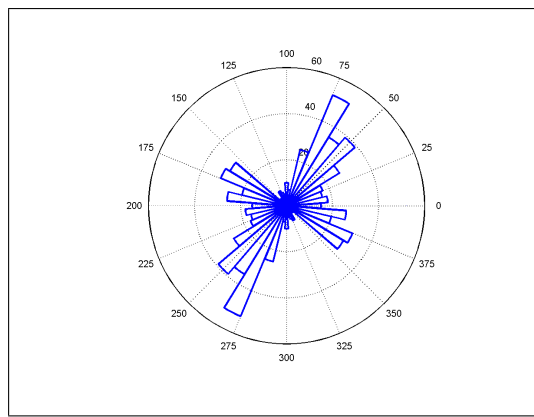


Abbildung 2.5: Darstellung der Richtung der großen Hauptachse der Deformationsellipse

Durch die Eigenwerte λ_1 , λ_2 und λ_3 des Straintensors $\underline{\underline{\varepsilon}}$ kann die Größe der Deformation beispielsweise durch die Dilatation Δ und die Winkelverzerrung γ (Tab. 2.1) angegeben werden. Diese skalen GröÙen können durch Isoflächendarstellungen bzw. Isolinien in Schnittflächen graphisch dargestellt werden.

Oft interessiert neben der Größe der Deformation auch die Richtung der maximalen Deformation, also die Richtungen der Hauptachsen, die durch die Eigenvektoren \underline{s}_1 , \underline{s}_2 und \underline{s}_3 – den Spaltenvektoren der Spektralmatrix $\underline{\underline{S}}$ – beschrieben werden. Zur Auswertung der Raumrichtungen werden sie in Diagramme eingetragen, denen Azimutalprojektionen von Gradnetzen zugrunde liegen. Die flächentreue Azimutalprojektion ist unter dem Namen Schmidtsches Netz und die winkeltreue Azimutalprojektionen unter dem Namen Wulffsches Netz bekannt. Die Darstellung im winkeltreuen Wulffschen Netz ist immer dann sinnvoll, wenn die Winkelbeziehungen zwischen zwei Richtungen wichtig sind, während das Schmidtsche Netz v.a. dann genutzt wird, wenn statistische Auswertungen wie Isopyknendiagramme, die die Besetzungsdichte darstellen, durchgeführt werden sollen [Möbus 1989].

In einem Diagramm zur Darstellung der Richtungen der Hauptachsen ist die entscheidende Information deren Lage und Verteilung im Raum. Da außerdem die Änderungen der Winkel zwischen den Achsen ohnehin kaum erkennbar sind, ist für die Darstellung der Hauptdeformationsrichtungen das Schmidtsche Netz geeigneter als das Wulffsche Netz.

Zur Darstellung wird in den Mittelpunkt der Lagehalbkugel, die zur Darstellung genutzt werden soll, das Achskreuz der Deformationsellipse gelegt. Die Durchstoßpunkte der Achsen mit der Halbkugel werden dann in die Ebene projiziert und können gegebenenfalls weiter ausgewertet werden (Abb. 2.4) [Möbus 1989].

2.4 Unvollständige räumliche Überwachung

Die Anwendung einer vollständigen 3D-Strainanalyse ist nur möglich, wenn das 3D-Verschiebungsfeld

1. an genügend Punkten im Raum beobachtet worden ist, die nicht alle in einer Ebene liegen dürfen, und
2. vollständig beobachtet worden ist, d.h. es liegen zu allen Komponenten des Verschiebungsfeldes Beobachtungen vor. Allerdings müssen nicht alle Komponenten an allen Punkten bekannt sein.

Die normale Vermessungspraxis beschränkt sich jedoch meist auf Beobachtungen auf der Erdoberfläche, so daß eine vollständige räumliche Beschreibung nicht möglich ist, da keine Ableitungen in x_3 -Richtung bestimmt werden können.

In diesen Fällen kann die 3D-Strainanalyse auf die differentialgeometrische Beschreibung der überwachten Fläche zurückgeführt werden, die in der Literatur zur Differentialgeometrie zu finden ist, z.B. [Gray 1998], [Blaschke und Leichtweiß 1973].

Eine lokale Karte im Raum ist eine differenzierbare Abbildung $\Phi : \mathbf{U} \rightarrow \mathbb{R}^3$, wobei \mathbf{U} eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^2 ist:

$$\underline{\Phi}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) = \left(\varphi_1(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) \quad \varphi_2(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) \quad \varphi_3(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) \right)^t \quad (2.32)$$

Die Jacobimatrix $\underline{J}(\underline{\Phi}(\mathbf{u}, \mathbf{v}))$ dieser Fläche ist:

$$\underline{J}(\underline{\Phi}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)) = \left(\frac{\partial \varphi_i(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)}{\partial \mathbf{X}_1} \quad \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)}{\partial \mathbf{X}_2} \right) = \left(\varphi_{\mathbf{X}_1}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \varphi_{\mathbf{X}_2}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \right) \quad (2.33)$$

Der tiefgestellte Index wird hier genutzt, um anzuzeigen, nach welcher Variablen differenziert wird. Das gilt entsprechend auch für die mehrfachen Ableitungen nach X_1 und X_2 .

Eine reguläre Karte liegt dann vor, wenn die Jacobimatrix $\underline{\underline{J}}$ für alle $(X_1, X_2) \in \mathcal{U}$ den Rang 2 besitzt. Der Einheitsnormalenvektor \underline{n} auf der Fläche Φ wird beschrieben durch:

$$\underline{n} = \frac{\varphi_{X_1} \times \varphi_{X_2}}{\left\| \varphi_{X_1} \times \varphi_{X_2} \right\|} \quad (2.34)$$

Mit den Spaltenvektoren φ_{X_1} und φ_{X_2} der Jacobimatrix lassen sich die Fundamentalgrößen 1. Ordnung:

$$E = \left\| \varphi_{X_1} \right\|^2 \quad F = \varphi_{X_1} \varphi_{X_2} \quad G = \left\| \varphi_{X_2} \right\|^2 \quad (2.35)$$

und 2. Ordnung

$$e = \underline{n} \cdot \varphi_{X_1 X_1} \quad f = \underline{n} \cdot \varphi_{X_1 X_2} = \underline{n} \cdot \varphi_{X_2 X_1} \quad g = \underline{n} \cdot \varphi_{X_2 X_2} \quad (2.36)$$

darstellen. Die Krümmungen der Fläche lauten mit den Fundamentalgrößen 1. und 2. Ordnung:

- Gaußsche Krümmung

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \quad (2.37)$$

- mittlere Krümmung

$$H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} \quad (2.38)$$

- Hauptkrümmungen

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= H + \sqrt{H^2 - K} \\ \mathbf{k}_2 &= H - \sqrt{H^2 - K} \end{aligned} \quad (2.39)$$

Es ist leicht zu erkennen, daß die Mittel zur Beschreibung der Fläche identisch mit denen sind, die in Abschnitt 2.2 zur Strainbeschreibung genutzt wurden. Dadurch können der Tensor der ersten Ableitungen $\underline{\underline{f}}$ und der Tensor der zweiten Ableitungen $\underline{\underline{k}}$ im Gegenzug verwendet werden, um die Deformation und die Krümmung der Fläche zu beschreiben. Da die Änderungen des Verschiebungsfeldes senkrecht zur betrachteten Fläche nicht benötigt werden bzw. aufgrund fehlender Beobachtungen nicht bestimmt werden können, reduzieren sich die Tensoren der ersten und zweiten Ableitungen $\underline{\underline{f}}$ und $\underline{\underline{k}}$ (2.7) um die partiellen Ableitungen nach X_3 , d.h.:

- $\underline{\underline{f}} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ verringert sich zu $\underline{\underline{f}}_{\text{Red}} = \underline{\underline{J}} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ und
- $\underline{\underline{k}} \in \mathbb{R}^{3 \times 3 \times 3}$ verringert sich zu $\underline{\underline{k}}_{\text{Red}} \in \mathbb{R}^{3 \times 2 \times 2}$

Die Beschreibung des 2D-Strains der Fläche erfolgt mit den in Abschnitt 2.2 dargestellten Gleichungen wobei hier wegen der Verringerung der Dimension die Ableitungen $\frac{\partial u_3}{\partial X_1}$ und $\frac{\partial u_3}{\partial X_2}$ entfallen. Damit ist der Tensor der ersten Ableitungen $\underline{\underline{f}}_{\text{Red}} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ gleich der 2×2 -Submatrix der Jacobimatrix $\underline{\underline{J}}$ ist:

$$f_{ij} = j_{ij} \quad \text{mit: } i, j = \{1, 2\} \quad (2.40)$$

Die Gleichungen (2.16) bis (2.23) gelten unter Beachtung der Verringerung der Dimension weiter. Die Maßzahlen zur Beschreibung der 2D-Deformation können aus Tabelle 2.1 entnommen werden. Die Gleichungen der Fußpunktkurve des Deformationsellipsoids (2.26) und der Differenzkörper (2.27) reduzieren sich zu :

$$\begin{aligned} r_{\text{Deformationsellipse}} &= \sqrt{\begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & 1 + \varepsilon_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}} \\ r_{\text{Differenzkörper}} &= \sqrt{\begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & 1 + \varepsilon_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}} - 1 \end{aligned} \quad (2.41)$$

Für die Darstellung der Hauptdeformationsrichtungen werden anstelle des Schmidtschen Netzes Richtungsrosen verwendet [Möbus 1989]. Sie entsprechen einem Histogramm in polarer Darstellung (s. Abb. 2.5). Die zusätzlichen Ableitungen der Senkungen in x_1 - und x_2 -Richtung f_{31} und f_{32} sind die Schief lagen in Richtung der Koordinatenachsen. Und schließlich können aus den Spaltenvektoren der Jacobimatrix $\underline{\underline{J}} = \underline{\underline{f}}_{\text{Red}}$ und dem Tensor der zweiten Ableitungen $\underline{\underline{k}}_{\text{Red}}$ die Gaußsche Krümmung (2.37), die mittlere Krümmung (2.38) und die Hauptkrümmungen (2.39) berechnet werden.

Kapitel 3

Verallgemeinertes universelles Schätzverfahren zur Strainanalyse

In Kapitel 2 wurde eine Möglichkeit zur Beschreibung der Deformation eines Körpers dargestellt. Voraussetzung zur Berechnung der dort hergeleiteten Kennwerte ist die Kenntnis des zugrundeliegenden Verschiebungsfeldes. Dieses Verschiebungsfeld wird nur an diskreten Punkten beobachtet werden können. Ziel des Schätzverfahrens zur Strainanalyse ist es, auf der Grundlage einer beschränkten Anzahl geodätischer und geotechnischer Beobachtungen dieses Verschiebungsfeldes eine Aussage für jeden Punkt des Kontinuums zu erhalten.

In Abschnitt 2.2 ist der Strain aus dem Gradienten des Verschiebungsfeldes hergeleitet worden, d.h. das Verschiebungsfeld oder sein Gradient an einem Punkt muß bekannt sein, um eine Strainanalyse durchführen zu können. Da im allgemeinen weder das Verschiebungsfeld noch der Gradient direkt an diesem Punkt beobachtet worden sind, muß das Verschiebungsfeld auf Basis aller Beobachtungen geschätzt werden. Für die Schätzung eines gesuchten Merkmals an einem Punkt auf Basis beliebig verteilter Stützwerte sind eine Reihe von Verfahren vorgeschlagen worden. Diese Verfahren unterscheiden sich grundsätzlich in der Beschreibung des zugrundeliegenden stochastischen Prozesses.

Sind genügend Beobachtungen vorhanden, um die Kovarianzfunktion des Prozesses zu schätzen, dann können die Kollokation [Moritz 2000] und das Kriging [Matheron 1971], [Cressie 1993], [Chilés und Delfiner 1999], benutzt werden. Beide liefern im Sinne der Minimierung der Schätzvarianz optimale Schätzungen des gesuchten Merkmals.

Sind nicht genügend Beobachtungen vorhanden, um die Kovarianzfunktion zu schätzen, kann eine Schätzung des Merkmals nur mit einer geeignet erscheinenden Kernfunktion durchgeführt

werden. Damit ist es zwar trotz magerer Datenlage möglich, das Merkmal zu schätzen, allerdings unter Verlust der optimalen Schätzvarianz. Ein bekanntes kernfunktionsbasiertes Schätzverfahren ist die Multiquadratische Methode [Hardy 1971], [Powell 1992]. Wie [Menz und Bian 1997] gezeigt haben, lassen sich Kollokation und Kriging als spezielle kernfunktionsbasierte Schätzungen auffassen, die die Kovarianzfunktion als Kern nutzen.

Im folgenden wird davon ausgegangen, daß genügend Beobachtungen vorhanden sind, um die Kovarianzfunktion aus den Beobachtungen schätzen zu können (s. Abschnitt 3.1.4.2), so daß Kollokation bzw. Kriging genutzt werden können. Sollte es im konkreten Anwendungsfall sinnvoll erscheinen, ein anderes kernfunktionsbasiertes Schätzverfahren anzuwenden, dann kann analog verfahren werden, indem anstelle der Kovarianzfunktion eine andere geeignete Kernfunktion eingesetzt wird, die die Anforderungen an die Kovarianzfunktion, insbesondere die zweimalige Differenzierbarkeit, erfüllt (s. Abschnitt 3.1.4.1).

Im vorliegenden Anwendungsfall – der Schätzung des Strains – ist das zu schätzende Merkmal ein Vektorfeld. Dementsprechend ist das Schätzverfahren zu erweitern [Wackernagel 1995], [Chilés und Delfiner 1999].

Bei geodätischen Überwachungsmessungen werden charakteristische Punkte eines Kontinuums (Bauwerk, geotechnische Objekte, ...) in mehreren Epochen beobachtet. Aus dem Epochenvergleich werden in der 1. Stufe der Deformationsanalyse ausgeglichene, signifikante Koordinatenänderungen \underline{u}_μ zwischen zwei Epochen mit den zugehörigen Standardabweichungen σ_μ bestimmt [Pelzer 1971], [Niemeyer 1985], [Casparly 1987].

Da im allgemeinen geodätische Überwachungsmessungen nicht ausreichen, um alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial \underline{u}(X)}{\partial X}$ bzw. $\frac{\partial^2 \underline{u}(X)}{\partial X^2}$ und damit alle Elemente der Tensoren \underline{f} und \underline{k} zu bestimmen, ist es meist nicht nur sinnvoll, sondern zwingend notwendig, geotechnische Messungen zu integrieren.

Geotechnische Überwachungsmessungen liefern in der Regel relative Änderungen zu einem Bezugszeitpunkt. Sie eignen sich besonders gut zur automatischen und kontinuierlichen Überwachung. Aus den Meßreihen müssen für die betrachteten Epochen repräsentative Werte ermittelt werden.

Zur Beobachtung des Strains können alle Verfahren genutzt werden, die metrische Größen liefern. Dies sind beispielsweise:

- GPS-Netze → absolute, räumliche Verschiebungen,
- terrestrische Netze → absolute Horizontalverschiebungen,

- Nivellementsnetze → absolute Höhenänderungen,
- Alinement → horizontaler Abstand zu einer Bezugslinie,
- Extensometer, Fugenspaltmesser → relative Streckenänderungen
- Inklinometer, Neigungsmesser, Lote, Schwimmlote → relative Winkeländerungen
- Meßrosen → Gradientenbeobachtungen, direkte Strainbeobachtung

Die damit gewonnenen Informationen sind:

- Koordinatenänderungen
- Streckenänderungen
- Änderungen des Richtungswinkels
- Änderungen des Zenitwinkels
- Gradienten

Um das Verschiebungsfeld oder den Strain an einem Punkt zu schätzen, ist ein Schätzverfahren nötig, daß:

1. sämtliche geodätischen und geotechnischen Beobachtungen als Stützwerte nutzen kann und
2. die Schätzung des Verschiebungsfeldes und der linearen Funktionale des Verschiebungsfeldes gestattet.

3.1 Schätzverfahren zur Strainanalyse

3.1.1 Schätzung eines Skalarfeldes

Es sei der Beobachtungsvektor u_1, \dots, u_n eines Merkmals u durch Messungen an den Stellen X_1, \dots, X_n gegeben. Es wird angenommen, daß sich das dadurch beobachtete Verschiebungsfeld $\underline{u} = \underline{\Phi}(X)$ beschreiben läßt durch das Modell „Signal S + Trend T + Rauschen Q “:

$$\underline{u} = S + T + Q \tag{3.1}$$

Darin ist das Signal S ein Zufallsfeld mit der Stationarität 2. Ordnung, d.h. es gilt:

1. daß der Erwartungswert des Merkmals S ortsunabhängig ist:

$$E[S(\underline{X})] = c \quad (3.2)$$

2. und daß die Kovarianz zweier Werte nur vom Abstand \underline{h} abhängt:

$$\text{cov}(\underline{h}) = E[S(\underline{X} + \underline{h})S(\underline{X})] - c^2 \quad (3.3)$$

Das Rauschen R beschreibt u.a. die zufälligen Meßfehler der Beobachtungen und der Trend T den systematischen Anteil des beobachteten Merkmals. Weiterhin seien für die Schätzung die Gesamtstreuung σ^2 und die Streuung des Rauschens σ_R^2 bekannt.

Zur Schätzung des Merkmals u an der Stelle \underline{X}_0

$$\hat{u}_0(\underline{X}_0) = \hat{S}_0(\underline{X}_0) + \hat{T}_0(\underline{X}_0) \quad (3.4)$$

benötigt man

1. Ein Trendmodell aus deterministisch bekannten Trendfunktionen $t_\mu(\underline{X})$ mit ihren unbekanntem Gewichten β_μ . Das Trendmodell muß entsprechend dem jeweiligen Anwendungsfall gewählt werden. Kann das Trendmodell nicht aus theoretischen Überlegungen bestimmt werden, so ist eine stochastische Trendanalyse zur Auswahl eines geeigneten Trendmodells zweckmäßig. Die genaue Bestimmung des Trendmodells ist in Abschnitt 3.2 erläutert.
2. Eine Kovarianzfunktion $c(\underline{h}) = c(\|\underline{X}_0 - \underline{X}_\kappa\|) = \text{cov}(z(\underline{X}_0), z(\underline{X}_\kappa))$ mit den zugehörigen Gewichten λ_κ . Als Kovarianzfunktionen $c(\underline{h})$ können alle positiv definiten Funktionen verwendet werden. Als Beispiele seien genannt:

- die exponentielle Kovarianzfunktion

$$c_{\text{exp}}(\underline{h}) = be^{-\frac{|\underline{h}|}{a}} \quad \text{mit } a, b > 0 \quad (3.5)$$

- die Gaußsche Kovarianzfunktion,

$$c_{\text{gauss}}(\underline{h}) = be^{-\left(\frac{|\underline{h}|}{a}\right)^2} \quad \text{mit } a, b > 0 \quad (3.6)$$

- die sphärische Kovarianzfunktion,

$$c_{\text{sph}}(\underline{h}) = \begin{cases} b \left(\frac{3|\underline{h}|}{2a} + \frac{|\underline{h}|^3}{2a^3} \right) & \text{für } 0 \leq |\underline{h}| \leq a \\ 0 & \text{für } |\underline{h}| > a \end{cases} \quad (3.7)$$

- die Maternsche Kovarianzfunktion,

$$c_{\text{mat}}(\underline{\mathbf{h}}) = \frac{\sigma^2}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)} \left(\frac{2\nu^{\frac{1}{2}}\|\underline{\mathbf{h}}\|}{r} \right)^{\nu} \mathcal{K}_{\nu} \left(\frac{2\nu^{\frac{1}{2}}\|\underline{\mathbf{h}}\|}{r} \right) \quad (3.8)$$

Auf die Wahl und Anpassung der Kernfunktion an die konkreten Daten wird in Abschnitt 3.1.4 näher eingegangen.

Mit einer geeigneten Kovarianzfunktion und dem Trendmodell lautet die Schätzung des Merkmals \mathbf{u} an einer Stelle $\underline{\mathbf{X}}_0$:

$$\hat{\mathbf{u}}_0(\underline{\mathbf{X}}_0) = \sum_{\kappa=1}^n \lambda_{\kappa} c(\|\underline{\mathbf{X}}_0 - \underline{\mathbf{X}}_{\kappa}\|) + \sum_{\mu=1}^p \beta_{\mu} \mathbf{t}_{\mu}(\underline{\mathbf{X}}) \quad (3.9)$$

Fordert man für die Schätzung Erwartungstreue

$$\mathbb{E}(\hat{\mathbf{u}}_0 - \mathbf{u}_0) = 0 \quad (3.10)$$

und die Minimierung der Schätzvarianz

$$\mathbf{D}_0^2 = \mathbb{E}(\hat{\mathbf{u}}_0 - \mathbf{u}_0)^2 \rightarrow \mathbf{Minimum!} \quad (3.11)$$

dann erhält man aus Gleichung (3.9) für trendfreie Stützwerte den Gewichtsvektor $\underline{\lambda}$ der Kovarianzfunktion als Lösungsvektor des Gleichungssystems [Menz und Bian 1997]:

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}} \underline{\lambda} = \underline{\mathbf{u}} - \underline{\underline{\mathbf{T}}}\underline{\beta} \quad (3.12)$$

Der Gewichtsvektor $\underline{\beta}$ des Trendanteils wird mit einer Parameterschätzung nach der verallgemeinerten Methode der kleinsten Quadrate bestimmt (vgl. Abschnitt 3.2):

$$\hat{\underline{\beta}} = (\underline{\underline{\mathbf{T}}}^t \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{T}}})^{-1} \underline{\underline{\mathbf{T}}}^t \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{-1} \underline{\mathbf{u}} \quad (3.13)$$

Mit (3.12) und (3.13) sowie den Kovarianzen $\mathbf{q}_{ij} = \text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$ der Meßfehler ε_j nach Abschnitt 3.1.4.3 läßt sich (3.9) nach [Cressie 1993], [Menz und Pilz 1994] in eine Universal-Kriging-Lösung umformen:

$$\hat{\mathbf{u}}_0 = \begin{pmatrix} c(\underline{\mathbf{X}}_0, \underline{\mathbf{X}}_1) \\ \vdots \\ c(\underline{\mathbf{X}}_0, \underline{\mathbf{X}}_n) \\ \mathbf{t}_1(\underline{\mathbf{X}}_0) \\ \vdots \\ \mathbf{t}_p(\underline{\mathbf{X}}_0) \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} c(\underline{\mathbf{X}}_1, \underline{\mathbf{X}}_1) + \mathbf{q}_{11} & \dots & c(\underline{\mathbf{X}}_1, \underline{\mathbf{X}}_n) + \mathbf{q}_{1n} & \mathbf{t}_1(\underline{\mathbf{X}}_1) & \dots & \mathbf{t}_p(\underline{\mathbf{X}}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c(\underline{\mathbf{X}}_n, \underline{\mathbf{X}}_1) + \mathbf{q}_{n1} & \dots & c(\underline{\mathbf{X}}_n, \underline{\mathbf{X}}_n) + \mathbf{q}_{nn} & \mathbf{t}_1(\underline{\mathbf{X}}_n) & \dots & \mathbf{t}_p(\underline{\mathbf{X}}_n) \\ \mathbf{t}_1(\underline{\mathbf{X}}_1) & \dots & \mathbf{t}_1(\underline{\mathbf{X}}_n) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{t}_p(\underline{\mathbf{X}}_1) & \dots & \mathbf{t}_p(\underline{\mathbf{X}}_n) & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{u}(\underline{\mathbf{X}}_1) \\ \vdots \\ \mathbf{u}(\underline{\mathbf{X}}_n) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

wobei im allgemeinen die q_{ij} für $i \neq j$ für geotechnische Beobachtungen verschwinden (s. Abschnitt 3.1.4.3). Mit (3.14) ergibt sich für Schätzvarianz D_0^2 :

$$D_0^2 = \mathbf{c}(0) - \begin{pmatrix} \underline{c}_0 \\ \underline{t}_0 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \underline{\underline{C}} + \underline{\underline{Q}} & \underline{\underline{I}} \\ \underline{\underline{I}}^t & \mathbf{0} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \underline{c}_0 \\ \underline{t}_0 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

mit

$$\underline{\underline{C}} + \underline{\underline{Q}} = \begin{pmatrix} c(\underline{X}_1, \underline{X}_1) + q_{11} & \dots & c(\underline{X}_1, \underline{X}_n) + q_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c(\underline{X}_n, \underline{X}_1) + q_{n1} & \dots & c(\underline{X}_n, \underline{X}_n) + q_{nn} \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{I}} = \begin{pmatrix} t_1(\underline{X}_1) & \dots & t_p(\underline{X}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1(\underline{X}_n) & \dots & t_p(\underline{X}_n) \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

$$\underline{c}_0 = \begin{pmatrix} c(\underline{X}_0, \underline{X}_1) & \dots & c(\underline{X}_0, \underline{X}_n) \end{pmatrix}^t \quad \underline{t}_0 = \begin{pmatrix} t_1(\underline{X}_0) & \dots & t_p(\underline{X}_0) \end{pmatrix}^t$$

3.1.2 Schätzung eines Vektorfeldes

Anstelle des skalaren Merkmals $\mathbf{u} \in \mathbb{R}$ sei ein vektorielles Merkmal $\underline{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^3$, z.B. die Verschiebung eines Punktes, beobachtet worden. Jede Komponente des Vektors $\underline{\mathbf{u}}$ sei für sich ein skalares Merkmal im Sinne des Abschnittes 3.1.1:

$$\underline{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1(\underline{\mathbf{X}}) \\ \mathbf{u}_2(\underline{\mathbf{X}}) \\ \mathbf{u}_3(\underline{\mathbf{X}}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 + T_1 + R_1 \\ S_2 + T_2 + R_2 \\ S_3 + T_3 + R_3 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Das bedeutet, daß entsprechend der Gleichung (3.9) ein vektorielles Trendmodell nötig ist.

Im allgemeinen Fall sind die Komponenten anisotrop und miteinander korreliert. Dadurch wird die Erstellung einer matrixwertigen Kovarianzfunktion problematisch und schwierig. Im konkreten Fall kann aber meist von einer Isotropie des Raumes und der Meßwerte ausgegangen werden, wie sie in [van den Boogaart und Schaeben 2002] definiert ist, so daß dadurch eine Kovarianzfunktion $\underline{\mathbf{c}}(\underline{\mathbf{h}})$ vom Typ:

$$\underline{\mathbf{c}}(\underline{X}_\mu, \underline{X}_\nu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{c}_1(\|\underline{X}_\mu - \underline{X}_\nu\|) \quad (3.18)$$

mit einer reellwertigen Kovarianzfunktion $\mathbf{c}_1(\|\underline{X}_\mu - \underline{X}_\nu\|)$ genutzt werden kann. Dieser Typ erlaubt die Verwendung aller Standardkovarianzfunktionen. Die Annahme der Isotropie des

Raumes und der Meßwerte ist bei Verformungsprozessen nur mit Vorsicht anzuwenden. Besser ist die Benutzung der ebenfalls in [van den Boogaart und Schaeben 2002] definierten spezielleren Annahme der Isotropie des Prozesses. Allerdings muß dann eine deutlich kompliziertere Kovarianzfunktion $\underline{c}(\underline{h})$ verwendet werden.

Mit dem erweiterten Trendmodell (3.17) und der erweiterten Kovarianzfunktion (3.18) läßt sich das vektorielle Merkmal \underline{u} an einer Stelle \underline{X}_0 äquivalent zu (3.14) schätzen aus:

$$\hat{\underline{u}}_0 = \begin{pmatrix} \underline{c}(\underline{X}_0, \underline{X}_1) \\ \vdots \\ \underline{c}(\underline{X}_0, \underline{X}_n) \\ \mathbf{t}_1(\underline{X}_0) \\ \vdots \\ \mathbf{t}_p(\underline{X}_0) \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \underline{c}(\underline{X}_1, \underline{X}_1) + \mathbf{q}_{11} & \dots & \underline{c}(\underline{X}_1, \underline{X}_n) + \mathbf{q}_{1n} & \mathbf{t}_1(\underline{X}_1) & \dots & \mathbf{t}_p(\underline{X}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{c}(\underline{X}_n, \underline{X}_1) + \mathbf{q}_{n1} & \dots & \underline{c}(\underline{X}_n, \underline{X}_n) + \mathbf{q}_{nn} & \mathbf{t}_1(\underline{X}_n) & \dots & \mathbf{t}_p(\underline{X}_n) \\ \mathbf{t}_1(\underline{X}_1) & \dots & \mathbf{t}_1(\underline{X}_n) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{t}_p(\underline{X}_1) & \dots & \mathbf{t}_p(\underline{X}_n) & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \underline{u}(\underline{X}_1) \\ \vdots \\ \underline{u}(\underline{X}_n) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Die Gleichung (3.19) liest man als Formel mit Blockmatrizen. Alle auftretenden Funktionen sind vektor- oder matrixwertig: $\underline{c}(\underline{X}_\mu, \underline{X}_\nu) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ und $\mathbf{t}(\underline{X}_\mu) \in \mathbb{R}^3$.

3.1.3 Schätzung mit linearen Funktionalen

Zusätzlich zu den direkten Beobachtungen eines Merkmals sollen lineare Funktionale dieses Merkmals genutzt und geschätzt werden. Dafür muß das Kriginggleichungssystem (3.19) verallgemeinert werden. Die Idee ist, daß an den Stellen des Kriginggleichungssystems, an denen ein lineares Funktional des Merkmals als Beobachtung verwendet wird, das gleiche lineare Funktional auch auf das Trendmodell und die Kovarianzfunktion angewendet wird. Diese Idee und eine praktische Umsetzung dieser Idee sind in [van den Boogaart und Drobniowski 2002a], [Drobniowski 2002] und [van den Boogaart und Drobniowski 2002b] vorgestellt worden.

Ein lineares Funktional in einem reellen Vektorraum \mathbf{V} ist eine Funktion $\mathcal{L} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$, die folgende Bedingungen erfüllt ([Halmos 1991]):

$$\begin{aligned} 1. \mathcal{L}(\underline{x} + \underline{y}) &= \mathcal{L}(\underline{x}) + \mathcal{L}(\underline{y}) \\ 2. \mathcal{L}(\alpha \underline{x}) &= \alpha \mathcal{L}(\underline{x}) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Es ordnet einer Funktion Zahlen zu. Äquivalent zur Definition für Skalare lassen sich einer Funktion durch eine Linearform auch Vektoren oder Matrizen zuordnen. Beispiele für lineare Funktionale sind:

- der Funktionswert $\mathbf{e}_{\underline{X}}f = f(\underline{X})$ an der Stelle \underline{X}
- die Ableitung, $\nabla_{\underline{X}}$ die einer Funktion ihren Gradienten $\nabla_{\underline{X}}f(\underline{X})$ zuordnet,
- die Differenz $\Delta_{\underline{X},\underline{Y}} = f(\underline{X}) - f(\underline{Y})$ und
- der Mittelwert eines Gebietes A

$$\mathbf{m}_A f = \frac{\int_A f(\underline{X}) d\mathbf{x}}{\int_A d\mathbf{x}}$$

Die Notation mit linearen Funktionalen stellt lediglich eine verallgemeinerte Darstellung bereits vorhandener Methoden dar. So nutzt die kernfunktionsbasierte Schätzung (3.14) und (3.19) den Funktionswert als Beobachtung und Schätzgröße, das Gradientenkriging [Menz 1991], [Renard und Ruffo 1992] sowohl Funktionswerte als auch deren Ableitungen zur Schätzung von Funktionswerten und schließlich das Blockkriging [Isaaks und Srivastava 1989] Funktionswerte, um den Mittelwert eines Gebietes zu schätzen. Für eine kernfunktionsbasierte Strainanalyse, wie sie Ziel dieses Kapitels ist, wird die Schätzung nach (3.14) in allgemeinsten Form mit linearen Funktionalen formuliert, so daß alle geodätischen und geotechnischen Beobachtungen genutzt und das Verschiebungsfeld und sein Strain geschätzt werden können.

Zusätzlich zur Kovarianzfunktion $c(\mathbf{u}(\underline{X}_i), \mathbf{u}(\underline{X}_j))$ der direkten Beobachtungen des Verschiebungsfeldes müssen die Kovarianzfunktionen zwischen Beobachtungen und linearen Funktionalen $c(\mathbf{u}(\underline{X}_i), \mathcal{L}\mathbf{u}(\underline{X}_j)) = c(\mathcal{L}\mathbf{u}(\underline{X}_i), \mathbf{u}(\underline{X}_j))^t$ und zwischen den Funktionalen selbst $c(\mathcal{L}\mathbf{u}(\underline{X}_i), \mathcal{M}\mathbf{u}(\underline{X}_j))$ bekannt sein. Mit der Definition eines linearen Funktionals (3.20) und dessen Mittelwert:

$$\overline{\mathcal{L}(\mathbf{u}(\underline{X}))} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathcal{L}(\mathbf{u}(\underline{X}_i)) = \frac{1}{n} \mathcal{L} \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{u}(\underline{X}_i) \right) = \mathcal{L} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{u}(\underline{X}_i) \right) = \mathcal{L} \left(\overline{\mathbf{u}(\underline{X}_i)} \right) \quad (3.21)$$

folgt für die beiden Kovarianzfunktionen $c(\mathbf{u}(\underline{X}_i), \mathcal{L}\mathbf{u}(\underline{X}_j))$ und $c(\mathcal{L}\mathbf{u}(\underline{X}_i), \mathcal{M}\mathbf{u}(\underline{X}_j))$:

$$\begin{aligned} \text{cov}(\mathbf{u}(\underline{X}_i), \mathcal{L}(\mathbf{u}(\underline{X}_j))) &= \overline{\mathbf{u}(\underline{X}_i)\mathcal{L}(\mathbf{u}(\underline{X}_j))} - \overline{\mathbf{u}(\underline{X}_i)} \overline{\mathcal{L}(\mathbf{u}(\underline{X}_j))} \\ &= \mathcal{L} \left(\overline{\mathbf{u}(\underline{X}_i)\mathbf{u}(\underline{X}_j)} \right) - \mathcal{L} \left(\overline{\mathbf{u}(\underline{X}_i)} \overline{\mathbf{u}(\underline{X}_j)} \right) \\ &= \mathcal{L} \left(\overline{\mathbf{u}(\underline{X}_i)\mathbf{u}(\underline{X}_j)} - \overline{\mathbf{u}(\underline{X}_i)} \overline{\mathbf{u}(\underline{X}_j)} \right) \\ &= \mathcal{L} \text{cov}(\mathbf{u}(\underline{X}_i), \mathbf{u}(\underline{X}_j)) \end{aligned} \quad (3.22)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \text{cov}(\mathcal{M}\mathbf{u}(\underline{X}_i), \mathcal{L}(\mathbf{u}(\underline{X}_j))) &= \overline{\mathcal{M}(\mathbf{u}(\underline{X}_i))\mathcal{L}(\mathbf{u}(\underline{X}_j))} - \overline{\mathcal{M}(\mathbf{u}(\underline{X}_i))} \overline{\mathcal{L}(\mathbf{u}(\underline{X}_j))} \\ &= \mathcal{L}\mathcal{M} \left(\overline{\mathbf{u}(\underline{X}_i)\mathbf{u}(\underline{X}_j)} \right) - \mathcal{L}\mathcal{M} \left(\overline{\mathbf{u}(\underline{X}_i)} \overline{\mathbf{u}(\underline{X}_j)} \right) \\ &= \mathcal{L}\mathcal{M} \left(\overline{\mathbf{u}(\underline{X}_i)\mathbf{u}(\underline{X}_j)} - \overline{\mathbf{u}(\underline{X}_i)} \overline{\mathbf{u}(\underline{X}_j)} \right) \\ &= \mathcal{L}\mathcal{M} \text{cov}(\mathbf{u}(\underline{X}_i), \mathbf{u}(\underline{X}_j)) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Für die Notation einer linearen Funktion eines linearen Funktionals wird folgende Festlegung getroffen:

Festlegung 1. Das lineare Funktional \mathcal{L} einer linearen Funktion $f(\underline{X})$, das die Bedingungen (3.20) erfüllt, wird geschrieben als $f(\mathcal{L})$:

$$\mathcal{L}f(\underline{X}) = f(\mathcal{L}) \quad (3.24)$$

Festlegung 2. Eine Funktion mit zwei Unbekannten wird notiert als:

$$c(\mathcal{L}, \mathcal{M}) = \mathcal{L}_{\underline{X}} \mathcal{M}_{\underline{Y}} c(\underline{X}, \underline{Y}) \quad (3.25)$$

Die Verwendung von linearen Funktionalen im Kriginggleichungssystem bedeutet, daß das gleiche beobachtete lineare Funktional in der jeweiligen Zeile und Spalte auf die Kovarianzfunktion und auf die Trendfunktion angewendet werden muß.

3.1.3.1 Beobachtungen als lineare Funktionale

Unter der Annahme kleiner Deformationen (2.15) lassen sich geodätische und geotechnische Beobachtungen als lineare Funktionale darstellen.

