

Strahlungseffekte bei instationären Heizdrahtmessungen an porösen Wärmedämmstoffen

Von der Fakultät für Maschinenbau, Verfahrens- und Energietechnik
der Technischen Universität Bergakademie Freiberg

genehmigte

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktoringenieur

(Dr.-Ing.)

vorgelegt

von Dipl.-Ing. Le-Thanh-Son Tran

geboren am 29.04.1970 in Saigon/Vietnam

Gutachter: Prof. Dr. Ulrich Groß, Freiberg
Prof. Dr. Wolfgang Mönch, Freiberg
Prof. Dr. Jörg Huhn, Dresden

Tag der Verleihung: 26.07.2002

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeiten als Stipendiat des Graduiertenkollegs „Transportvorgänge in porösen Systemen der Verfahrens- und Geotechnik“ und anschließend als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Wärmetechnik und Thermodynamik der Technischen Universität Bergakademie Freiberg.

Allen am Gelingen dieser Arbeit beteiligten Personen und Organisationen spreche ich gern meinen herzlichen Dank aus, besonders:

Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. U. GROß für die freundliche Aufnahme, für die motivierende Betreuung, für die ständige Diskussionsbereitschaft und nicht zuletzt für die Ermöglichung aller notwendigen Grundbedingungen zur Bearbeitung der Thematik.

Prof. Dr. rer. nat. habil. W. MÖNCH für die Beratung bei der Anwendung der Numerik in dieser Arbeit und für die Übernahme des Gutachtens.

Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. J. HUHN für die Übernahme des Gutachtens und die hilfreichen Anregungen zu dieser Arbeit.

Herrn G. BARTH für die stets freundliche Hilfsbereitschaft, Frau R. WULF, Frau C. WERNER und Herrn T. POLET für das engagierte Korrekturlesen dieser Arbeit, den Mitarbeitern des Institut für die Unterstützung, die regen Diskussionen sowie für die freundschaftliche Atmosphäre.

Der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) für die Förderung während der Tätigkeit als Stipendiat des Graduiertenkollegs.

Mein ganz besonderer Dank gilt meiner lieben Frau MINH DUNG für das Motivieren zur Promotion, für das große Verständnis und für die fortwährende Unterstützung.

Freiberg, im August 2002

Le-Thanh-Son Tran

Kurzfassung

Die praktische Anwendung des instationären Heizdrahtverfahrens zur Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit von opaken Festkörpern wird auf die Vermessung von porösen Materialien ausgedehnt, in welchen neben der diffusiven Wärmeleitung der Strahlungstransport zusätzlich zum Gesamtwärmetransport beiträgt. Da Strahlung über weite Abstände den Wärmetransport direkt betreiben kann, weicht sie von einem Diffusionsprozess ab und führt deshalb zu einem zeitlichen Verlauf der Heizdrahttemperatur, welcher der üblichen analytischen Lösung der Heizdrahtmethode nicht mehr entspricht. Durch numerische Simulation werden in der vorliegenden Arbeit die physikalischen Probleme analysiert, welche während einer Heizdrahtmessung an porösen Materialien auftreten, nämlich die gekoppelte Strahlung/Leitung und der thermische Kontaktwiderstand zwischen dem Draht und der Messprobe.

Zur Auswertung von Heizdrahtmessungen verwendet man gewöhnlich den zeitlichen Temperaturverlauf des Heizdrahtes. Mittels numerischer Simulation wird die Abhängigkeit dieses Verlaufs und der damit verbundenen berechneten Wärmeleitfähigkeit von Einflussparametern (zur gekoppelten Strahlung/Leitung: dem Extinktionskoeffizienten E , der Drahtemissivität ε_w , der Umgebungstemperatur T_0 und der im Draht eingekoppelten längenbezogenen Heizleistung \dot{Q} ; zum thermischen Kontaktwiderstand: der Spaltdicke d_l und der Transmissivität der Probenoberfläche τ_m) bestimmt.

Anhand der Simulationsergebnisse der vorliegenden Arbeit kann festgestellt werden, dass das Auswertungsverfahren der Heizdrahtmethode nur bei strahlungsdurchlässigen Materialien großer Extinktion genaue effektive Wärmeleitfähigkeit liefern kann. Die untere Grenze des Anwendungsbereiches des Auswertungsverfahrens hinsichtlich der Extinktion verschiebt sich mit zunehmender Messtemperatur zu größeren Extinktionskoeffizienten. Die Unterschreitung dieser Grenze führt zu einer Unterbestimmung der effektiven Wärmeleitfähigkeit der Probe.

Ein durch einen Luftspalt zwischen dem Heizdraht und der Messprobe hervorgerufener thermischer Kontaktwiderstand verursacht eine Verfälschung der Messergebnisse. Bei Proben mit stark reflektierenden Berandungen und bei stark emittierenden Heizdrähten liefert das Heizdrahtverfahren erheblich abweichende Messergebnisse. Die Abweichung der gemessenen von der tatsächlichen effektiven Wärmeleitfähigkeit kann aufgrund der Simulationsergebnisse durch Verwendung von Heizdrähten geringer Emissivität

(z.B. Platin) und durch Reduzierung des Reflektionsgrades von Probenoberflächen (beispielweise durch Beschichtung) verringert werden.

Die numerische Simulation, bei der die Methode der diskreten Ordinaten zur Lösung der Strahlungstransportgleichung verwendet wird, zeichnet sich durch hohe Genauigkeit im ganzen Extinktionsbereich ($0 \leq E \leq \infty$) aus. Sie verwendet die bewährte Finite-Differenzen-Methode für die numerische Berechnung und ist zur Simulation des instationären Wärmetransports durch gekoppelte Wärmeleitung und -strahlung bei Heizdrahtmessungen sehr gut geeignet.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung und Zielstellung	1
2	Wärmetransport in porösen Medien	3
2.1	Festkörperwärmeleitung	4
2.2	Wärmetransport durch das Gas	5
2.3	Wärmestrahlungstransport	8
2.4	Gesamtwärmetransport und Methoden zur Ermittlung der effektiven Wärmeleitfähigkeit	12
3	Das Heizdrahtverfahren	15
3.1	Grundlagen und Messprinzip	17
3.2	Fehlereinflüsse und deren Korrekturterme	18
3.2.1	Endliche spezifische Wärmekapazität und Wärmeleitfähigkeit des Drahtes	19
3.2.2	Endliche radiale Proben dimension	20
3.2.3	Temperaturabhängige Materialeigenschaften des Probenmediums	21
4	Modellierung der gekoppelten Strahlung/Leitung	22
4.1	Mathematische Beschreibung des Problems	22
4.1.1	Energietransportgleichung	23
4.1.2	Strahlungstransportgleichung	26
4.2	Stand der Forschung im Hinblick auf Strahlungseffekte bei Heizdrahtmessungen	29
4.2.1	Strahlungseffekte bei Fluiden	29
4.2.2	Strahlungseffekte bei strahlungsdurchlässigen Feststoffen	30
4.2.3	Schlussfolgerung	32

4.3	Lösungsmethoden für die Strahlungstransportgleichung.....	33
4.3.1	Einführung	33
4.3.2	Differentielle Approximation	35
4.3.3	Methode der diskreten Ordinaten (S_N -Approximation)	38
4.4	Numerisches Lösungsverfahren für die gekoppelte Strahlung/ Leitung	46
4.4.1	Zur Energietransportgleichung	47
4.4.2	Zur Strahlungstransportgleichung	50
4.4.3	Vorgehensweise der Iteration	53
5	Ergebnisse der numerischen Simulation	54
5.1	Fall der reinen Wärmeleitung ($E \rightarrow \infty$)	55
5.2	Fall der Transparenz ($E = 0$)	57
5.3	Variation des Extinktionskoeffizienten ($0 < E < \infty$)	59
5.3.1	Vergleich der differentiellen mit der S_4 -Approximation ...	60
5.3.2	Zeitabhängige Übertemperatur des Heizdrahtes	62
5.3.3	Radiale Übertemperaturprofile	67
5.3.4	Verteilung der Leitungs- und Strahlungsstromdichte	69
5.3.5	Schlussfolgerung	78
5.4	Bestimmung der effektiven Wärmeleitfähigkeit	81
5.4.1	Anfangstemperatur als Bezugstemperatur.....	81
5.4.1.1	Zeitliche effektive Wärmeleitfähigkeit	82
5.4.1.2	Mittlere effektive Wärmeleitfähigkeit	85
5.4.2	Mitteltemperatur als Bezugstemperatur	89
5.4.3	Schlussfolgerung	92
5.5	Einfluss der Streuung	93
5.6	Einfluss des thermischen Kontaktwiderstandes	98
5.6.1	Einführung	98
5.6.2	Lösungsmethode	99

5.6.3 Numerische Ergebnisse	103
6 Zusammenfassung	111
Symbolverzeichnis	115
Literaturverzeichnis	119
Abbildungsverzeichnis	129
Tabellenverzeichnis	132
Anhang	133