Zur Verkürzung der Notation wird vereinbart:

Festlegung 3. Mit der Norm $\|\bullet\|$ sei immer die euklidische Norm gemeint:

$$\|\underline{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 v_i^2} \quad (3.26)$$

Festlegung 4. Die Länge der Projektion einer Strecke in die $\underline{x}_i - \underline{x}_j$ -Ebene wird als Teilnorm $\|\bullet\|_{ij}$ der Norm $\|\bullet\|$ definiert:

$$\|\underline{v}\|_{ij} = \sqrt{v_i^2 + v_j^2} \quad (3.27)$$

Festlegung 5. Der Vektor $\underline{\Xi}_{b,a}$ wird definiert als:

$$\underline{\Xi}_{b,a} = \begin{pmatrix} \underline{\Xi}_{b,a,1} \\ \underline{\Xi}_{b,a,2} \\ \underline{\Xi}_{b,a,3} \end{pmatrix} = \underline{X}_a - \underline{X}_b = \begin{pmatrix} X_{a,1} - X_{b,1} \\ X_{a,2} - X_{b,2} \\ X_{a,3} - X_{b,3} \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

Mit diesen Festlegung können die Beobachtung in folgender Form als lineare Funktionale beschrieben werden:

- Die Koordinatendifferenz eines Punktes \underline{X} zwischen zwei Epochen ist eine direkte Beobachtung des Verschiebungsfeldes und wird durch das Beobachtungsfunktional an der Stelle \underline{X} dargestellt:

$$\mathcal{B}_{\underline{X}}\underline{u} := \underline{u}(\underline{X}) \quad (3.29)$$

- Das Alinement ist die relative Bewegung eines Punktes \underline{X}_a senkrecht zu einer Bezugslinie zwischen zwei anderen Punkten \underline{X}_b und \underline{X}_c (s. Abb. 3.1). Das lineare Funktional lautet:

$$\mathcal{A}_{\underline{X}_a, \underline{X}_b, \underline{X}_c}\underline{u} \approx \underline{g}^T (\underline{u}(\underline{X}_a) - c_b \underline{u}(\underline{X}_b) - c_c \underline{u}(\underline{X}_c)) \quad (3.30)$$

mit

$$c_b = \frac{\|\underline{\Xi}_{0,b}\|}{\|\underline{\Xi}_{c,b}\|}, \quad c_c = \frac{\|\underline{\Xi}_{0,c}\|}{\|\underline{\Xi}_{c,b}\|} \quad (3.31)$$

Darin ist \underline{g} der Einheitsvektor senkrecht zur Bezugslinie und \underline{X}_0 der Lotfußpunkt des Lotes von \underline{X}_a auf die Bezugslinie.

- Eine Streckenänderung zwischen \underline{X}_a und \underline{X}_b wird linearisiert durch (vgl. [Baumann 1995]):

$$\mathcal{S}_{\underline{X}_a, \underline{X}_b}\underline{u} \approx \underline{b}_s (\underline{u}(\underline{X}_b) - \underline{u}(\underline{X}_a)) \quad (3.32)$$

mit

$$\underline{b}_s = \frac{\underline{\Xi}_{b,a}}{\|\underline{\Xi}_{b,a}\|} \quad (3.33)$$

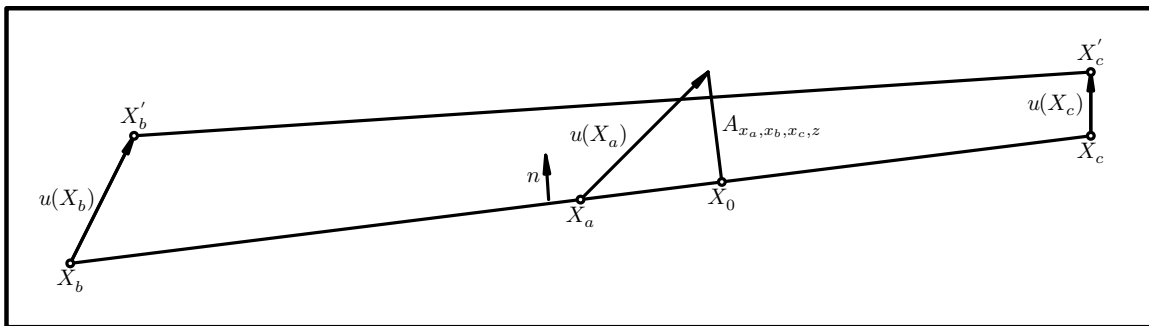


Abbildung 3.1: Alimentsbeobachtung

- Die Richtungsänderung einer Strecke zwischen zwei Punkten \underline{X}_a und \underline{X}_b ist (vgl. [Baumann 1995]):

$$\mathcal{R}_{\underline{X}_a, \underline{X}_b} \underline{u} \approx \underline{b}_t (\underline{u}(\underline{X}_b) - \underline{u}(\underline{X}_a)) \quad (3.34)$$

mit

$$\underline{b}_t = \frac{\rho \begin{pmatrix} \Xi_{b,a,2} & \Xi_{b,a,1} & 0 \end{pmatrix}^t}{\|\Xi_{b,a}\|_{12}} \quad (3.35)$$

- Die Zenitwinkeländerung einer Strecke im Raum zwischen zwei Punkten \underline{X}_a und \underline{X}_b ist (vgl. [Baumann 1995]):

$$\mathcal{Z}_{\underline{X}_a, \underline{X}_b} \underline{u} \approx \underline{b}_\zeta (\underline{u}(\underline{X}_b) - \underline{u}(\underline{X}_a)) \quad (3.36)$$

mit

$$\underline{b}_\zeta = \frac{\rho}{\|\Xi_{b,a}\|^2 \|\Xi_{b,a}\|_{12}} \begin{pmatrix} \Xi_{b,a,1} \Xi_{b,a,3} & \Xi_{b,a,2} \Xi_{b,a,3} & -\|\Xi_{b,a}\|_{12}^2 \end{pmatrix}^t \quad (3.37)$$

- Die Gradientenbeobachtungen z.B. von Meßrosen [Pielok und Pielok 2002] sind direkte Beobachtungen des Strains

$$\mathcal{G}_\underline{X} := \nabla_{\underline{X}} \underline{u}(\underline{X}) \quad (3.38)$$

3.1.3.2 Vorhersagefunktionale

Der Straintensor und seine linearen Funktionale sind lineare Funktionale des Verschiebungsfeldes. Sie können deswegen mit den angegebenen Gleichungen (3.29)–(3.38) sowohl als Daten als auch als Schätzgrößen in das Kriginggleichungssystem aufgenommen werden:

$$\hat{\underline{u}}_0 = \begin{pmatrix} \underline{c}(\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1) \\ \vdots \\ \underline{c}(\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_n) \\ \mathbf{t}_1(\mathcal{L}_0) \\ \vdots \\ \mathbf{t}_p(\mathcal{L}_0) \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \underline{c}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_1) + \mathbf{q}_{11} & \dots & \underline{c}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_n) + \mathbf{q}_{1n} & \mathbf{t}_1(\mathcal{L}_1) & \dots & \mathbf{t}_p(\mathcal{L}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underline{c}(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_1) + \mathbf{q}_{n1} & \dots & \underline{c}(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_n) + \mathbf{q}_{nn} & \mathbf{t}_1(\mathcal{L}_n) & \dots & \mathbf{t}_p(\mathcal{L}_n) \\ \mathbf{t}_1(\mathcal{L}_1) & \dots & \mathbf{t}_1(\mathcal{L}_n) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{t}_p(\mathcal{L}_1) & \dots & \mathbf{t}_p(\mathcal{L}_n) & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \underline{u}(\mathcal{L}_1) \\ \vdots \\ \underline{u}(\mathcal{L}_n) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

Mit der Gleichung (3.39) ist es möglich, alle geodätischen und geotechnischen Beobachtungen zu nutzen, die sich in geeigneter Weise linearisieren lassen, um das Verschiebungsfeld oder den Strain bzw. lineare Funktionale des Verschiebungsfeldes an einer Stelle \underline{X}_0 zu schätzen.

Im Gegensatz dazu können nichtlineare Funktionale des Verschiebungsfeldes wie die Winkelverzerrung

$$\gamma_3 = \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + (\lambda_1 - \lambda_3)^2 + (\lambda_2 - \lambda_3)^2}$$

mit diesem Verfahren nicht direkt geschätzt werden. Bei diesen Funktionalen muß erst das Verschiebungsfeld oder der Straintensor geschätzt und dann daraus das gesuchte Funktional bestimmt werden.

3.1.4 Wahl und Anpassung der Kernfunktion

3.1.4.1 Wahl der Kernfunktion

Die theoretisch große Auswahl an Kernfunktionen ist bei der Schätzung mit linearen Funktionalen eingeschränkt, da sie mindestens zweimal differenzierbar sein müssen. Deswegen können beispielsweise die sphärische und die exponentielle Kovarianzfunktion nicht verwendet werden ([Cressie 1993], [Chilés und Delfiner 1999], [Stein 1999]).

Als Kernfunktion könnten beispielsweise folgende Funktionen genutzt werden:

- Multiquadratische Kernfunktion

$$\gamma_{\text{MQM}}(\underline{\mathbf{h}}) = \sqrt{w\|\underline{\mathbf{h}}\|^2 + g^2} \text{ mit } g \neq 0 \quad (3.40)$$

- Gaußsche Kovarianzfunktion

$$\gamma_{\text{Gauss}}(\underline{\mathbf{h}}) = \mathbf{b} \cdot e^{-\left(\frac{\mathbf{h}}{\mathbf{a}}\right)^2} \quad (3.41)$$

- Maternsche Kovarianzfunktion

$$\gamma_{\text{mat}}(\underline{\mathbf{h}}) = \frac{\sigma^2}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)} \left(\frac{2\nu^{\frac{1}{2}}\|\underline{\mathbf{h}}\|}{r} \right)^{\nu} \mathcal{K}_{\nu} \left(\frac{2\nu^{\frac{1}{2}}\|\underline{\mathbf{h}}\|}{r} \right) \quad (3.42)$$

Um die Forderung (3.11) nach Minimierung der Schätzvarianz D_0^2 zu erfüllen, müssen als Kernfunktionen Kovarianzfunktionen verwendet werden. In [Stein 1999] wird die Klasse der Maternschen Kovarianzfunktionen aufgrund günstiger Eigenschaften empfohlen.

Da sich die Kovarianz an Blockgrenzen deutlich ändern kann, erscheint es sinnvoll, die Kovarianz zweier Punkte, die auf verschiedenen, vollständig getrennten Blöcken liegen, auf Null zu setzen. Bei der Verwendung von verallgemeinerten Kovarianzfunktionen als Kernfunktion ist diese Setzung nur mit Vorsicht zu verwenden, weil Untersuchungen zur Auswirkung dieser Annahme noch fehlen.

Sind die Blöcke nicht vollständig getrennt, dann sollten geeignete Kovarianzmodelle gewählt werden. Ideen dazu sind in [Brenning und van den Boogaart 2001] zu finden.

In vielen Fällen wird die Annahme der gemeinsamen Isotropie der Meßwerte (3.18) nicht zutreffen. Dann ist es sinnvoll, andere Annahmen, wie die Isotropie des Prozesses, die in [van den Boogaart und Schaeben 2002] formuliert ist, zu verwenden. Mit diesen allgemeineren Isotropieannahmen wäre es dann auch möglich, spezielle Differentialgleichungen wie die Volumenerhaltung [van den Boogaart 2001] zu erfüllen.

3.1.4.2 Anpassung der Kernfunktion

Die Schätzung des Variogramms aus trendbehafteten Daten mit Standardverfahren wie der Methode der kleinsten Quadrate führt zu einem verfälschten Variogramm [Chilés und Delfiner 1999]. Da bei der Strainanalyse im allgemeinen ein Trend vorhanden ist, ist es sinnvoll, das in [van den Boogaart und Brenning 2001] vorgestellte Verfahren zur unverfälschten Schätzung des Variogramms anzuwenden. Die Idee des Verfahrens ist es, von der Kovarianzfunktion des mit dem Trend \mathbf{T} behafteten Merkmals \mathbf{u} auf die Kovarianzfunktion des trendfreien Signals \mathbf{S} zu schließen.

Mit der Matrix $\underline{\mathbf{T}}$ der Trendfunktionen wird die Matrix $\underline{\mathbf{P}}$ definiert als:

$$\underline{\mathbf{P}} = \underline{\mathbf{1}} - \underline{\mathbf{T}}(\underline{\mathbf{T}}^t \underline{\mathbf{T}})^{-1} \underline{\mathbf{T}}^t \quad (3.43)$$

Da $\underline{\mathbf{P}} \underline{\mathbf{T}} = \underline{\mathbf{0}}$ ist, gilt:

$$\underline{\mathbf{P}} \mathbf{u} = \underline{\mathbf{P}}(\mathbf{S} + \underline{\mathbf{T}} \underline{\beta}) = \underline{\mathbf{P}} \mathbf{S} \quad (3.44)$$

Für ein beliebiges Variogramm $\gamma_\theta(\mathbf{h})$, $\theta \in \mathbb{R}^p$ ergeben sich die Parameter θ für das unverfälschte Variogramm aus der Bedingung:

$$\|\underline{\mathbf{P}} \mathbf{u} \mathbf{u}^t \underline{\mathbf{P}} - \underline{\mathbf{P}} \underline{\Gamma}(\theta) \underline{\mathbf{P}}\|^2 \Rightarrow \text{Min!} \quad (3.45)$$

zu

$$\hat{\theta} = \text{argmin}_\theta \|\underline{\mathbf{P}} \mathbf{u} \mathbf{u}^t \underline{\mathbf{P}} - \mathbb{E}[\underline{\mathbf{P}} \mathbf{u} \mathbf{u}^t \underline{\mathbf{P}}]\|^2 = \text{argmin}_\theta \|\underline{\mathbf{P}} \mathbf{u} \mathbf{u}^t \underline{\mathbf{P}} - \underline{\mathbf{P}} \underline{\Gamma}(\theta) \underline{\mathbf{P}}\|^2 \quad (3.46)$$

Darin ist $\underline{\underline{\Gamma}}(\theta)$ die aus den Variogrammen $\gamma_\theta(\underline{h})$ aufgebaute Matrix:

$$\underline{\underline{\Gamma}}(\theta) = (\gamma_\theta(\underline{X}_i - \underline{X}_j))_{i=1,\dots,n;j=1,\dots,n} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (3.47)$$

Für allgemeine Variogramme mit nichtlinearen Parametern θ ist die Schätzung nach Bedingung (3.46) problematisch, da die Hessematrix der Objektfunktion nicht immer positiv definit ist, d.h. daß mehrere lokale Minima existieren können. Deswegen ist es in diesen Fällen sinnvoll, geeignete Suchalgorithmen zu nutzen.

3.1.4.3 Modifikation der Kovarianzen durch Meßfehler

Da die Beobachtungen nicht fehlerfrei erfolgen, müssen die Genauigkeiten der Beobachtungen berücksichtigt werden. Dies wird im Kriging-Gleichungssystem dadurch erreicht, daß zur Kovarianzmatrix $\underline{\underline{C}}$ die Varianz-Kovarianzmatrix $\underline{\underline{Q}}$ der Beobachtungen addiert wird. Die Varianz-Kovarianzmatrix $\underline{\underline{Q}}$ der Verschiebungen ergibt sich als Summe der beiden Kovarianzmatrizen $\underline{\underline{Q}}_{\underline{\underline{I}}}$ und $\underline{\underline{Q}}_{\underline{\underline{II}}}$ der beiden Netzausgleichungen. Die Meßfehler der verschiedenen geotechnischen Beobachtungen sollten unkorreliert sein. Damit sind die $\mathbf{q}_{ii} = \mathbf{var}(\varepsilon_i)$ aus den Meßungenauigkeiten des Verfahrens und die $\mathbf{q}_{ij} = 0$ für $i \neq j$.

$$\underline{\underline{Q}}_{\underline{\underline{\varepsilon}}} = (\mathbf{q}_{\varepsilon,ij}) = \begin{pmatrix} \left(\sigma_{\underline{\underline{I}}}^2 \underline{\underline{Q}}_{\underline{\underline{I}}} + \sigma_{\underline{\underline{II}}}^2 \underline{\underline{Q}}_{\underline{\underline{II}}} \right) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \sigma_2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \sigma_m^2 \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

Darin bezeichnen

- $\underline{\underline{Q}}_{\underline{\underline{I}}}$ und $\underline{\underline{Q}}_{\underline{\underline{II}}}$ die $\underline{\underline{Q}}$ -Matrizen der geodätischen Netze der ersten und zweiten Epoche,
- $\sigma_{\underline{\underline{I}}}^2$ und $\sigma_{\underline{\underline{II}}}^2$ die Standardabweichungen der Meßfehler der beiden Epochen und
- σ_i^2 die Standardabweichungen der Meßfehler der i -ten geotechnischen Beobachtung.

3.1.4.4 Einfluß durch ungenau gegebene Meßorte auf die Kovarianzmatrix

Im Gegensatz zu geodätischen Beobachtungen ist der exakte Meßort der geotechnischen Beobachtungen unter Umständen nicht genau bekannt, da die geotechnischen Instrumente oftmals im

Gebäude oder im Gebirge verbaut sind und damit einer direkten exakten Positionsbestimmung nicht zugänglich sind. Diese Differenz $\Delta \underline{\mathbf{s}}$ zwischen dem tatsächlichen und dem angenommenen Meßort wirkt wie ein zusätzlicher Meßfehler für die Strainschätzung.

Nach [van den Boogaart und Drobniowski 2002a] beträgt die Fehlerstreuung eines um den Vektor $\Delta \underline{\mathbf{s}}$ verschobenen Funktionals:

$$\text{var}(\mathcal{L}\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{X}}) - \mathcal{L}\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{X}} + \Delta \underline{\mathbf{s}})) = \mathbf{c}(\mathcal{L}, \mathcal{L}) + \mathbf{c}(\mathcal{L} + \Delta \underline{\mathbf{s}}, \mathcal{L} + \Delta \underline{\mathbf{s}}) - \mathbf{c}(\mathcal{L} + \Delta \underline{\mathbf{s}}, \mathcal{L}) - \mathbf{c}(\mathcal{L}, \mathcal{L} + \Delta \underline{\mathbf{s}}) \quad (3.49)$$

Darin bezeichnen $\mathcal{L} + \Delta \underline{\mathbf{s}}$ das um $\Delta \underline{\mathbf{s}}$ verschobene lineare Differential. Wegen der Differenzierbarkeit und der Symmetrie der Kovarianzfunktion $\mathbf{c}(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}})$ ist:

$$\nabla_{\underline{\mathbf{x}}}\mathbf{c}(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{y}}) = 0 \text{ in } \underline{\mathbf{x}} \text{ und } \underline{\mathbf{y}} \quad (3.50)$$

Deswegen gilt:

$$\mathbf{c}(\mathcal{L} + \Delta \underline{\mathbf{s}}, \mathcal{L}) = \mathbf{c}(\mathcal{L}, \mathcal{L}) + \mathbf{o}(\|\Delta \underline{\mathbf{s}}\|^2) \quad (3.51)$$

Darin ist $\mathbf{o}(\|\Delta \underline{\mathbf{s}}\|^2)$ das Restglied. Es strebt deutlich schneller gegen Null als die Kovarianzfunktion $\mathbf{c}(\mathcal{L}, \mathcal{L})$ selbst.

Mit Gleichung (3.51) kann Gleichung (3.49) umgeformt werden:

$$\begin{aligned} \text{var}(\mathcal{L}\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{X}}) - \mathcal{L}\underline{\mathbf{u}}(\underline{\mathbf{X}} + \Delta \underline{\mathbf{s}})) &= \mathbf{c}(\mathcal{L}, \mathcal{L}) + \mathbf{c}(\mathcal{L} + \Delta \underline{\mathbf{s}}, \mathcal{L} + \Delta \underline{\mathbf{s}}) - \mathbf{c}(\mathcal{L} + \Delta \underline{\mathbf{s}}, \mathcal{L}) - \mathbf{c}(\mathcal{L}, \mathcal{L} + \Delta \underline{\mathbf{s}}) \\ &= 2\mathbf{c}(\mathcal{L}, \mathcal{L}) - \mathbf{c}(\mathcal{L} + \Delta \underline{\mathbf{s}}, \mathcal{L}) - \mathbf{c}(\mathcal{L}, \mathcal{L} + \Delta \underline{\mathbf{s}}) \\ &= 2\mathbf{c}(\mathcal{L}, \mathcal{L}) - (2\mathbf{c}(\mathcal{L}, \mathcal{L}) - \mathbf{o}(\|\Delta \underline{\mathbf{s}}\|^2)) \\ &= \mathbf{o}(\|\Delta \underline{\mathbf{s}}\|^2) \end{aligned} \quad (3.52)$$

Deswegen können die Lageunsicherheiten dann vernachlässigt werden, wenn sie klein sind im Vergleich zur Reichweite der Kovarianzfunktion. Da bei der Strainanalyse geologischer Kontinua davon ausgegangen werden kann, daß die Reichweite im Bereich mehrerer Meter liegt und die Lageunsicherheiten höchstens im Bereich mehrerer Zentimeter, braucht die Kovarianzmatrix aufgrund von Lageunsicherheiten im allgemeinen nicht geändert zu werden. Sollten die Lageunsicherheiten so groß sein, daß sie nicht mehr diesen Annahmen entsprechen, dann können die Lageunsicherheiten als zusätzliche Meßfehler zu den Hauptdiagonalwerten der Kovarianzmatrix $\underline{\underline{\mathbf{C}}}$ addiert werden.

Da die Parameter des Trendmodells, wie in der Ausgleichung üblich, aus Näherungswerten berechnet werden, können auch für den Trendanteil die Lageunsicherheiten vernachlässigt werden, sofern die Parameter nicht wesentlich verändert werden.

Zur Abschätzung ob im konkreten Anwendungsfall die Lageunsicherheiten beachtet werden sollten, kann beispielsweise ein aus dem Störungslemma abgeleiteter Störungssatz [Werner 1992] herangezogen werden:

$$\frac{\|\delta\lambda\|}{\|\lambda\|} \leq \frac{\kappa(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) \cdot \|\delta\underline{\underline{\mathbf{A}}}\|}{\|\underline{\underline{\mathbf{A}}}\| - \kappa(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) \cdot \|\delta\underline{\underline{\mathbf{A}}}\|} \quad (3.53)$$

mit

$$\kappa(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) = \|\underline{\underline{\mathbf{A}}}\| \|\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}\| \quad (3.54)$$

der Kondition der Matrix $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ bezüglich der Norm $\|\bullet\|$ für eine nichtsinguläre Matrix $\underline{\underline{\mathbf{A}}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Worin $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ hier die erweiterte Kovarianzmatrix des Kriginggleichungssystem (3.16) ist:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{C}}} + \underline{\underline{\mathbf{Q}}} & \underline{\underline{\mathbf{I}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{I}}}^t & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

und der Quotient $\|\delta\lambda\|/\|\lambda\|$ das Verhältnis der Änderung des Unbekanntenvektors des Kriginggleichungssystems $\delta\lambda$ zum Unbekanntenvektor λ selbst angibt. Für kleine Störungen ist dieser Quotient nahe Null. Ist der Koeffizient relativ groß, dann sollte mit der um die zusätzlichen Fehler erweiterten Kovarianzmatrix gearbeitet werden.

3.2 Trendmodell

Ziel der Trendmodellierung ist es, den systematischen Zusammenhang zwischen dem beobachteten Merkmal und geeigneten Parametern so zu beschreiben, daß die Residuen zwischen Modell und Beobachtungen ein Zufallsfeld mit einer Stationarität 2. Ordnung bilden. Ist der systematische Zusammenhang zwischen Beobachtungsorten und den Beobachtungen bekannt, dann kann der Trend unabhängig vom Kriging bestimmt und vor dem Strainkriging von den Beobachtungen abgespaltet werden. Dies ist besonders bei komplizierten und in den Parametern β_i nichtlinearen Trendmodellen sinnvoll bzw. die einzige Möglichkeit, den Trend zu berücksichtigen. So können Bodenbewegungen und -deformationen über untertägigem Abbau aus der Trogtheorie näherungsweise bestimmt werden. In vielen Fällen wird der funktionale Zusammenhang jedoch unbekannt sein. Als Trendmodell wird dann häufig ein polynomiales Modell $\mathbf{u}_i(\underline{\mathbf{X}}_v) = \sum_{\mu=0}^p \beta_\mu \mathbf{X}_{v,i}^\mu$ mit $i = 1, 2, 3$ verwendet. Die Verwendung eines globalen Strainmodells für den Gesamtkörper entspricht einem polynomiales Modell 1. Ordnung und bei Beachtung

der Krümmung einem polynomialen Modell 2. Ordnung (s. Abschnitt 3.2.2). Wird das Trendmodell nicht auf Polynome beschränkt, sondern beliebige Trendfunktionen $\mathbf{t}_j(\mathbf{X}_{\nu,i})$ zugelassen, dann erhält man ein universelles Trendmodell, daß dem jeweiligen Anwendungsfall angepaßt werden kann. Die grundsätzliche Entscheidung ist dabei, ob der konkrete Satz Trendfunktionen überhaupt ein sinnvolles Modell darstellt oder ob er noch optimiert werden kann. Sowohl die Bestimmung eines geeigneten Trendmodells als auch die Schätzung der Parameter der einzelnen Trendfunktionen ist Gegenstand der Regressionsanalyse. Ausführliche Darstellungen zur Regressionsanalyse sind beispielsweise in [Chilés und Delfiner 1999], [Niemeyer 2001] und [Krzyszowski 1998] zu finden. Die grundsätzlichen Überlegungen sind im folgenden Abschnitt dargestellt.

Prinzipiell kann das durch eine Regression aufgestellte Modell von den Beobachtungen abgezogen werden und nur die Residuen im Kriging verwendet werden. Beim Universellen Kriging lassen sich die Kriginggewichte auch ohne Kenntnis der Trendparameter über das Kriging-Gleichungssystem bestimmen, so wie es in den Formeln (3.14), (3.19) und (3.39) dargestellt ist.

3.2.1 Universelles Trendmodell

3.2.1.1 Definition und Anpassung

Durch ein allgemeines, in seinen Parametern β_μ lineares Regressionsmodell wird das Merkmal $\underline{\mathbf{u}}$ an der Stelle \mathbf{X}_ν durch μ Regressionsfunktionen \mathbf{t}_μ mit $\mu = 1, \dots, m$ beschrieben:

$$\mathbf{u}_i(\mathbf{X}_\nu) = \beta_0 + \beta_1 \mathbf{t}_{1,i}(\mathbf{X}_\nu) + \beta_2 \mathbf{t}_{2,i}(\mathbf{X}_\nu) + \dots + \beta_p \mathbf{t}_{p,i}(\mathbf{X}_\nu) + \varepsilon_i \quad (3.56)$$

Im allgemeinen wird eine Hilfsfunktion $\mathbf{t}_0(\mathbf{X}_\nu) = 1 \quad \forall \nu$ eingeführt, so daß 3.56 geschrieben werden kann als:

$$\mathbf{u}_i(\mathbf{X}_\nu) = \sum_{\mu=0}^m \beta_\mu \mathbf{t}_{\mu,i}(\mathbf{X}_\nu) \quad (3.57)$$

Sind neben dem Merkmal $\underline{\mathbf{u}}$ selbst lineare Funktionale $\underline{\mathbf{u}}(\mathcal{L})$ dieses Merkmals beobachtet worden, dann folgt aus 3.57:

$$\mathbf{u}_i(\mathcal{L}_\nu) = \mathbf{u}_i(\mathcal{L}(\mathbf{X}_\nu)) = \sum_{\mu=1}^m \beta_\mu \mathbf{t}_{\mu,i}(\mathcal{L}_\nu) = \sum_{\mu=1}^m \beta_\mu \mathbf{t}_{\mu,i}(\mathcal{L}(\mathbf{X}_\nu)) \quad (3.58)$$

Die Gewichte β_μ der Trendfunktionen \mathbf{t}_μ werden durch Ausgleichung bestimmt:

$$\hat{\underline{\beta}} = (\underline{\mathbf{T}}^t \underline{\mathbf{P}} \underline{\mathbf{T}})^{-1} \underline{\mathbf{T}}^t \underline{\mathbf{P}} \underline{\mathbf{u}}(\mathcal{L}) \quad (3.59)$$

Darin sind:

- $\underline{\underline{\mathbf{T}}} = (\mathbf{t}_\mu(\mathcal{L}_\nu))_{n \times m}$ die Trendfunktionsmatrix mit $\mu = 1, \dots, m$ Trendfunktionen und $\nu = 1, \dots, n$ Beobachtungen des Merkmals und
- $\underline{\underline{\mathbf{P}}} = \underline{\underline{\mathbf{Q}}}^{-1}$ die Inverse der Varianz-Kovarianzmatrix der Beobachtungen.

3.2.1.2 Beurteilung des Modells

Nach der Entscheidung für einen konkreten Satz Trendfunktionen und der Bestimmung ihrer Parameter kann geprüft werden:

- wie gut das Trendmodell zu den Daten paßt und
- ob das Modell durch Hinzunahme zusätzlicher oder Weglassen überflüssiger Trendfunktion verbessert werden kann.

Als Maß für die Gesamtvariation kann nach [Niemeyer 2001] die Größe $S_{\underline{\underline{\mathbf{u}}}}$ verwendet werden:

$$S_{\underline{\underline{\mathbf{u}}}} = \underline{\underline{\mathbf{u}}}(\mathcal{L})^t \underline{\underline{\mathbf{P}}} \underline{\underline{\mathbf{u}}}(\mathcal{L}) \quad (3.60)$$

Sie kann zerlegt werden in einen Modellanteil $S_{\underline{\underline{\mathbf{M}}}}$ und einen Anteil der Residuen $S_{\underline{\underline{\mathbf{v}}}}$:

$$S_{\underline{\underline{\mathbf{u}}}} = S_{\underline{\underline{\mathbf{M}}}} + S_{\underline{\underline{\mathbf{v}}}} \quad (3.61)$$

Der Modellanteil wird beschrieben durch

$$S_{\underline{\underline{\mathbf{M}}}} = \hat{\underline{\underline{\boldsymbol{\beta}}}}^t \underline{\underline{\mathbf{T}}}^t \underline{\underline{\mathbf{P}}} \underline{\underline{\mathbf{T}}} \hat{\underline{\underline{\boldsymbol{\beta}}}} \quad (3.62)$$

und den Anteil der Residuen als Summe der Quadrate der Verbesserungen

$$S_{\underline{\underline{\mathbf{v}}}} = S_{\underline{\underline{\mathbf{u}}}} - S_{\underline{\underline{\mathbf{M}}}} = \underline{\underline{\mathbf{v}}}^t \underline{\underline{\mathbf{P}}} \underline{\underline{\mathbf{v}}} \quad (3.63)$$

Mit diesen Größen läßt sich der Regressionskoeffizient zwischen Beobachtungen und Unbekannten berechnen und der Globaltest des Trendmodells und ein Test auf Signifikanz einzelner Parameter aufstellen. Für die Darstellung der Tests ist eine Anordnung ähnlich einer ANOVA-Tabelle (ANOVA = **analysis of variation**) sinnvoll (vgl. [Krzanowski 1998]).

Der Regressionskoeffizient ρ zwischen Beobachtungen und Unbekannten läßt sich berechnen aus:

$$0 < \rho = \frac{S_{\underline{\underline{\mathbf{M}}}}}{S_{\underline{\underline{\mathbf{M}}}} + S_{\underline{\underline{\mathbf{v}}}}} < 1 \quad (3.64)$$

Wäre der Regressionskoeffizient gleich Eins, so würden alle Beobachtungen vollständig durch das Trendmodell beschrieben. Aufgrund des Meßrauschens wird der Regressionskoeffizient aber immer kleiner Eins sein. Je kleiner ρ wird, desto dringender ist die Frage, ob das Trendmodell überhaupt geeignet ist, die Beobachtungen zu beschreiben, da für $\rho = 0$ keinerlei Zusammenhang zwischen Beobachtungen und Trendmodell erkennbar wäre. Das bedeutet, daß die Signifikanz der Regressionsparameter zu prüfen ist.

Der Globaltest des Regressionsmodells prüft die Nullhypothese:

$$H_0 : \hat{\beta}_1 = \hat{\beta}_2 = \dots = \hat{\beta}_m = 0 \quad (3.65)$$

und die Alternativhypothese:

$$H_a : \text{mindestens ein } \hat{\beta}_\mu \neq 0 \quad \mu = 1, \dots, m \quad (3.66)$$

Nach [Niemeyer 2001] lautet der zugehörige Test:

$$P \left\{ F^* = \frac{S_M}{m \cdot \hat{\sigma}_0^2} = \frac{M_M}{M_v} > F_{m, n-m-1, 1-\alpha} \mid H_0 \right\} = \alpha \quad (3.67)$$

mit

$$\begin{aligned} M_M &= \frac{S_M}{m} \\ M_v &= \frac{S_v}{n-m-1} \end{aligned} \quad (3.68)$$

und geordnet in Form einer ANOVA-Tabelle:

Anteil	Quadratsumme	Freiheitsgrade	Mittlere Quadratsumme	Testgröße	Wert der F-Verteilung
Modell	S_M	m	$M_M = \frac{S_M}{m}$	$F^* = \frac{M_M}{M_v}$	$F_{m, n-m-1, 1-\alpha}$
Residuen	S_v	$n-m-1$	$M_v = \frac{S_v}{n-m-1}$		

Tabelle 3.1: ANOVA-Tabelle für den Globaltest eines Modells

Überschreitet F^* den zugehörigen Wert der F-Verteilung $F_{m, n-m-1, 1-\alpha}$ für ein gewähltes Signifikanzniveau $1 - \alpha$, so ist die Nullhypothese abzulehnen. Das bedeutet: Mindestens eine Trendfunktion ist sinnvoll zur Beschreibung des beobachteten Merkmals. Es bedeutet aber auch, daß unter den Regressionsvariablen eine oder mehrere sein können, die entweder keinen

oder nur einen sehr geringen Anteil an der Beschreibung des Merkmals \mathbf{u} haben. Um diejenige Kombination von Parametern zu wählen, die ein möglichst einfaches, aber dennoch zutreffendes Trendmodell darstellen, kann getestet werden, welchen Nutzen die Integration einzelner Trendfunktionen $\mathbf{t}_{q+1}(\mathcal{L}), \dots, \mathbf{t}_m(\mathcal{L})$ bringt, wenn bereits die Trendfunktionen $\mathbf{t}_1(\mathcal{L}), \dots, \mathbf{t}_q(\mathcal{L})$ im Modell enthalten sind.

Dazu werden für den vollständigen Satz mit m Trendfunktionen und für den reduzierten Satz mit q Trendfunktionen die Modellanteile an der jeweiligen Gesamtvariation $S_{\underline{M},\text{voll}}$ bzw. $S_{\underline{M},\text{red}}$ berechnet. Die Nullhypothese für den Test, ob die zusätzlichen Trendfunktionen des vollständigen Satzes nötig sind, lautet:

$$H_0 : \hat{\beta}_{q+1} = \hat{\beta}_{q+2} = \dots = \hat{\beta}_m = 0 \quad \text{mit } 1 < q < m \quad (3.69)$$

und die zugehörige Alternativhypothese:

$$H_a : \text{mindestens ein } \hat{\beta}_\mu \neq 0 \quad \mu = q + 1, \dots, p \quad (3.70)$$

Wird die Nullhypothese nicht abgelehnt, dann bedarf es für eine sinnvolle Beschreibung des Trendmodells nicht der Trendfunktionen $\mathbf{t}_{q+1}(\mathcal{L}), \dots, \mathbf{t}_p(\mathcal{L})$. Um die Nullhypothese gegen die Alternativhypothese zu testen, gilt:

$$P \left\{ F^* = \frac{(M_{\underline{M},\text{voll}} - M_{\underline{M},\text{red}})}{M_{\underline{y},\text{voll}}} > F_{m-q, n-m-1, 1-\alpha} \mid H_0 \right\} = \alpha \quad (3.71)$$

Auch dieser Test läßt sich in Form einer ANOVA-Tabelle darstellen, in der gleichzeitig der Globaltest des vollständigen Modelles enthalten sein kann:

Anteil	Quadrat-Summe	Freiheits-grade	Mittlere Quadratsumme	Test-größe	Wert der F-Verteilung
vollst. Modell	$S_{\underline{M},\text{voll}}$	m	$M_{\underline{M},\text{voll}} = \frac{S_{\underline{M},\text{voll}}}{m}$	$F^* = \frac{M_{\underline{M},\text{voll}}}{M_{\underline{y},\text{voll}}}$	$F_{m, n-m-1, 1-\alpha}$
reduz. Modell	$S_{\underline{M},\text{red}}$	q	$M_{\underline{M},\text{red}} = \frac{S_{\underline{M},\text{red}}}{q}$		
Differenz	$S_{\underline{M},\Delta} = S_{\underline{M},\text{voll}} - S_{\underline{M},\text{red}}$	$m - q$	$M_{\underline{M},\Delta} = \frac{S_{\underline{M},\Delta}}{m-q}$	$F^* = \frac{M_{\underline{M},\Delta}}{M_{\underline{y},\text{voll}}}$	$F_{m-q, n-m-1, 1-\alpha}$
Residuen	$S_{\underline{y},\text{voll}}$	$n - m - 1$	$M_{\underline{y},\text{voll}} = \frac{S_{\underline{y},\text{voll}}}{n-m-1}$		

Tabelle 3.2: ANOVA-Tabelle für den Vergleich zweier Modelle

3.2.2 Strain-Trendmodell

Ist es in einem Gebiet zu Verschiebungen gekommen, wird das Trendmodell den globalen Strain eines homogenen Bereiches beschreiben. Das heißt, daß das Trendmodell aus Gleichung (2.6) resultiert. Die Parameter d_i , f_{ij} und k_{ijk} des Verschiebungsfeldes \underline{u} sind dann entsprechend Abschnitt 3.2.1 die Regressionsparameter und werden durch Ausgleichung bestimmt.

Natürlich ist es nicht immer erforderlich, daß alle Elemente bestimmt werden. So sind beispielsweise zur Beschreibung einer reinen Starrkörperbewegung der Translationsvektor und der Rotationstensor ausreichend. Durch Einschränkungen des Gesamtmodells lassen sich 6 Stufen unterscheiden:

- keine Bewegung
- Translation
- Starrkörperbewegung, d.h. Translation + Rotation
- "Starrkörper"-bewegung mit einem Maßstabsfaktor
- Strain (ohne Krümmung)
- Strain mit Krümmung

Stufe	Beschreibung	Translation	Tensor der 1.Ableitungen	Tensor der 2.Ableitungen
O	keine Bewegung	$d_i = 0$	$f_{ij} = 0$	$k_{ijk} = 0$
I	Translation	$d_i \neq 0$	$f_{ij} = 0$	$k_{ijk} = 0$
II	Starrkörperbewegung	$d_i \neq 0$	$f_{ii} = 0$ $f_{ij} = -f_{ji} \neq 0$	$k_{ijk} = 0$
III	Starrkörperbewegung mit 1 Maßstab	$d_i \neq 0$	$f_{ii} = f_{jj} \neq 0$ $f_{ij} = -f_{ji} \neq 0$	$k_{ijk} = 0$
IV	Strain	$d_i \neq 0$	$f_{ij} \neq 0$	$k_{ijk} = 0$
V	Strain mit Krümmung	$d_i \neq 0$	$f_{ij} \neq 0$	$k_{ijk} \neq 0$

Tabelle 3.3: 6-Stufen-Modell der Strain-Trendmodelle

Diese Stufen mit ihren jeweiligen Einschränkungen sind in Tabelle 3.3 aufgelistet. Das Modell der Stufe 0 ist streng genommen kein Trendmodell im Sinne der Regressionsanalyse, da es keinen einzigen Parameter besitzt. Erweist sich keins der höheren Modelle als erforderlich, dann ist kein Trend vorhanden und es wird das Trendmodell der Stufe 0 verwendet. Allerdings sollte dann im geodätischen Anwendungsfall das Ergebnis der Deformationsanalyse überprüft werden, denn wenn kein einziger Parameter signifikant von Null verschieden ist, sind weder eine globale Starrkörperbewegungen noch eine globale Deformationen vorhanden. Das bedeutet aber, daß kein Verschiebungsfeld vorhanden ist und damit die Strainanalyse überflüssig ist bzw. lediglich die Beobachtungsfehler modelliert werden.

Für die Schätzung der Regressionsparameter des Strainmodells durch Ausgleichung stehen sowohl absolute Koordinatenänderungen als auch relative Winkel- und Streckenmessungen als Beobachtungen eines aus mehreren Blöcken bestehenden Objektes zur Verfügung. Dies entspricht formal einer Vermischung der in [Welsch 1984] bzw. [Funcke 1984] dargestellten „x-Methode“ und „l-Methode“.

Durch Ausgleichung sollen die Unbekannten $\underline{\beta}$:

$$\underline{\beta} = \left(\underline{d}_i \quad f_{ij} \quad k_{ijk} \right)^t \quad \text{mit } i, j, k \in 1, 2, 3 \quad (3.72)$$

des Systems (2.7) bestimmt werden.

Der Beobachtungsvektor $\underline{l} = \underline{u}(\mathcal{L})$ entspricht dem Stützwertvektor und setzt sich zusammen aus:

- dem Vektor der absoluten Koordinatenänderungen $\underline{\mathcal{B}}$,
- den Alignementsbeobachtungen $\underline{\mathcal{A}}$,
- dem Vektor der relativen Streckenänderungen $\underline{\mathcal{S}}$,
- dem Vektor der Richtungswinkeländerungen $\underline{\mathcal{R}}$,
- dem Vektor der Zenitwinkeländerungen $\underline{\mathcal{Z}}$ und
- den Gradienten $\underline{\mathcal{G}}$:

$$\underline{l} = \left(\underline{\mathcal{B}}^t \quad \underline{\mathcal{A}}^t \quad \underline{\mathcal{S}}^t \quad \underline{\mathcal{R}}^t \quad \underline{\mathcal{Z}}^t \quad \underline{\mathcal{G}}^t \right)^t \quad (3.73)$$

Mit der Koeffizientenmatrix $\underline{\underline{T}}$ und dem Vektor der Verbesserungen \underline{v} lautet der übliche Ausgleichungsansatz der Methode der kleinsten Quadrate :

$$\underline{u}(\mathcal{L}) = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\beta} - \underline{v} \quad (3.74)$$

Voraussetzung der Ausgleichung ist ein geeignetes integriertes Modell des Objektes. Zur Modellierung werden sowohl die geodätischen als auch die geotechnischen Daten sowie geologische Strukturinformationen genutzt. Ziel der Modellierung ist ein Block-Modell, daß die Deformation des Gesamtkörpers durch Zerlegung des Gesamtkörpers in Teilkörper so beschreibt, daß die entstehenden Teilkörper Homogenbereiche sind.

3.2.2.1 Beschreibung des Modells

Ein Gesamtkörper bestehe aus mehreren Blöcken (Kontinua). Jeder einzelne Block ist einer lokalen Deformation unterworfen. Damit wirken für jeden einzelnen Block die Deformationsparameter entsprechend des gewählten Strainmodells (vgl. Tab. 3.3). Unter der Annahme, daß es keine nichtmodellerte Deformation innerhalb der Blöcke gibt, müssen sowohl die Differenzen der Punkte als auch die Relativmessungen aus diesem Modell resultieren. Die globalen Koordinaten $\underline{X}_{\mu\nu}^G$ eines Punktes $\underline{P}_{\mu,\nu}$ in der Ausgangsepoche lassen sich darstellen als Summe der Schwerpunktkoordinaten \underline{X}_μ des Blockes μ , auf dem sich dieser Punkt befindet, und den lokalen Koordinaten $\underline{X}_{\mu\nu}$ dieses Punktes $\underline{P}_{\mu,\nu}$ bezogen auf den Schwerpunkt des Blockes μ :

$$\underline{X}_{\mu\nu}^G = \underline{X}_\mu + \underline{X}_{\mu\nu} \quad (3.75)$$

Nach Gleichung (2.7) lauten die transformierten globalen Koordinaten $\underline{X}'_{\mu\nu}{}^G$:

$$\begin{aligned} \underline{X}'_{\mu\nu,i}{}^G &= \underline{X}'_{\mu,i} + \underline{X}'_{\mu\nu,i} = \underline{X}_{\mu,i} + \underline{X}_{\mu\nu,i} + \underline{u}_i(\underline{X}_{\mu\nu}) \\ &= \underline{X}_{\mu,i} + \underline{X}_{\mu\nu,i} + \underline{d}_{\mu,i} + \sum_{j=1}^3 f_{\mu,ij} \underline{X}_{\mu\nu,j} + \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 k_{\mu,ijk} \underline{X}_{\mu\nu,j} \underline{X}_{\mu\nu,k} \end{aligned} \quad (3.76)$$

darin sind:

- \underline{X}_μ die Schwerpunktkoordinaten des Blockes μ auf dem $\underline{P}_{\mu,\nu}$ liegt
- $\underline{X}_{\mu\nu}$ die Koordinaten des Punktes $\underline{P}_{\mu,\nu}$ bezüglich des Schwerpunktes \underline{X}_μ
- \underline{d}_μ die Translation des Blockes μ
- f_μ der Tensor der 1. Ableitungen des Verschiebungsfeldes des Blockes μ
- k_μ der Tensor der 2. Ableitungen des Verschiebungsfeldes des Blockes μ

Die ursprünglichen Beobachtungsgleichungen für die Elemente des Beobachtungsvektors $\underline{u}(\mathcal{L})$ folgen aus den linearen Funktionalen (3.29)–(3.38) mit den Koordinatengleichungen der 1. Epoche (3.75) und der 2. Epoche (3.76):

1. die Koordinatendifferenz eines Punktes $\underline{P}_{\mu,\nu}$:

$$\mathcal{B}_{\mu\nu,i} = \mathcal{B}_{\underline{X}\underline{u}_i} = \underline{d}_{\mu,i} + \sum_{j=1}^3 f_{\mu,ij} X_{\mu\nu,j} + \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 k_{\mu,ijk} X_{\mu\nu,j} X_{\mu\nu,k} \quad (3.77)$$

2. die Alignementsbeobachtung des Punktes $\underline{P}_{\mu,\nu}$, also die Projektion der Koordinatendifferenz des Punktes $\underline{P}_{\mu,\nu}$ auf den Vektor \underline{g} , wobei \underline{g} der Einheitsvektor senkrecht zur der Beobachtungslinie $\underline{P}_A \underline{P}_E$ ist und \underline{c}_b und \underline{c}_c die Konstanten nach Gleichung (3.31):

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\mu\nu} = \mathcal{A}_{\underline{X}_a, \underline{X}_b, \underline{X}_c} \underline{z} = \sum_{i=1}^3 g_i & \left(\underline{d}_{\mu,i} + \sum_{j=1}^3 f_{\mu,ij} X_{\mu\nu,j} + \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 k_{\mu,ijk} X_{\mu\nu,j} X_{\mu\nu,k} \right. \\ & - \underline{c}_b \left(\underline{d}_{\kappa,i} + \sum_{j=1}^3 f_{\kappa,ij} X_{\kappa\lambda,j} + \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 k_{\kappa,ijk} X_{\kappa\lambda,j} X_{\kappa\lambda,k} \right) \\ & \left. - \underline{c}_c \left(\underline{d}_{\rho,i} + \sum_{j=1}^3 f_{\rho,ij} X_{\rho\pi,j} + \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 k_{\rho,ijk} X_{\rho\pi,j} X_{\rho\pi,k} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.78)$$

3. die Änderung einer Strecke zwischen Punkten $\underline{X}_{\mu\nu}$ und $\underline{X}_{\kappa\lambda}$ mit $\underline{b}_{s,i}$ nach Gleichung (3.33):

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\mu\nu,\kappa\lambda} = \mathcal{E}_{\underline{X}_a, \underline{X}_b} \underline{u} = \sum_{i=1}^3 b_{s,i} & \left(\underline{d}_{\mu,i} + \sum_{j=1}^3 f_{\mu,ij} X_{\mu\nu,j} + \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 k_{\mu,ijk} X_{\mu\nu,j} X_{\mu\nu,k} \right. \\ & \left. - \underline{d}_{\kappa,i} - \sum_{j=1}^3 f_{\kappa,ij} X_{\kappa\lambda,j} - \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 k_{\kappa,ijk} X_{\kappa\lambda,j} X_{\kappa\lambda,k} \right) \end{aligned} \quad (3.79)$$

4. die Änderung des Richtungswinkels zwischen den Punkten $\underline{P}_{\mu,\nu}$ und $\underline{P}_{\kappa,\lambda}$ mit $\underline{b}_{t,i}$ nach Gleichung (3.35):

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\mu\nu,\kappa\lambda} = \mathcal{R}_{\underline{X}_a, \underline{X}_b} \underline{u} = \sum_{i=1}^3 b_{t,i} & \left(\underline{d}_{\mu,i} + \sum_{j=1}^3 f_{\mu,ij} X_{\mu\nu,j} + \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 k_{\mu,ijk} X_{\mu\nu,j} X_{\mu\nu,k} \right. \\ & \left. - \underline{d}_{\kappa,i} - \sum_{j=1}^3 f_{\kappa,ij} X_{\kappa\lambda,j} - \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 k_{\kappa,ijk} X_{\kappa\lambda,j} X_{\kappa\lambda,k} \right) \end{aligned} \quad (3.80)$$

5. die Änderung des Zenitwinkels zwischen den Punkten $\underline{P}_{\mu,\nu}$ und $\underline{P}_{\kappa,\lambda}$ mit $\underline{b}_{\zeta,i}$ nach Gleichung (3.37):

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{\mu\nu,\kappa\lambda} = \mathcal{I}_{\underline{X}_a, \underline{X}_b} \underline{u} = \sum_{i=1}^3 b_{\zeta,i} & \left(\underline{d}_{\mu,i} + \sum_{j=1}^3 f_{\mu,ij} X_{\mu\nu,j} + \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 k_{\mu,ijk} X_{\mu\nu,j} X_{\mu\nu,k} \right. \\ & \left. - \underline{d}_{\kappa,i} - \sum_{j=1}^3 f_{\kappa,ij} X_{\kappa\lambda,j} - \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 k_{\kappa,ijk} X_{\kappa\lambda,j} X_{\kappa\lambda,k} \right) \end{aligned} \quad (3.81)$$

6. die Beobachtung mit Meßrosen [Pielok und Pielok 2002] liefert nach Auflösung des Gleichungssystems (2.27) direkte Beobachtungen der Strainkomponenten. Damit sind die gemessenen Gradienten am Punkt $\underline{P}_{\mu,\nu}$ trivial:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\mu,ii} &= f_{\mu,ii} \quad \text{mit } i = \{1, 2, 3\} \\ \mathcal{G}_{\mu,ij} &= \frac{1}{2} \cdot (f_{\mu,ij} + f_{\mu,ji}) \quad \text{mit } i, j = \{1, 2, 3\} \quad \forall i < j \end{aligned} \quad (3.82)$$

Der Unbekanntenvektor $\underline{\beta}$ setzt sich zusammen aus den n Subvektoren $\underline{\beta}_{\mu}$ der lokalen Parameter für n Blöcke:

$$\underline{\beta}_{\mu} = \left(\underline{d}_{\mu,i} \quad \underline{f}_{\mu,ij} \quad k_{\mu,ijk} \right)^t \quad \text{mit } i, j, k \in 1, 2, 3 \quad (3.83)$$

Die Elemente der Koeffizientenmatrix \underline{A} ergeben sich aus den linearen Beobachtungsgleichungen unter Beachtung ihrer Lage bezüglich der Homogenbereiche:

$$\underline{I} = \left(\underline{B} \quad \underline{A} \quad \underline{S} \quad \underline{R} \quad \underline{Z} \quad \underline{G} \right)^t \quad (3.84)$$

Da mindestens die verschiedenen Beobachtungstypen verschiedene a-priori-Standardabweichungen haben, muß eine Gewichtung der Beobachtungen vorgenommen werden. Sinnvollerweise wird als Gewichtsmatrix die Kovarianzmatrix der Meßfehler \underline{Q}^{-1} aus (3.48) verwendet. Mit der Koeffizientenmatrix \underline{I} , dem Beobachtungsvektor \underline{l} und der Gewichtsmatrix \underline{Q}^{-1} ergibt sich der Unbekanntenvektor aus:

$$\hat{\underline{\beta}} = \left(\underline{I}^t \underline{Q}^{-1} \underline{I} \right)^{-1} \underline{I}^t \underline{Q}^{-1} \underline{u}(\mathcal{L}) \quad (3.85)$$

und die Standardabweichung a posteriori aus:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\underline{v}^t \underline{Q}^{-1} \underline{v}}{n - u} \quad \text{mit } \underline{v} = \underline{I} \hat{\underline{\beta}} - \underline{u}(\mathcal{L}) \quad (3.86)$$

3.2.2.2 Modelltest

Das Ziel des Modelltests ist die Prüfung des Modells auf Richtigkeit und gegebenenfalls die Suche nach den Beobachtungen, die nicht mit dem zugrundeliegenden Modell vereinbar sind. Gründe für solche Beobachtungen sind beispielsweise nichtmodellierete Störungen oder fehlerhafte Instrumente.

Ist die Standardabweichung a priori bekannt, dann kann mit den Standardabweichungen a priori σ_0^2 und a posteriori $\hat{\sigma}_0^2$ der Globaltest des Modells nach [Niemeyer 2001] aufgestellt werden. Mit der Nullhypothese

$$H_0 : E(\underline{l}) = \underline{I} \underline{\beta} \quad (3.87)$$

gilt die Aussage:

$$P \left\{ \frac{(n - u) \cdot \hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} = \frac{f \cdot \hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} > \chi_{f, 1-\alpha} | H_0 \right\} = \alpha \quad (3.88)$$

Wird die Nullhypothese abgelehnt, dann kann das folgende Gründe haben:

- σ_0^2 gilt nicht für die tatsächlichen Meßbedingungen,
- das funktionale Modell ist nicht zutreffend oder
- das stochastische Modell ist nicht zutreffend.

Können die beiden ersten beiden Ursachen ausgeschlossen werden, muß das stochastische Modell korrigiert werden. Mögliche Ursachen für ein fehlerhaftes stochastisches Modell können nichtmodellerte Blöcke oder falsch zugeordnete Beobachtungen sein. Ebenfalls möglich sind fehlerhafte geotechnische Instrumente, die z.B. aufgrund von Alterung elektronischer Bauteile grob falsche Beobachtungen im Sinne des Modells liefern.

Einzelne fehlerhafte Beobachtungen und Beobachtungsgruppen lassen sich beispielsweise durch robuste Verfahren zur Ausreißersuche, wie sie in [Caspary 1987] und [Caspary und Borutta 1986] beschrieben sind, aufspüren. Für die erkannten groben Fehler ist die Ursache zu finden und entsprechen zu reagieren. Sind die Ausreißer auf ein zu grobes Modell zurückzuführen, kann bei ausreichender Datengrundlage das Modell durch zusätzliche Blöcke verfeinert werden. Dieses neue Trendmodell ist wieder entsprechend zu prüfen und gegebenenfalls weiter zu verfeinern. Sind die Ausreißer jedoch auf fehlerhafte oder mangelhafte Instrumente oder Beobachtungsfehler zurückzuführen, dann sollten sie deutlich geringer gewichtet oder im Extremfall entfernt werden.

3.3 Ablauf einer Strainschätzung

Mit dem beschriebenen erweiterten kernfunktionsbasierten Schätzverfahren läßt sich eine dreidimensionale Strainanalyse durchführen. Dabei ist es möglich, für einzelne Punkte sowohl das Verschiebungsfeld als auch beliebige lineare Funktionale des Verschiebungsfeldes direkt zu schätzen und nichtlineare Funktionale über den Umweg der Schätzung des Verschiebungsfeldes zu berechnen.

Der Ablauf einer solchen Strainanalyse besteht aus folgenden Schritten:

1. Aufbau eines Straintrendmodells für den Gesamtkörper beziehungsweise für einzelne Homogenbereiche nach Abschnitt 3.2.2 oder alternativ ein allgemeines Trendmodell auf Grundlage theoretischer Überlegungen, s. Abschnitt 3.2.1
2. Wahl einer geeigneten Kernfunktion (z.B. Maternsche Kovarianzfunktion)
3. Anpassung der Kovariogrammparameter z.B. nach Abschnitt 3.1.4.2
4. Berechnung des Straintensors oder seiner Funktionale an den Vorhersagestellen
5. Berechnung der Schätzfehler
6. Vergleich der geschätzten Merkmale mit ihren Krigingfehlern.
7. Darstellung der Ergebnisse.

Die Beispiele in Kapitel 4 demonstrieren die Anwendung und die Grenzen des Verfahrens.

Kapitel 4

Strainanalyse – Anwendungsbeispiele

4.1 Pumpspeicherwerk Hohenwarthe II

Das Pumpspeicherwerk (PSW) Hohenwarthe II wurde in den Jahren 1965 und 1966 errichtet. Es ist mit acht Maschinensätzen zu je 80 MW das größte Wasserkraftwerk an der Saale. Der Höhenunterschied zwischen Ober- und Unterbecken beträgt etwa 300 Meter, die Rohrbahn vom Oberbecken zum Maschinenhaus hat eine Länge von etwa 600 Meter. Vor dem Hintergrund der Geologie des Saaletales wird ein Talzusub in Richtung der Achse der Hangrohrbahn vermutet. Außerdem sind entlang von Störungen, die die Rohrbahn in ihrem Verlauf kreuzen, Bewegungen bekannt. Diese Störungen gliedern das Untersuchungsgebiet in mehrere Homogenbereiche (HB). Seit 1967 werden zur Gewährleistung der innerbetrieblichen Sicherheit und des öffentlichen Schutzes regelmäßig Überwachungsmessungen durchgeführt.

Das Überwachungsnetz umfaßt 9 Meßpunkte im Bereich der Hangrohrbahn:

- 4 Meßpunkte direkt am Krafthaus
- 5 Meßpunkte verteilt im unteren Bereich der Hangrohrbahn

Zusätzlich werden halbjährlich die Längen der Hangrohrbahn gemessen.

In Abbildung 4.1 sind sowohl die Homogenbereiche als auch das Überwachungsnetz dargestellt. Der untere Teil des Pumpspeicherwerkes Hohenwarthe II umfaßt 6 Homogenbereiche (HB 1. . .6). Die beiden wichtigsten Störungen sind die zwischen HB 2 und HB 3, die die Hangrohrbahn schräg kreuzt und damit den nördlichen Restblock vom Mittelblock trennt sowie die zwischen HB 5.2 und HB 6, die die Grenze zwischen dem Talblock (HB 6) und dem Hangblock darstellt.

4.1.1 Modellierung des Überwachungsgebietes

Die Sicherheit der Ergebnisse einer Strainanalyse wird maßgeblich einerseits von der möglichst umfassenden Berücksichtigung der geologischen Situation und andererseits von der endlichen Anzahl vorhandener Meßstellen bzw. -daten bestimmt. Diese beiden Voraussetzungen widersprechen sich insoweit, als daß jeder berücksichtigte Homogenbereich durch ein hinreichende Menge von Meßdaten beschrieben sein muß. Deshalb muß eine Modellierung als Kompromiß zwischen dem natürlichen Zustand und einer Berechenbarkeit die optimale Ausnutzung aller Gegebenheiten zum Ziel haben, um die Forderung nach einer gesicherten Strainanalyse durch ein weitestgehend adäquates Modell erfüllen zu können.

Die bislang erfolgten Auswertungen der Überwachungsmessungen, die ohne Berücksichtigung geologischer Störungen erfolgten, zeigen deutliche Verschiebungen im Bereich des Hanges und geringe Bewegungen im Talbereich.

Eine Berechnung jedes einzelnen in Abbildung 4.1 dargestellten Homogenbereiches ist bei der mageren Datenlage nicht möglich. Dies liegt in erster Linie daran, daß für den hier betrachteten Untersuchungsbereich lediglich die Beobachtungen für 9 Festpunkte und 76 Strecken zwischen je zwei Konvergenzmeßbolzen aus der Überwachung der beiden Rohrleitungen der Hangrohrbahn zur Verfügung stehen. Die Strecken werden als Quasi-Extensometer mit einer Länge von etwa 20 m für die Auswertung genutzt. Die Längenänderung der westlichen Hangrohrbahn ist in Abbildung 4.2 schwarz dargestellt. Deshalb werden nachfolgend für den Zeitraum 1967-1999 drei Strainanalysen verschiedener Modellierung vorgestellt und kritisch verglichen:

1.	Keine Berücksichtigung einzelner Homogenbereiche (1 Block) ; Nutzung aller geodätischen Daten	D1-Modell
2.	Keine Berücksichtigung einzelner Homogenbereiche (1 Block); Nutzung aller geodätischen und geotechnischen Daten	DT1-Modell
3.	Modellierung der Hauptstörung zwischen HB2 und HB3 und der zwischen HB5.2 und HB6 (2 Blöcke); Nutzung aller geodätischen und geotechnischen Daten	DT2-Modell

Tabelle 4.1: Die drei untersuchten Modelle der unteren Hangbereiches des PSW Hohenwarte 2

In den beiden einfachen Einblockmodellen D1 und DT1 werden alle geologischen Strukturen ignoriert. Dadurch ist es zwar möglich, alle vorhandenen geodätischen Beobachtungen für die

Beschreibung zu nutzen; dieser scheinbare Vorteil wird aber durch die tatsächlich nicht vorhandene, aber unterstellte Homogenität des gesamten Hanges erkauft, die aber aufgrund der vorhandenen Geologie angezweifelt und aufgrund der Überwachungsmessungen verworfen werden müßte. Sie ist jedoch eine sinnvolle Modellierung für die Auswertung der geodätischen Beobachtungen, wenn auf geotechnische Informationen aus der Überwachung der Hangrohrbahn verzichtet wird (D1-Modell).

Beim DT2-Modell werden die beiden Hauptstörungen zur Teilung des gesamten Gebietes in drei Blöcke genutzt. Der Vorteil dieser Modellierung liegt darin, daß die Beschreibung des Deformationsverhaltens besser zu den vorhanden Rahmenbedingungen paßt. Der große Nachteil ist die Bildung zweier Blöcke mit sehr wenig Beobachtungen. So ist für den nördlichsten Block – den Restblock (vgl. Abb. 4.1) – kein Strain mehr berechenbar, weil sich nur eine einzige geodätische Beobachtung in diesem Homogenbereich befindet und die Streckenänderungen alle nur die N-S-Komponente f_{22} des Abbildungstensors beobachten. Dadurch kann dieser Bereich im DT2-Modell nicht berechnet werden. Der südlichste Block – der Talblock – enthält nach der Trennung der Blöcke nur 5 Punkte mit Verschiebungsbeobachtungen und zwei Streckenmessungen. Diese geringe Anzahl läßt zwar eine Strainschätzung zu, jedoch werden die Ergebnisse im wesentlichen dem Trendmodell entsprechen und wenig gesichert sein.

Für die Beschreibung der Deformationen mit Nutzung der geotechnischen Informationen ist es günstig, sowohl eine Strainanalyse mit dem DT1-Modell als auch mit dem DT2-Modell

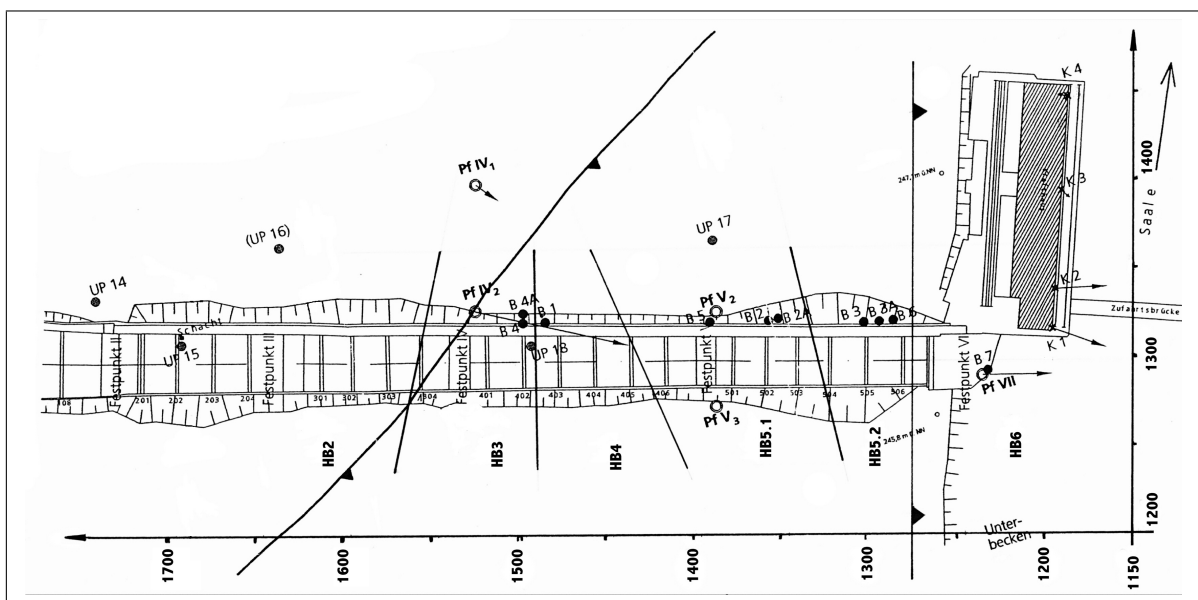


Abbildung 4.1: Unterer Teil der Hangrohrbahn des PSW Hohenwarthe II mit Krafthaus [ArcadisGmbH 1997]

durchzuführen. Einerseits kann so die Verbesserung gegenüber der Strainanalyse ausschließlich mit geodätischen Beobachtungen (D1-Modell) gezeigt und weiterhin einige Aussagen für den gesamten Überwachungsbereich getroffen werden. Andererseits kann so die Auswirkung der Trennung der Blöcke an den Hauptstörungen demonstriert werden.

Für alle drei Modellierungen kommt das Trendmodell der Stufe V – also (globaler) Strain mit Krümmung – nicht in Frage (vgl. Tab. 3.3). Grundsätzlich sind zwar in fast allen Modellierungen genügend Beobachtungen vorhanden, um die Unbekannten zu berechnen, aber die Lage der Beobachtungen zueinander ist für die Berechnung der Krümmungen ungünstig. Deswegen wird für alle Modellierungen das Trendmodell der Stufe IV angesetzt. Die Modellierungen sind in allen Fällen signifikant besser als das Trendmodell der Stufe III. Die Ergebnisse der Regressionsanalyse sind in der Tabelle 4.2 zusammengefaßt. Erstaunlich ist, wie wenig sich die beiden Trendmodelle für die 1-Block-Modelle D1 und DT1 unterscheiden. Lediglich die Dilatation wird etwas kleiner. Dagegen zeigen die beiden Trendmodelle für den mittleren und den Talblock des

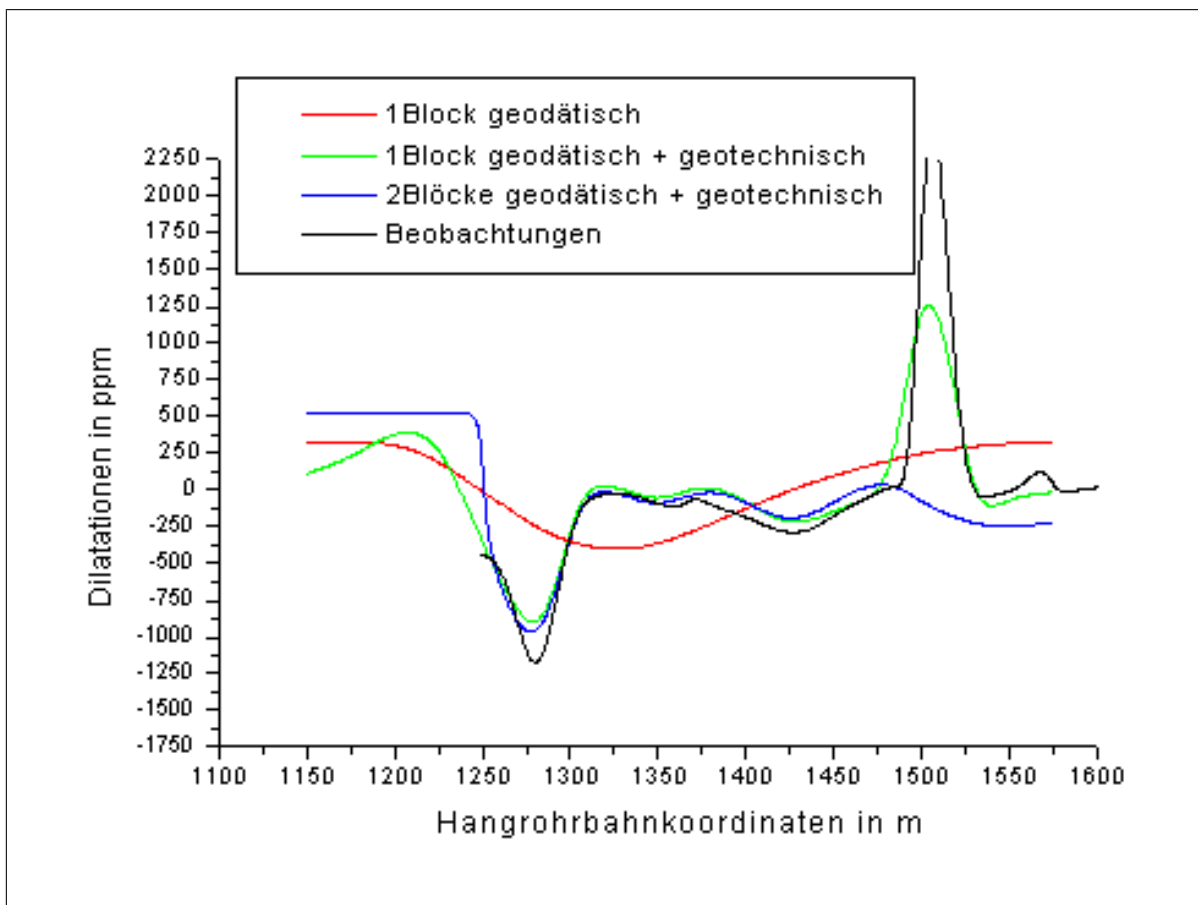


Abbildung 4.2: Gegenüberstellung der gemessenen und der geschätzten Streckendilatation in N-S-Richtung e_{yy} der Hangrohrbahn

DT2-Modells, wie grundverschieden das Deformationsverhalten der einzelnen Bereiche ist. Vor allem die Dilatationen mit $\approx -40 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$ gegenüber $\approx -130 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$ bzw. $\approx 440 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$ und die Scherungen mit $\approx 155 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$ gegenüber $\approx 30 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$ bzw. $\approx 16 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$ ändern sich deutlich. Die Dilatation im D1- und DT1-Modell ist deutlich kleiner als im DT2-Modell, da die Zerrungen zwischen Rest- und Mittelblock und die Pressungen zwischen Mittel- und Talblock im Mittel über den gesamten Block verschwinden. Dagegen sind die Scherungen relativ groß, da in den beiden Einblockmodellen die Bewegungen der Blöcke gegeneinander als Scherungen gedeutet werden. Daraus könnte man schließen, daß das DT1-Modell trotz gemeinsamer Nutzung der geodätischen und geotechnischen Beobachtungen zur Beschreibung des Verschiebungs- und Deformationsverhaltens wenig geeignet ist. Wie die Ergebnisse der Strainanalyse aber eindrucksvoll zeigen, wird durch die günstige Lage der geotechnischen Beobachtungen dieses Manko ausgeglichen, so daß schon ohne Nutzung der geologischen Strukturinformationen eine plausible Aussage möglich ist. Natürlich kann mit dieser glücklichen Fügung bei anderen Anwendungsfällen nicht gerechnet werden, so daß im Normalfall die Strukturinformationen von entscheidender Bedeutung sind.

	R-Translation [mm]	H-Translation [mm]	Rotation [mgon]	Dilatation [ppm]	Scherung [ppm]
D1-Modell	-3,3	-15,6	5,6	-38,8	157,2
DT1-Modell	-3,3	-15,6	5,5	-43,0	155,8
DT2-Modell Mittelblock	-3,8	-36,0	3,3	-128,5	29,7
DT2-Modell Talblock	-2,9	-5,5	10,3	440,8	16,2

Tabelle 4.2: Trendmodelle der einzelnen Modellierungen

4.1.2 Diskussion der Ergebnisse

Entsprechend der gewählten Modellierungen werden die Ergebnisse dreier verschiedener Strainanalysen miteinander verglichen. Und zwar sind dies die Strainanalyse (s. Tab. 4.1) für:

1. das D1-Modell (ausschließlich geodätische Daten),
2. das DT1-Modell (geodätische und geotechnische Daten) und
3. das DT2-Modell (geodätische und geotechnische Daten).

Die Strainanalyse des D1-Modells entspricht der in [Schmidt 1999] veröffentlichten Auswertung und dient lediglich zur Verdeutlichung der Verbesserungen der Aussagen zum Deformationsverhalten des Überwachungsgebietes bei Integration von geotechnischen Beobachtungen in eine erweiterte Strainanalyse. Die Ergebnisse der Strainanalyse des DT1- und des DT2-Modells sind in [van den Boogaart und Drobniowski 2002a] und [van den Boogaart und Drobniowski 2002b] veröffentlicht worden.

Die Ergebnisse – Horizontalverschiebung, Rotation, Dilatation und Scherung – sind in den Abbildungen 4.3–4.16 in Vektor- und Isoliniendiagrammen sowie in Form von Differenzkörpern und Richtungsrosen dargestellt. In den Diagrammen der Dilatation, der Scherung und der Rotation sind links die Größen selbst und rechts die zugehörigen Krigingfehler dargestellt. Für die Berechnung und Darstellung wurde ein lokales Koordinatensystem genutzt, dessen

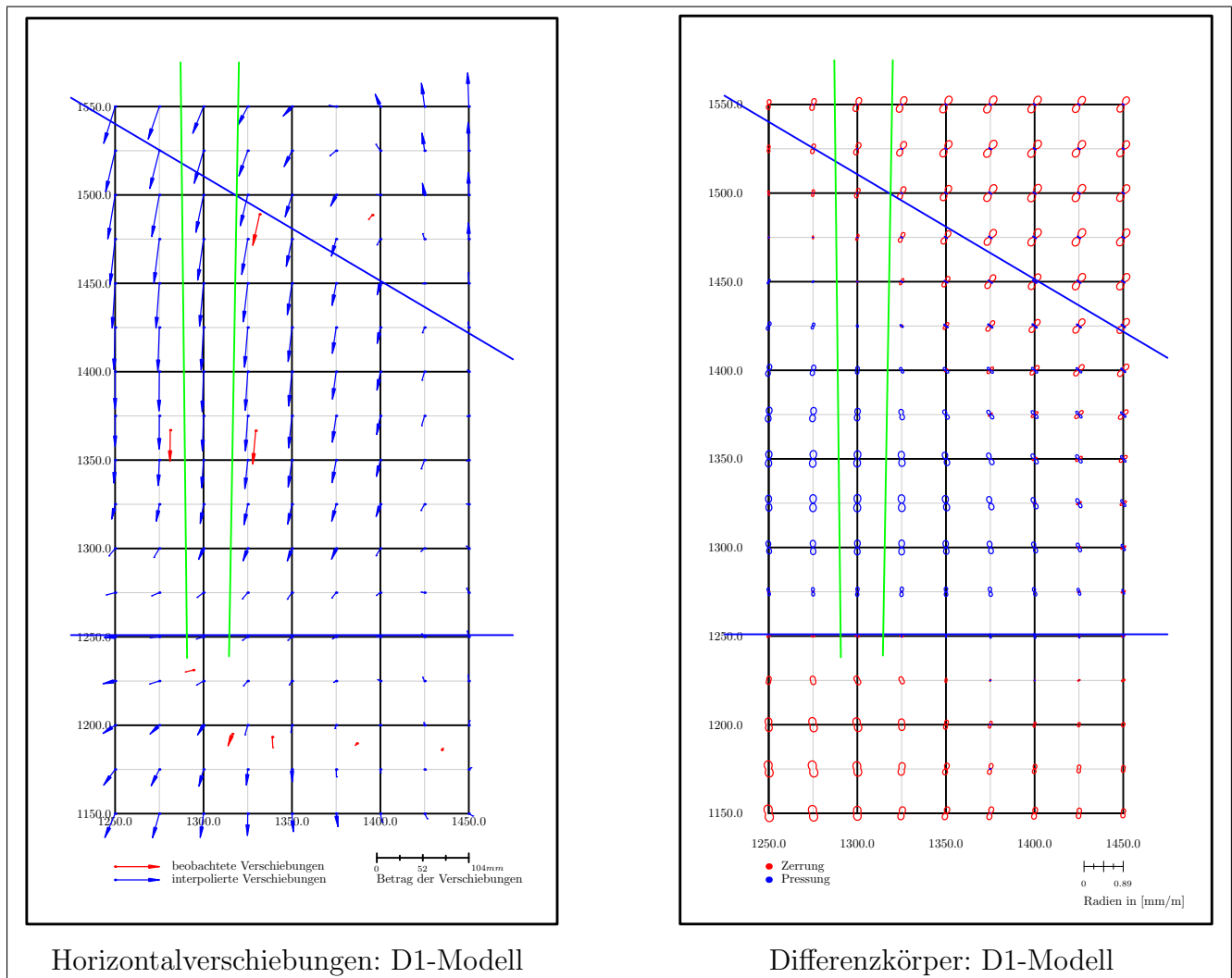


Abbildung 4.3: Differenzkörper und Horizontalverschiebungen für das D1-Modell

Nordrichtung hangaufwärts etwa parallel zur Hangrohrbahn gelegt wurde. Zur Orientierung und leichteren Interpretation sind in den Diagrammen die 9 geodätischen Punkte (blau), die Hangrohrbahn (grün) und die beiden Störungen (blau) eingezeichnet. In den Diagrammen der Horizontalverschiebung sind zusätzlich die beobachteten Verschiebungen (rot) dargestellt. Die beiden Störungen, die im 2-Block-Modell die Blöcke trennen, verlaufen in O-W-Richtung bei $H=1250\text{ m}$ und in NW-SO-Richtung etwa bei $H=1500\text{ m}$. Die Diagramme der Richtungsrosen (Abb. 4.7, 4.12 und 4.17) zeigen die räumliche Verteilung der Hauptbeanspruchungsrichtung.