1 Einleitung und Zielstellung

Poröse Wärmedämmstoffe sind durch einen hohen Gasanteil gekennzeichnet, wodurch die Wärmeleitfähigkeit stark verringert ist. Der Feststoffanteil gibt ihnen eine mehr oder weniger ausgeprägte mechanische Stabilität und kann unterschiedlich strukturiert sein (Fasern, Pulver, schaumartig, u.a.). Der Einsatz solcher Werkstoffe erfordert die genaue Kenntnis der thermischen Eigenschaften, wozu insbesondere die Wärmeleitfähigkeit zählt. Dies ist beispielsweise für die Minimierung von Wärmeverlusten in der Bautechnik und technischen Hochtemperaturanlagen oder für den Schutz bestimmter Teile vor Überhitzung notwendig. Neben der Entwicklung von Werkstoffen müssen deshalb auch genaue und effektive Messmethoden zur Ermittlung der Wärmeleitfähigkeit zur Verfügung gestellt werden. Es existieren heutzutage zahlreiche Messverfahren, die Unterschiede in der Messgenauigkeit und im Aufwand aufweisen. Da große Differenzen zwischen den gemessenen Wärmeleitfähigkeiten mit unterschiedlichen Verfahren zu beobachten sind, wird verschiedentlich durch Ringversuche untersucht, solche Differenzen zu erklären, unter anderem von einer Forschungsgruppe an der TU Bergakademie Freiberg, die sich seit 1992 mit den Messungen von porösen Dämmstoffen mit unterschiedlichen Messverfahren und deren Vergleich bis zum Hochtemperaturbereich beschäftigt. Zur Ermittlung der Wärmeleitfähigkeit werden u.a. Platten-, Rohr- und Heizdrahtverfahren verwendet. Im Ergebnis zeigt das instationäre Heizdrahtverfahren große Abweichungen in der Wärmeleitfähigkeit im Vergleich mit stationären Verfahren.

Das Heizdrahtverfahren ist eine attraktive und weitverbreitete Messmethode, die sowohl in Deutschland als auch in den USA als Standardverfahren normiert ist. Das Verfahren kann auf nahezu alle Materialien mit isotroper Wärmeleitfähigkeit angewandt werden. So können sowohl gasförmige als auch flüssige [MCLAUGHLIN, 1971; NIETO DE CASTRO, 1990] und feste Stoffe [NILSSON, 1989] vermessen werden. Insbesondere für Gase und Flüssigkeiten kann die Wärmeleitfähigkeit mit dieser Messmethode sehr präzise (genauer als 1%) ermittelt werden. Im Gegensatz dazu liefert diese Messmethode bei Anwendung auf feste Stoffe eine erhöhte Ungenauigkeit, insbesondere bei porösen Materialien. Um das Heizdrahtverfahren auch auf die Klasse poröser Stoffe anwenden zu können, ist daher eine gründliche theoretische Analyse der Methode notwendig. Dabei sind Effekte zu berücksichtigen, welche bei Anwendung auf poröse Stoffe auftreten. Solche Effekte sind u.a. der Strahlungseffekt, der durch Anwesenheit von Hohlräumen innerhalb der porösen Stoffe und zwischen Heizdraht und zu vermessender Probe („thermischer Kontaktwiderstand“) entsteht.

Da es sich beim Heizdrahtverfahren um eine instationäre Messmethode handelt, basiert die Auswertung von Messungen auf dem zeitlichen Verlauf der Drahttemperatur. Dieses Auswerteverfahren bezieht sich auf opake Proben, in welchen der Wärmetransport ausschließlich durch Wärmeleitung erfolgt. Bei Anwendung des Heizdrahtverfahrens auf poröse Materialien, in denen Leitung und Strahlung den Wärmetransport gleichzeitig betreiben, wird der zeitliche Verlauf der Drahttemperatur neben der Wärmeleitfähigkeit durch reine Wärmeleitung auch durch die Strahlungseigenschaften der Messprobe und sogar der Berandungen beeinflusst. Dies stellt deshalb eine Abweichung von der Basis der Heizdrahtmethode dar. Je nach Transparenz des Materials tritt dann eine mehr oder weniger große Abweichung und dadurch ein mehr oder weniger ungenaues Ergebnis der gemessenen Wärmeleitfähigkeit auf. Ebenso bedeutet ein Luftspalt zwischen dem Draht und der Probe als thermischer Kontaktwiderstand eine Abweichung von der Basis der Heizdrahtmethode. In Abhängigkeit von der Dicke des Luftspaltes und den Strahlungseigenschaften der Probenoberfläche weicht der vorhandene Gesamtwärmetransport von dem der Basis des Verfahrens mehr oder weniger ab.

Das Ziel dieser Arbeit ist es deshalb, den Wärmetransport in Heizdrahtmessungen im Zusammenhang mit den genannten Abweichungen theoretisch zu analysieren. Zur Untersuchung des Strahlungseffekts ist eine geeignete Lösungsmethode der Strahlungstransportgleichung anzuwenden, die möglichst genau ist. Damit sind Parameterstudien durchzuführen, um die Anwendbarkeit sowie die Genauigkeit des Heizdrahtverfahrens bei porösen Stoffen unter unterschiedlichen Bedingungen zu untersuchen und Kriterien oder Bemerkungen für die Anwendung auf poröse Materialien vorzulegen.

2 Wärmetransport in porösen Medien

Poröse Medien sind natürliche Materialien (z.B. Steine, Schüttungen aus Sand, tierische oder pflanzliche Wolle, Schwämme) oder industrielle Erzeugnisse (z.B. Schaumstoffe, Fasern, Filter, Schüttgüter, keramische Materialien). Anwendung finden poröse Materialien in vielen Gebieten wie Chemie, Umwelttechnik, Mechanik, Ölindustrie sowie Geologie. Im Bereich der Wärmetechnik, insbesondere der Wärmedämmung werden poröse Dämmstoffe sehr häufig eingesetzt. Die besondere Eigenschaft von porösen Materialien hinsichtlich der Wärmedämmung liegt darin, dass sie die niedrige Wärmeleitfähigkeit von Gasen, deren Wärmeleitfähigkeit mehrere Größenordnungen unterhalb der Wärmeleitfähigkeit von Feststoffen liegen, ausnutzen. Durch den geringeren Massenanteil des Feststoffs und damit hohen Anteil des in kleinen Poren (geschlossenen oder offene) ruhenden Gases können manche poröse Dämmstoffe bei niedrigen Temperaturen die Wärmeleitfähigkeit der Größenordnung der Wärmeleitfähigkeit des Gases (z.B. Fasern, Pulver, Schaumstoffe) und sogar kleinere Wärmeleitfähigkeit als die des Gases (z.B. Faserpapiere, mikroporöse Pulver) erreichen.

Poröse Materialien sind *heterogene Systeme*, die aus einer soliden Matrix und von Fluiden gefüllten Hohlräumen bestehen. Thermische Eigenschaften eines porösen Mediums hängen deshalb davon ab, welche Rolle die einzelnen Phasen im gesamten Wärmetransport durch das Medium spielen. In einem porösen Medium erfolgt der Wärmetransport folgendermaßen:

- In stark absorbierenden Festkörperphasen wie Metallen wird die Wärme nur durch *Leitung* übertragen. In schwach absorbierenden Festkörpern – z.B. Gläsern – trägt *interne Strahlung* zusätzlich zum gesamten Wärmetransport bei.
- Innerhalb der Hohlräume, in welchen sich das Gas befindet, erfolgt die Wärmeübertragung durch *Leitung* im Gas und durch den *Strahlungsaustausch* zwischen den Wänden der Hohlräume, falls das Gas für Wärmestrahlung transparent ist. Im anderen Fall muss die Wirkung des Gases auf den Strahlungstransport berücksichtigt werden.
- Wärmetransport in der Gasphase durch Konvektion, der an den makroskopischen Transport von Materie, also Strömung von Fluiden gebunden ist, kann nur in porösen Materialien sehr geringer Dichte auftreten. Im Rahmen dieser Arbeit wird die Konvektion nicht berücksichtigt.

Im folgenden werden die einzelnen Transportmechanismen erläutert:

2.1 Festkörperwärmeleitung

Die klassische Theorie der Wärmeleitung beschreibt die komplizierten physikalischen Prozesse mit Hilfe des Fourierschen Erfahrungssatzes. Danach ist die Wärmestromdichte \vec{q}_f für isotrope Medien gegeben durch:

$$\vec{q}_f = -\lambda_f \cdot \text{grad} T. \quad (2.1)$$

Der Proportionalitätsfaktor λ_f definiert die Wärmeleitfähigkeit und ist eine Materialkonstante, die lediglich von der physikalischen Natur des Materials oder der chemischen Zusammensetzung abhängt, jedoch unabhängig von der Probendicke, dem Temperaturgradienten und der Wärmestromdichte ist. Nach [KITTEL, 1973] und [REIF, 1990] wird die Wärmeleitfähigkeit λ_f im Sinne der „kinetischen Theorie von Transportprozessen“ durch mikroskopische Größen beschrieben: Teilchengeschwindigkeit v , mittlere freie Weglänge l der Teilchen und die Änderung der inneren Energie mit der Temperatur $du/dT = c_v$, d.h. die spezifische Wärmekapazität:

$$\lambda_f = \frac{1}{3} \cdot c_{v,f} \cdot \rho_f \cdot v_f \cdot l_f. \quad (2.2)$$

Teilchen im Festkörper in diesem Sinne sind Quasiteilchen, die als Phononen bezeichnet werden und den Energieträger von Gitterschwingungen darstellen.