4.1.2.1 D1-Modell

Die Strainanalyse ausschließlich auf Basis geodätischer Daten ist in [Schmidt 1999] erstmals dargestellt worden. Die Ergebnisse sind allerdings nur als grobe Orientierung nutzbar. Aufgrund der geringen Anzahl und der Lage der Stützpunkte können lokale Änderungen nicht erfaßt werden. Dies ist sehr anschaulich im Diagramm 4.2 zu erkennen. Die geschätzten Streckenänderungen decken sich kaum mit den Beobachtungen. Lediglich im Nahbereich um die Stützpunkte

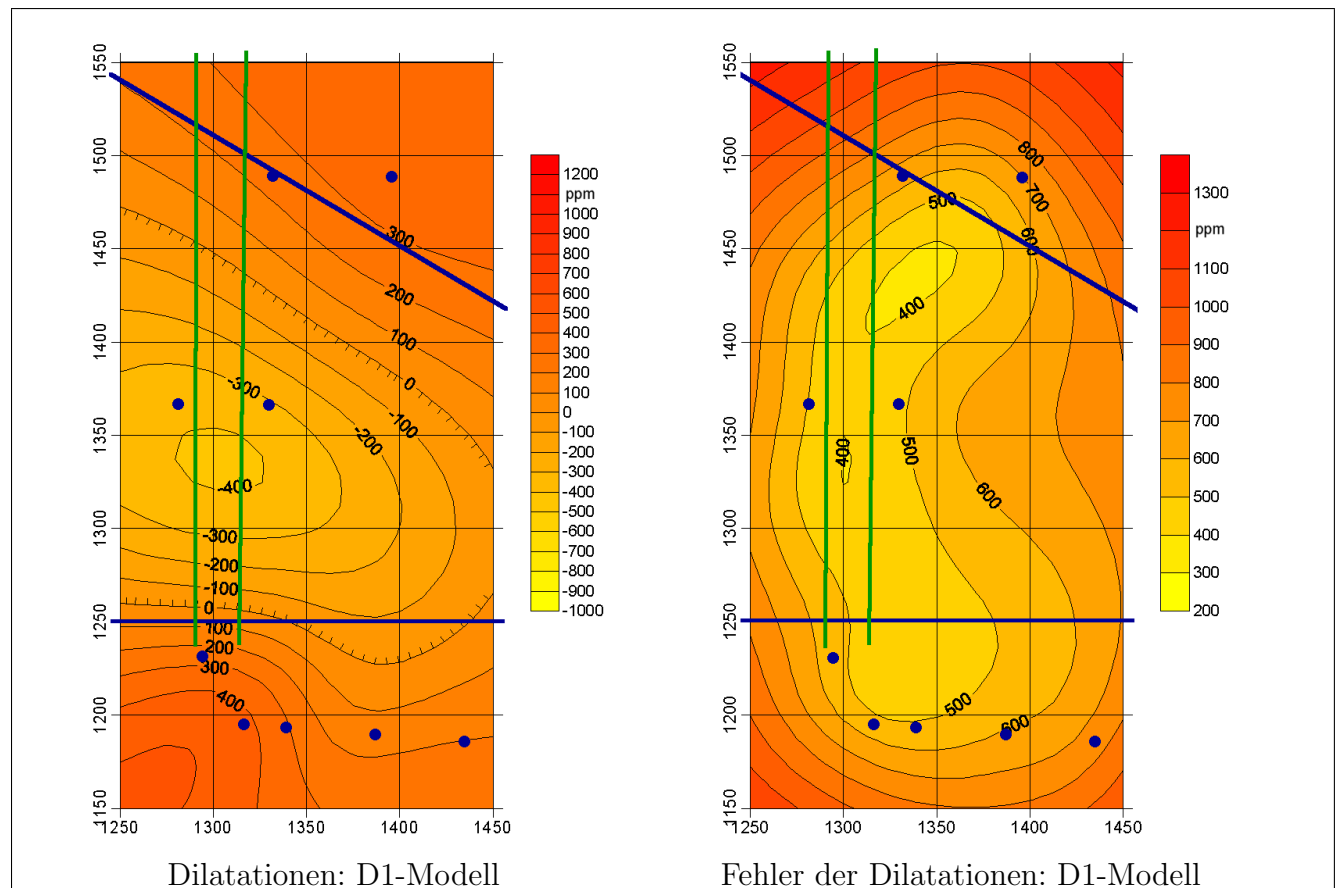


Abbildung 4.4: Dilatationen und zugehöriger Fehler für das D1-Modell

können die Ergebnisse versuchsweise interpretiert werden, außerhalb dieses Bereiches sind die Ergebnisse unsicher und durch Artefakte verfälscht. Am auffälligsten ist die nordöstliche Ecke, in der eine deutliche Rotation (vgl. auch Abbildung 4.5) und größere Verschiebungen hangaufwärts geschätzt werden, die der Datenlage und den natürlichen Rahmenbedingungen nicht entsprechen.

Trotz der schlechten Überwachung lassen sich schon im Verschiebungsfeld (Abb. 4.3) zwei Teilbereiche unterscheiden, die deutlich verschiedene Bewegungen aufweisen. Im mittleren Bereich ist gut die Bewegung des Hanges talabwärts zu erkennen. Der talwärtige Bereich im Süden mit dem Maschinenhaus bleibt dagegen fast unbewegt. Er scheint lediglich einer leichten Rotation (Abb. 4.5) im Gegenuhrzeigersinn zu unterliegen, die aus dem Druck des Hangbereiches resultieren könnte. Die Diagramme der Dilatation (Abb. 4.4) und der Scherung (Abb. 4.6), die Darstellung des Strains in Differenzkörpern (Abb. 4.3) und die Richtungsrose (Abb. 4.7) lassen nördlich der beiden Homogenbereiche einen dritten homogenen Hangbereich erkennen, der auch im Diagramm der Horizontalverschiebungen ausgewiesen wird. Im Diagramm der Richtungsrose

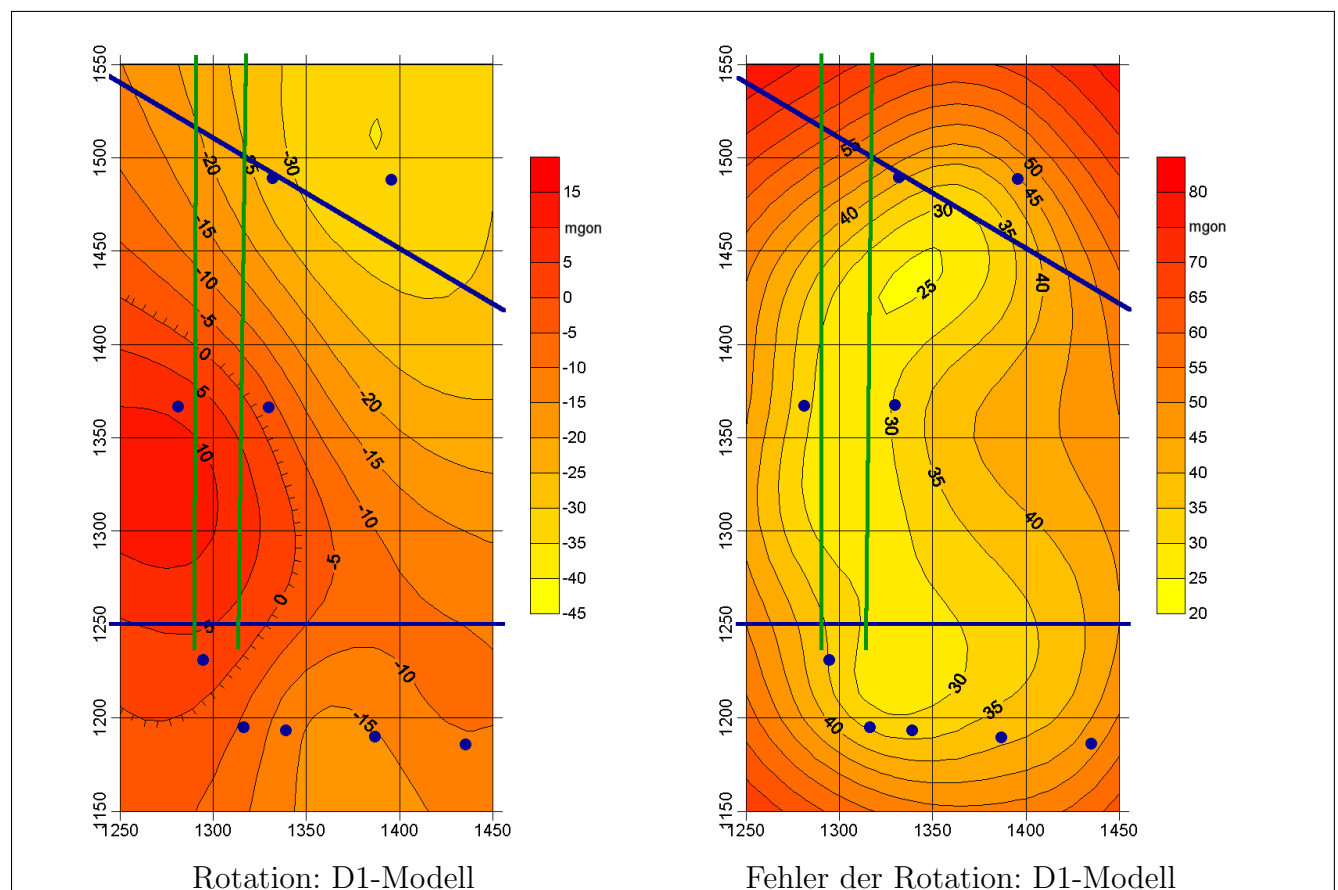


Abbildung 4.5: Rotation und zugehöriger Fehler für das D1-Modell

findet sich die Dreiteilung wieder:

- NO–SW für den nördlichen Restblock
- O–W für den Mittelblock
- N–S für den Talblock

Die Analyse ergibt für den nördlichen Bereich eine Flächendilatation von mehr als 300 ppm. Die Scherungen von etwa 250 ppm und die Differenzkörper zeigen, daß dieses Gebiet aber nicht gleichmäßig in alle Richtungen gezerrt wird, sondern daß dieser Bereich offenbar stark deformiert wird mit einer Zerrung von etwa 500 ppm in Südwest-Nordost-Richtung und einer Pressung von etwa 100 ppm in Nordwest-Südost-Richtung. Diese Deformation ist das Resultat der Bewegung des nördlichen Bereiches gegen den mittleren Bereich. Da aber der Punkt 41 allein die Bewegung des nördlichen Bereiches beschreibt und damit keinerlei Informationen über die interne Deformation liefern kann, sind die Scherung und die Differenzkörper nur als

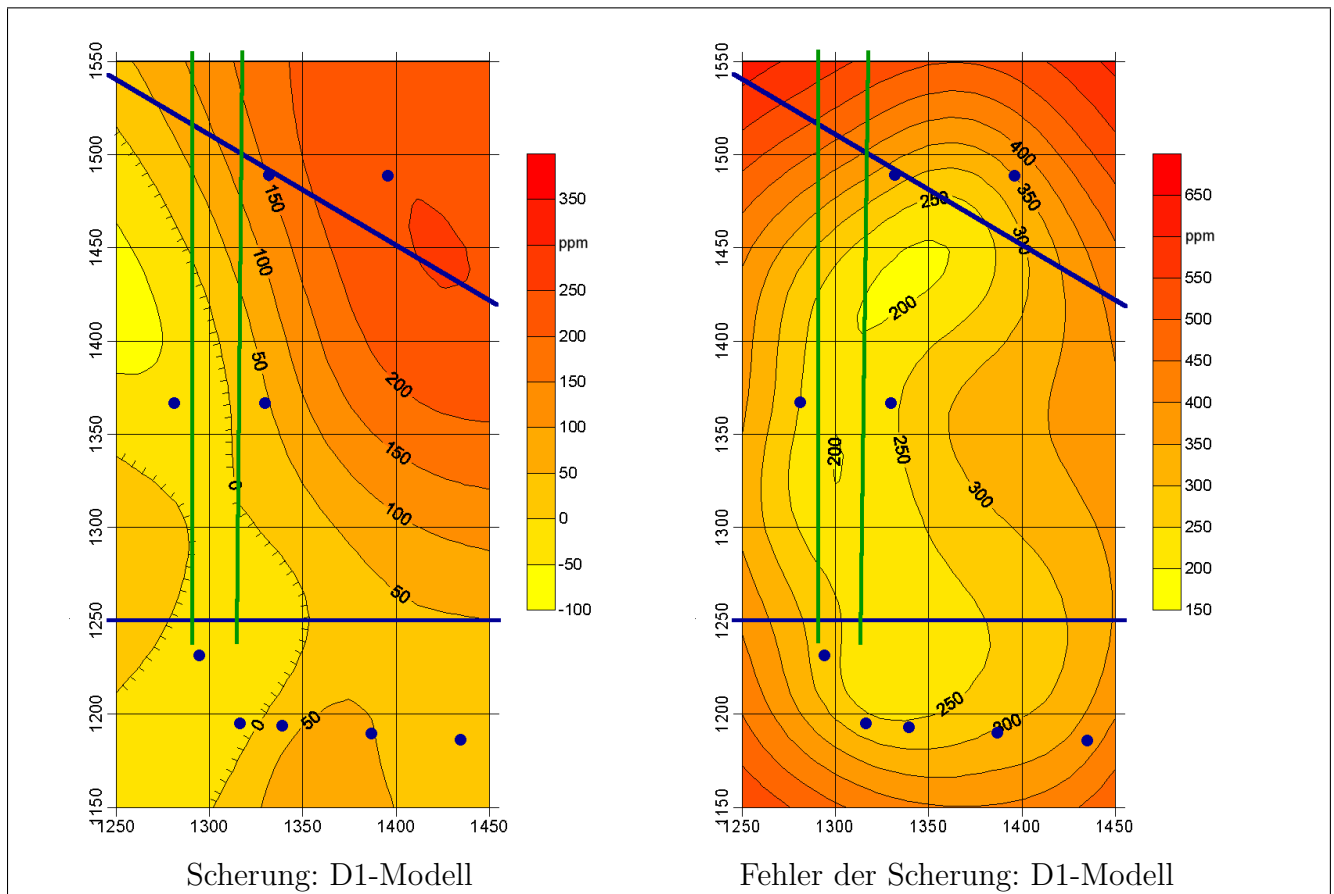


Abbildung 4.6: Scherung und zugehöriger Fehler für das D1-Modell

Hinweis darauf zu sehen, daß es zu Verschiebungen an der nördlichen Störung kommt, aber über die Größenordnung und räumliche Verteilung der Strainelemente kann keine sichere Aussage getroffen werden.

Alle Aussagen sind v.a. auch deswegen relativ unsicher, da sie aus einem unrealistischen Verschiebungsfeld resultieren und durch die anderen Varianten widerlegt werden. Der mittlere Block wird im wesentlichen komprimiert. Die maximale Pressung beträgt etwa -420 ppm . Der südliche Block scheint vor allem im Westen einer Zerrung bis etwa 430 ppm unterworfen zu sein, die aber aus dem bekannten Verschiebungsverhalten insbesondere in dieser Größe nicht erklärbar ist. Somit kann die Strainanalyse auf Basis der geodätischen Daten nur begrenzt verwendet werden, was aber aufgrund des angesprochenen Datenmangels zu erwarten war.

4.1.2.2 DT1-Modell

Die Hinzunahme der geotechnischen Beobachtungen im DT1-Modell sorgt bei dieser Strainanalyse, also bei der Nutzung geodätischer und geotechnischer Daten ohne Berücksichtigung der geologischen Störungen dafür, daß die Ergebnisse in der Nähe der Hangrohrbahn sicherer und zutreffender werden und dafür, daß die Störungsbereiche und Bereiche mit starker

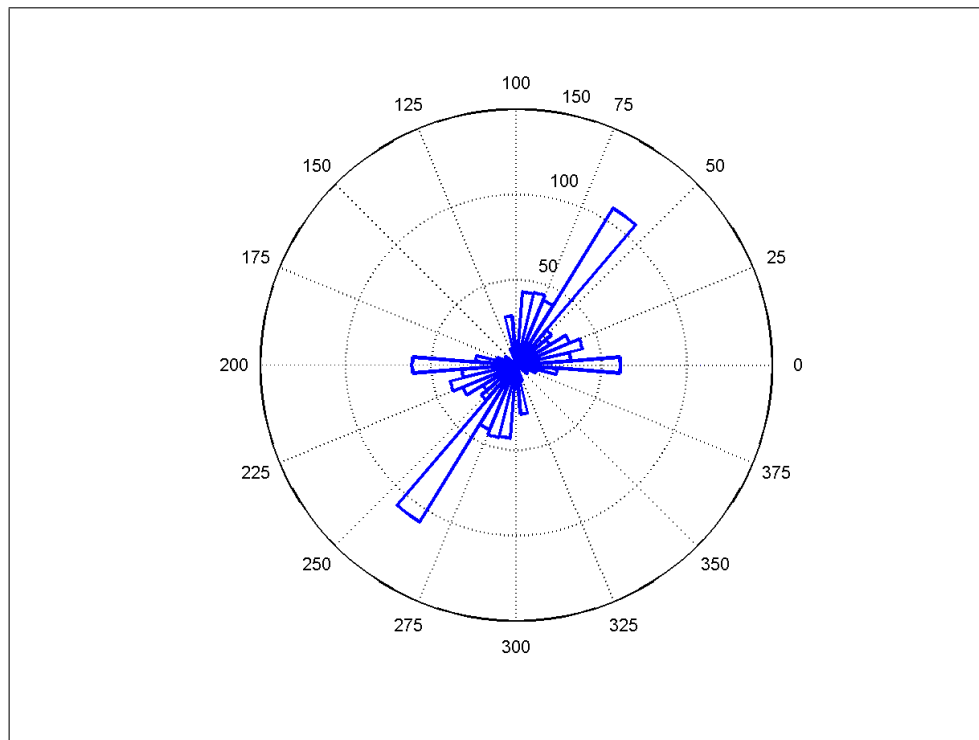


Abbildung 4.7: Richtungsrose: D1-Modell

Zerrung/Pressung hervorgehoben werden. Die Artefakte und Krigingfehler an den Rändern werden reduziert. Im Bereich zwischen der nördlichen und der südlichen Störung wird ein relativ gleichförmiges Verschiebungsfeld geschätzt. Die Abnahme der Verschiebung nach Osten ist ein Ergebnis der fehlenden Stützwerte in diesem Bereich, so daß hier die Schätzung gegen den Trend strebt. Im südlichen Bereich wird der Eindruck einer Rotation verstärkt (Abb. 4.10). Die scheinbare Expansion in Rechtswert-Richtung im Bereich westlich des Maschinenhauses, wie sie bei der Strainanalyse des D1-Modells (Abb. 4.4) noch ausgewiesen wurde, verschwindet (Abb. 4.9). Die Diagramme der Dilatation (Abb. 4.9), der Scherung (Abb. 4.11) und der Differenzkörper (Abb. 4.8) zeigen, daß die Bereiche mit ähnlicher Horizontalverschiebung (Abb. 4.8) durch Zonen mit starker Deformation getrennt sind. Entlang der nördlichen Störung treten

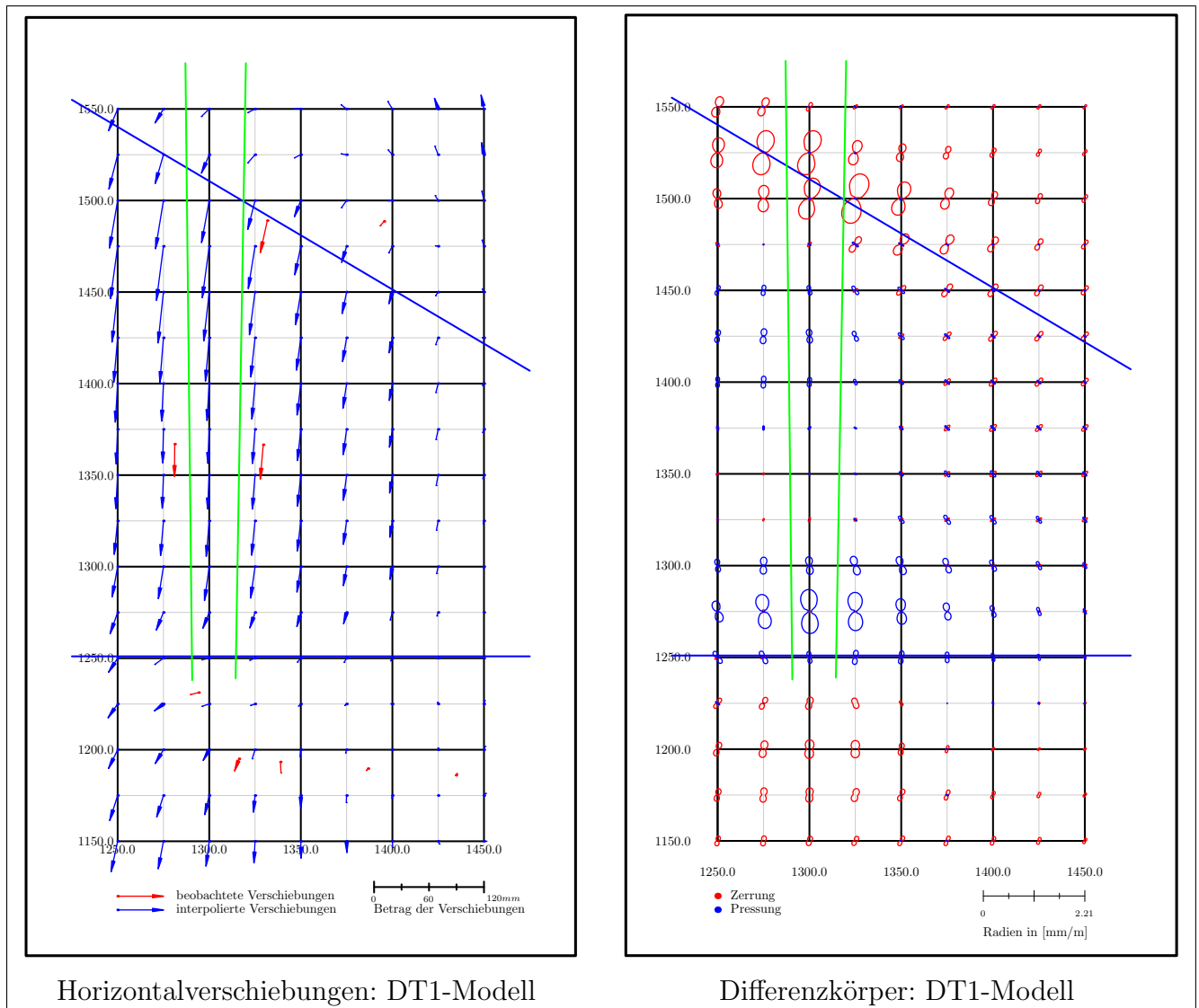


Abbildung 4.8: Differenzkörper und Horizontalverschiebungen für das DT1-Modell

große Zerrungen senkrecht zur Störung mit etwa $1 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$ und Scherungen mit $0,3 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$ auf.

Diese Deformationen sind allerdings das Ergebnis der Verschiebung des Bereiches zwischen den beiden Störungen talwärts und nicht einer internen Deformation. Die zweite Zone mit starken Deformationen liegt nördlich der südlichen Störung und entspricht dem Homogenbereich 5.2 (s.Abb. 4.1). Die hier berechnete Deformation beschreibt eine echte interne Deformation eines Gebirgskörpers. Dieser Bereich wird stark gepreßt mit bis zu 900 ppm. Die Scherung beträgt bis zu 180 ppm.

Im Gegensatz zur Strainanalyse im D1-Modell (Abschnitt 4.1.2.1) und der Strainanalyse im DT2-Modell (Abschnitt 4.1.2.3) können in der Richtungsrose ohne Trennung der Blöcke (Abb. 4.12) die einzelnen Homogenbereiche nicht scharf voneinander getrennt werden. Im Gegenteil: Durch die Erhöhung der Beobachtungen ohne gleichzeitige Trennung werden die Übergänge verschmiert, wodurch die einzelnen Blöcke in dieser Darstellung kaum noch voneinander zu trennen sind. Die Hauptdeformationsrichtungen des nördlichen Blockes und des Talblockes liegen beide zwischen der N-S-Richtung und NO-SW-Richtung und überdecken sich dadurch. Die De-

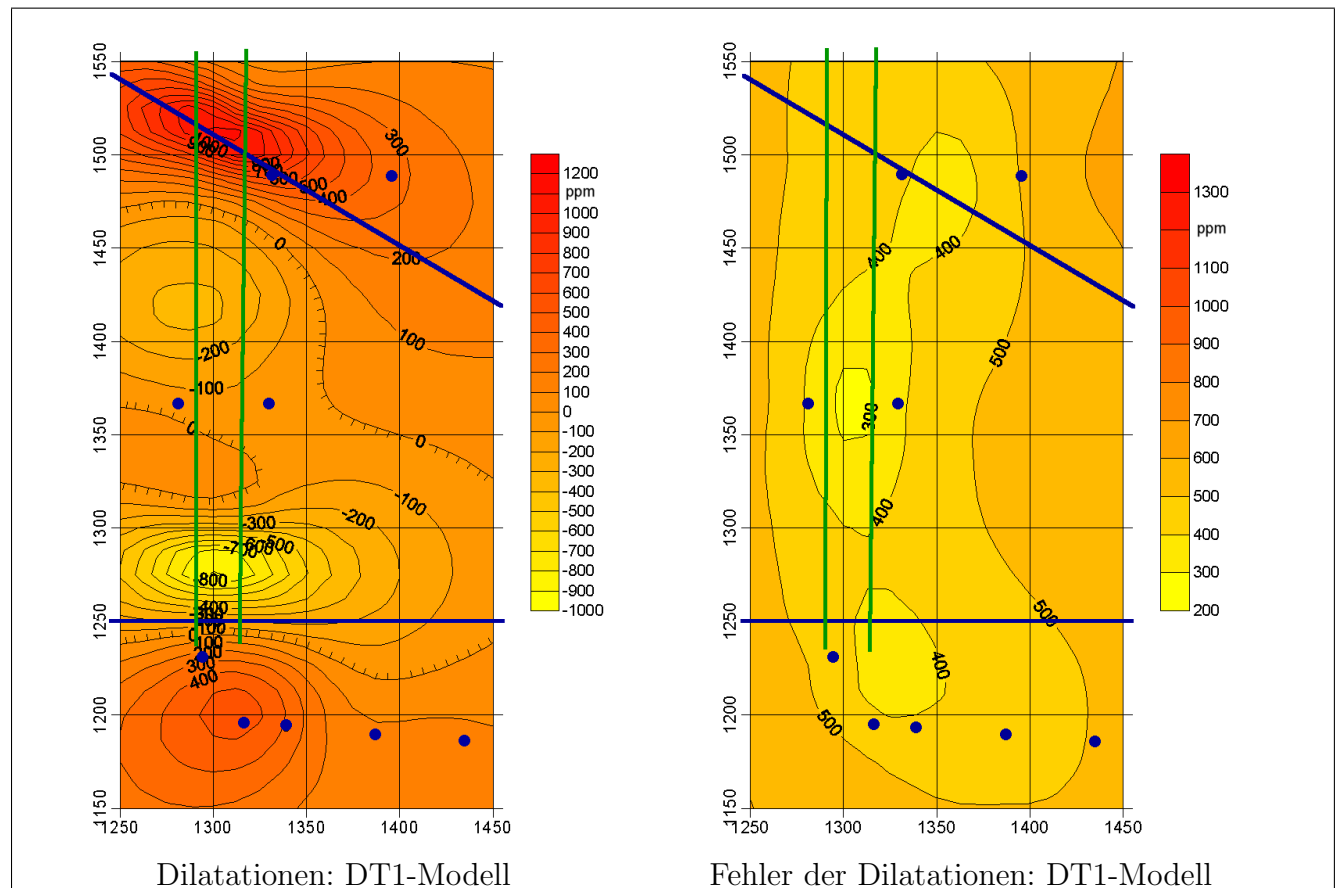


Abbildung 4.9: Dilatationen und zugehöriger Fehler für das DT1-Modell

formationen in O-W-Richtung geben den mittleren Block wieder. Er wird etwa in N-S-Richtung gezerzt und in O-W-Richtung gepreßt.

Insgesamt können die Ergebnisse dieser Strainanalyse dahingehend interpretiert werden, daß das Überwachungsgebiet aus mehreren separaten Blöcken besteht, die durch die auftretenden Extrema der Verformungen erkennbar sind. Dabei sind die Deformationen und Rotationen im Hangbereich mit Ausnahme der Umgebung der Störungen relativ gering, so daß im allgemeinen nur Starrkörperverschiebungen auftreten, die auch die Ursache für die Extrema der Dilatation, Scherung und Rotation an der nördlichen Störung sind. Die beiden Ausnahmen sind der Bereich nördlich der südlichen Störung, der dem Homogenbereich 5.2 (s. Abb. 4.1) entspricht, der stark komprimiert wird und der südliche Bereich, der nur im Westen nennenswerte Verschiebungen aufweist und zusätzlich einer Rotation von etwa 15 mgon unterliegt. Auch mit diesem noch unvollständigen Modell des Hangbereiches kann man die Deformation des Homogenbereichs 5.2 so interpretieren, daß er als Pufferzone zwischen dem starren Hangbereich und dem starren Talbereich dient und dadurch deformiert wird. Die Kräfte durch die talwärts gerichtete Bewe-

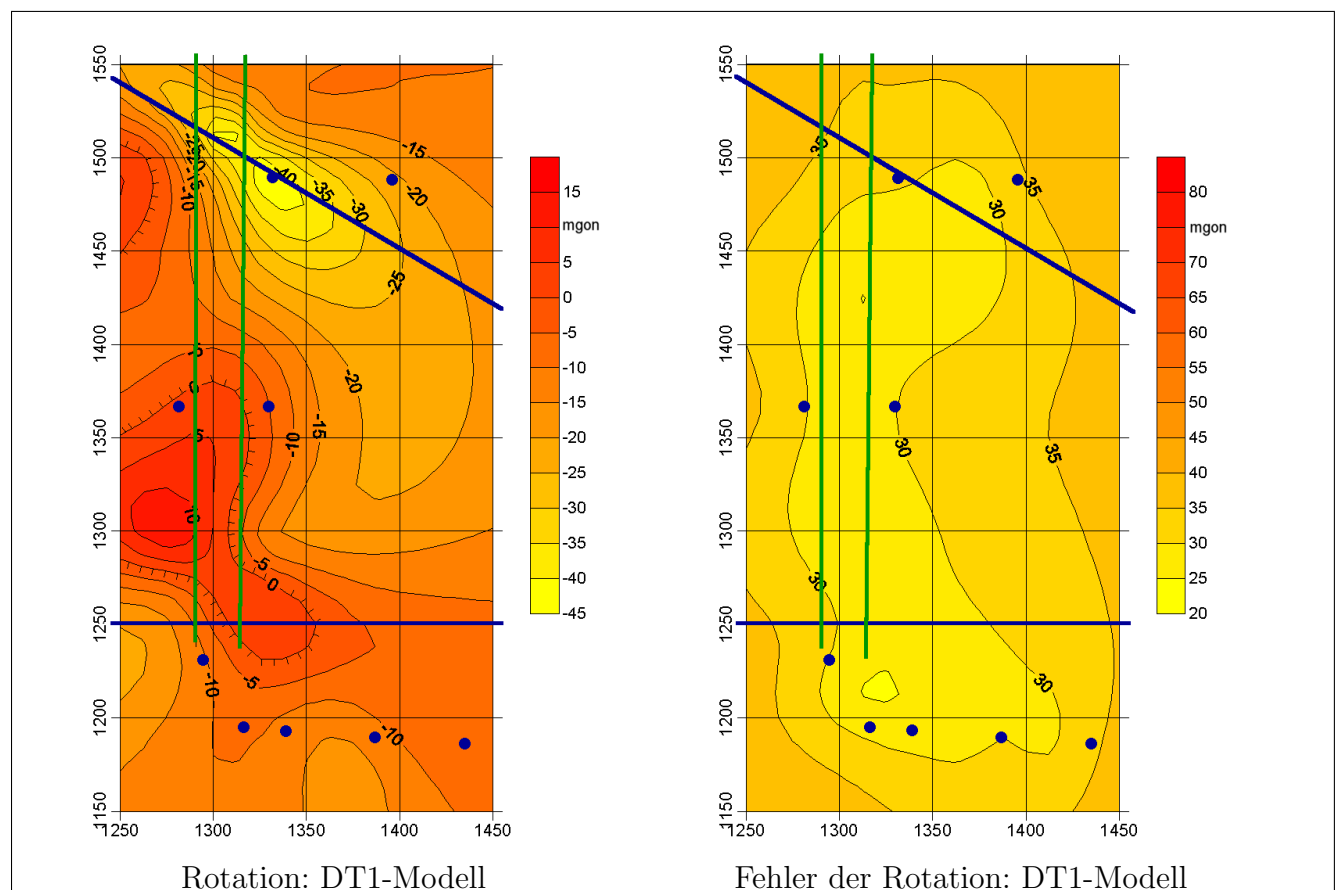


Abbildung 4.10: Rotation und zugehöriger Fehler für das DT1-Modell

gung des Hanges werden nur zum Teil an den Talblock weitergegeben, der mit einer Rotation reagiert und etwas geschert wird.

Diese Ergebnisse müssen aber, obwohl sie schon recht plausibel sind, immer noch vorsichtig interpretiert werden, da gerade im Bereich der Störungen fälschlicherweise Starrkörperbewegungen in der Strainschätzung interne Deformationen ausweisen. Wobei dabei zwischen der Deformation des Gebirges und der Deformation der Rohrbahn selbst unterschieden werden muß. Für das Gebirge ist die Aussage falsch, da hier zwei Blöcke aneinandergrenzen; die Rohrbahn hingegen ist als ein Block aufzufassen, für den die gemessene Deformationen korrekt ist und ohne Gegenmaßnahmen zur Zerstörung der Rohrbahn an den beanspruchten Stellen führen würde.

Auch bei Einbeziehung der geotechnischen Daten bleibt die Datenlage relativ mager. Unter Berücksichtigung dieses Sachverhaltes ist es demnach sehr positiv, daß die Krigingfehler der geschätzten Größen – besonders im Bereich der Hangrohrbahn – in einer akzeptablen Größenordnung sind.

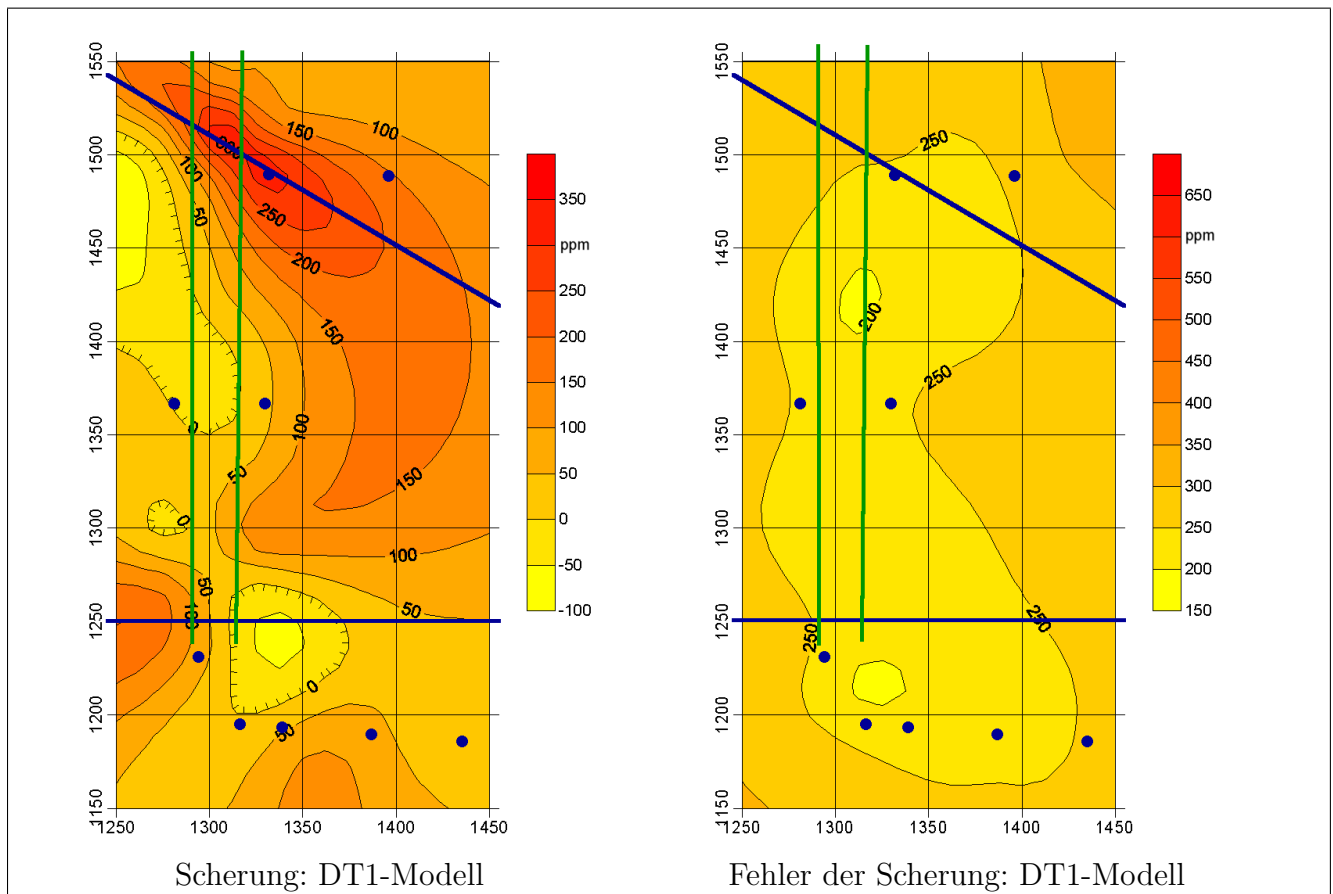


Abbildung 4.11: Scherung und zugehöriger Fehler für das DT1-Modell

4.1.2.3 DT2-Modell

Durch die Hinzunahme der geotechnischen Beobachtungen konnte die Beschreibung des Hangbereiches der Rohrbahn deutlich verbessert werden. Dies wird besonders deutlich im Bereich der trennenden Störungen, die erst dadurch im Ergebnis erkennbar werden. Allerdings wurden die Ergebnisse der DT1-Modellierung dadurch verfälscht, daß Beobachtungen, die in verschiedenen Homogenbereichen liegen, ohne Unterschied in das Schätzergebnis eingehen. Das führte im Bereich der Störungen zu einer Verschmierung des tatsächlichen Verschiebungs- und Deformationsfeldes. Außerdem wurden im Bereich der nördlichen Störung Starrkörperbewegungen als Deformation interpretiert. Diese beiden Artefakte werden bei Berücksichtigung der Homogenbereiche in der DT2-Modellierung beseitigt und ihr unterschiedliches Deformationsverhalten deutlich hervorgehoben.

Sehr deutlich ist diese harte Trennung beim Vergleich der Richtungsrosen des DT1-Modells (Abb. 4.12) und des DT2-Modells (Abb. 4.17) zu erkennen. In der Richtungsrose für die DT2-Modellierung sind deutlich zwei völlig verschiedene Hauptdeformationsrichtungen zu erkennen. Außerdem ist die Streubreite um diese beiden Richtungen deutlich geringer als um die Hauptdeformationsrichtung im DT1-Modell. Das bedeutet aber weiterhin, daß sich durch die Trennung im Talblock so wenig Daten befinden, daß die Ergebnisse nur minimal vom Trendmodell ab-

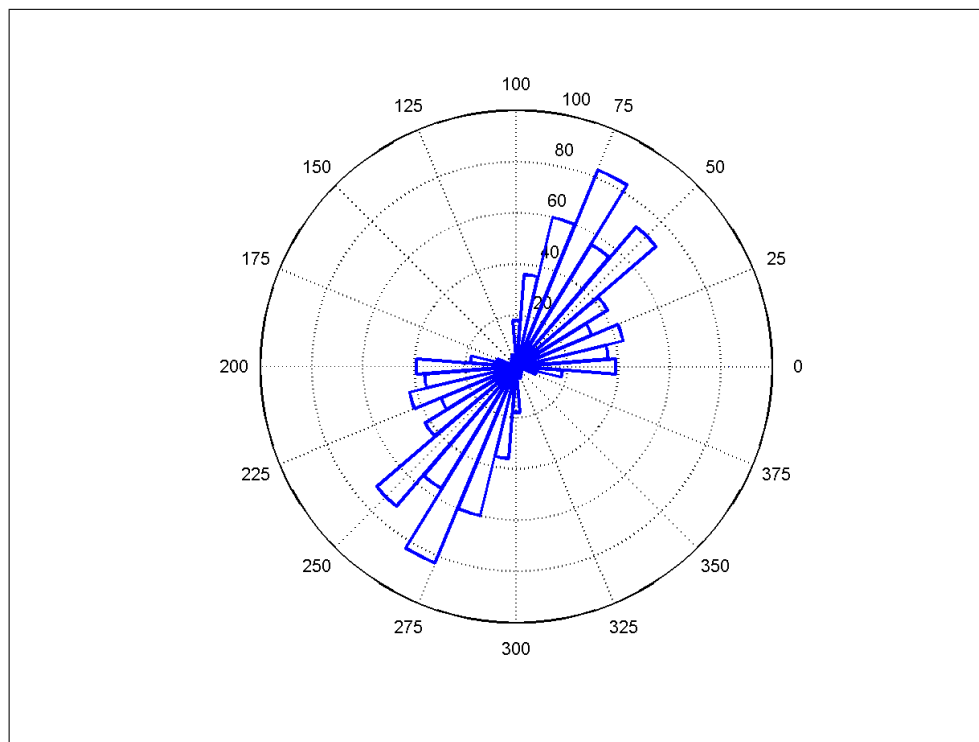


Abbildung 4.12: Richtungsrose: DT1-Modell

weichen.

Diesen deutlichen Unterschied im Deformationsverhalten kann man ebenfalls gut in der Darstellung der Differenzkörper (Abb. 4.13) und der Dilatation (Abb. 4.14) erkennen. Der mittlere Block unterliegt mit Ausnahme des HB 5.2 einer Pressung von 200 ppm; der Talblock hingegen einer Zerrung von 500 ppm. Die Zerrungen und Pressungen wirken allerdings vorwiegend in N-S-Richtung. In O-W-Richtung sind dagegen kaum Deformationen wirksam. Daraus resultieren die relativ großen Scherungen (Abb. 4.16), die zu deutlich eingeschnürten Differenzkörpern (Abb. 4.13) führen.

Der mittlere Block scheint kaum einer Rotation zu unterliegen. Das Maximum der Rotation von

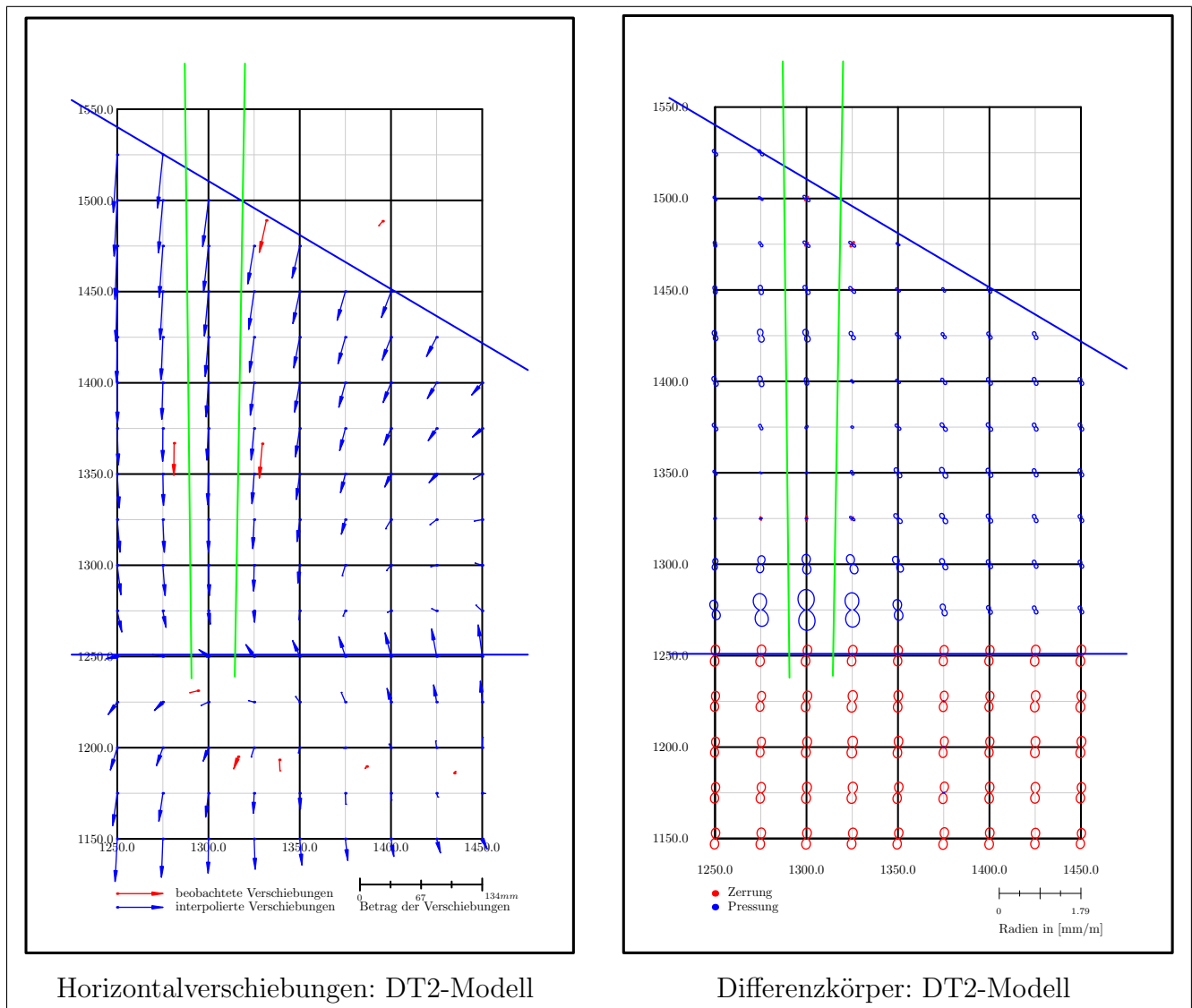


Abbildung 4.13: Differenzkörper und Horizontalverschiebungen für das DT2-Modell

–25 mgon im unteren Bereich der Hangrohrbahn, resultiert aus der schlechten Schätzung im Randbereich des mittleren Blockes, in dem keine Beobachtungen vorhanden sind. Der Talblock dagegen unterliegt einer konstanten Rotation von etwa –15 mgon .

Durch die Trennung der Blöcke wird das Modell zur Beschreibung des Deformationsverhaltens exakter in Bezug auf das Verschiebungs- und Deformationsverhalten, die Schätzgenauigkeit der geschätzten Größe verschlechtert sich allerdings, da die Anzahl der Beobachtungen innerhalb der Blöcke sinkt. Im mittleren Block ist dadurch nur der Bereich unmittelbar um die Hangrohrbahn durch Beobachtungen erfaßt. Der östliche Rand, der im D1- und DT1-Modell – wenn auch mit den bekannten Einschränkungen – durch Beobachtungen im obersten Hangblock und im Talblock wenigstens mit Vorsicht vage interpretierbar war, ist im DT2-Modell durch Beobachtungen nicht gestützt und deswegen nicht aussagekräftig.

Im Talblock verschlechtert sich in allen Teilen die Genauigkeit aller geschätzten Größen, da durch die Trennung die Anzahl der Beobachtungen drastisch reduziert ist. Dennoch können mit größerer Sicherheit die Aussagen getroffen werden, die schon im DT1-Modell auf Basis der

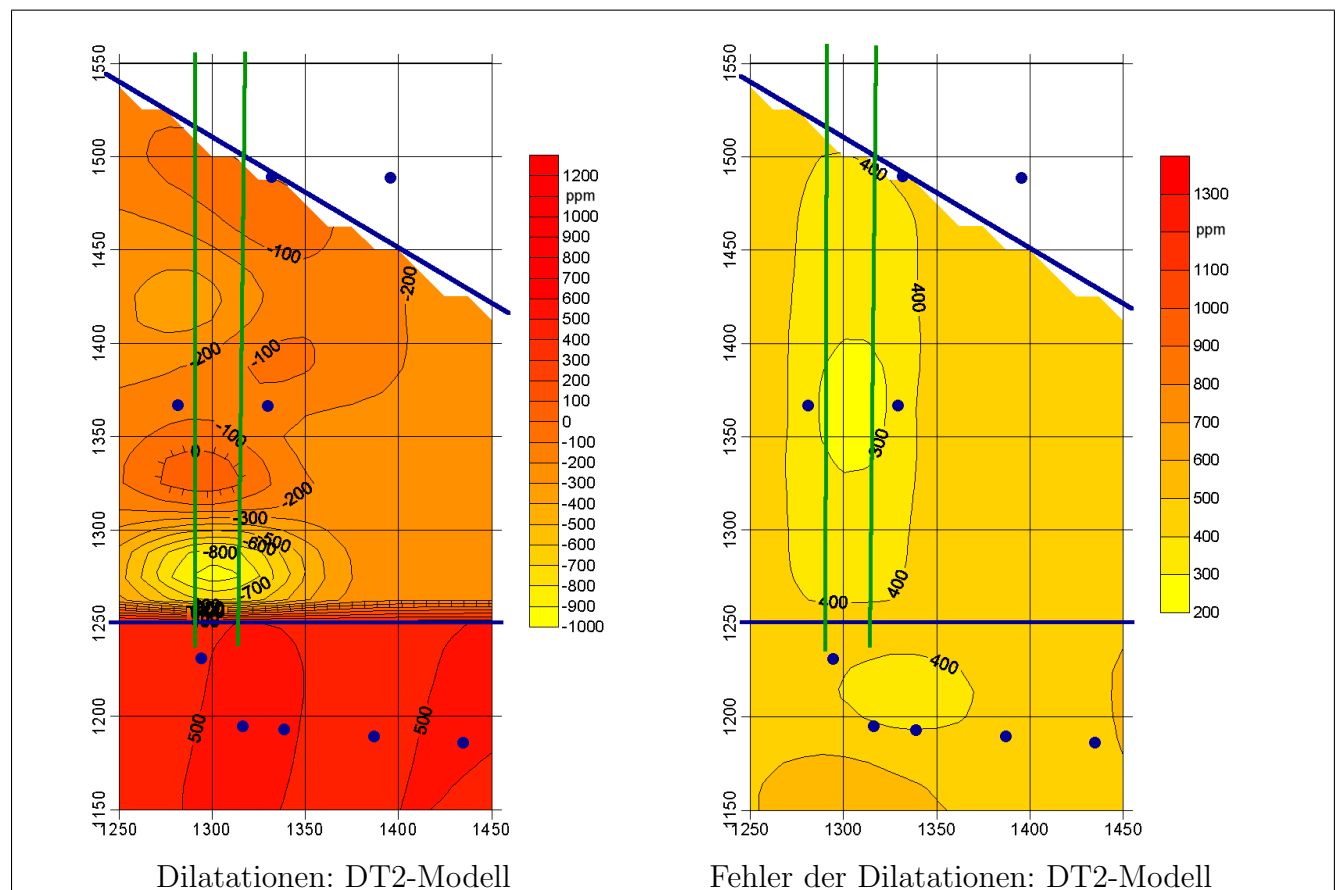


Abbildung 4.14: Dilatationen und zugehöriger Fehler für das DT2-Modell

geodätischen und geotechnischen Beobachtungen aus den Ergebnissen abgeleitet wurden:

1. die Homogenbereiche unterscheiden sich deutlich in ihrem Deformationsverhalten. Dies trifft auch für die Bereiche zu, die aufgrund der geringen Absolutbeobachtungen nicht separat modelliert werden können. So können die berechneten Extrema im mittleren Block einigermaßen den verschiedenen Homogenbereichen zugeordnet werden.
2. der Hangbereich bewegt sich talwärts und verursacht einerseits eine Rotation des Talblockes, die auf ein Widerlager süd-östlich des Talblockes hinweist, und andererseits eine starke Pressung des Homogenbereiches 5.2 der als Knautschzone zwischen Hang- und Talbereich wirkt.

4.1.3 Fazit

Die Aussagen zum Verschiebungs- und Deformationsverhaltens des unteren Teils der Hangrohbahn und des Maschinenhauses des PSW Hohenwarte II beruhten ursprünglich auf der Auswer-

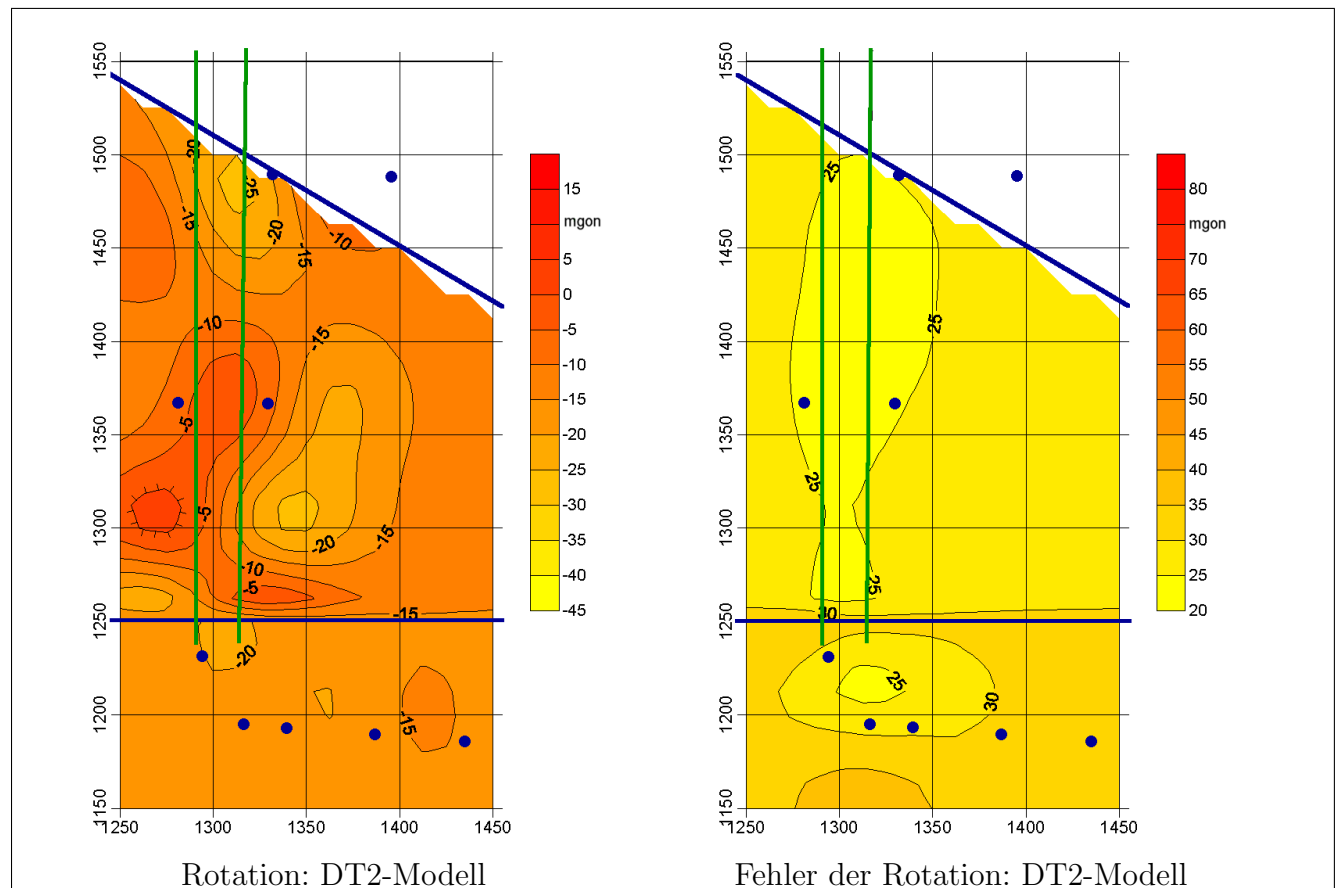


Abbildung 4.15: Rotation und zugehöriger Fehler für das DT2-Modell

tion von neun geodätisch überwachten Festpunkten. Diese Aussagen (rot) waren sehr unsicher und stimmten mit den gemessenen Längenänderungen (schwarz) an der Rohrbahnsegmenten kaum überein (Abb. 4.2). Durch die Integration der direkt gemessenen Längenänderungen, die von ihrem Charakter Extensometerbeobachtungen entsprechen, ist die Beschreibung v.a. des Deformationsverhaltens (grün u. blau) erwartungsgemäß deutlich verbessert worden. Außerdem sinkt der Krigingfehler und die Aussagen aus der Strainanalyse werden sicherer.

Bei der Interpretation der Ergebnisse muß unterschieden werden zwischen dem Deformationsverhalten der Hangrohrbahn selbst und der Deformation des Hanges. Die Hangrohrbahn wird durch das DT1-Modell besser beschrieben, da sie als ein Block aufgefaßt werden kann. Bewegungen der Blöcke gegeneinander bewirken Zerrungen und Pressungen in den Segmenten der Hangrohrbahn. Stark beanspruchte Bereiche sind dadurch deutlich erkennbar und Hinweise auf Versagensbereiche der Rohrbahn ableitbar.

Dagegen wird der Hang durch das DT2-Modell besser beschrieben, da er aus mehreren Blöcken besteht. Dadurch bewirken die Verschiebungen an den Blockgrenzen keine unrealistischen De-

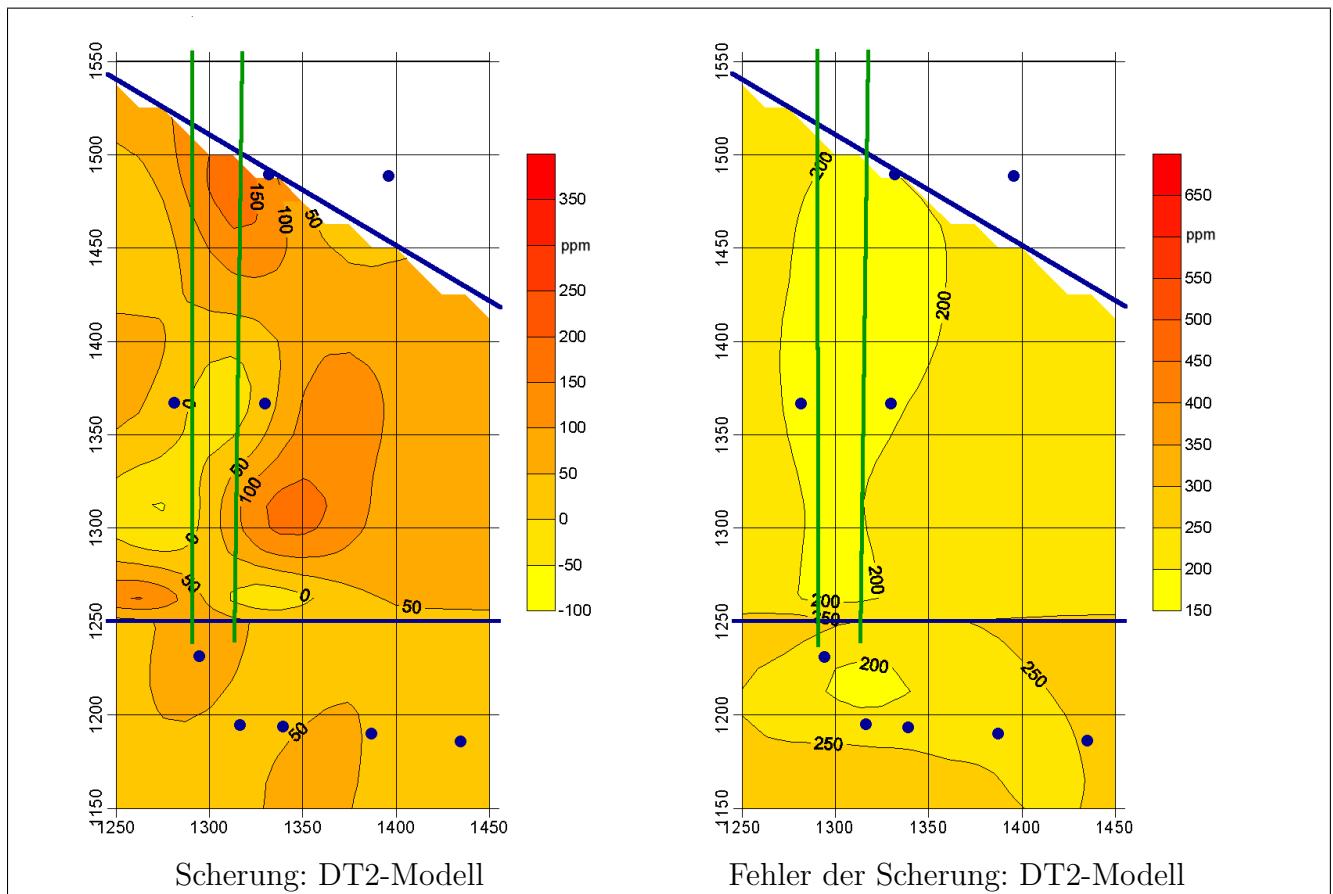


Abbildung 4.16: Scherung und zugehöriger Fehler für das DT2-Modell

formationen mehr und damit werden die Aussagen für den zugrundeliegenden Gebirgskörper zutreffender. Diese qualitative Verbesserung des Modells läßt allerdings die Schätzung des hangoberen Blockes nicht mehr zu.

Offensichtlich gliedert sich das Überwachungsgebiet grob in drei Bereiche mit unterschiedlichem Verschiebungs- und Deformationsverhalten. Der Talbereich und der hangoberste Bereich verschieben sich kaum, sondern unterliegen nur einer Rotation im Gegenuhrzeigersinn. Beide Bereiche werden v.a. in N-S-Richtung gezerrt, wobei beim hangoberen Restblock diese Aussage unsicher ist, da hier der Einfluß der fehlenden Trennung der Blöcke im D1- und DT1-Modell die Aussage verfälscht und im DT2-Modell keine Aussage möglich ist.

Der mittlere Bereich dagegen verschiebt sich deutlich talwärts und wird deutlich gepresst. Als Knautschzone zwischen dem mittleren und dem Talbereich wirkt der Homogenbereich 5.2, der einer Pressung bis zu 1100 ppm unterliegt.

Alle Bereiche werden im Vergleich zur Dilatation kaum geschert. Die Ursache dafür ist die sehr konstante Hauptdeformationsrichtung (vgl. 4.12 und 4.17).

Durch die Integration der geotechnischen Beobachtungen sind selbst die nicht durch separate Blöcke modellierbaren Homogenbereiche in den Ergebnissen wiederzuerkennen.

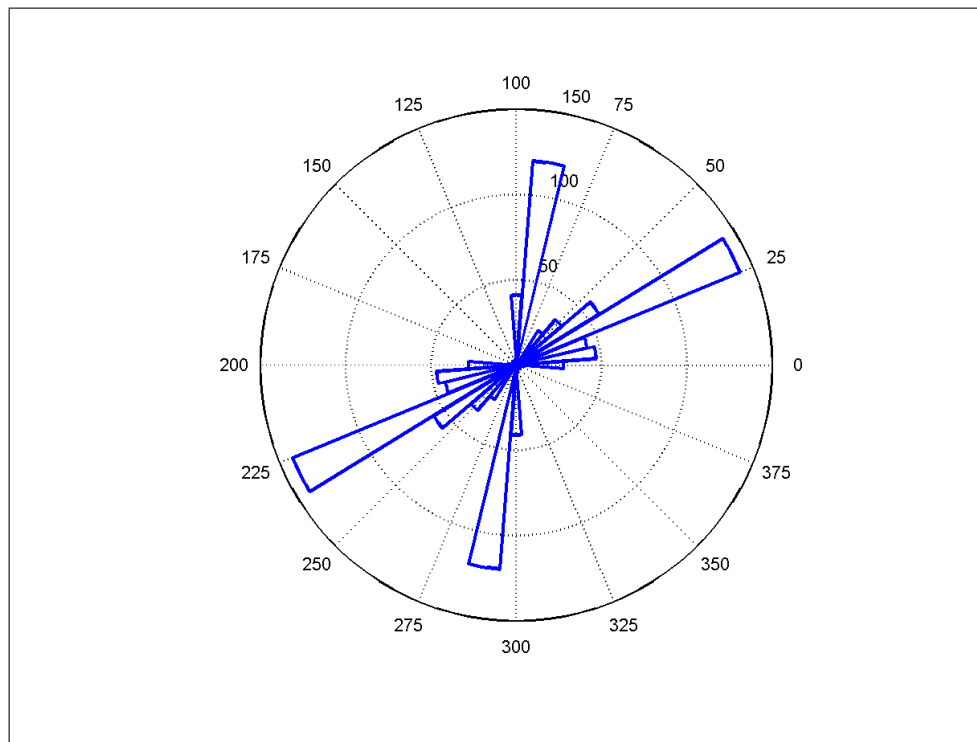


Abbildung 4.17: Richtungsrose: DT2-Modell

Die Integration der geotechnischen Beobachtungen und der geologisch bekannten Strukturen in die Strainanalyse mit geodätischen Beobachtungen führt zu zutreffenderen und detaillierteren Aussagen zum Verschiebungs- und Deformationsverhaltens der Überwachungsgebietes.

4.2 Sprengverdichtungsversuche

Zur Untersuchung der Zusammenhänge und Gesetzmäßigkeiten bei Verdichtungssprengungen wurden vom Institut für Geotechnik der TU Bergakademie Freiberg 6 Modellversuche durchgeführt. Die Ergebnisse dieser Versuche sind u.a. in [Tamaskovics und Klapperich 2000] und in [Tamaskovics 2001] dargestellt. Die Versuche wurden durch das Institut für Markscheidewesen und Geodäsie der TU Bergakademie Freiberg meßtechnisch begleitet. Die durch die Verdichtungssprengungen verursachten Bodenbewegungen wurden aus der photogrammetrischen Auswertung der dabei entstandenen Meßbilder bestimmt [Vogl und Martienßen 1995].

Die aus den Meßbildern (z.B. Abb. 4.18) gewonnen Verschiebungsdaten an der Oberfläche und

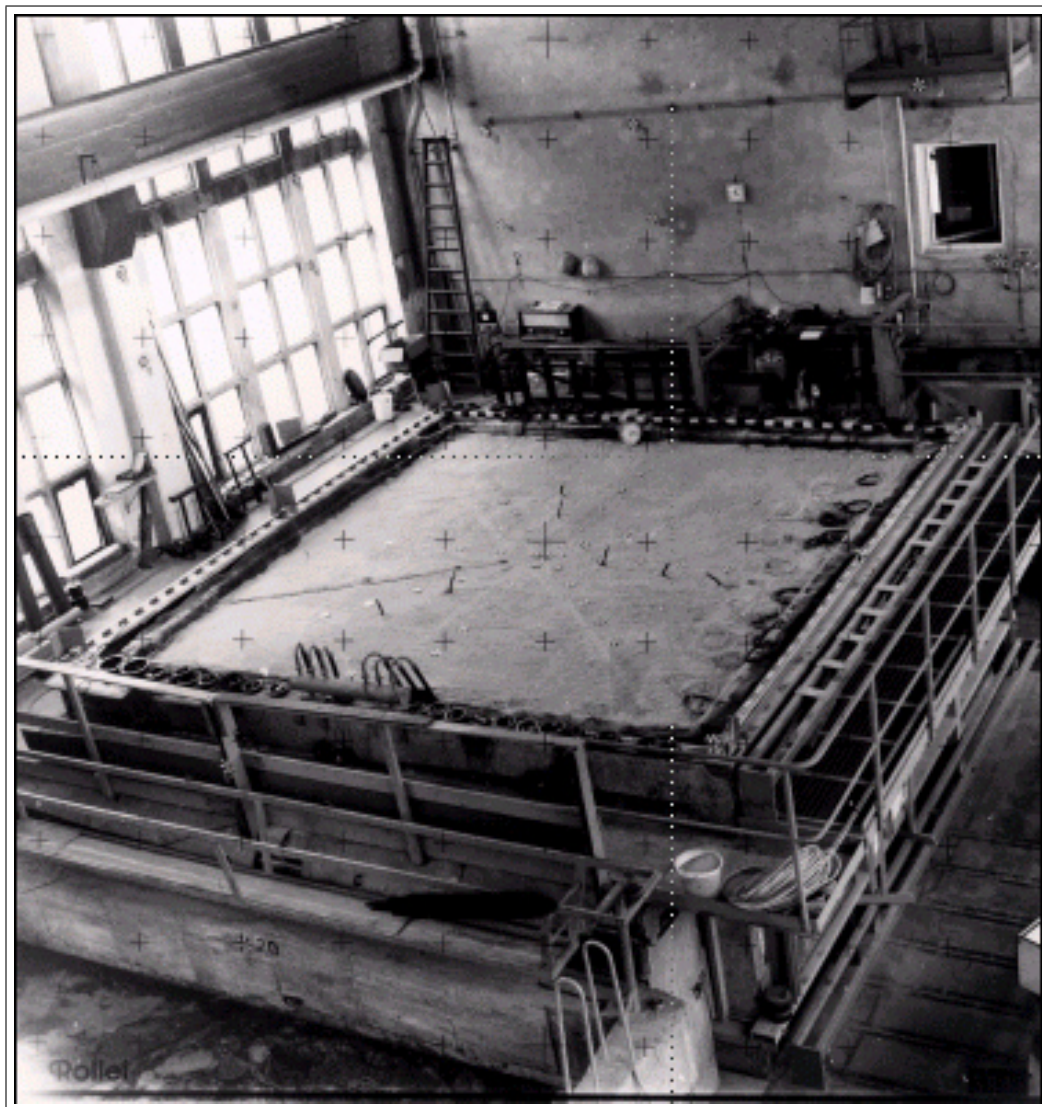


Abbildung 4.18: Meßbild der Modellversuchsanlage [Vogl und Martienßen 1995]

die Kenntnis des Versuchsaufbaues gestatten eine 3D-Strainanalyse. Diese Strainanalyse ist besonders deshalb interessant, als deren Ergebnisse mit den aus Proben und gravimetrisch bestimmten Dichteänderungen verglichen werden können.

Die Modellversuchsanlage Abb. 4.18 und Abb. 4.19 besteht aus einem äußeren Betonbecken und einem inneren Holztrog. Der Holztrog hat die Abmessungen $5 \times 5 \times 2\text{ m}$. Zwischen Betonbecken und Holztrog befindet sich Wasser. In die Modellversuchsanlage wurde das Probenmaterial, die Sprengladung und verschiedene Meßinstrumente eingebaut. Das Probematerial wurde vorverdichtet, um eine Sackung beim Wasseranstieg zu vermeiden. Anschließend wurde eine Sprengladung etwa im Zentrum des Holztroges und $0,9\text{ m}$ unter der Oberfläche gezündet. Die Folge der Sprengung sind geotechnische Effekte, die zur einer Verdichtung des Lockergesteins führen. Die Verdichtung führt zur Ausbildung eines Senkungstrogens an der Oberfläche. Zur Überwachung der daraus resultierenden Bodenbewegungen an der Oberfläche wurden sternförmig 41 Meßmarken in bis zu $2,0\text{ m}$ Entfernung vom Sprengpunkt angebracht (vgl. Abb. 4.18). Zur Orientierung der Meßbilder sind außerdem 20 Paßpunkte vermarktet worden. Der Sprengversuch wurde durch Aufnahmen nach 1, 5, 10, 30 Sekunden, nach 1, 2, 5, 10, 30 Minuten, nach 1, 5, 10 Stunden und nach 1, 2, 5 Tagen dokumentiert (s. [Vogl und Martienßen 1995]). Dieser Versuch wurde insgesamt fünfmal wiederholt. Für den Endzustand nach 5 Tagen des 6. Versuches ist

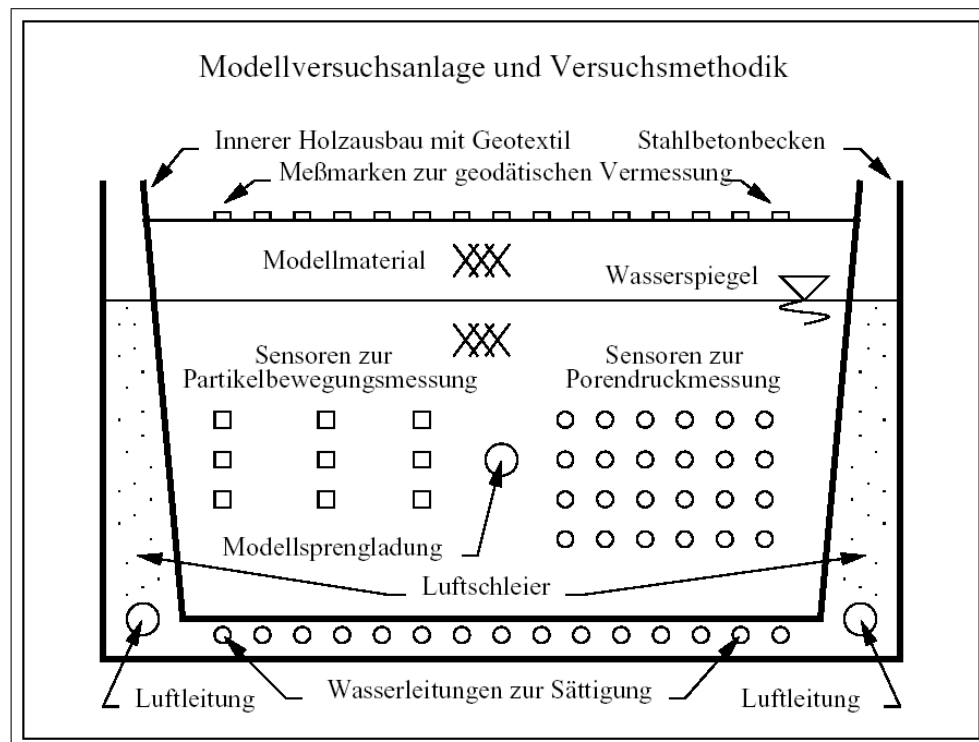


Abbildung 4.19: Übersicht der Modellversuchsanlage [Tamaskovics und Klapperich 2000]

exemplarisch eine Strainanalyse durchgeführt worden.