Die Wärmeleitfähigkeit λ_f ist aufgrund der Temperaturabhängigkeit der Wärmekapazität und der mittleren freien Weglänge ebenfalls von der Temperatur abhängig. Die mittlere freie Weglänge von Phononen wird hauptsächlich durch zwei Prozesse bestimmt, nämlich die Streuung an Kristallfehlern und die Streuung an anderen Phononen. Weil die Anzahl der angeregten Phononen bei hohen Temperaturen proportional zu T und die mittlere freie Weglänge l_f umgekehrt proportional zur Anzahl der Phononen ist, ergeben sich die Beziehungen $l_f \sim 1/T$ und $\lambda_f \sim 1/T$. Die Temperaturabhängigkeit $l_f \sim 1/T$ bei kristallinen Stoffen wird in den Arbeiten von [DEBYE, 1914] und [PEIERLS, 1929] theoretisch diskutiert und experimentell durch [EUCKEN, 1911], [EUCKEN, 1940], [KINGERY, 1955], [CHARVAT, 1957] und [LEE, 1960] bestätigt.

Bei ungeordneten Systemen, wie polykristallinen und nichtkristallinen Stoffen, werden die Gitterschwingungen durch mangelnde Periodizität und durch die Anwesenheit von Korngrenzen gestört. Die mittlere freie Weglänge der Phononen wird durch die Größe der Inhomogenitäten eingeschränkt. Die Wärmeleitfähigkeit ist bei niedrigen Temperaturen entsprechend gering. Mit zunehmender Temperatur kann in diesen Stoffen die Gitterordnung kaum noch ungeordneter werden und die mittlere freie Weglänge bleibt fast konstant. Die geringe Temperaturabhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit dieser Stoffe ist somit auf die Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärmekapazität zurückzuführen. Zu dieser Problematik sei auf die Arbeiten von [EUCKEN, 1911], [EUCKEN, 1940], [KITTEL, 1949], [KLEMEN, 1951] und [LEE, 1960] hingewiesen.

2.2 Wärmetransport durch das Gas

Experimentelle Arbeiten zeigen, dass die Wärmeleitfähigkeit des in einem porösen Medium befindlichen Gases von der Wärmeleitfähigkeit, die im Freien gemessen wurde, abweichen kann. Man ist zur Schlussfolgerung gekommen, dass das Verhalten der Gaswärmeleitung nicht nur von den Eigenschaften des Gases, sondern auch von der Dimension des umschließenden Raumes – z.B. Poren in porösen Medien – abhängt. Dieses Problem ist unter Anwendung der „*kinetischen Gastheorie*“ erklärbar, bei der die Abhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit des Gases von einer Kennzahl, der Knudsenzahl Kn , festgestellt wurde. Die Knudsenzahl ist als Verhältnis der mittleren freien Weglänge der Gasmoleküle l_g zum Porendurchmesser d_p des Mediums definiert:

$$Kn = \frac{l_g}{d_p} . \quad (2.3)$$

Die Knudsenzahl gibt folgenden Sachverhalt wieder: Bei kleinen Kn -Zahlen überwiegen Zusammenstöße der Gasmoleküle untereinander, während bei großen Kn -Zahlen Zusammenstöße der Gasmoleküle mit umschließenden Wänden dominieren. Bei Kn -Zahlen der Größenordnung 1 spricht man vom Übergangsbereich. Dadurch unterscheidet man drei Bereiche der Gaswärmeleitung:

Freies Gas ($Kn \ll 1$): Man spricht von einem freien Gas, wenn die mittlere freie Weglänge der Gasmoleküle l_g wesentlich kleiner ist als der Abstand

der begrenzenden Wände. Nach der kinetischen Gastheorie berechnet sich die Wärmeleitfähigkeit eines freien idealen Gas zu:

$$\lambda_{g0} = \frac{1}{3} \cdot c_v \cdot \rho_g \cdot \bar{v}_g \cdot l_g, \quad (2.4)$$

mit c_v	spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen,
$\rho_g = p_g / (RT)$	Dichte des Gases,
$\bar{v}_g \approx \sqrt{3k_B T / m}$	mittlere Geschwindigkeit der Gasmoleküle,
$l_g = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{k_B T}{p_g \sigma_0}$	mittlere freie Weglänge der Gasmoleküle,
und R	Gaskonstante,
p_g	Gasdruck,
k_B	Boltzmannkonstante,
m	Masse eines Gasatoms,
σ_0	Stoßquerschnitt der Gasatome.

Danach wird der Wärmeleitvorgang im Gas als ein Diffusionsprozess beschrieben: Durch Stöße wird Energie von Gasmolekül zu Gasmolekül übertragen. Dadurch diffundiert die Wärme durch das Gas. Weil c_v und \bar{v}_g nicht vom Druck abhängen, während $\rho_g \sim p_g$ und $l_g \sim 1/p_g$ sind, ist die Wärmeleitfähigkeit eines freien Gases vom Druck unabhängig. Sie hängt jedoch von der Temperatur ab und ist tatsächlich proportional zu \sqrt{T} :

$$\lambda_{g0} \sim \frac{c_v}{\sigma_0} \sqrt{\frac{k_B T}{m}}. \quad (2.5)$$

Der Wärmetransport erfolgt in einem freien Gas hauptsächlich durch Wechselwirkung der Gasmoleküle untereinander.

Molekularer Bereich ($Kn \gg 1$): Weil der Porendurchmesser wesentlich kleiner als die mittlere freie Weglänge der Gasmoleküle ist, stoßen sich die Gasmoleküle hauptsächlich an den Porenwänden und übertragen dabei Energie direkt von der heißen zur kalten Seite der Poren. Ein solcher Fall tritt bei stark verdünnten Gasen oder in sehr kleinen Hohlräumen auf.

Wird die freie Weglänge allein durch den Wandabstand oder den Porendurchmesser d_p bestimmt (man spricht dann von *molekularer Wärmeleitung*) so ist:

$$\lambda \sim n c_v d_p \sqrt{\frac{k_B T}{m}}, \quad (2.6)$$

wobei n die Teilchenzahldichte bezeichnet. Aufgrund der Abhängigkeit von der Porengröße d_p ist λ nicht mehr eine Wärmeleitfähigkeit im Sinne des Fourierschen Erfahrungssatzes, sondern wird als eine Pseudoleitfähigkeit bezeichnet.

Unvollständige Energieübertragung beim Stoß eines Gasmoleküls an der Wand wird mit dem Akkommodationskoeffizienten γ_a durch den Faktor $(2/\gamma_a - 1)^{-1}$ berücksichtigt [KNUDSEN, 1911]. Bei gegebener Temperatur ist λ proportional zum Gasdruck p_g ($n \sim p_g$); bei konstantem Gasdruck ist $\lambda \sim 1/\sqrt{T}$ (da $n \sim 1/T$).

Übergangsbereich ($Kn \approx 1$): In diesem Fall wird die Wärmeleitfähigkeit durch Stöße der Gasmoleküle untereinander und an den Wänden gleichermaßen beeinflusst. Nach [SMOLUCHOWSKI, 1898] wird die Einschränkung der mittleren freien Weglänge durch die Wände insbesondere in der Wandnähe aufgrund der hohen Stoßwahrscheinlichkeit an der Wand wirksam. Daraus resultiert dort eine geringere Leitfähigkeit und damit ein größerer Temperaturgradient (SMOLUCHOWSKI-Effekt).

Im Übergangsbereich gilt die Gaswärmeleitfähigkeit:

$$\lambda_g = \frac{\lambda_{g0}}{1 + 2\beta I_g / d_p}, \quad (2.7)$$

dabei ist β ein Faktor, der von der Gasart abhängt. Damit ist λ_g durch den Einfluss von I_g vom Gasdruck abhängig.

Arbeiten zum Thema Wärmetransport in verdünnten Gasen findet man in den Arbeiten [SPRINGER, 1971] und [GIEDT, 1985]. Anwendungen auf Aerosole werden durch [HRUBESH, 1994] und [ZENG, 1994] diskutiert. Generelle Diskussionen werden in der Arbeit [WOLF, 1994] durchgeführt und zu

Anwendungen auf Faserdämmstoffen sei auf die Arbeiten [STARK, 1993] und [ZHENG, 1994] hingewiesen.

2.3 Wärmestrahlungstransport

Wie bereits erwähnt wurde, erfolgt die Strahlungsausbreitung in einem porösen Medium durch einen Austauschprozess zwischen den Teilchenoberflächen, welcher von der Temperaturdifferenz zwischen den Teilchenoberflächen und den Strahlungseigenschaften (Emissivitäten) der Teilchenoberflächen abhängt, und eventuell durch einen Transportprozess innerhalb des strahlungsdurchlässigen Festkörpers, welcher durch die Strahlungseigenschaften des soliden Feststoffes bestimmt ist. Die für die Berechnung des Strahlungswärmestromes wichtigen Parameter umfassen daher nicht mehr auf Oberflächen/Oberflächen-Austauschwechselwirkungen beschränkte Überlegungen, sondern den Gesamteinfluss der Teilchen auf die Strahlungsauslöschung entlang einer mittleren freien Weglänge. In vielen Fällen kann ein heterogenes poröses Medium zur Vereinfachung als ein Kontinuum behandelt werden, für welches effektive Strahlungseigenschaften eingeführt werden können, die nachfolgend kurz beschrieben werden:

Durchdringt Wärmestrahlung in einem porösen Medium eine dünne Schicht ds , so wird ihre spektrale Intensität I_λ durch Absorption und Streuung um

$$dI_\lambda(s) = -E_\lambda(s) \cdot I_\lambda \cdot ds \quad (2.8)$$

geschwächt. Die Proportionalitätskonstante E_λ ist eine Materialeigenschaft und wird als Extinktionskoeffizient bezeichnet. Sie ist ein Maß für die Abschwächung elektromagnetischer Strahlung durch Streuung und Absorption. Der reziproke Wert davon entspricht der mittleren freien Weglänge l_m von sich im Medium ausbreitenden Photonen der Wellenlänge λ . Die mittlere freie Weglänge l_m stellt die Pfadlänge der Strahlung vor der Abschwächung durch Absorption und Streuung dar [SIEGEL, 1992].

Der spektrale Extinktionskoeffizient setzt sich additiv aus dem spektralen Absorptionskoeffizienten $k_a(\lambda, T)$ und dem Streukoeffizienten $k_s(\lambda, T)$ zusammen:

$$E(\lambda, T) = k_a(\lambda, T) + k_s(\lambda, T) \quad (2.9)$$

Das Verhältnis des Streu- zum Extinktionskoeffizienten ist als Albedo bekannt

$$\omega_0 = k_s / E. \quad (2.10)$$

Das Integral der Gleichung (2.9) über die Weglänge s der Strahlung wird als *optische Dicke* oder *optische Tiefe* bei einer bestimmten Wellenlänge bezeichnet:

$$\tau_{0,\Lambda}(s) = \int_0^s E_\Lambda(s') ds'. \quad (2.11)$$

Sie ist ein Maß für die Abschwächung der Strahlung auf dem Weg s . Proben mit $\tau_0 \gg 1$ für alle wichtigen Wellenlängen werden als *optisch dick* bezeichnet (in der Fachliteratur meist mit $\tau_0 \geq 15$ angegeben). Die mittlere freie Weglänge l_m der Photonen ist dann im Vergleich zur charakteristischen Dicke der Probe sehr klein. In diesem Fall kann die Strahlungsausbreitung in der Probe als ein Diffusionsprozess behandelt werden, wobei eine Strahlungsleitfähigkeit λ_r nach dem Rosseland-Diffusionsmodell definiert ist:

$$\lambda_r = \frac{16}{3} \cdot \frac{n^2 \sigma}{E} \cdot T_r^3. \quad (2.12)$$

In dieser Gleichung bezeichnen σ die Stefan-Boltzmann-Konstante ($\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$), n den Realteil des effektiven Brechungsindex des porösen Mediums (der bei hoher Porosität nahe eins ist), und T_r eine mittlere Strahlungstemperatur

$$T_r^3 = \frac{1}{4} \cdot (T_1^2 + T_2^2) \cdot (T_1 + T_2). \quad (2.13)$$

T_1 und T_2 bezeichnen die Wandtemperaturen des Hohlraums.

In einem grauen Medium ist der Extinktionskoeffizient E in Gleichung (2.12) einfach eine temperaturunabhängige Konstante. Ist das poröse Medium nicht grau, wird für E in Gleichung (2.12) ein wellenlängengemittelter Wert (und deswegen prinzipiell temperaturabhängiger Wert) $E_R(T)$

benötigt, welcher von $E(\Lambda)$ abhängt und als ROSSELAND-Mittelwert bekannt ist [SIEGEL, 1972]:

$$E_R(T) = \frac{\sum_{\Delta\Lambda} f(\Lambda, T) \cdot \Delta\Lambda}{\sum_{\Delta\Lambda} \frac{1}{E(\Lambda)} \cdot f(\Lambda, T) \cdot \Delta\Lambda}, \quad (2.14)$$

wobei $f(\Lambda, T)$ die Gewichtungsfunktion

$$f(\Lambda, T) = \frac{\pi C_4 C_5}{2\Lambda^6} \cdot \frac{1}{\sigma T^5} \cdot \frac{\exp[C_5/(\Lambda T)]}{\{\exp[C_5/(\Lambda T)]\}^2} \quad (2.15)$$

ist, mit den Konstanten $C_4 = 5,9544 \cdot 10^{-17}$ [W·m²], $C_5 = 1,4388 \cdot 10^{-2}$ [m·K].

In optisch dünnen Proben mit $\tau_0 \ll 1$ kann Strahlung weitgehend ungehindert das Medium durchdringen. Jedes Element der Probe steht in direkter Wechselwirkung mit den Rändern. Für den Strahlungstransport müssen die Berandungsflächen mit den Emissivitäten ε_1 und ε_2 berücksichtigt werden. Zu diesem Thema sei auf die Arbeiten von [SIEGEL, 1972] und [CAPS, 1997] hingewiesen.

Bis hierher wurde angenommen, dass das betrachtete poröse Medium für Strahlung isotrop ist, d.h. Strahlung wird in allen Raumrichtungen gleichmäßig gestreut (gekennzeichnet durch den Extinktionskoeffizienten E ohne Stern). Zur Berücksichtigung anisotroper Streuung, die viele reale poröse Medien zeigen, ist E in einen Effektivwert E^* zu überführen. Vorwärtsstreuung bedeutet gegenüber dem isotropen Fall eine Verminderung des Transportwiderstandes für die Strahlung, was einer Reduzierung von $E(\Lambda)$ bzw. $E_R(T)$ entspricht. Bei Rückwärtsstreuung erhöht sich der Widerstand und $E(\Lambda)$ bzw. $E_R(T)$ wird größer. Dadurch ändert sich $E(\Lambda)$ auf $E^*(\Lambda)$ und $E_R(T)$ entsprechend auf $E_R^*(T)$. Zur Kennzeichnung dieses Streuverhaltens wurde der sogenannte Asymmetriefaktor g eingeführt

$$g = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \Phi(\mu_s) \mu_s d\mu_s \quad (2.16)$$

wobei μ_s den Kosinus des Streuwinkels und $\Phi(\mu_s)$ die Phasenfunktion der Streuung bezeichnen. Der Asymmetriefaktor g liegt im Intervall $(-1; +1)$. Der Grenzwert $g=1$ wird nur dann erreicht, wenn die einfallende Strahlung vollständig in Vorwärtsrichtung wieder austritt (also im Grunde nicht gestreut wird). $g=-1$ bedeutet reine Rückwärtsstreuung. Isotrope Streuung liegt vor, wenn die Phasenfunktion unabhängig vom Streuwinkel ist, der Asymmetriefaktor g hat in diesem Fall den Wert 0. Mit dem Asymmetriefaktor g lassen sich Effektivwerte definieren

$$E^* = (1 - \omega_0 \cdot g)E \quad (2.17)$$

und

$$\tau_0^* = (1 - \omega_0 \cdot g)\tau_0 \quad (2.18)$$

Zur Veranschaulichung des Einflusses der Streuung auf die effektive Extinktion wird ein Beispiel von Glasfasern in Abbildung A.1 im Anhang ausgeführt, wobei Extinktionskoeffizienten ohne und mit Berücksichtigung der Streuung zum Vergleich gegenübergestellt werden.

Tab. 1: Effektive, dichtespezifische, wellenlängengemittelte Extinktionskoeffizienten E^* / ρ verschiedener Superisolationen [VDI-Wärmeatlas].

Material	kalorimetrisch	spektroskopisch	theoretisch
	(E^*/ρ) [m ² /g]	(E^*_R/ρ) [m ² /g]	(E^*_R/ρ) [m ² /g]
Fumed Silica + 16% Fe ₃ O ₄	0,046	0,042	
Borsilikat-Glasfasern, d = 3 – 5 µm	0,058	0,06	0,06
Fiberglas bonded mats, d = 14 µm	0,011	0,0087	
Fiberal (Al ₂ O ₃ -Fasern), d = 5 – 10 µm	0,019	0,014	
Borsilikat-Glasfasern + 30% Fe ₃ O ₄	0,077		
Borsilikat-Glasfasern + 33% Fe ₃ O ₄	0,067	0,058	
	(E/ρ)		
Polyesterfasern			
d = 40 µm	0,0135	0,0138	
d = 26 µm	0,0229	0,0253	0,0247
d = 16 µm	0,0407	0,0422	0,0401
Polypropylenfasern			
d = 20 µm, rein		0,0328	

Der Extinktionskoeffizient kann kalorimetrisch, spektroskopisch oder theoretisch bestimmt werden. Zu den Methoden zur Ermittlung des Extinktionskoeffizienten sei auf die Arbeiten [CAPS, 1986] und [REISS, 1988] hingewiesen. Um einen Überblick über die Größenordnung der Extinktion zu vermitteln, sind in Tabelle 1 einige Beispiele ausgeführt.