4.2.1 Strainanalysen zum Sprengverdichtungsversuch

Aus den Meßbildern der photogrammetrischen Überwachung können die Horizontalverschiebungen u_1 , u_2 und die Senkungen u_3 der Meßmarken direkt bestimmt werden (Abb. 4.21). Zur Beschreibung der Verschiebungen und Verformungen des durch die Verdichtung entstandenen Senkungstrogos kann die Lehmannsche Trogtheorie aus der Bergschadenskunde verwendet werden ([Kratzsch 1997]). Allerdings ist zu beachten, daß die Versuchsanlage zu klein ist, um den vollständigen Senkungstrog zu beobachten. Deswegen werden die Ergebnisse der Strainanalyse vor allem den zentralen Bereich beschreiben. Die Bewegungen der Punkte am linken Trogrand weichen vom allgemein sehr homogenen Verschiebungsfeld ab. Da aber kein Grund vorliegt, weshalb diese Verschiebungen als grobe Fehler gedeutet werden müßten, verbleiben sie in der weiteren Auswertung.

Wie oben ausgeführt, bedarf eine 3D-Strainanalyse außer den gewonnenen Meßdaten noch Annahmen, die hier aus dem Versuchsaufbau abgeleitet werden können. Dabei sind zwei Wege denkbar:

1. die Modellierung durch absolute Verschiebungen, indem Verschiebungen am Boden des Modelles angenommen werden, oder
2. die Modellierung durch relative Verschiebungsänderungen zwischen Oberfläche und dem Boden des Troges.

Die erste Variante ist unter Umständen numerisch einfacher zu handhaben. Da aber in einem Freilandversuch nur geotechnische Instrumente verwendet werden können, liegen dort keine absoluten Verschiebungsbeobachtungen für Punkte in der Teufe vor. Deswegen wird auch in diesem Anwendungsfall die Modellierung 2 verwendet.

Da nach [Tamaskovics 2001] keine anderen Informationen vorliegen, wird angenommen, daß die Verschiebungen mit zunehmender Teufe abnehmen und am Boden des Modelltroges gleich Null sind. Weiterhin wird angenommen, daß die Verschiebungen gleichmäßig abnehmen, da aus dem Versuchsaufbau – insbesondere aus nukleargeophysikalischen Messungen – kein anderer Verlauf vorgegeben ist. Damit würde in jedem Kettenglied einer Extensometer- oder Inklinometerkette, die von der Oberfläche bis zum Boden reicht, die gleiche Änderung beobachtet. Deswegen kann die Kette als ein einziges Extensometer bzw. Inklinometer betrachtet werden. Die Modellierung für die Berechnungen wurde so gewählt, daß an jeder Meßmarke an der Oberfläche

ein Extensometer und zwei Inklinometer senkrecht eingebaut wurden, deren Endpunkte sich am Boden des Troges befinden. Dies entspricht den aus dem Versuchsaufbau resultierenden Rahmenbedingungen. Die Modellierung in dieser Art und Weise entspricht zwar den technisch möglichen Messungen, ist aber für praktische Zwecke überdimensioniert.

Zur Beschreibung der Deformation durch die Sprengung ist in erster Linie eine 3D-Strainanalyse sinnvoll. Besonders interessant ist die Volumenänderung Δ_3 , weil aus ihr die Dichteänderung $\Delta\rho$ bestimmt werden kann. Sie berechnet sich aus:

$$\begin{aligned}\Delta\rho &= \rho' - \rho = \frac{m}{V'} - \frac{m}{V} = \frac{m}{(1 + \Delta_3) \cdot V} - \frac{m}{V} \\ &= \frac{m}{V} \left(\frac{1}{1 + \Delta_3} - 1 \right) = \rho \left(\frac{1}{1 + \Delta_3} - 1 \right) = -\rho \left(\frac{\Delta_3}{1 + \Delta_3} \right)\end{aligned}\tag{4.1}$$

Darin sind:

- ρ – Dichte in der Nullepoche und
- ρ' – Dichte in der Folgepoche

Nebenprodukt der 3D-Strainanalyse ist die Beschreibung der Oberfläche im Sinne einer 2D-Strainanalyse. Die separate Auswertung von 2D- und 3D-Strainanalyse ist theoretisch begründet und praktisch sinnvoll. Theoretisch kann die Trennung dadurch begründet werden, daß nur das Verschiebungsfeld an der Oberfläche beobachtet worden ist, so daß die 2D-Strainanalyse die tatsächlich vorhandene Deformationen beschreibt. Die Ursachen für lokale Abweichungen der 3D-Strainparameter vom theoretischen Verlauf können also nur in den beobachteten Verschiebungen an der Oberfläche liegen.

Sinnvoll ist die Trennung durch die Tatsache, daß die 2D-Strainanalyse die klassische Beschreibung von Deformationen an der Oberfläche ohne Informationen über das Verhalten in der Tiefe darstellt, während die 3D-Strainanalyse die Deformationsbeschreibung mit Integration von geotechnischen Beobachtungen darstellt, wie sie in dieser Arbeit entwickelt wurde.

4.2.2 Trendmodell

Das Trendmodell zur Beschreibung der Deformation kann aufgrund der vorhandenen Beobachtungen höchstens vom Modelltyp IV (vgl. Tab. 3.3) sein, da die 2. Ableitungen in x_3 -Richtung nicht berechenbar sind. Die Ergebnisse des Modelltestes sind in Tabelle 4.3 zusammengefaßt.

Die Testgrößen sind sowohl beim Globaltest auf Signifikanz aller Parameter als auch beim Test auf Signifikanz der einzelnen Parameter deutlich größer als der Wert der F-Verteilung.

Globaltest und Test der Zusatzparameter	Quadrat-Summe	Freiheits-grade	Mittlere Quadratsumme	Test-größe	Wert der F-Verteilung
vollst. Modell (Typ IV)	$60,71 \cdot 10^{-3}$	9	$6,746 \cdot 10^{-3}$	93,3	1,92
reduz. Modell (Typ III)	$49,66 \cdot 10^{-3}$	4	$12,42 \cdot 10^{-3}$		
Differenz	$11,05 \cdot 10^{-3}$	5	$2,211 \cdot 10^{-3}$	30,6	2,25
Residuen	$17,07 \cdot 10^{-3}$	236	$72,33 \cdot 10^{-6}$		

Tabelle 4.3: Modelltest für den Sprengverdichtungsversuch mit 95% Sicherheit

Damit sind alle Parameter des Modells vom Typ IV – also des Strainmodells – signifikant. Der Regressionskoeffizient (3.64) ist für dieses Modell $\rho = 0,78$, mithin werden die Beobachtungen sehr gut durch dieses Modell beschrieben. Weiterhin ist die Beschreibung durch den Modelltyp IV signifikant besser als durch den Modelltyp III.

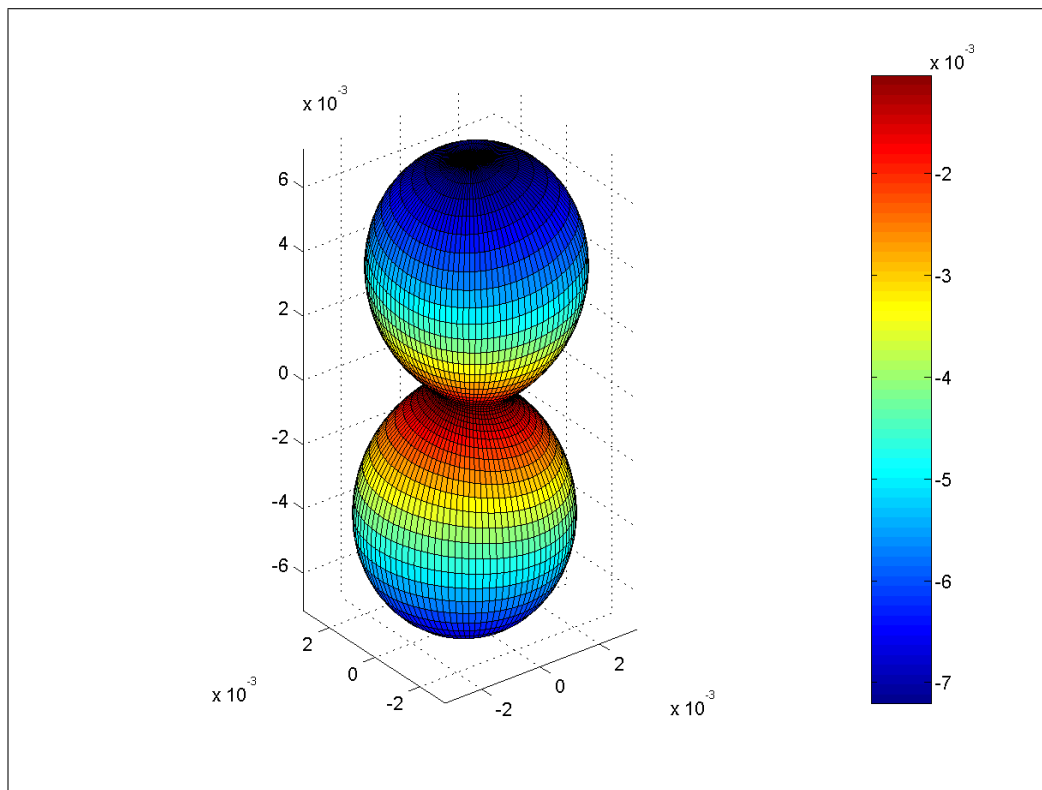


Abbildung 4.20: Differenzfigur des Trendmodells für die 3D-Strainanalyse

Der globale Verschiebungsvektor ist:

$$\underline{\mathbf{d}} = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -0.027 \end{pmatrix}.$$

Der Tensor f_{ij} der ersten Ableitungen des Strainmodells und der Straintensor $\underline{\mathbf{e}}$ lauten:

$$\underline{\mathbf{f}} = 10^{-3} \cdot \begin{pmatrix} -3,0 & 0,4 & -0,9 \\ 0,5 & -2,6 & -0,5 \\ -0,0 & -0,0 & -14,3 \end{pmatrix} \quad \underline{\mathbf{e}} = 10^{-3} \cdot \begin{pmatrix} -3,0 & 0,4 & -0,4 \\ 0,4 & -2,6 & -0,2 \\ -0,4 & -0,2 & -14,3 \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Differenzfigur ist in Abb. 4.20 dargestellt. Deutlich zu erkennen ist ihre deutliche Taillierung. Sie entsteht dadurch, daß die Ursache für die Volumenänderung des Gesamtkörpers in erster Linie die Senkungen sind, die etwa um den Faktor 5 größer sind als die Horizontalverschiebungen. Aus dem Straintensor $\underline{\mathbf{e}}$ folgt die globale Volumendilatation mit $\Delta_3 = -19,8 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$ und mit einer angenommenen Lagerungsdichte von $\rho = 1,55 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ nach [Tamaskovics und Klapperich 2000] die Dichteänderung über den gesamten Modelltrog von $\Delta\rho = 0,031 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.

4.2.3 Kovariogramm

Für die Schätzung wurde als Kernfunktion die Maternsche Kovarianzfunktion (3.42) verwendet:

$$c(\underline{\mathbf{h}}) = \frac{\sigma^2}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)} \left(\frac{2\nu^{\frac{1}{2}}\|\underline{\mathbf{h}}\|}{r} \right)^{\nu} \mathcal{K}_{\nu} \left(\frac{2\nu^{\frac{1}{2}}\|\underline{\mathbf{h}}\|}{r} \right) + \sigma_Q^2 \quad (3.42)$$

Die Parameter sind:

- σ^2 die Varianz des Signals
- σ_Q^2 die Varianz der Störgröße
- r die Reichweite, ein Maß für die Nachbarschaftsbeeinflussung
- ν die Steuergröße der Differenzierbarkeit bei $\mathbf{h} = 0$.

Durch die Anpassung an die Beobachtungen wurden bestimmt:

- $\sigma^2 = 2,5 \text{ mm}^2$
- $\sigma_Q^2 = 0 \text{ mm}^2$
- $r = 1,1 \text{ m}$
- $\nu = 2$.

Das bedeutet, daß das untersuchte Merkmal – das Verschiebungsfeld – wegen $\nu = 2$ zweimal differenzierbar ist und wegen $\sigma_Q^2 = 0 \text{ mm}^2$ nicht von Störgrößen beeinflußt wird, also kein sogenannter Nuggeteffekt (vgl. z.B. [Cressie 1993]) auftritt.

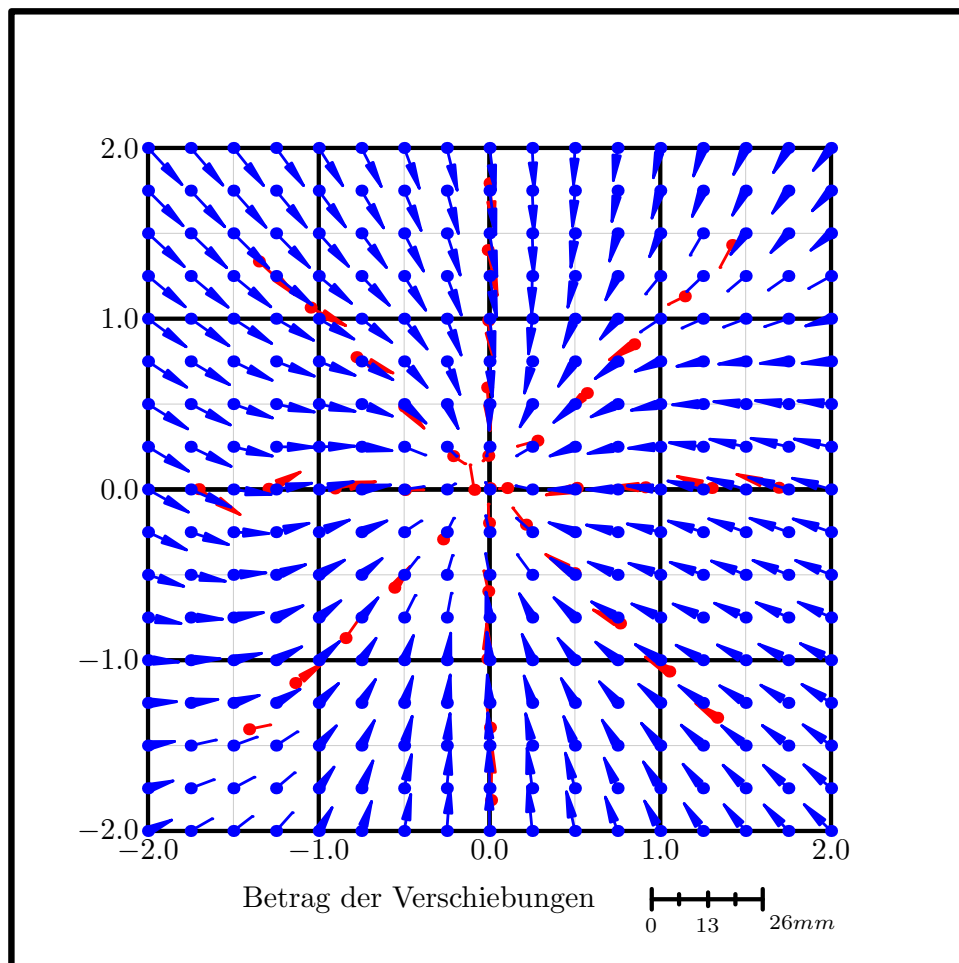


Abbildung 4.21: Horizontalverschiebungen an der Oberfläche

4.2.4 2D-Strainanalyse

Das Verschiebungsfeld an der Oberfläche ist meßtechnisch erfaßt worden. Damit ist eine 2D-Strainanalyse ohne weitere Annahmen durch Auswertung der tatsächlich beobachteten Verschiebungen möglich.

Durch die Sprengung wird die Lagerungsdichte erhöht. Die höchste Verdichtung wird in der Mitte des Modells erreicht, woraus die gemessenen Senkungen mit bis zu $u_3 = 84 \text{ mm}$ resultieren. In Abbildung 4.22 sind die interpolierten Senkungen dargestellt. Die dabei dargestellte maximale Senkung beträgt nur knapp $u_3 = 80 \text{ mm}$. Diese Abweichung resultiert einerseits aus dem Interpolationsraster von $10 \times 10 \text{ cm}$ und andererseits aus der Reichweite, die mit $r = 1,1 \text{ m}$ für das Zentrum etwas zu groß gewählt ist. Die Senkungen nehmen zum Rand hin ab, erreichen aber innerhalb des Modells nicht Null.

Die Horizontalverschiebungen weisen alle in Richtung des Zentrums und nehmen vom Rand mit $\| \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}^t \| \approx 10 \text{ mm}$ bis auf Null über der Sprengladung ab. Allerdings weichen mehrere Beobachtungen von diesem generellen Trend ab. Vor allem die Horizontalverschiebungen am linken Rand weichen von der Richtung zum Zentrum ab. Ursache könnten Inhomogenitäten beim Einbau des Sandes in den Modelltrog sein.

Das Zentrum des Senkungstroges befindet sich über der Sprengladung etwa im Koordinatenursprung. Bei der weiteren Auswertung muß beachtet werden, daß sich in der Umgebung der Sprengladung die Horizontalverschiebungen schnell ändern, so daß hier auch abrupte Änderungen der Deformationen zu erwarten sind. Dies ist allerdings aufgrund der Nähe zur Sprengladung auch nicht ungewöhnlich.

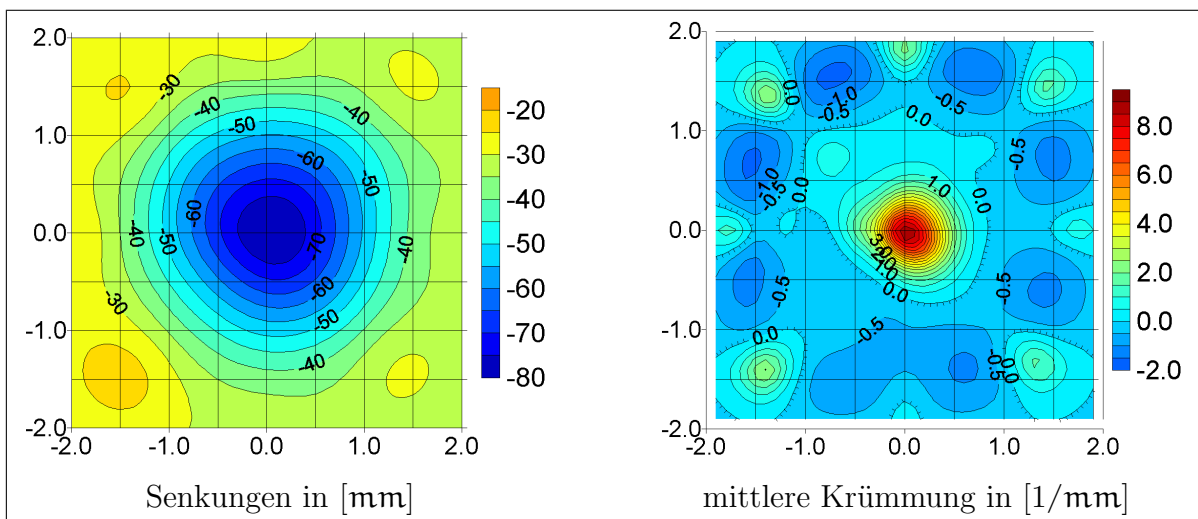


Abbildung 4.22: Senkungen und mittlere Krümmung H an der Oberfläche

Trotz der Anpassung der Parameter der Kernfunktion wirkt der Senkungstrog am Rand achteckig. Ursache dafür ist der deutlich größere Stützpunktabstand im Vergleich zum Zentrum. Diese Interpolationsartefakte führen zu weiteren Artefakten in den abgeleiteten Größen.

Die Schiefungen $\frac{\partial u_3(\mathbf{X})}{\partial x_1}$, $\frac{\partial u_3(\mathbf{X})}{\partial x_2}$ (Abb. 4.23) zeigen den für einen Senkungstrog zu erwartenden Verlauf. In den Ecken sind die Schiefungen gering, erreichen bei ≈ 1 m Abstand vom Zentrum ihr Maximum mit $\approx 40 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$ und nehmen dann wieder ab.

Die mittlere Krümmung H (2.38) liegt zwischen $-2 \frac{1}{\text{mm}}$ und $8,5 \frac{1}{\text{mm}}$ (Abb.4.22). Die Minima und die lokalen Maxima am Rand sind allerdings Artefakte der Interpolation. Zwischen den äußeren Stützpunkten streben die interpolierten 3D-Verschiebungen gegen den Trend, da hier die Reichweite zu klein ist. Dieses „Aufwölben“ der Senkungen (vgl. Abb.4.22) führt in der Konsequenz zu negativen Krümmungen zwischen den Stützpunkten und an den Stützpunkten selbst zu zu großen Krümmungen. Mit einer größeren Reichweite – die allerdings im Zentrum

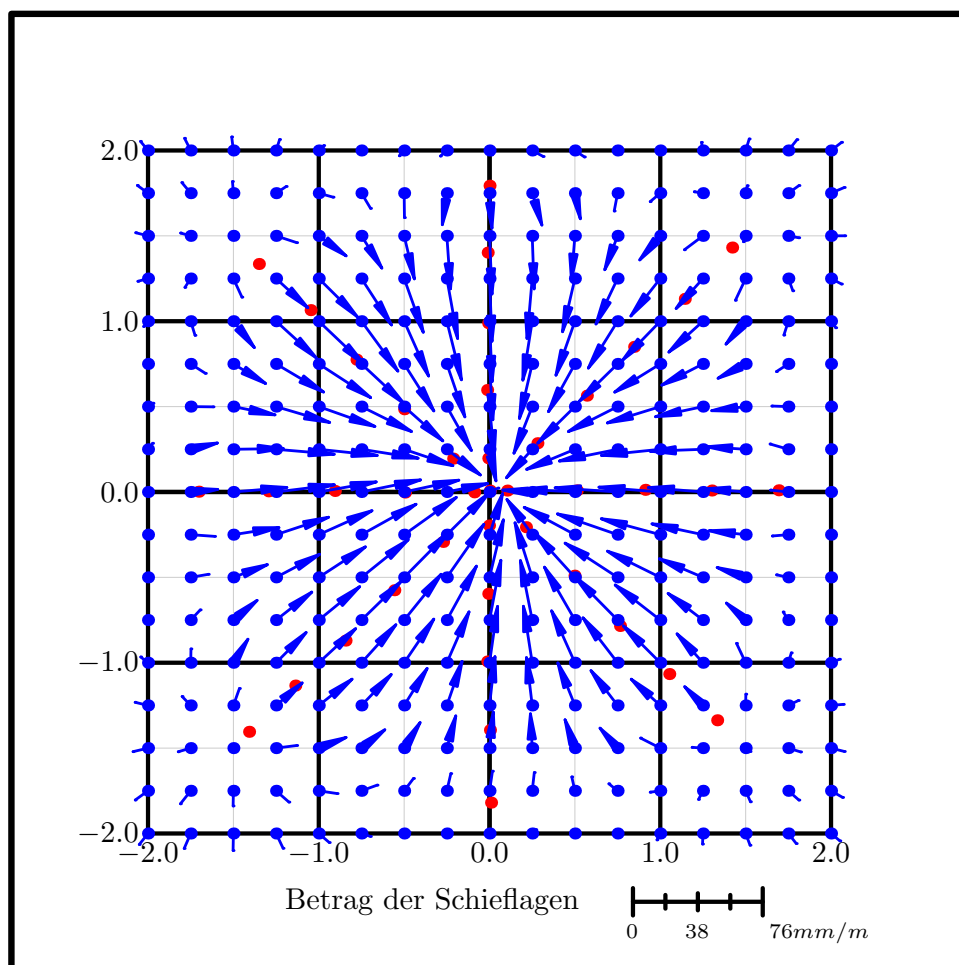


Abbildung 4.23: Schiefungen an der Oberfläche [mm/m]

zu verfälschten Werten führte – errechneten sich allenfalls geringe positive Krümmungen. Das Krümmungsmaximum im Zentrum und die Krümmungen nahe Null in der Umgebung zeigen, daß die Bezeichnung Senkungstrog insofern mißverständlich ist, da sie einen runden Verlauf im Zentrum suggeriert obwohl hier eher eine Spitze vorliegt. Besser wäre also die Bezeichnung Senkungstrichter zur Charakterisierung der Sprengverdichtung.

Die horizontale Rotation ϑ_3 ist geprägt durch die Abweichung der Horizontalverschiebungen am linken Rand von der Richtung zum Zentrum des Senkungstroges (Abb.4.24). Beginnend am linken Rand steigt die Rotation ϑ_3 von $-1 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$ bis auf $-6 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$ an. Anschließend nimmt die Rotation ϑ_3 wieder ab und geht in den entgegengesetzten Drehsinn über. Links oberhalb des Zentrums hat diese mathematisch positive Rotation ihr Maximum mit fast $4 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$. Am rechten Rand tritt eine ähnliche Abfolge zweier gegenläufiger Rotationen auf. Allerdings sind hier die Beträge der Rotation mit $\vartheta_3 \approx \pm 2 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$ deutlich kleiner. Interessanterweise ist in Richtung

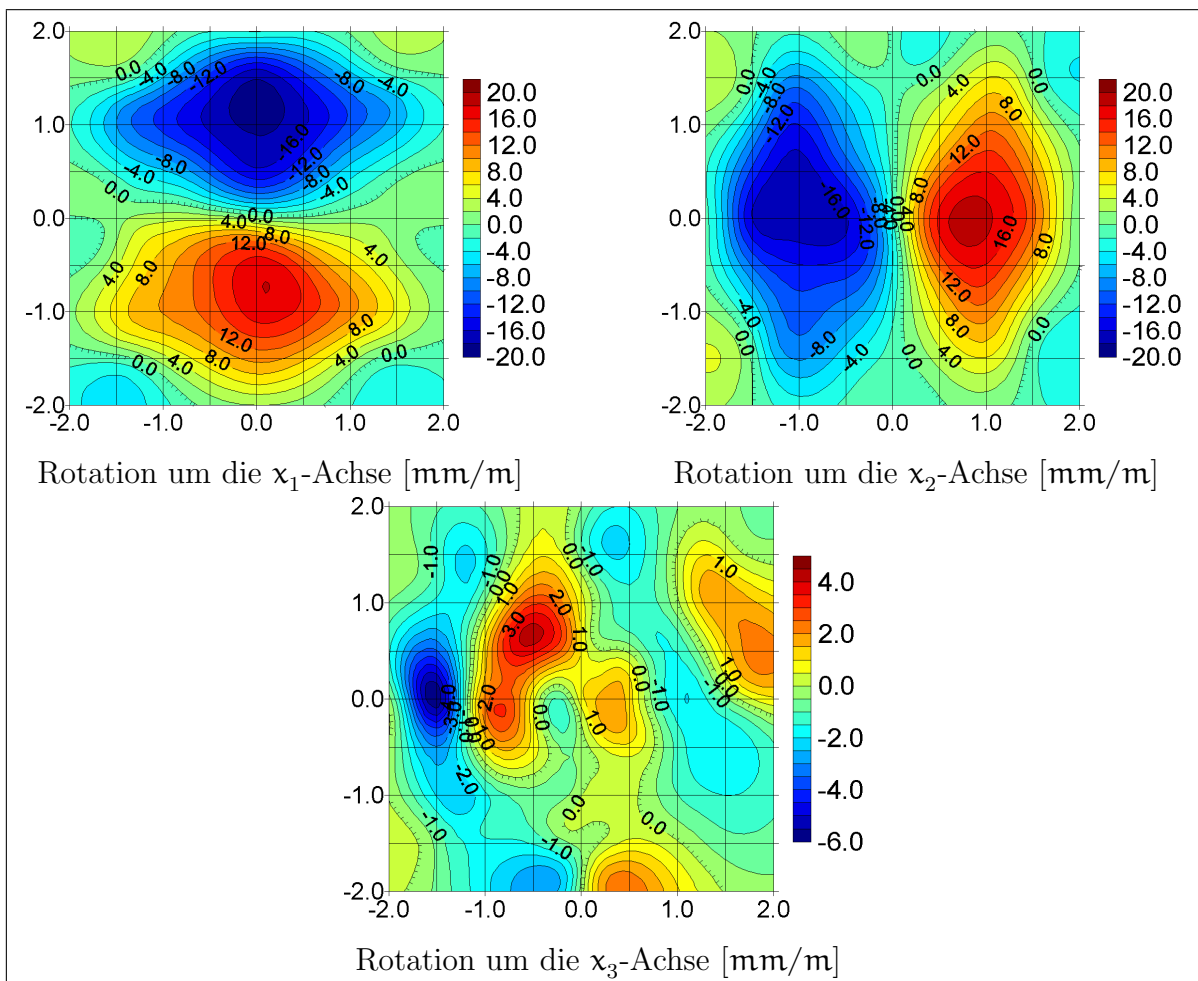


Abbildung 4.24: Horizontale Rotation und Flächendilatation

der x_2 -Achse keine solche Abfolge wiederzufinden. Die beiden gegenläufigen Rotationen im Zentrum des Senkungstrog resultieren aus einer einzigen im Verhältnis zu den umgebenden Verschiebungen relativ großen Verschiebung und sind Ausdruck der starken Verschiebungen und Verformungen im Bereich der Sprengladung.

Die Scherung γ_{12} an der Oberfläche wäre im Falle eines idealen Senkungstrog und damit homogenen Verschiebungsfeldes symmetrisch zu den Koordinatenachsen mit jeweils einem Extremum auf der Winkelhalbierenden eines jeden Quadranten. Das Ergebnis der Strainanalyse weicht von diesem idealen Ergebnis in einigen Punkten ab (Abb. 4.25). Die Horizontalverschiebungen am linken Rand, die auch die Rotationen ϑ_3 verursachen, führen zu einem Maximum der Scherung γ_{12} am linken Rand mit $\approx 7,5 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$. Im IV.-Quadranten wird dadurch das Mini-

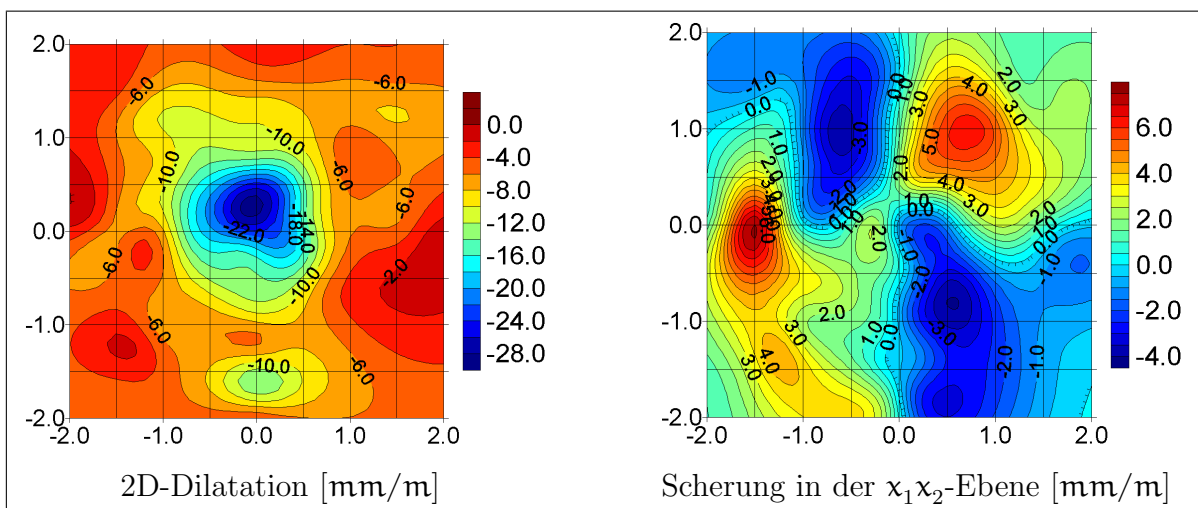


Abbildung 4.25: 2D-Dilatation und Scherung in der x_1x_2 -Ebene

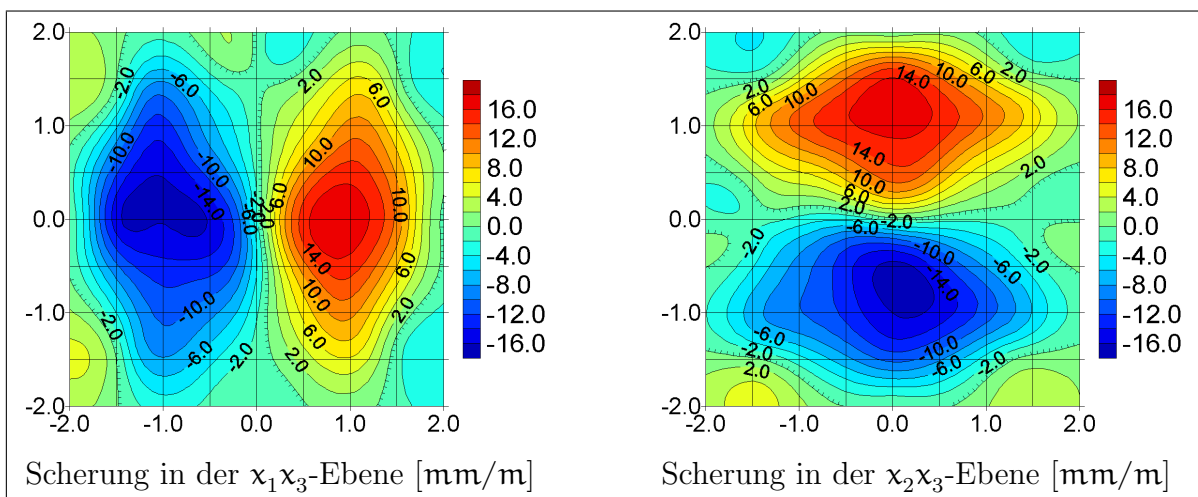


Abbildung 4.26: Scherung in der x_1x_3 - und x_2x_3 -Ebene

imum verschoben. Das Maximum der Scherung im I.-Quadranten ist mit $\approx 6,5 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$ ebenfalls betragsmäßig größer als die beiden Minima der Scherung im II.- und IV.-Quadranten, die nur etwa $-4 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$ erreichen. Im Zentrum des Senkungstroges führt der schnelle Wechsel der Richtung und Größe der Horizontalverschiebungen wie auch schon bei der Rotation ϑ_3 zu zwei entgegengesetzten Extrema mit $-1,3 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$ bzw. $1,7 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$.

Da der Senkungstrog sehr symmetrisch ist, liegt die Annahme nahe, daß auch die Horizontalverschiebungen und die daraus abgeleitete Dilatation ebenfalls symmetrisch seien. Wie aber schon die Rotation ϑ_3 und die Scherung γ_{12} ist die 2D-Dilatation sehr ungleichmäßig und zeigt mehrere Wechsel zwischen Extrema (Abb. 4.25). Das Dilatationsminimum ist gegen den Ursprung in Richtung der positiven x_2 -Achse verschoben. Das Zentrum des Senkungstroges und das Maximum der Pressung sind also nicht identisch. An den Rändern, insbesondere am linken

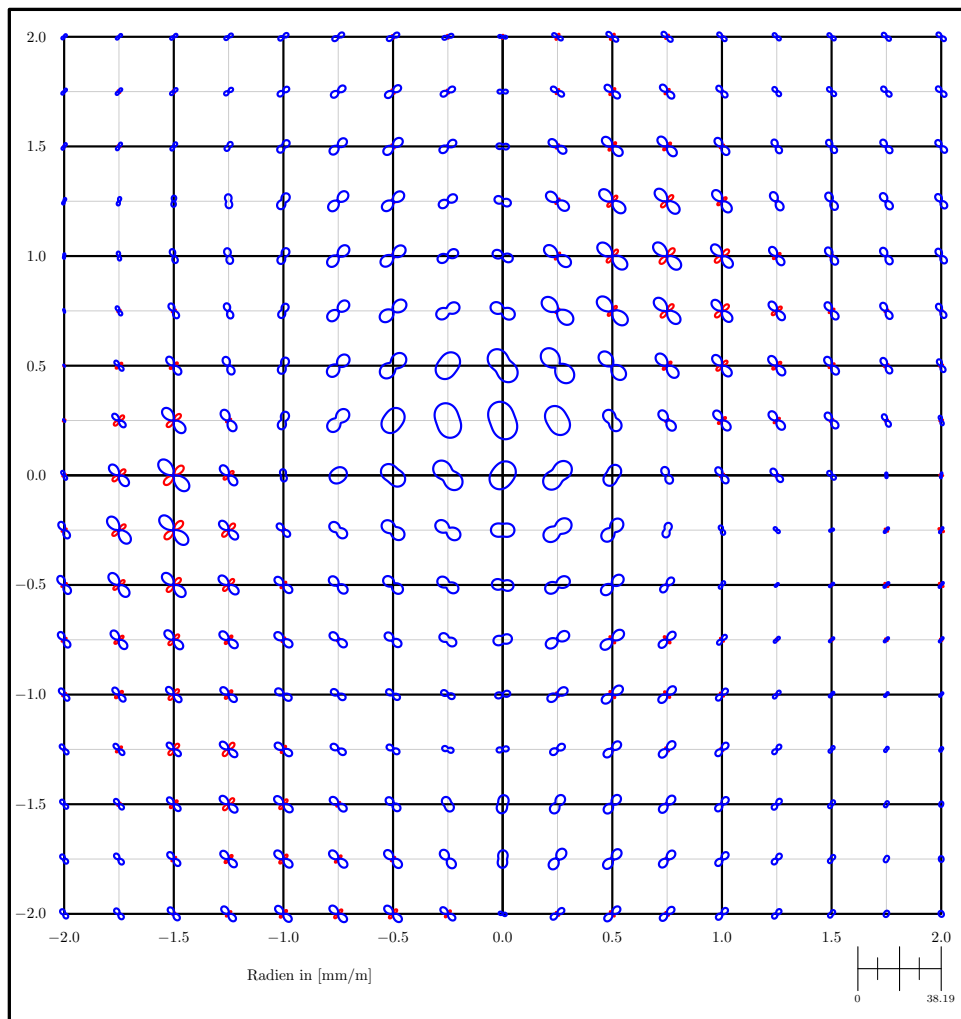


Abbildung 4.27: Differenzkörper [mm/m]

und am unteren Rand nimmt die 2D-Dilatation nicht stetig zu, sondern hat hier lokale Maxima. Am linken Rand ist die Ursache die deutlich unterschiedliche Verschiebungsrichtung der Horizontalverschiebungen. In der Darstellung der Differenzfiguren (Abb. 4.27) und im Diagramm der Scherung γ_{12} (Abb. 4.25) kann man deutlich erkennen, daß die Dilatationen in diesem Bereich nur deswegen relativ gering sind, weil sich hier Zerrungen und Pressungen überlagern. Die Dilatation erreicht ihr Maximum im Zentrum mit $\approx -30 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$ und nimmt zu den Rändern hin auf $\approx -3 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$ ab. Eine weitere deutliche Anomalie befindet sich am unteren Rand. Bewegt man sich entlang der x_2 -Achse Richtung Zentrum, dann fällt auch hier die Dilatation erst auf Werte um $\approx -13 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$ ab, steigt dann wieder auf etwa $-3,5 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$ an und nimmt dann Richtung Zentrum wieder ab. Eine zweite, allerdings betragsmäßig deutlich kleinere lokale Anomalie mit einem kleinen Anstieg befindet sich in der rechten oberen Ecke.