2.4 Gesamtwärmetransport und Methoden zur Ermittlung der effektiven Wärmeleitfähigkeit

Wie andere Proportionalitätskoeffizienten wird die gesamte/effektive Wärmeleitfähigkeit λ_{eff} eines dispersen Mediums normalerweise als eine Größe betrachtet, die unabhängig von der experimentellen Messanordnung sein muss. Nach dem Fourierschen Erfahrungsgesetz gilt im stationären Fall

$$\dot{q} = -\lambda_{eff} \cdot \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (2.19)$$

In dieser Beziehung bezeichnet \dot{q} die gesamte Wärmestromdichte durch das Medium, die durch den Temperaturgradienten $\partial T/\partial x$ verursacht wird. Prinzipiell setzt sich \dot{q} aus den partiellen Wärmestromdichten \dot{q}_i bzw. λ_{eff} aus den Wärmeleitkomponenten λ_i zusammen. In einem porösen Medium sind \dot{q}_i die Wärmestromdichten durch Gaswärmeleitung \dot{q}_g , durch Festkörperwärmeleitung \dot{q}_f und durch Wärmestrahlung \dot{q}_r , die bereits einzeln beschrieben wurden. Die gesamte Wärmestromdichte \dot{q} ist die Summe der einzelnen Komponenten:

$$\dot{q} = \dot{q}_g + \dot{q}_f + \dot{q}_r. \quad (2.20)$$

Wird diese Beziehung für die Wärmeleitfähigkeiten angewandt, dann ergibt sich bei einem gegebenen Temperaturgradienten

$$\lambda_{eff} = \lambda_g + \lambda_f + \lambda_r. \quad (2.21)$$

Es ist jedoch eher eine grobe Näherung, wenn die Komponenten \dot{q}_g , \dot{q}_f und \dot{q}_r bzw. λ_g , λ_f und λ_r unabhängig voneinander berechnet werden. Zunächst wird geprüft, ob die einzelnen Wärmeleitkomponenten λ_i wirklich

existieren. Eine Wärmeleitkomponente λ_i existiert, wenn der entsprechende Wärmetransport ein lokaler Prozess ist, der vom lokalen Temperaturgradienten abhängt. Diese Bedingung erfüllen die diffusiven Wärmetransportmechanismen Gas- und Festkörperwärmeleitung. Dagegen kann der Strahlungstransport über einen großen Abstand erfolgen, nämlich über die mittlere freie Weglänge der Photonen l_m , die zum Extinktionskoeffizienten E umgekehrt proportional ist. Deshalb nähert sich nur der Strahlungstransport in optisch dicken Medien oder Medien hoher Extinktion einem diffusiven Prozess an, so dass in diesem Fall auch die Strahlungskomponente λ_r existieren kann.

In der Praxis wird häufig eine Gesamtwärmeleitfähigkeit durch reine Wärmeleitung in den Bestandteilen eines porösen Mediums λ_c verwendet. Aufgrund der nichtlinearen Kopplung der beiden leitenden Prozesse, Gas- und Festkörperwärmeleitung, entspricht die Summe der beiden Komponenten $\lambda_g + \lambda_f$ nicht der gesamten Wärmeleitfähigkeit λ_c . Neben den Wärmeleitkomponenten λ_g und λ_f hängt λ_c von verschiedenen Einflussparametern wie der Porosität, der Partikelform/Porenform, der Partikelgröße/Porengröße, dem Kontaktwiderstand zwischen den Partikeln usw. Für die Berechnung der Wärmeleitfähigkeit durch reine Wärmeleitung eines dispersen zweiphasigen Systems sind zahlreiche Modellvorstellungen in der Fachliteratur vorhanden: Für Schüttungen werden z.B. das einfache Modell von [EUCKEN, 1932], das Plattenmodell von [KRISCHER, 1956] und insbesondere das komplizierte, aber genauere Einheitszellenmodell von [ZEHNER, 1970] häufig eingesetzt. Für poröse Baustoffe, die geschlossene sowie offene Poren enthalten, finden u.a. die Modelle von [LOEB, 1954], [RUSSEL, 1935] und [TRAUSTEL, 1961] Anwendung. Zu den Modellen für Fasermaterialien zählen z.B. die von [THIGPEN, 1959], [BHATTACHARYYA, 1980], [RATH, 1990] und [STARK, 1993].

Lässt sich der Strahlungstransport als ein Diffusionsprozess beschreiben, kann die gesamte Wärmestromdichte in Form des Fourierschen Erfahrungsgesetzes geschrieben werden:

$$\vec{q} = \lambda_c(T) \cdot \text{grad}T + \lambda_r(T) \cdot \text{grad}T, \quad (2.22)$$

und damit die totale oder effektive Wärmeleitfähigkeit definiert werden:

$$\lambda_{\text{eff}} = \lambda_c(T) + \lambda_r(T). \quad (2.23)$$

Für die experimentelle Ermittlung der effektiven Wärmeleitfähigkeit gibt es verschiedene Messverfahren. [MAGLIC, 1992] gibt eine ausführliche Darstellung zur Theorie und eine Beschreibung der praktischen Anwendung verschiedener Verfahren zur Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit an. Die wichtigsten Verfahren sind das Platten-, Zylinder- und Heizdrahtverfahren, die nachfolgend kurz erläutert werden:

Bei dem Plattenverfahren handelt es sich um ein stationäres Absolutverfahren, bei dem Messproben in Plattenform vermessen werden und der Wärmestrom senkrecht zur Platte verläuft. Aus dem die Platte durchdringenden Wärmestrom, der bekannten Probendicke und der Temperaturdifferenz zwischen der heißen und kalten Seite der Platte wird die Wärmeleitfähigkeit der Platte ermittelt. In Deutschland ist dieses Verfahren in der Norm DIN 52 612 festgeschrieben. Als internationale Norm findet man die ISO 8302 und als amerikanische Norm die ASTM C 201-86. Weil beim Plattenverfahren die Wärmeleitfähigkeit in einer bestimmten Richtung gemessen wird, ist dieses Verfahren für anisotrope Materialien geeignet.

Das Zylinderverfahren arbeitet nach einem ähnlichen Prinzip wie das Plattenverfahren. Der Unterschied hierin ist der radiale Verlauf des Wärmestroms durch die hohlzylindrische Probe. Aufgrund des radialen Verlaufs des Wärmestroms ist dieses Verfahren für anisotrope Materialien wenig geeignet. Für dieses Verfahren gibt es die Norm ISO/DIS 8497.

Die beiden oben genannten stationären Verfahren zeigen einen Nachteil in der langen Messdauer. Im Gegensatz dazu bietet das Heizdrahtverfahren die Möglichkeit an, Messungen, auch im Hochtemperaturbereich, viel schneller zu durchzuführen. Nachfolgend wird das Verfahren näher beschrieben.

3 Das Heizdrahtverfahren

Das Heizdrahtverfahren arbeitet nach dem Prinzip eines instationären Absolutverfahrens, wobei aus dem zeitlichen Verlauf des Temperaturanstieges eines elektrisch geheizten Drahtes bei Kenntnis der eingekoppelten Leistung die Wärmeleitfähigkeit des ihn umgebenden Mediums ermittelt werden kann.

Das Verfahren hat eine lange Entwicklungszeit: Anfang der 30er Jahren wurde eine neue Methode nach dem Prinzip des Heizdrahtverfahrens zur Ermittlung der Wärmeleitfähigkeit von verschiedenen Pulvern durch STÄHLHANE UND PYK [STÄHLHANE, 1931] vorgestellt. STÄHLHANE UND PYK fanden die empirische Beziehung:

$$\Delta T_w = A \cdot \frac{\dot{Q}}{\lambda} \cdot \ln\left(\frac{r_w^2}{t} + B\right), \quad (3.1)$$

mit ΔT_w : Temperaturanstieg am Heizdraht,
 \dot{Q} : elektrische Heizleistung pro Drahtlänge,
 r_w : Drahtradius,
 t : Zeitvariable.

A und B sind Konstanten, die sich aus der Vermessung von Materialien mit bekannter Wärmeleitfähigkeit ergaben. Diese empirische Beziehung mathematisch abzuleiten, wurde 1932 durch [HELD, 1932] versucht.