Die gemeinsame Darstellung der Zerrung/Pressung und der Scherung γ_{12} in Form der Differenzfiguren (Abb. 4.27) ist ein wichtiges Hilfsmittel zur vollständigen Erfassung der Deformationen an der Oberfläche. Gerade das Zusammenspiel von 2D-Dilatation und der Scherung kann hier gut erkannt werden. An den Rändern des Senkungstrog es in Richtung des Zentrums zu Zerrungen und senkrecht dazu zu Pressungen. Lediglich am unteren Rand auf der x_2 -Achse kommt es in beiden Richtungen zu Pressungen. Die Pressung in Richtung der x_2 -Achse ist die Ursache für das Minimum der 2D-Dilatation (vgl. Abb. 4.25). Am linken Rand ist deutlich zu erkennen, daß der Wechsel zwischen den Extrema der Dilatation nur deswegen im Diagramm so gering erscheinen, weil sich an der selben Stelle – das Scherungsmaximum ist der Hinweis darauf – extreme Zerrungen in der einen Richtung mit ebenso großen Pressungen senkrecht

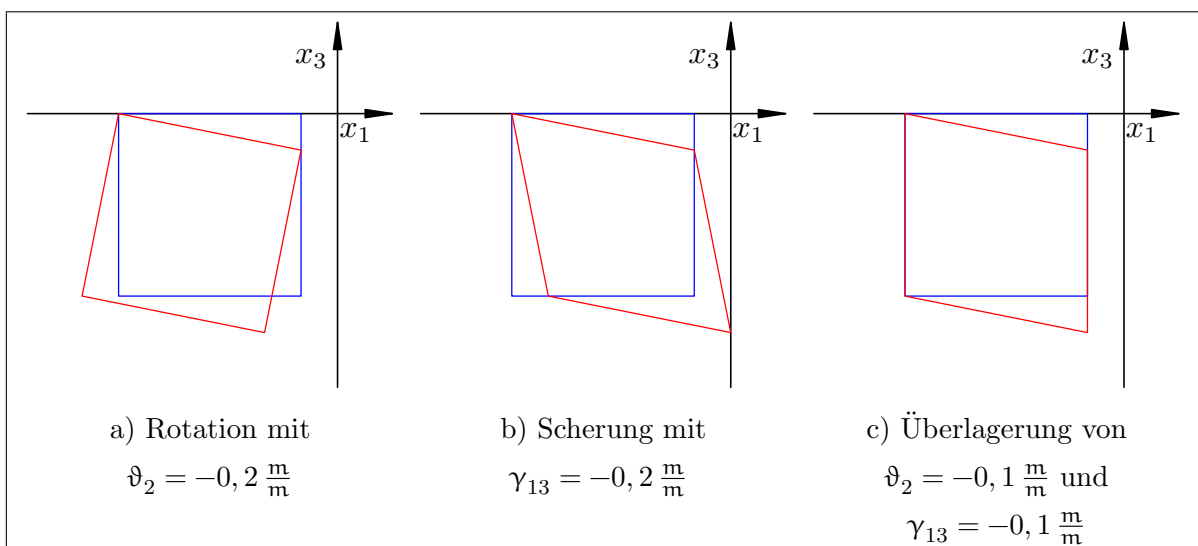


Abbildung 4.28: Überlagerung von Rotation und Scherung

dazu überlagert. Am rechten Rand sind die Deformationen relativ gering. Im Zentrum des Senkungstrogens sind die Deformationsfiguren fast kreisförmig. Da sich aber die beobachteten Horizontalverschiebungen nahe des Zentrums stark unterscheiden, sind die Deformationsfiguren auch nahe des Zentrums schon deutlich tailliert.

Zur Berechnung der bisher beschriebenen Deformationsparametern ϑ_3 , γ_{12} und Δ und der Schiefelage müssen nur Ableitungen nach x_1 und x_2 bekannt sein. Für die nachfolgend beschriebenen Rotationen ϑ_1 und ϑ_2 sowie die Scherungen γ_{23} und γ_{13} sind zusätzlich Ableitungen nach x_3 nötig. Insofern sind diese 4 Parameter schon Teil der 3D-Strainanalyse. Ihre Auswirkung auf die Oberfläche soll hier aber trotzdem kurz dargestellt werden, da sie ähnliche Aussagen wie die Schieflagen über die Veränderung der Oberfläche ermöglichen. Darüber hinaus sind die Ergebnisse dieser Berechnung in den 3D-Ergebnissen wiederzufinden. Die Abweichungen vom Trendmodell, die durch die beobachteten Verschiebungen hervorgerufen werden, sind hier klar zu erkennen, so daß ihre Deutung in der 3D-Strainanalyse erleichtert wird.

Sowohl die Rotationen ϑ_1 und ϑ_2 (Abb. 4.24) als auch die Scherungen γ_{23} und γ_{13} (Abb. 4.26) zeigen den erwarteten Verlauf. Interessant ist, daß die beiden jeweils sich ergänzenden Parameter ϑ_1 und γ_{23} bzw. ϑ_2 und γ_{13} einen relativ ähnlichen Verlauf besitzen. Das resultiert in erster Linie daraus, daß sich die Senkungen in der x_1 - x_2 -Ebene schnell ändern, während die Horizontalverschiebungen in x_3 -Richtung nur relativ langsam abnehmen.

Betrachtet man die Diagramme der Rotationen bzw. der Scherungen jedes für sich allein, so entstehen leicht Mißdeutungen. Zur Verdeutlichung der Gefahren bei der Interpretation soll die Auswirkung von Rotation und Scherung exemplarisch an einem Quadrat dargestellt werden (Abb. 4.28). In allen drei Darstellungen ist der Originalzustand blau und der Zustand nach der Transformation rot dargestellt. In allen drei Fällen ist die obere Seite des Quadrats gleich stark geneigt, d.h. es kann die gleiche Schiefelage an der Oberfläche beobachtet werden. Trotzdem ist in Anbetracht der Randbedingungen des Modells nur Fall c) richtig. Im Bild 4.28 a) rotiert das Quadrat mit $\vartheta_2 = -0,2 \frac{m}{m}$ um die x_2 -Achse. Das führt aber dazu, daß sich die beiden unteren Punkte vom Zentrum wegbewegen, was aber Zerrungen, mithin Volumenvergrößerung und damit Auflockerung zur Folge hätte. Würde nur eine Scherung von $\gamma_{13} = -0,2 \frac{mm}{m}$ wirken wie in Bild 4.28 b), dann würden mit zunehmender Tiefe die Horizontalverschiebungen zunehmen anstatt abzunehmen. Nur wenn wie in Bild 4.28 c) sich betragsmäßig gleiche Rotation und Scherung überlagern, entsteht eine Deformation, die den Randbedingungen der Sprengverdichtung entsprechen. Zur Beschreibung der Oberfläche ist zumindest in diesem Fall nur die Schiefelage ohne Gefahr einer Mißdeutung verwendbar, da sie ohne Ableitungen der Horizontalverschiebung in x_3 -Richtung berechnet wird.

Deswegen ist für eine Beschreibung der Senkungsänderungen an der Oberfläche die Schiefelage besser geeignet.

4.2.5 3D-Strainanalyse

Mit den photogrammetrischen Beobachtungen der Oberfläche und den aus den Annahmen über die Bewegungen zwischen Oberfläche und Boden berechneten geotechnischen Beobachtungen war eine 3D-Strainanalyse möglich. Die Aussagen der 2D-Strainanalyse finden sich in allen Ergebnissen der 3D-Strainanalyse wieder. Da für die Tiefe keine tatsächlichen Messungen vorliegen und die Verschiebungen am Boden verschwinden, sollten zu den in der 2D-Strainanalyse

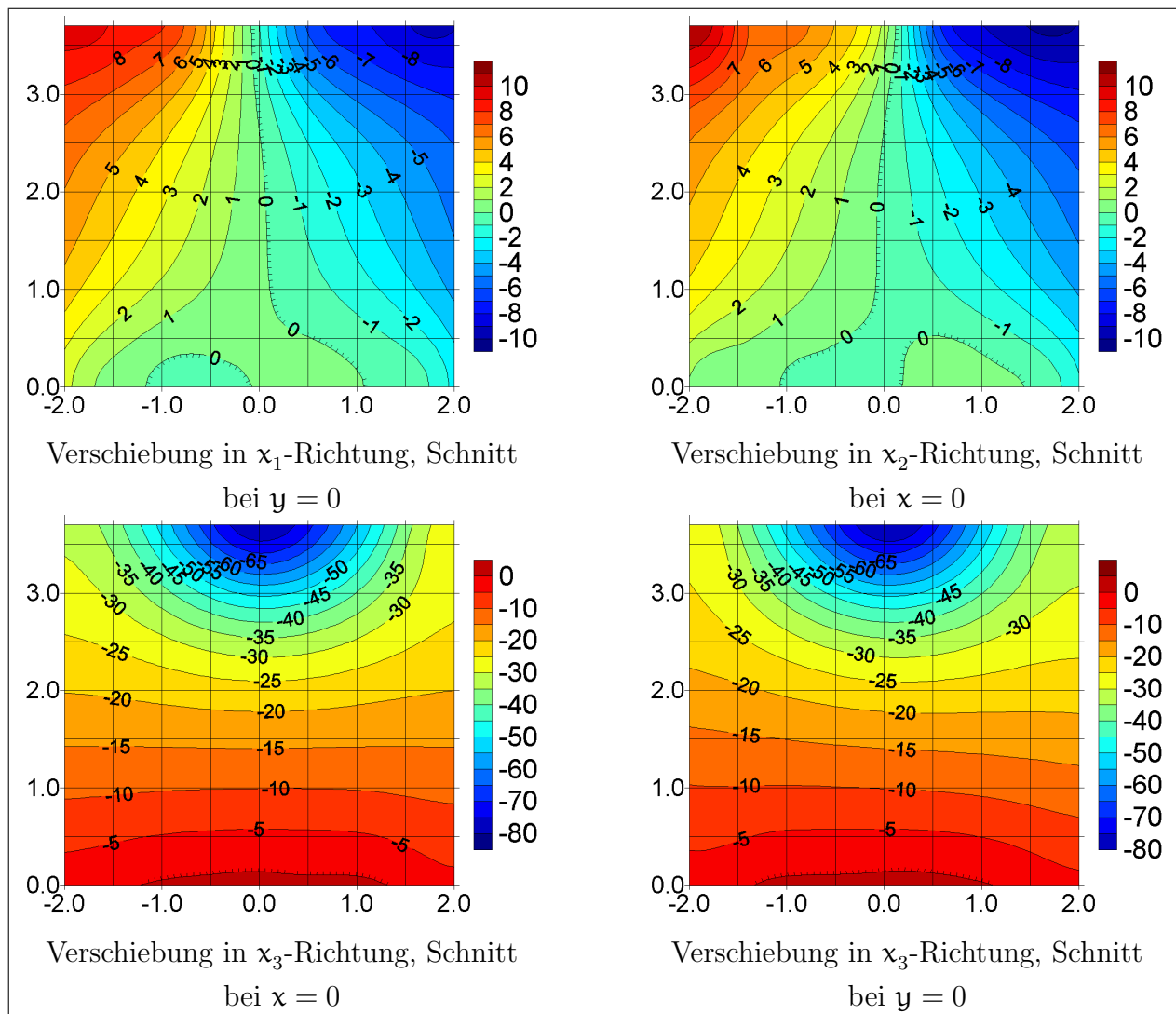


Abbildung 4.29: 3D-Verschiebung [mm]

beschriebenen Extrema keine weiteren Extrema aus der 3D-Strainanalyse hinzukommen. Durch die Optimierung der Parameter der Kovarianzfunktion erreichen die ersten und zweiten Ableitungen erst etwas unterhalb der Oberfläche ihre Extrema.

Da als Stützwerte Absolutwerte an der Oberfläche und Änderungen in x_3 -Richtung gegeben sind, müßten die interpolierten Werte gleichmäßig abnehmen. Je spitzer die Kovarianzfunktion am Ursprung ist, desto mehr stimmen die interpolierten Werte mit dieser Idealvorstellung überein. Wird die Kovarianzfunktion am Ursprung runder, dann wird der idealisierte Verlauf erst mit etwas Entfernung zu den Absolutwerten erreicht. Würde die Kovarianzfunktion aber am Ursprung spitzer modelliert, dann würde die Interpolation insgesamt unruhiger, die Wechsel stärker und v.a. am Rand käme es zu deutlichen Interpolationsartefakten.

Zusätzlich dazu liegen gerade in der Nähe des Ursprungs viele Stützpunkte nahe beieinander, die einen Anstieg der Senkung u_3 suggerieren und dadurch diesen „Anschwingeffekt“ durch die Kovarianzfunktion noch verstärken.

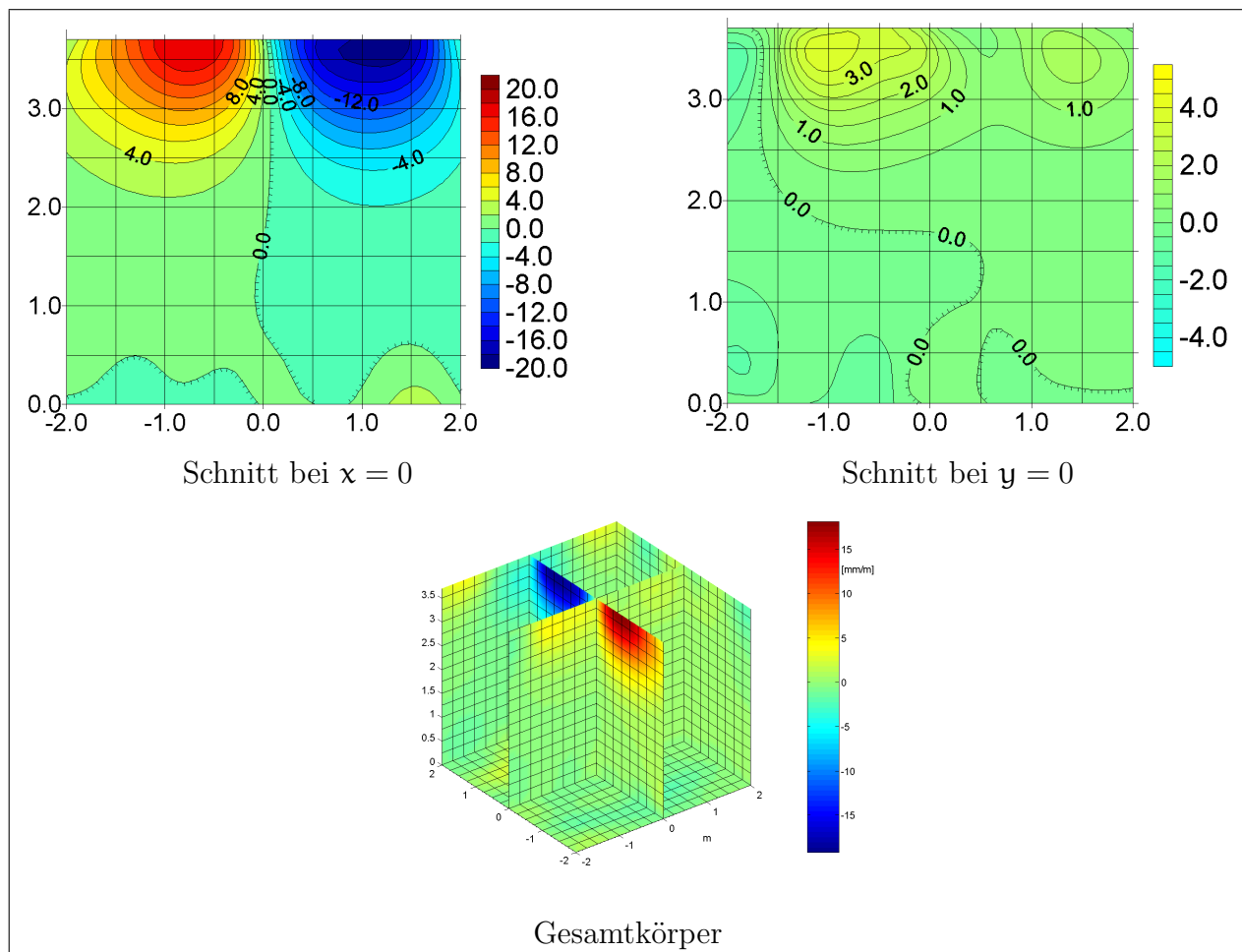


Abbildung 4.30: Rotation um die x_1 -Achse [mm/m]

Die Horizontalverschiebungen u_1 und u_2 (Abb. 4.29) nehmen von der Oberfläche zum Boden entsprechend der Modellierung gleichmäßig ab. In den Schnitten durch die Mitte des Senkungstrog senkrecht zu den Verschiebungskomponenten verlaufen ihre Isolinien im Zentrum fast senkrecht, während sie am Rand aufgrund der annähernd quadratischen Form des Modells mit etwa 50° einfallen. Ähnlich gleichförmig verändern sich die Senkungen (Abb. 4.29). Der Verlauf läßt sich nahe der Oberfläche am besten durch konzentrische Schalen beschreiben. Mit zunehmender Tiefe nimmt der Abstand der Isolinien zu und sie verlaufen annähernd parallel zum Boden. Entsprechend dieses Verschiebungsfeldes werden die Extrema der übrigen Deformationsparameter an der Oberfläche liegen und ihre Werte mit der Tiefe abnehmen.

Die Rotation ϑ_3 um die x_3 -Achse ist nur nahe der Oberfläche deutlich von Null verschieden. Die Extrema entsprechen den in der 2D-Strainanalyse gefundenen. So ist z.B. im Schnitt bei $x_2 = 0 \text{ m}$ bei $x_1 = 1,5 \text{ m}$ die Rotation mit $\vartheta_3 = -6 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$ wiederzufinden. Ab einer Tiefe von etwa $1,5 \text{ m}$ unter der Oberfläche ist die Rotation ϑ_3 nahe Null. Die Extrema am Boden des

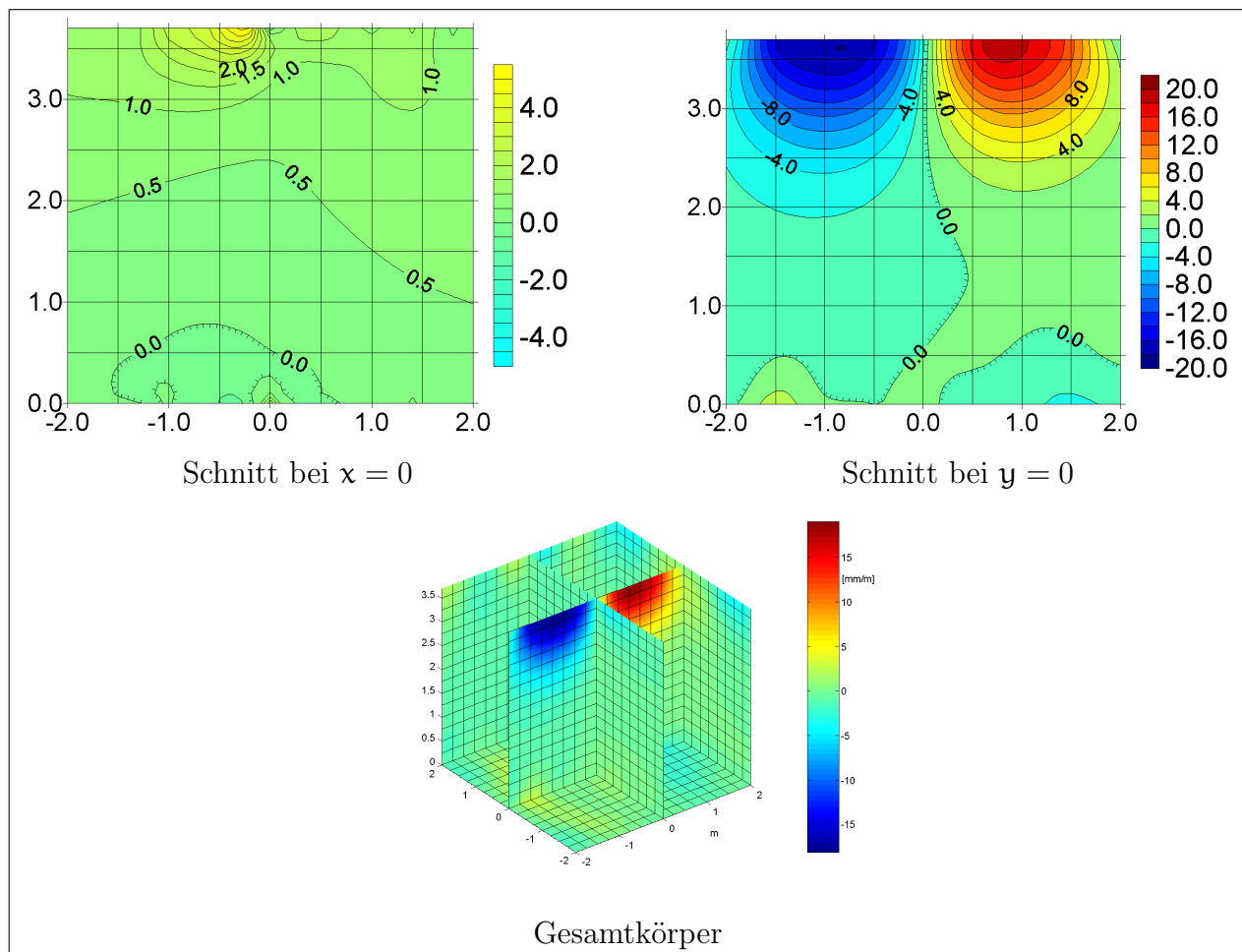


Abbildung 4.31: Rotation um die x_2 -Achse [mm/m]

Modells sind Artefakte der Interpolation.

Ähnlich verläuft die Scherung γ_{12} . Sie hat ihre Extrema an der Oberfläche und verschwindet mit zunehmender Tiefe. Sie nimmt dabei Werte zwischen $\gamma_{12} = -4 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$ und $7,5 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$ an. Das positive Maximum liegt am linken Rand und wird von der Horizontalverschiebung verursacht, die hier deutlich vom theoretischen Verlauf abweicht. Im Zentrum des Senkungstrog es liegen ein Maximum mit $\gamma_{12} = 2,3 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$ und ein Minimum mit $\gamma_{12} = -2 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$. Beide resultieren aus der einen im Vergleich mit den umliegenden Horizontalverschiebungen deutlich größeren Horizontalverschiebung. Im Gegensatz zur Rotation ϑ_3 ist die Scherung γ_{12} in den beiden Schnitten entlang der x_1 -Achse und der x_2 -Achse nicht gleich Null. Die Ursache dafür sind die vergrößerten Zonen mit positiver Scherung γ_{12} im I. und III. Quadranten, die dazu führen, daß die Isolinien $\gamma_{12} = 0$ sich im II. und IV. Quadranten befinden.

Die Rotation ϑ_1 um die x_1 -Achse verläuft sehr symmetrisch, wie die 2D-Strainanalyse vermuten

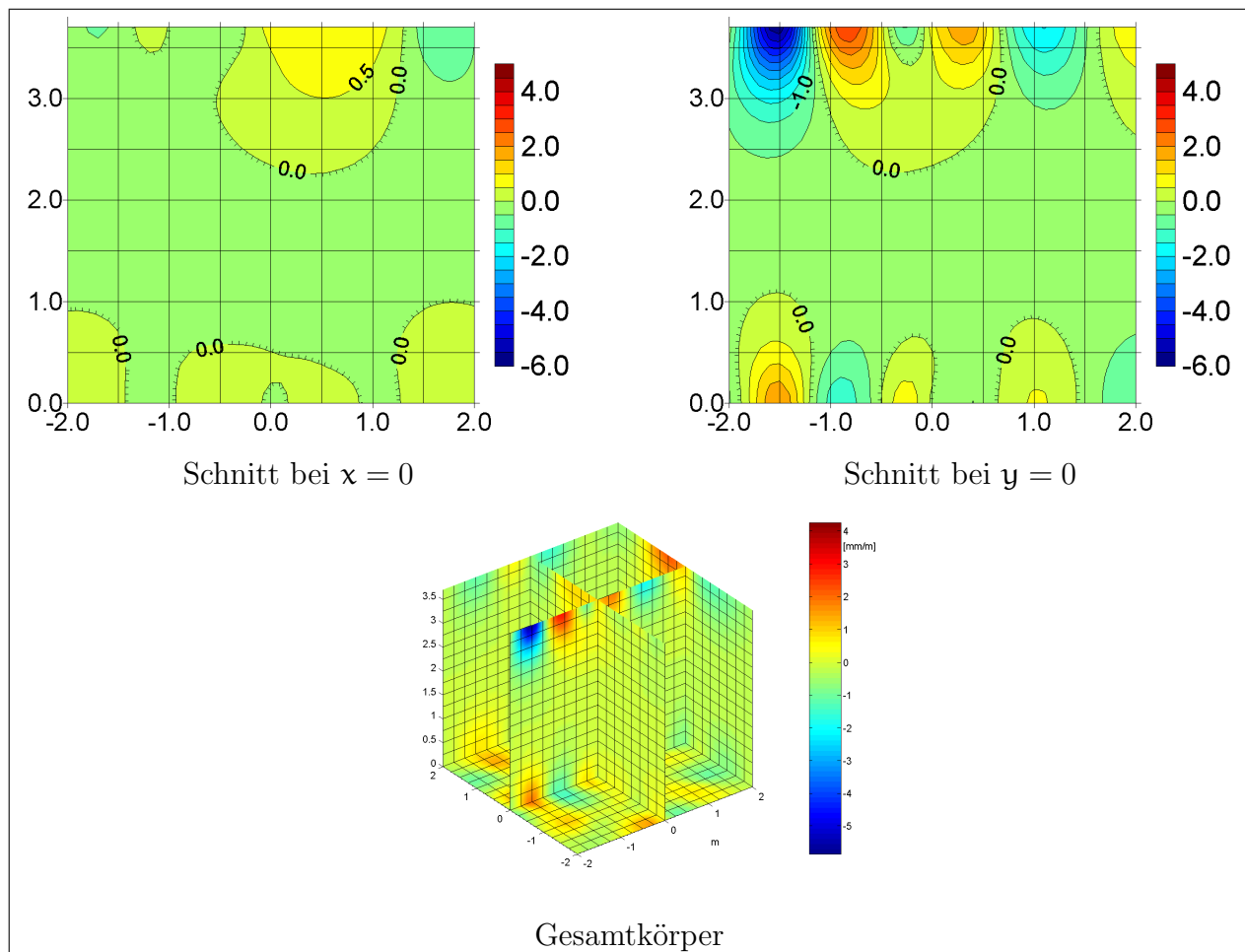


Abbildung 4.32: Rotation um die x_3 -Achse [mm/m]

ließ. Die Symmetrieebene ist die x_1 - x_3 -Ebene, was sehr gut im Schnitt entlang der x_2 -Achse zu erkennen ist. Die Abweichungen von einer strengen Symmetrie resultieren aus den Unregelmäßigkeiten des Verschiebungsfeldes. So wird die Verschiebung der Isolinie $\vartheta_1 = 0 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$ in Richtung der positiven x_2 -Achse durch die relativ große Horizontalverschiebung nahe des Ursprungs verursacht. Die Abweichungen des Verschiebungsfeldes vom Verlauf eines idealen Senkungstrogens führen dazu, daß im Schnitt entlang der x_2 -Achse die $\vartheta_1 \neq 0$ sind. Vor allem am linken Rand sind die Abweichungen als Maximum der Rotation mit $\vartheta_1 = 2,5 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$ deutlich zu erkennen. Aus den eingangs genannten Gründen liegen die Extrema etwas unter der Oberfläche. Dementsprechend werden die Extrema mit $\vartheta_1 = -19 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$ bzw. $\vartheta_1 = 17 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$, die in der 2D-Strainanalyse gefunden wurden, etwas übertroffen.

Die Rotation ϑ_2 um die x_2 -Achse ist analog zur Rotation ϑ_1 symmetrisch zur x_2 - x_3 -Ebene. Die Rotation ϑ_2 hat ihr Minimum mit $\approx -18 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$ bei $x_1 = -1,0\text{m}$. Das Maximum mit $\approx 19 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$ wird bei etwa $x_1 = 0,9\text{m}$ erreicht. Der Verlauf der Rotation ϑ_2 ist abgesehen von kleinen

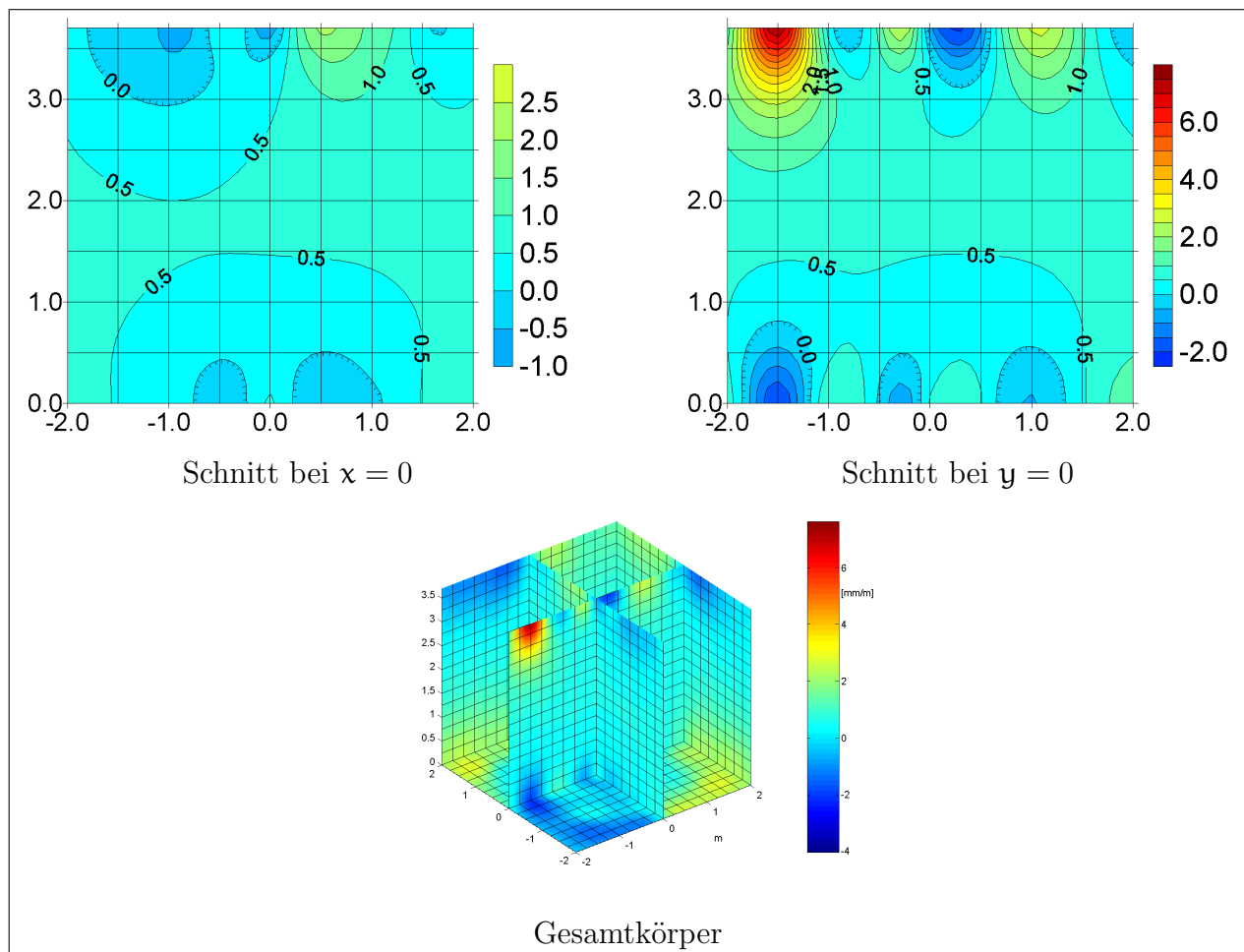


Abbildung 4.33: Scherung in der x_1x_2 -Ebene [mm/m]

Anomalien sehr gleichmäßig und erreicht am Boden etwa Null.

Die 3D-Dilatation (Abb. 4.36) ist im Zentrum in erster Linie von den beobachteten Senkungen abhängig, da hier die Senkungen die Beträge der Horizontalverschiebungen deutlich überschreiten. An den Rändern dagegen sinkt der Einfluß der Senkungen auf die 3D-Dilatation, so daß sie hier mehr von den beobachteten Horizontalverschiebungen abhängt. Die maximale 3D-Dilatation befindet sich im Zentrum des Senkungstrogens nahe der Oberfläche mit $\approx -66 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$. Am Boden und an den Rändern ist sie fast $0 \frac{\text{mm}}{\text{m}}$.

Da die Dichteänderung nur von der 3D-Dilatation abhängt, ist ihr prinzipieller Verlauf mit dem der 3D-Dilatation identisch (Abb. 4.37). Die maximale Verdichtung im Zentrum beträgt $\approx 0,11 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ und nimmt zu den Rändern und zum Boden hin ab auf etwa $0,01 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$.

Im Diagramm 4.38 sind die Ergebnisse des Sprengverdichtungsversuches den Berechnungen gegenübergestellt. Dabei sind die Dichteänderungen dargestellt aus:

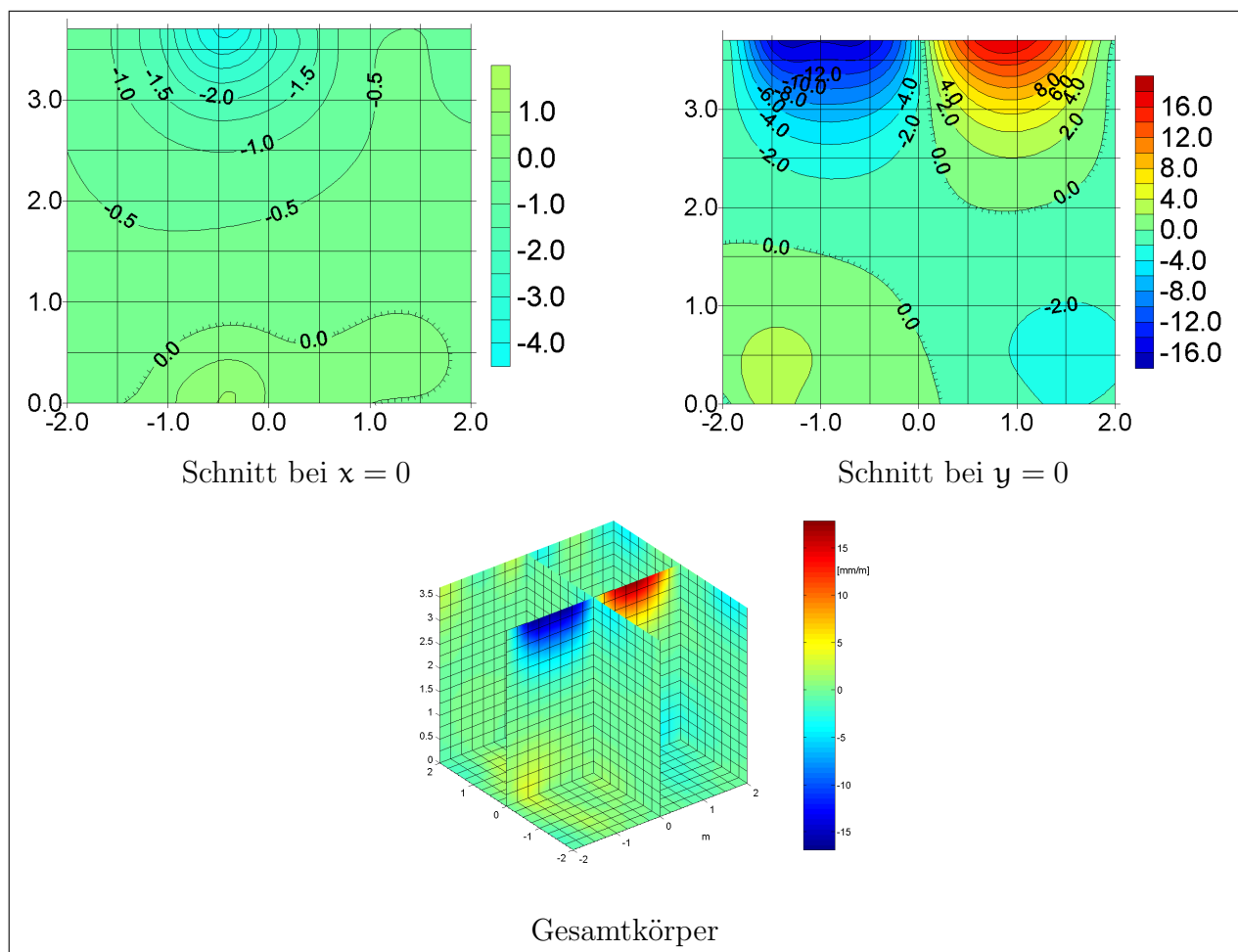


Abbildung 4.34: Scherung in der x_1x_3 -Ebene [mm/m]

- gravimetrischen Messungen (blau)
- direkten Probenahmen (rot) und
- der 3D-Strainanalyse (schwarz)

Dafür wurden die Werte der Dichteänderung aus der 3D-Strainanalyse mit gleichem horizontalem Abstand vom Zentrum gemittelt. Die Werte der gravimetrischen Messungen und der Probenahmen sind aus [Tamaskovics und Klapperich 2000] graphisch übernommen worden. Trotz der geringen geodätischen Überwachung des Gesamttroges und trotz der notwendigen Hypothese zum Verlauf der Bewegungen stimmen die Ergebnisse gut überein. Die Differenzen zwischen direkter Probenahme und der Berechnung liegen im Bereich von $0,005 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ nahe des Zentrums und $0,001 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ am Rand. Diese Abweichungen liegen im Bereich der Streuung der Ergebnisse der direkten Probenahme (vgl. [Tamaskovics und Klapperich 2000], Abb. 6).