Eine klare theoretische und experimentelle Beschreibung der Heizdrahtmethode lieferten später [EUCKEN, 1938] und [PFRIEM, 1938], die Gase und Flüssigkeiten untersuchten. Vollständige theoretische Grundlagen des Heizdrahtverfahrens wurden von [FISCHER, 1940], [CARSLAW, 1948] und [HELD, 1949] geschaffen.

Anfangs wurden zur experimentellen Ermittlung des zeitlichen Temperaturanstieges des Heizdrahtes Thermometer verwendet, um die spiralförmig der eigentliche Heizdraht gewickelt wurde [STÄHLHANE, 1931]. Bei [HELD, 1932] wurde ein Kupfer/Konstantan-Thermoelement in der Mitte eines Manganin-Heizdrahtes angebracht. [GILLAM, 1955] benutzte dann nur einen einzelnen Platindraht gleichzeitig als Heizelement und Temperatursensor, der durch seinen temperaturabhängigen elektrischen Widerstand die Temperatur ermittelt.

Gute Genauigkeiten kann das Heizdrahtverfahren liefern bei Messung von Gasen ($\pm 0,2\%$) [KESTIN, 1978] und von Flüssigkeiten ($\pm 0,5\%$) [NIETO DE CASTRO, 1976]. Bei der Vermessung von gepressten Salzpulvern bei [HAKANSSON, 1988] liegt eine Ungenauigkeit von 1% - 2% vor.

Heutzutage verwendet man das Heißverfahren in drei gebräuchlichen Varianten:

- Bei dem Kreuzdrahtverfahren, das häufig auf feste Materialien angewandt wird, wird in der Mitte des Heizdrahtes ein Thermoelement befestigt, das die zeitliche Temperaturänderung des Heizdrahtes erfasst. In Deutschland ist dieses Verfahren in der Norm DIN EN 993-14 zur Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit von feuerfesten Erzeugnissen und Werkstoffen mit einer Wärmeleitfähigkeit kleiner als 1,5 W/m·K beschrieben. Die ISO 8894-1 gibt den internationalen Standard dieses Verfahrens an.
- Bei der Heizdraht-Widerstandstechnik wird die Heizdrahttemperatur durch die Änderung im temperaturabhängigen, elektrischen Widerstand des Heizdrahtes ermittelt. Der Vorteil dieses Verfahrens ist die Erfassung der mittleren Temperatur des gesamten Heizdrahtes zwischen den Verbindungspunkten. Genormt ist dieses Verfahren in der amerikanischen Norm ASTM C 1113-90 (Platinum Resistance Thermometer Technique). Diese Variante wird meistens bei Vermessung von Flüssigkeiten und Gasen eingesetzt.
- In den Normen DIN EN 993-15 und ISO 8894-1 wird eine weitere Variante des Heizdrahtverfahrens, nämlich das Parallelverfahren, zur Ermittlung der Wärmeleitfähigkeit von feuerfesten Materialien vorgeschlagen. Hierbei wird parallel zum Heizdraht ein Temperatursensor angebracht.

Im Rahmen dieser Arbeit wird die Kreuzdrahtanordnung bzw. die Heizdraht-Widerstandstechnik untersucht, bei denen der Temperaturanstieg des Heizdrahtes zur Ermittlung der Wärmeleitfähigkeit dient. Die Theorie dieser Verfahren wird in Arbeiten [HEALY, 1976], [KESTIN, 1978], [KHALIFA, 1979] und [CLIFFORD, 1980] ausführlich beschrieben.

3.1 Grundlagen und Messprinzip

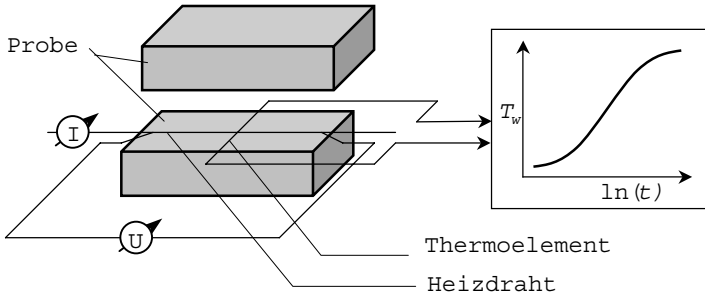


Abb. 1: Schematische Messanordnung des Kreuzdrahtverfahrens

Die mathematische Beschreibung des Kreuzdrahtverfahrens, dessen schematische Messanordnung in Abbildung 1 dargestellt ist, basiert auf dem Problem einer idealen unendlichen Linienquelle in einem unendlich ausgedehnten, umgebenden Medium:

$$\rho c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{q}_c = \nabla \cdot (\lambda_c \nabla T), \quad (\lambda_c = \text{konst.}) \quad (3.2)$$

mit den Anfangs- und Randbedingungen:

$$\begin{aligned} t \leq 0: & \quad T(r, t) = T_0, \\ t \geq 0, r = 0: & \quad \lim_{r \rightarrow 0} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = -\frac{\dot{Q}}{2\pi\lambda_c}, \\ t \geq 0, r = \infty: & \quad T(r, t) = T_0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

deren Lösung lautet:

$$\Delta T(r, t) = \frac{\dot{Q}}{4\pi\lambda_c} \cdot E_1 \left(\frac{r^2}{4at} \right), \quad (3.4)$$

wobei

$$E_1(x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du = -\gamma - \ln x + x + O(x^2) \quad (3.5)$$

das Exponentialintegral und $\gamma = \ln C = 0,5772$ die Eulerkonstante bezeichnen und $x = r^2/(4at)$ sowie $a = \lambda_c/(\rho c_p)$ sind.

Wenn $r^2/(4at)$ sehr klein ist (z.B. bei kleinem Drahtdurchmesser und bei großen Zeiten), reduziert sich die Gleichung (3.4) zu einer Langzeitnäherung

$$\Delta T(r, t) = T(r, t) - T_0 = \frac{\dot{Q}}{4\pi\lambda_c} \ln\left(\frac{4at}{r^2 C}\right). \quad (3.6)$$

In Gleichung (3.6) kommt die unbekannte Temperaturleitfähigkeit a vor. Zum Eliminieren der Temperaturleitfähigkeit wird die Drahttemperatur zu zwei unterschiedlichen Zeiten t_1 und t_2 gemessen. Damit lässt sich die Wärmeleitfähigkeit bestimmen durch

$$\lambda_c = \frac{\dot{Q}}{4\pi} \cdot \frac{\ln t_2 - \ln t_1}{T_w(t_2) - T_w(t_1)}. \quad (3.7)$$

Dazu muss man aus dem logarithmisch zeitlichen Verlauf der Heizdrahttemperatur einen linearen Abschnitt wählen, dessen Anfang und Ende die Temperaturen $T_w(t_1)$ und $T_w(t_2)$ darstellen, damit die Einflüsse der endlichen Wärmekapazität des Heizdrahtes (für kurze Zeiten; d.h. zu Beginn der Messung) und der äußeren Berandung (für große Zeiten) ausgeschlossen werden.

3.2 Fehlereinflüsse und deren Korrektur

In der Praxis weichen die experimentellen Bedingungen von denen des idealen Modells ab, was als Fehlereinflüsse Abweichungen der Drahttemperatur verursacht. Es ist jedoch in vielen Fällen möglich, durch entsprechende Gestaltung der experimentellen Durchführung die Lösung der idealen Linienquelle als gute Näherung anwenden zu können und resultierende Abweichungen unabhängig voneinander als kleine additive Korrekturterme zu behandeln [HEALY, 1976]:

$$\Delta T_{w,id} = \Delta T_w + \sum_i \delta T_i. \quad (3.8)$$

Dabei gilt Gleichung (3.8) nur für kleine Korrekturterme δT_i , da die einzelnen Korrekturterme in diesem Fall als voneinander unabhängig betrachtet werden können. Ausführliche Diskussionen zu solchen Korrekturtermen sind in den Arbeiten [HORROCKS, 1963], [MCLAUGHLIN, 1971], [HEALY, 1976] und [NIETO DE CASTRO, 1988] zu finden. Im folgenden werden einige wichtige Korrekturterme andiskutiert. Neben den Diskussionen um die Korrekturverfahren werden in der Fachliteratur auch andere Fehler durch Abweichungen von der idealen Lösung theoretisch sowie experimentell analysiert. Zu diesem Thema wird auf folgende Arbeiten hingewiesen:

- Der nicht-verschwindende Drahradius: [HEALY, 1976] und [LIANG, 1995],
- Die endliche Drahtlänge: [HEALY, 1976], [HORROCKS, 1962] und [LIANG, 1995],
- Strahlungseffekt an der Kontaktstelle zwischen dem Draht und der Probe: [NAGASHIMA, 1987].

3.2.1 Endliche spezifische Wärmekapazität und Wärmeleitfähigkeit des Drahtes

In diesem Fall gibt [HEALY, 1976] einen Korrekturterm an

$$\delta T_1 = \frac{\dot{Q}}{4\pi\lambda_c} \left\{ \frac{r_w^2[(\rho c_p)_w - \rho c_p]}{2\lambda_c t} \cdot \ln \frac{4at}{r_w^2 C} - \frac{r_w^2}{4at} + \frac{r_w^2}{4a_w t} - \frac{\lambda_c}{2\lambda_w} \right\} \quad (3.9)$$

wobei λ_w bzw. a_w die Wärme- bzw. Temperaturleitfähigkeit des Drahtes bezeichnet und der Index w für Drahteigenschaften steht. Für Heizdrahtmessungen der Wärmeleitfähigkeit sind nur die zeitabhängigen Terme in Gleichung (3.9) zu berücksichtigen. Bei Vermessung von festen Materialien sind lediglich Drahttemperaturen bei großen Zeiten von Interesse, so dass dieser Korrekturterm nicht mehr von Bedeutung ist.

3.2.2 Endliche radiale Proben dimension

Der Einfluss der äußeren Berandung am Ort $r = r_a$ auf die Drahttemperatur am Ort $r = r_w$ wurde u.a. von [FISCHER, 1939] untersucht. Für $r_a/r_w \gg 1$ und $4at/r_w^2 \gg 1$ gibt Fischer den Korrekturterm für die Drahttemperatur

$$\delta T_2 = \frac{\dot{Q}}{4\pi\lambda_c} \left\{ \ln\left(\frac{4at}{r_a^2 C}\right) + \sum_{i=1}^{\infty} \exp(-\beta_i^2 at/r_a^2) [\pi Y_0(\beta_i)]^2 \right\} \quad (3.10)$$

an, wobei β_i die Nullstellen von $J_0(\beta) = 0$ sind. Diese Korrektur ist vernachlässigbar, wenn der äußere Probenradius einen bestimmten Wert nicht unterschreitet. Dafür gibt [Healy, 1976] den minimalen äußeren Probenradius an

$$r_a > \sqrt{5,783 at_{\max}} \quad (3.11)$$

bei dem eine Abweichung $\delta T_2/\Delta T_w < 0,001 \cdot [2\ln(r_a/r_w)]^{-1}$ erreicht wird. Dies entspricht etwa der Größenordnung $O(10^{-4})$. [MANI, 1971] schlägt einen größeren minimalen äußeren Probenradius

$$r_a > \sqrt{28 at_{\max}} \quad (3.12)$$

vor, bei dem die Temperaturänderung am Ort $r = r_a$ $\Delta T(r_a) < 0,001 \cdot T_0$ vernachlässigbar ist.

Somit kann man bei gegebener Temperaturleitfähigkeit a des Mediums einen minimalen Probenradius r_a entsprechend einer maximalen Messzeit t_{\max} bestimmen. In einem Medium, in dem die Strahlung von Bedeutung ist, hängt der minimale Probenradius r_a nicht nur von der Wärmeleitfähigkeit durch reine Wärmeleitung, sondern auch von den Strahlungseigenschaften des Mediums ab. Bei den Berechnungen in der vorliegenden Arbeit wird das Kriterium von MANI angewandt, um den Einfluss der äußeren Berandung auszuschließen. Dabei wird statt a eine effektive Temperaturleitfähigkeit $a_{\text{eff}} = \lambda_{\text{eff}}/(\rho c_p)$ verwendet.

3.2.3 Temperaturabhängige Materialeigenschaften des Probenmediums

Die Lösung der idealen Linienquelle gilt nur für eine konstante Wärmeleitfähigkeit λ und eine konstante volumetrische Wärmekapazität ρc_p des Mediums. Eine Temperaturabhängigkeit der linearen Form:

$$\rho c_p(T) = (\rho c_p)_0 \cdot (1 + \varphi T), \quad \lambda(T) = \lambda_0 \cdot (1 + \chi T) \quad (3.13)$$

wird von [HEALY, 1976] untersucht, wobei φ und χ Konstanten sind und der Index 0 für Anfangswerte entsprechend der Anfangstemperatur T_0 steht. HEALY leitet daraus den Korrekturterm für die Temperatur ab:

$$\delta T_3 = -\frac{1}{2} \chi (\Delta T)^2 + \left(\frac{\dot{Q}}{4\pi\lambda_0} \right)^2 (\chi - \varphi) \ln 4 \quad (3.14)$$

Der zweite Term in Gleichung (3.14) ist von der Zeit unabhängig und beeinflusst deshalb nicht den Anstieg der Drahttemperatur und die Wärmeleitfähigkeit. Für die Messung der Wärmeleitfähigkeit ist darum der zweite Term nicht zu berücksichtigen. Der erste Term der Gleichung (3.14) verursacht eine deutliche Biegung der Kurve $\Delta T_w(\ln t)$. Der mittlere Anstieg ist

$$\frac{\Delta T_w(t_2) - \Delta T_w(t_1)}{\ln t_2 - \ln t_1} = \frac{\dot{Q}}{4\pi\lambda_0 \left\{ 1 + \frac{\chi}{2} [\Delta T_w(t_1) - \Delta T_w(t_2)] \right\}}. \quad (3.15)$$

Dieser Ausdruck ist identisch mit der Lösung der idealen Linienquelle (Gleichung (3.7)); zuzuordnen ist deshalb in diesem Fall die gemessene Wärmeleitfähigkeit des Mediums der Temperatur

$$T_{real} = \frac{1}{2} [\Delta T_w(t_1) + \Delta T_w(t_2)] + T_0 \quad (3.16)$$

Im Fall von strahlungsdurchlässigen Medien liegt eine Strahlungsleitfähigkeit (in optisch dicken Medien) vor, die der dritten Potenz der Temperatur proportional ist. Die effektive Wärmeleitfähigkeit ist deshalb von der dritten Potenz der Temperatur abhängig. Für eine derartige Abhängigkeit ist eine analytische Lösung nicht mehr möglich.

4 Modellierung der gekoppelten Strahlung/Leitung

Eine nicht vernachlässigbare Abweichung von der Lösung der idealen Linienquelle, welche bei Heizdrahtmessungen an porösen Materialien auftritt, ist der Wärmetransport durch Strahlung, deren Effekt das Untersuchungsthema der vorliegenden Arbeit darstellt. Bei stark absorbierenden Materialien stehen Leitungs- und Strahlungstransport in einer starken Wechselwirkung, so dass eine getrennte Behandlung der Strahlung nicht möglich ist. In diesem Fall ist in der Fachliteratur kein Korrekturterm bekannt, da eine analytische Lösung der gekoppelten Strahlung/Leitung nicht realisierbar ist. Das betrachtete Problem, welches in Abbildung 2 dargestellt ist, kann daher nur durch eine numerische Simulation untersucht werden.

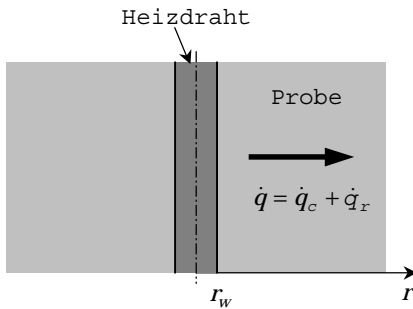


Abb. 2: *Gekoppelte Strahlung/Leitung bei stationären Heizdrahtmessungen.*

4.1 Mathematische Beschreibung des Problems

Mit Rücksicht auf die Lösbarkeit des Problems werden für die Modellierung folgende Vereinfachungen getroffen:

- Das Medium sei isotrop, homogen und in axialer Richtung unendlich ausgedehnt. Die resultierende Gesamtwärmeleitfähigkeit λ_c für Gas und Feststoff und die volumetrische Wärmekapazität ρc_p sollen als temperaturunabhängig betrachtet werden.
- Das Medium sei von zwei coaxialen Zylindern eingeschlossen. Der innere Zylinder stellt hierbei den Heizdraht mit dem Radius r_w dar, während der äußere Zylinder mit dem Radius r_a den isothermen Probenrand mit der konstanten Umgebungstemperatur T_0 markiert.

- Die Heizdrahtoberfläche sei grau, sie emittiert und reflektiert Strahlung diffus. Die äußere Probenberandung sei schwarz ($\varepsilon_a = 1$). Das Medium sei im lokalen thermischen Gleichgewicht, womit Kirchhoffsches und Planck'sches Gesetz Gültigkeit besitzen.
- Der Strahlungstransport wird als stationär angenommen. Die Temperaturänderung im Medium wird durch die Wärmekapazität geprägt.
- Das Medium sei grau und habe wellenlängen- und temperaturunabhängige Strahlungseigenschaften und einen konstanten Brechungsindex $n = 1$.
- Zum Zeitpunkt $t = 0$ haben Draht und Medium die Umgebungstemperatur T_0 .

4.1.1 Energietransportgleichung

Die Lösung der idealen Linienquelle wurde auf der Basis der reinen Wärmeleitung abgeleitet, deren Wärmetransport diffusiv erfolgt. Anwendung findet die Lösung der idealen Linienquelle bei infrarot-optisch opaken homogenen oder bei völlig transparenten Medien, bei denen der Strahlungstransport völlig von der Wärmeleitung entkoppelt ist. In porösen Medien, erfolgt der Wärmetransport durch zwei in Wechselwirkung stehende Prozesse: die diffusive Wärmeleitung und die Wärmestrahlung. Der letztgenannte Transportprozess kann bei optisch dicken Medien als ein diffusiver Vorgang betrachtet werden. Andernfalls ist er kein Diffusionsvorgang, so dass die Lösung der idealen Linienquelle die Anwendbarkeit verliert.