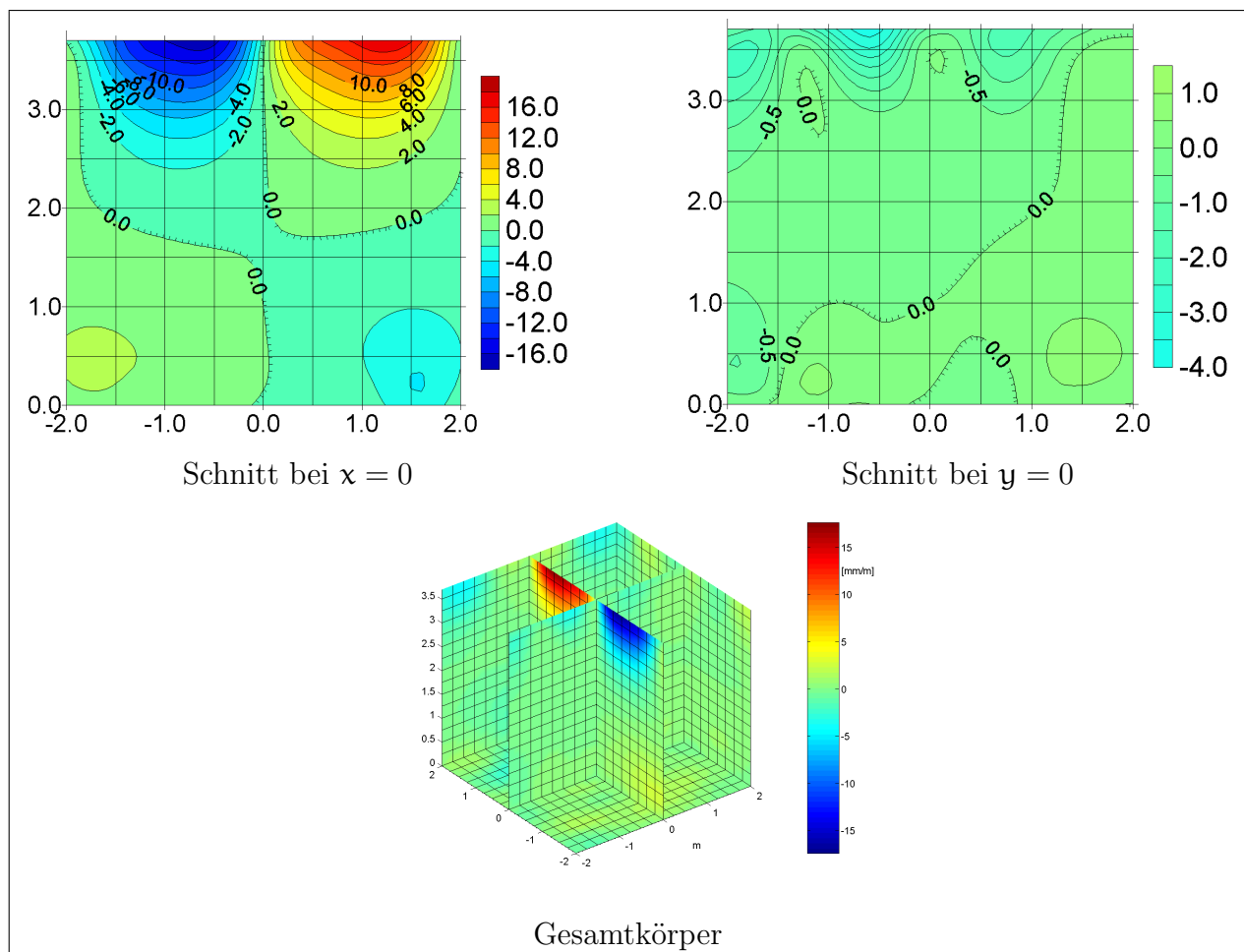


Abbildung 4.35: Scherung in der x_2x_3 -Ebene [mm/m]

Damit kann bei genügender Kenntnis der Rahmenbedingungen einer Sprengverdichtung durch Beobachtungen an der Oberfläche die Verdichtung geschätzt werden. Außerdem kann diese Schätzung durch zusätzliche geotechnische Beobachtungen gestützt werden. Gerade vertikal eingebaute Extensometerketten können Aussagen zur Auswirkung in der Tiefe geben. Besonders wichtig ist dabei die Information, in welcher Tiefe keine Verdichtung mehr nachweisbar ist.

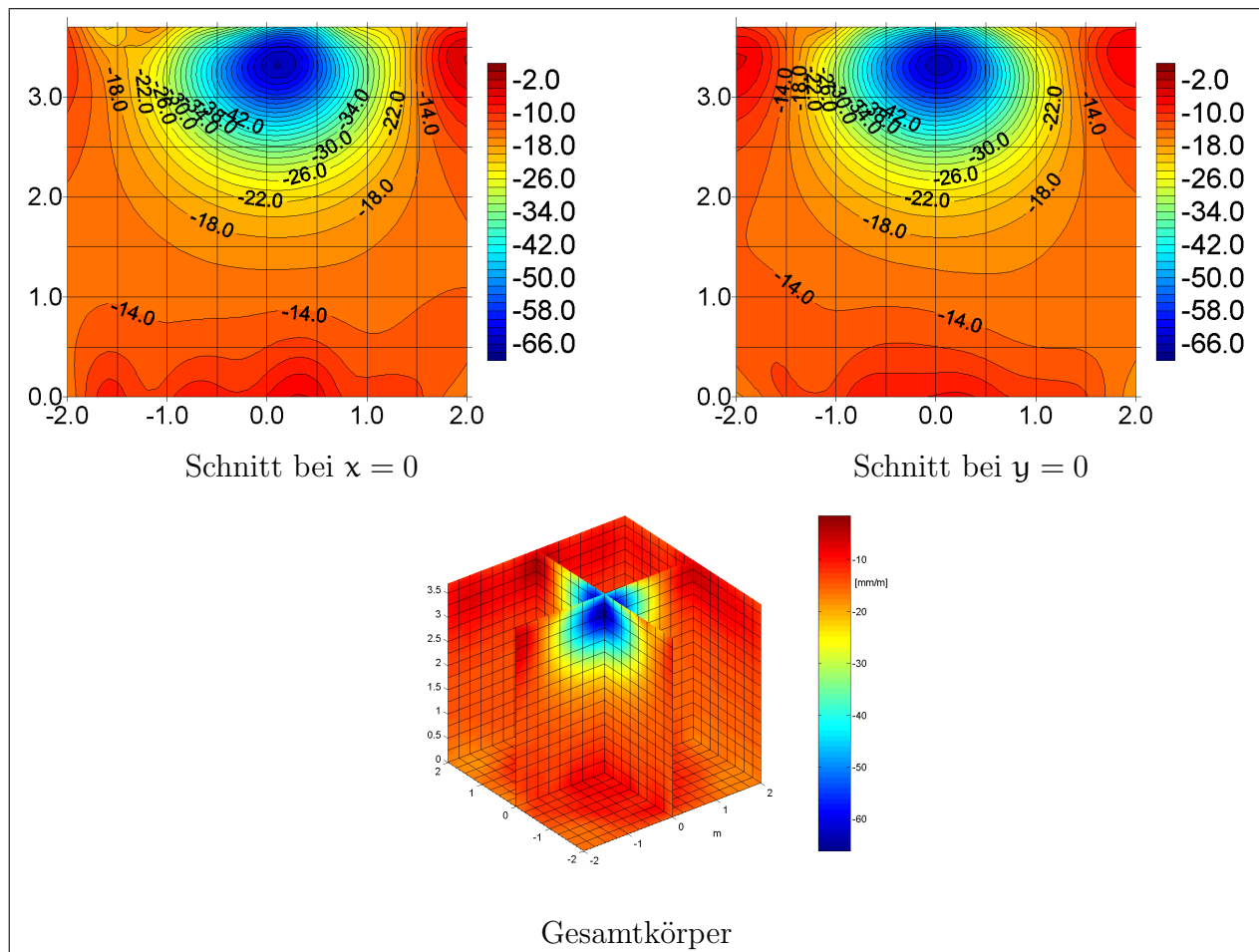


Abbildung 4.36: 3D-Dilatation [mm/m]

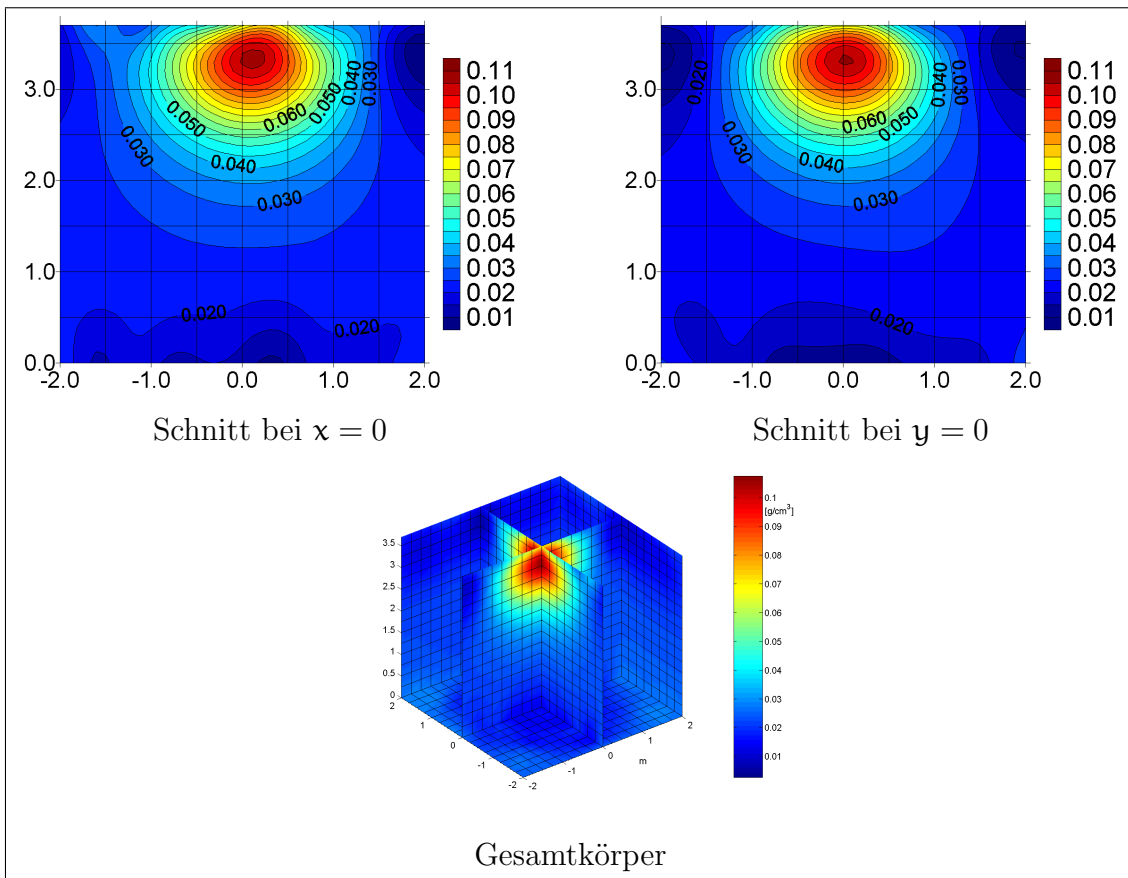


Abbildung 4.37: Dichteänderung [g/cm^3]

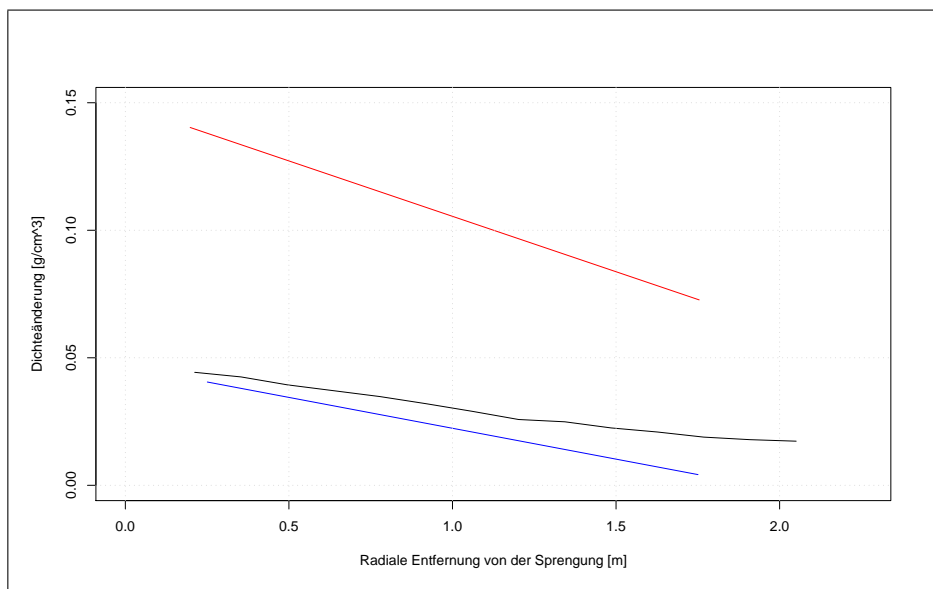


Abbildung 4.38: Dichteänderung in [$\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$]; schwarz – Strainanalyse; blau – Probenahme; rot – Schweremessung

Kapitel 5

Zusammenfassung

Bei der Beschreibung der Verschiebung und Verformung geodätisch überwachter Objekte (Kapitel 2) ist oft eine vollständige räumliche Beschreibung deshalb nicht möglich, weil geodätischen Messungen in ihrem Einsatz im allgemeinen auf eine „Sichtverbindung“ angewiesen sind. Dadurch bleibt die geodätische Beobachtung auf die äußere Hülle beschränkt und liefert nur indirekt Informationen über die Veränderungen im Innern. Im allgemeinen sind deswegen die für die Berechnung des vollständigen Deformationstensors $\underline{\underline{C}}$ nötigen Ableitungen $\frac{\partial u_i(\underline{X})}{\partial X_j}$ mit geodätischen Messungen nicht immer bestimmbar. Im besonderen können bei Überwachungsmessungen an der Tagesoberfläche die Ableitungen nach ∂X_3 nicht bestimmt werden, weil die Beobachtungen alle etwa in einer Ebene liegen und somit die für die Bildung einer Ableitung bzw. eines Differenzenquotienten erforderlichen Beobachtungen in verschiedenen Teufen nicht vorhanden sind.

Ein möglicher Ausweg ist die Integration metrischer geotechnischer Beobachtungen, sofern diese Beobachtungen so angeordnet sind, daß dadurch geometrische Änderungen in allen drei Dimensionen erfaßt werden. Mit geotechnischen Instrumenten können einerseits auch an für geodätische Beobachtungen unzugänglichen Stellen Meßwerte bestimmt werden und andererseits liefern sie direkte Beobachtungen des Deformationstensors. In der vorliegenden Dissertation ist die Integration der metrischen geotechnischen Beobachtungen durch ein erweitertes Krigingverfahren beschrieben. Das Verfahren baut dabei auf dem Gradientenkriging ([Menz 1991], [Renard und Ruffo 1992]) auf. Beim Gradientenkriging werden Absolutbeobachtungen und Ableitungen eines Merkmals gemeinsam genutzt, um das Merkmal zu schätzen. In verallgemeinerter Form sind Gradienten ein spezielles lineares Funktional des Merkmals. Verallgemeinert man diese Integration eines speziellen linearen Funktional auf die Integration anderer linearer Funktionale, dann erhält man das in dieser Dissertation vorgestellte Krigingverfahren (Kapitel 3). Die

Erweiterung schließt ein, daß lineare Funktionale nicht nur als Beobachtungen genutzt, sondern selbst als Schätzgrößen bestimmt werden können.

Dazu müssen das Trendmodell und die Kovarianzmatrix des Kriginggleichungssystems entsprechend erweitert werden. Da bei der Deformationsanalyse das beobachtete Merkmal das Verschiebungsfeld \underline{u} ist, müssen für die Nutzung der geotechnischen Beobachtungen im Krigingverfahren diese als lineare Funktionale des Verschiebungsfeldes dargestellt werden (Abschnitt 3.1.3). Für den Ausgleichungsansatz des Trendmodells müssen die Beobachtungsgleichungen für die geotechnischen Beobachtungen aufgestellt werden (Abschnitt 3.2.2).

Grundsätzlich ist die Auswahl der Kovarianzfunktion bei Verwendung linearer Funktionale auf diejenigen Kovarianzfunktionen beschränkt, die zweimal differenzierbar sind. Anstelle einer Kovarianzfunktion können auch beliebige andere Kernfunktionen verwendet werden, wobei allerdings die Forderung nach Minimierung des Schätzvarianz D^2 nicht eingehalten wird.

Für Punkte in verschiedenen Kontinua wird die Kovarianzfunktion auf Null gesetzt, sofern die Kontinua vollständig voneinander getrennt sind. Für nicht vollständige getrennte Kontinua finden sich Überlegungen zur Wahl der Kovarianzfunktion in [Brenning und van den Boogaart 2001].

Da bei der gemeinsamen Nutzung geodätischer und geotechnischer Beobachtungen deutlich verschiedene Genauigkeiten der einzelnen Beobachtungen vorliegen, ist es angebracht, diese Genauigkeiten im Kriginggleichungssystem zu beachten. Dies geschieht, in dem zur Kovarianzmatrix \underline{C} die Varianz-Kovarianzmatrix der Beobachtungen \underline{Q} addiert wird (Abschnitt 3.1.4.3).

Da die zur Beobachtung eingesetzten geotechnischen Instrumente in der Regel fest im Objekt eingebaut sind, ist es möglich, daß ihre Lage im Vergleich zu den geodätischen Beobachtungen relativ ungenau ist. Diese Lageunsicherheiten wirken wie Meßfehler und können deswegen wie diese durch Anpassung der Kovarianzmatrix \underline{C} in der Strainanalyse berücksichtigt werden. Wie in Abschnitt 3.1.4.4 gezeigt wird, ist diese Anpassung allerdings dann nicht erforderlich, wenn die Lageunsicherheiten im Vergleich zur Reichweite der Kovarianzfunktion klein sind.

Zur Beschreibung des Trends kann entweder ein allgemeines Trendmodell aufgestellt werden oder für den konkreten Anwendungsfall einer Strainanalyse als spezielles Modell ein Strain-Trendmodell. Für das Strain-Trendmodell werden für die geodätischen und geotechnischen Beobachtungen die jeweiligen Beobachtungsgleichungen benötigt, die in die Ausgleichung einfließen.

Das erweiterte Kriginggleichungssystem für die integrierte Schätzung mit linearen Funktionalen

lautet:

$$\hat{\underline{u}}_0 = \begin{pmatrix} \underline{c}(\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_i) \\ \underline{t}(\mathcal{L}_0) \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} \underline{C}(\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j) + \underline{Q}_{ij} & \underline{T}^t(\mathcal{L}_i) \\ \underline{T}(\mathcal{L}_j) & \underline{o} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \underline{z}(\mathcal{L}_i) \\ \underline{o} \end{pmatrix}$$

Darin sind:

- $\underline{C}(\mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j)$ die Matrix der Kovarianzen aus den Stützwerten
- \underline{c} der Vektor der Kovarianzen zwischen Stützwerten und Schätzwert
- \underline{Q} Varianz-Kovarianzmatrix der Stützwerte
- \underline{T} die Matrix der Trendfunktionswerte für die Stützstellen
- \underline{t} der Vektor der Trendfunktionswerte für die Schätzstelle
- $\underline{z}(\mathcal{L}_i)$ Stützwerte

Mit diesem Verfahren ist es möglich alle Beobachtungen, die sich als lineare Funktionale $\underline{z}(\mathcal{L})$ des Verschiebungsfeldes darstellen lassen, zur Schätzung der Verschiebung und Verformung zu benutzen. Dies sind im besonderen alle geotechnischen Instrumente, die die Änderung metrischer Größen wie Strecken- und Winkeländerungen erfassen. Damit können alle vorhandenen geodätischen und geotechnischen Beobachtungen und geologische Strukturinformationen für eine 2D- und 3D-Strainanalyse genutzt werden. Dies ist natürlich besonders dann unerlässlich, wenn für eine 3D-Strainanalyse sonst nicht genügend Informationen vorhanden wären. Eben für diese Anwendungsfälle wurde das Verfahren entwickelt. Unbeschadet dessen verbessert sich natürlich auch die Aussagekraft von 2D-Strainanalysen dadurch erheblich.

Für die Anwendung dieses Krigingverfahrens wurden zwei Beispiele ausgewählt. Das erste Beispiel demonstriert den Übergang von einer klassischen 2D-Strainanalyse auf Basis ausschließlich geodätischer bestimmter Verschiebungen zu einer erweiterten Strainanalyse durch Integration geotechnischer Informationen. Dazu wurden die Überwachungsmessungen des unteren Teils der Hangrohrbahn des Pumpspeicherwerkes Hohenwarthe II genutzt. Dieses Beispiel zeigt, wie aus der ursprünglich vagen 2D-Strainanalyse durch Integration geotechnischer Beobachtung und die Nutzung geologischer Strukturinformationen eine sehr aussagekräftige und nachvollziehbare 2D-Strainanalyse wird.

Das zweite Beispiel ist die 3D-Strainanalyse eines Versuches zur Sprengverdichtung. Dieses Beispiel zeigt, daß durch geeignete geotechnische Instrumentierung das Informationsdefizit der

geodätischen Vermessung an der Oberfläche behoben werden kann und damit eine echte 3D-Strainanalyse möglich ist, ohne auf Hypothesen und Annahmen zurückgreifen zu müssen.

Voraussetzung für die Anwendung des Verfahrens ist eine geeignete meßtechnische Überwachung. Unerläßlich ist, daß die Beobachtungen so angeordnet sind, daß eine Erfassung der Deformationsparameter überhaupt möglich ist. Für eine allgemeingültige Aussage ist es weiterhin sinnvoll, daß die Beobachtungen möglichst gleichmäßig am Objekt verteilt sind. Gerade geotechnische Instrumente sind oftmals so plziert, daß sie nur die besonders beanspruchten Bereiche überwachen. Beispielsweise sind Extensometer oft auf beiden Seiten einer Störung verankert, so daß sie die Verschiebung der beiden Blöcke gegeneinander erfassen. Betriebswirtschaftlich ist diese Anordnung nachvollziehbar. Die eigentlich erwünschte Beobachtung – nämlich die interne Deformation – ist durch diese Anordnung aber nicht erkennbar. Für die Beschreibung des Objektes insgesamt führt eine ungleichmäßige, auf einige Bereiche konzentrierte Überwachung aber dazu, daß die kaum überwachten Gebiete, wenn überhaupt, schlecht, mangelhaft oder sogar falsch beschrieben werden.

Das Verfahren kann prinzipiell überall dort angewandt werden, wo aus geodätischen und geotechnischen Beobachtungen die Verschiebung und Verformung bestimmt werden soll. Kenntnisse über geologische Strukturen sollten, wenn sie vorliegen, zur weiteren Verbesserung einbezogen werden.

Zur weiteren Entwicklung und Verbesserung sind im wesentlichen zwei Wege vorstellbar. Einerseits sollte das Verfahren in geeigneter Implementierung in möglichst vielen praktischen Anwendungen getestet werden, um die Grenzen und Möglichkeiten auszuloten. Andererseits sollte die Integration metrischer geotechnischer Beobachtungen erst der Anfang sein. Auf Dauer sollten alle geotechnischen Beobachtungen, die Meßwerte physikalischer Größen liefern, die aus Verschiebungen und Verformungen resultieren, wie Druckänderungen zur Schätzung genutzt werden.

Literaturverzeichnis

- [ArcadisGmbH 1997] ARCADISGMBH. *Ingenieurgeologischer Situationsbericht für 1997, Bericht des Pumpspeicherwerkes Hohenwarte*. VEAG. 1997
- [Baumann 1995] BAUMANN, Eberhard: *Vermessungskunde, Punktbestimmung nach Höhe und Lage*. Bd. 2. 5. Auflage. Dümmler Verlag Bonn, 1995
- [Blaschke und Leichtweiß 1973] BLASCHKE, W. ; LEICHTWEISS, K.: *Elementare Differentialgeometrie*. 5. Auflage. Springer Verlag Berlin Heidelberg New York, 1973
- [van den Boogaart 2001] BOOGAART, K. G. d.: Kriging for processes satisfying partial differential equations. In: *Proceedings of 2001 Annual Conference of the International Association for Mathematical Geology, Cancun, Mexico, 2001*
- [van den Boogaart und Drobniowski 2002a] BOOGAART, K. G. d. ; DROBNIOWSKI, M.: Geostatistische Integration geodätischer und geotechnischer Daten für die Deformationsbeschreibung im 3D-Bereich. In: *Schriftenreihe des Instituts für Markscheidewesen und Geodäsie an der TU Bergakademie Freiberg, 3. Geokinematischer Tag* Bd. 1, 2002, S. 162–172
- [van den Boogaart und Drobniowski 2002b] BOOGAART, K. G. d. ; DROBNIOWSKI, M.: Kriging the strain tensor based on geodetic, geotechnic and geological observations. In: *Terra Nostra, Schriften der Alfred-Wegener-Stiftung, 8th annual conference of the international association for mathematical geology* Bd. 3, 2002, S. 243–248
- [van den Boogaart und Schaeben 2002] BOOGAART, K. G. d. ; SCHAEBEN, H.: Kriging of regionalized directions, axes, and orientations, I. Directions and axes. In: *Mathematical Geology* 24 (2002), July, Nr. 5
- [van den Boogart und Brenning 2001] BOOGART, K. G. d. ; BRENNING, A.: Why is universal kriging better than IRFk-kriging: estimation of variograms in the presence of trend. In:

- Proceedings of 2001 Annual Conference of the International Association for Mathematical Geology, Cancun, Mexico, 2001*
- [Brenning und van den Boogaart 2001] BRENNING, A. ; BOOGAART, K. G. d.: Geostatistics without stationary assumptions within GIS. In: *Proceedings of 2001 Annual Conference of the International Association for Mathematical Geology, Cancun, Mexico, 2001*
- [Brieskorn 1985] BRIESKORN, E.: *Lineare Algebra und analytische Geometrie*. Vieweg Verlag, Braunschweig Wiesbaden, 1985
- [Casparly 1987] CASPARY, W.: *Concepts of Network and Deformation Analysis*. Monograph 11. University of New South Wales, School of Surveying, 1987
- [Casparly und Borutta 1986] CASPARY, W. ; BORUTTA, H.: Geometrische Deformationsanalyse mit robusten Schätzverfahren. In: *Allgemeine Vermessungsnachrichten* 8-9 (1986), S. 315–326
- [Charlez 1991] CHARLEZ, Ph. A.: *Rock mechanics*. Edition TECHNIP, Paris, 1991
- [Chilés und Delfiner 1999] CHILÉS, J.-P. ; DELFINER, P.: *Geostatistics: Modeling Spatial Uncertainty*. Wiley, New York, 1999
- [Cressie 1993] CRESSIE, N.: *Statistics for spatial data*. Wiley, New York, 1993
- [Drobniewski 2002] DROBNIEWSKI, M.: Integration geodätischer und geotechnischer Daten für die Deformationsbeschreibung im 3D-Bereich. In: *Schriftenreihe des Instituts für Markscheidewesen und Geodäsie an der TU Bergakademie Freiberg, 3. Geokinematischer Tag* Bd. 1, 2002, S. 162–172
- [Funcke 1984] FUNCKE, G.: *Datumsinvariante Deformationserfassung mittels geodätischer Netze unter besonderer Berücksichtigung dynamischer Bewegungsmodelle im Markscheidewesen*, TU Clausthal, Diss., 1984
- [Grafarend 1967] GRAFAREND, E.: Bergbaubedingte Deformation und ihr Deformationstensor. In: *Bergbau-Wissenschaften* 14 (1967), Nr. 4, S. 125–132
- [Gray 1998] GRAY, A.: *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with MATHEMATICA*. CRC Press LLC, 1998
- [Halmos 1991] HALMOS, P. R.: *Finite-Dimensional Vector Spaces*. Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1991

- [Hardy 1971] HARDY, R. L.: Multiquadratic Equations of Topography and Other Irregular Surfaces. In: *Journal of Geophysical Research* 76 (1971), S. 1905–1913
- [Isaaks und Srivastava 1989] ISAAKS, E. H. ; SRIVASTAVA, R. M.: *Applied Geostatistics*. Oxford University Press, New York, 1989
- [Jaeger und Cooks 1979] JAEGER, J. C. ; COOKS, N. G. W.: *Fundamentals of Rock Mechanics*. 3. Auflage. Chapman and Hall, London, 1979
- [Kratzsch 1997] KRATZSCH, H.: *Bergschadenkunde*. Deutscher Markscheiderverein, Bochum, 1997
- [Krzanowski 1998] KRZANOWSKI, W. J.: *An Introduction to Statistical Modeling*. Arnold, London, 1998
- [Landau und Lifschitz 1989] LANDAU, L. D. ; LIFSCHITZ, E. M.: *Lehrbuch der Theoretischen Physik*. Bd. 7. Akademie Verlag, Berlin, 1989
- [Matheron 1971] MATHERON, G.: The theory of regionalized variables and its applications. In: *Les Cahiers du Centre de Morphologie Mathématique de Fontainebleau, No 5, Published by École Nationale Supérieure des Mines de Paris* (1971)
- [Menz 1991] MENZ, J.: Geostatistische Vorhersage des Schichtenverlaufes im Gebirge auf der Grundlage von Bohrungen, Stoßbemusterungen und geophysikalischen Messungen. In: *Das Markscheidewesen, Essen* 98 (1991), Nr. 2, S. 70–73
- [Menz und Bian 1997] MENZ, J. ; BIAN, S.: Using piecewise linear interpolation in spherical harmonic analysis. In: *Journal of Geodesy* 72 (1997), Nr. 7-8, S. 473–481
- [Menz und Pilz 1994] MENZ, J. ; PILZ, J.: Kollokation, Universelles Kriging und BAYESscher Zugang. In: *Das Markscheidewesen, Essen* 101 (1994), Nr. 2, S. 62–66
- [Möbus 1989] MÖBUS, G.: *Tektonik, Eine methodische Einführung für Studium und Praxis*. 1. Auflage. VEB Dt. Verlag für Grundstoffindustrie Leipzig, 1989
- [Moritz 2000] MORITZ, H.: Least-Square Collocation. In: MENZ, J. (Hrsg.): *Angewandte Geostatistik in Bergbau, Geologie, Geophysik, Geodäsie und Umweltschutz* Bd. 5 Mathematische Geologie. CPress Verlag, Dresden, 2000

- [Niemeyer 1985] NIEMEYER, W.: Deformationsanalyse. In: PELZER, H. (Hrsg.): *Geodätische Netze in der Landes- und Ingenieurvermessung* Bd. 2. Wittwer Verlag, Stuttgart, 1985, S. 559–623
- [Niemeyer 2001] NIEMEYER, W.: *Ausgleichsrechnung*. de Gruyter Verlag, Berlin, New York, 2001
- [Pelzer 1971] PELZER, H.: Zur Analyse geodätischer Deformationsmessungen / DGK. 1971. – Reihe C, Heft Nr. 164
- [Pielok und Pielok 2002] PIELOK, J. ; PIELOK, W.: Die meßtechnische Bestimmung und die Bedeutung des Deformationstensors zur Beurteilung der Auswirkungen des untertägigen Abbaus. In: *Schriftenreihe des Institus für Markscheidewesen und Geodäsie an der TU Bergakademie Freiberg, 3. Geokinematischer Tag* Bd. 1, 2002, S. 18–31
- [Powell 1992] POWELL, M. J. D.: The Theory of Radial Basis Function Approximation in 1990. In: LIGHT, W. (Hrsg.): *Advances in Numerical Analysis, Volume II, Wavelets, Subdivision Algorithms and Radial Basis Functions*. Oxford University Press, Oxford, 1992, S. 105–210
- [Renard und Ruffo 1992] RENARD, D. ; RUFFO, P.: Depth, Dip and Gradient. In: *Geostatistics Troia 92* Bd. 1, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, Boston, London, 1992, S. 167–178
- [Salençon 2001] SALENÇON, J.: *Handbook of Continuum Mechanics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2001
- [Schmidt 1999] SCHMIDT, V.: *Begründung einer Meßanweisung für die Überwachungsmessungen am Maschinenhaus des Pumpspeicherwerkes Hohenwarte II*, TU Bergakademie Freiberg, Inst. für Markscheidewesen und Geodäsie, Diplomarbeit, 1999
- [Schmutzer 1989] SCHMUTZER, E.: *Grundlagen der Theoretischen Physik*. Bd. 1. BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1989
- [Stein 1999] STEIN, M. L.: *Interpolation of Spatial Data*. Springer-Verlag, New York, 1999
- [Tamaskovics 2001] TAMASKOVICS, N.: *Beitrag zur Klärung der Mechanismen von Verdichtungssprengungen*, TU Bergakademie Freiberg, Inst. für Geotechnik, Diss., 2001
- [Tamaskovics und Klapperich 2000] TAMASKOVICS, N. ; KLAPPERICH, H.: Geotechnische und geophysikalische Untersuchungen an Verdichtungssprengungen. In: LINDNER, H. (Hrsg.) ;

- AZZAM, R. (Hrsg.): *Einsatz geotechnischer und geophysikalischer Methoden zur Lösung ingenieurtechnischer Aufgaben, Vorträge zum Kolloquium 4, 51. Berg und Hüttenmännischer Tag* Freiburger Forschungshefte, C483, TU Bergakademie Freiberg, 2000, S. 59–76
- [Teskey 1988] TESKEY, W. F. *Integrierte Analyse geodätischer und geotechnischer Daten sowie physikalischer Modelldaten zur Beschreibung des Deformationsverhaltens großer Erddämme unter statischer Belastung*. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, No. 341, München. 1988
- [Uhrig 1989] UHRIG, R.: Verschiebung, Verzerrung, Spannungen und Stoffgesetze aus Sicht der Kontinuumsmechanik. In: KERSTING, N. (Hrsg.) ; WELSCH, W. (Hrsg.): *Rezente Krustenbewegungen, Seminar 8.-9. Juni 1989*. Schriftenreihe des Studiengangs Geodäsie und Geoinformation der Universität der Bundeswehr München, Neubiberg, Heft 39, 1989, S. 75–96
- [Vogl und Martienßen 1995] VOGL, W. ; MARTIENSSEN, Th.: Einsatz der digitalen Nahbereichsphotogrammetrie für kinematische Messungen bei bodenmechanischen Modellversuchen. In: *Zeitschrift für Photogrammetrie und Fernerkundung* 5 (1995), S. 208–213
- [Wackernagel 1995] WACKERNAGEL, H.: *Multivariate Geostatistics*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1995
- [Welsch 1984] WELSCH, W.: Invarianzeigenschaften von Strainparametern. In: CASPARY, W. (Hrsg.) ; SCHÖDLBAUER, A. (Hrsg.) ; WELSCH, W. (Hrsg.): *10 Jahre Hochschule der Bundeswehr München, Beiträge aus dem Institut für Geodäsie*. Schriftenreihe des Studiengangs Geodäsie und Geoinformation der Universität der Bundeswehr München, Neubiberg, Heft 10, 1984, S. 129–150
- [Welsch 1989] WELSCH, W.: Strainanalyse aus geodätischen Netzbeobachtungen. In: KERSTING, N. (Hrsg.) ; WELSCH, W. (Hrsg.): *Rezente Krustenbewegungen, Seminar 8.-9. Juni 1989*. Schriftenreihe des Studiengangs Geodäsie und Geoinformation der Universität der Bundeswehr München, Neubiberg, Heft 39, 1989, S. 171–189
- [Werner 1992] WERNER, J.: *Numerische Mathematik, 1. Lineare und nichtlineare Gleichungssysteme, Interpolation, numerische Integration*. Vieweg Verlag, Braunschweig–Wiesbaden, 1992
- [Wittenburg 1998] WITTENBURG, R.: Zur Beschreibung bergbauinduzierter Kinematik. In: *Das Markscheidewesen* 105 (1998), S. 135–140

Danksagung

Ich danke Prof. Wittenburg dafür, daß er mir die Chance geboten hat, durch Tätigkeit am Institut für Markscheidewesen und Geodäsie der TU Bergakademie Freiberg diese Dissertation zu schreiben, sowie für seine Unterstützung und Geduld bei ihrer Anfertigung.

Mein Dank gilt ebenso Prof. Menz und Prof. van den Boogaart für die fruchtbare und konstruktive Zusammenarbeit bei der Entwicklung des Krigingverfahrens, das die Grundlage für die Lösung des gestellten Integrationsproblems bildet.

Weiterhin danke ich meinen Eltern und meinen Brüdern für die vielfältige Unterstützung, während ich meine Dissertation zu Papier gebracht habe.