Unter Anwendung der Additionsnäherung für die Gesamtwärmestromdichte \dot{q} als Summe aus dem Leitungs- und Strahlungsanteil erweitert sich die Wärmeleitungsgleichung (3.2) zu einer Integral-Differentialgleichung für die gekoppelte Strahlung/Leitung:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda_c \nabla T) - \nabla \cdot \vec{\dot{q}}_r, \quad (4.1)$$

wobei als Strahlungsterm die Divergenz der Strahlungsstromdichte

$$\nabla \cdot \vec{\dot{q}}_r = k_a \cdot \left(4\pi I_b - \int_{4\pi} I d\Omega \right). \quad (4.2)$$

den Unterschied zum Wärmeleitungsproblem nach Gleichung (3.2) darstellt.

Für ein Medium zwischen zwei coaxialen Zylindern, nämlich dem Draht des Radius r_w und dem äußeren Probenrand des Radius r_a , wobei r_a genügend groß ist, so dass diese Berandung einen vernachlässigbar kleinen Einfluss auf den zeitlichen Verlauf des Heizdrahtes hat, lauten die Anfangs- und Randbedingungen wie folgt:

$$\begin{aligned}
 t \leq 0, & \quad T(r, t) = T_0, \\
 t \geq 0, \quad r = r_w, & \quad \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{\dot{Q}}{2\pi r_w \lambda_c} + \frac{\dot{q}_r(r_w)}{\lambda_c}, \\
 t \geq 0, \quad r = r_a, & \quad T(r, t) = T_0,
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Es besteht die Frage, unter welchen Bedingungen der Strahlungstransport in einem porösen Medien als ein Diffusionsprozess angesehen werden darf. In der Literatur betrachtet man als Kriterium für die Diffusionsfrage des Strahlungstransports die optische Dicke τ_0 einer Probe, die als eine Eigenschaft einer gegebenen Probe gilt, da τ_0 proportional von der Probendicke D abhängt. Eine solche Betrachtung gilt aber nur bei stationären Vorgängen. Bei einer instationären Heizdrahtmessung spielen nur lokale Eigenschaften des Mediums in der unmittelbaren Umgebung des Drahtes eine wesentliche Rolle beim Wärmetransport. Deshalb ist nicht die optische Dicke, sondern die lokale infrarot-optische Eigenschaft der Probe, nämlich die Extinktion, entscheidend. Es ist darum zu klären, wie groß der Extinktionskoeffizient E sein muss, damit der Strahlungstransport bei einer Heizdrahtmessung als diffusiv angesehen und die Lösung der idealen Linienquelle mit guter Genauigkeit angewandt werden darf.

Falls der Strahlungstransport in einer Heizdrahtmessung diffusiv mit der Strahlungsleitfähigkeit λ_r (s. Gleichung 2.12) erfolgt, vereinfacht sich die Divergenz der Strahlungsstromdichte in Gleichung (4.2) zu einem dem Fourierschen Gesetz ähnlichen Modell

$$\nabla \cdot \vec{q}_r = \nabla \cdot (-\lambda_r \nabla T). \tag{4.4}$$

Durch additive Kombination der Wärmeleitfähigkeit durch reine Wärmeleitung λ_c mit der Strahlungsleitfähigkeit λ_r wird dann die effektive Wärmeleitfähigkeit definiert

$$\lambda_{eff} = \lambda_c + \lambda_r. \quad (4.5)$$

Schließlich ergibt sich aus den Gleichungen (4.1, 4.4 und 4.5) die vereinfachte Energiegleichung für das Problem der gekoppelten Strahlung/Leitung

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot [\lambda_{eff}(T) \cdot \nabla T], \quad (4.6)$$

die mit der Wärmeleitungsgleichung (3.2) für das Modell der idealen Linienquelle identisch ist. Damit erscheint es, dass die effektive Wärmeleitfähigkeit λ_{eff} mittels der Lösung der idealen Linienquellen ermittelt werden kann. Dafür muss eigentlich noch eine weitere wichtige Bedingung erfüllt werden, nämlich die Darstellung der Strahlungsstromdichte $\dot{q}_r(r_w)$ in der Randbedingung der Gleichung (4.3) in einer diffusiven Form anhand des Diffusionsmodells. Das bedeutet, dass die Strahlungsstromdichte dem Fourierschen Gesetz entsprechen muss (d.h. $\dot{q}_r(r_w) = -\lambda_r(\partial T / \partial r)_{r=r_w}$), damit für die gekoppelte Strahlung/Leitung eine dem Wärmeleitproblem entsprechende Randbedingung

$$t \geq 0, r = r_w: \quad \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{\dot{Q}}{2\pi r_w(\lambda_c + \lambda_r)} = -\frac{\dot{Q}}{2\pi r_w \lambda_{eff}} \quad (4.7)$$

erreicht wird. Laut [SIEGEL, 1972] und [VISKANTA, 1962] darf in der Nähe von Berandungsflächen (in diesem Fall vom Heizdraht) der Strahlungstransport nicht mit der Diffusionsnäherung approximiert werden. Der Wert der nach Gleichung (4.7) berechneten Wärmestromdichte $\dot{q}_r(r_w)$ weicht deshalb umso stärker vom tatsächlichen Wert ab, je kleiner der Extinktionskoeffizient E ist. Man kann aber mit sehr großen Extinktionskoeffizienten E eine sehr gute Gültigkeit der Gleichungen (4.6) und (4.7) und damit Genauigkeit bei Anwendung der Lösung der idealen Linienquelle erreichen. Ein Kriterium für den mindestens erforderlichen Wert des Extinktionskoeffizienten E kann nur durch eine numerische Simulation ermittelt werden.

Ein zweites Problem, das mit der effektiven Wärmeleitfähigkeit zusammenhängt, ist die starke Temperaturabhängigkeit, welche die Bestimmung der zur gemessenen effektiven Wärmeleitfähigkeit gehörenden Bezugstemperatur erschwert. Für eine konstante Wärmeleitfähigkeit durch reine Wärmeleitung λ_c unterscheiden sich Gleichung (3.2) und Gleichung (4.6) voneinander durch die Temperaturabhängigkeit der effektiven Wärmeleitfähigkeit

aufgrund der Anwesenheit der dritten Potenz der Temperatur T_r^3 proportionalen Strahlungsleitfähigkeit λ_r . Eine solch starke Temperaturabhängigkeit ist besonders bei kleinen Extinktionskoeffizienten ausgeprägt, da λ_r dem Extinktionskoeffizienten umgekehrt proportional ist. Die starke Temperaturabhängigkeit führt bei Heizdrahtmessungen zu einer uneindeutigen Zuordnung der Bezugstemperatur, da während der Messung die Temperatur des Mediums im Nahbereich des Heizdrahtes um mehrere Kelvin steigt. Die Übertemperatur des Mediums in einer Messung hängt von der eingekoppelten Heizleistung ab. Je höher die Heizleistung ist, desto größer ist die Übertemperatur und damit die gemessene effektive Wärmeleitfähigkeit. Die Annahme der Anfangstemperatur als Bezugstemperatur ist im Fall der stark temperaturabhängigen effektiven Wärmeleitfähigkeit nicht mehr berechtigt. Sie gilt näherungsweise bei sehr kleinen Übertemperaturen, die mit sehr kleinen Heizleistungen erreicht werden können. In der Praxis sind kleine Temperaturhübe aufgrund messtechnischer Gründe nicht möglich. Wie bereits oben erwähnt wurde, empfehlen AKSEL'ROD UND VISGNEVSKII [AKSEL'ROD, 1984] die lineare Relation der effektiven Wärmeleitfähigkeit von der Heizleistung auf eine Null-Heizleistung zu extrapolieren, um die wahre Wärmeleitfähigkeit mit der Anfangstemperatur als zugehörige Bezugstemperatur zu erhalten. Ob eine solche lineare Relation existiert, wird in der vorliegenden Arbeit untersucht. In der Praxis wird manchmal die arithmetisch mittlere Temperatur während des Messvorgangs als Bezugstemperatur verwendet. Eine solche Annahme der mittleren Temperatur als Bezugstemperatur ist physikalisch nicht begründet, liegt jedoch näher an der wahren Bezugstemperatur als die Anfangstemperatur. Das Problem der Bezugstemperatur soll deshalb in der vorliegenden Arbeit untersucht werden.

4.1.2 Strahlungstransportgleichung

Zur Lösung des Problems der gekoppelten Strahlung/Leitung ist die Energiegleichung (4.1) zu lösen. Dazu ist die Kenntnis der Verteilung der Strahlungsdivergenz $\nabla \cdot \vec{q}_r(r)$ erforderlich, die aus der Strahlungstransportgleichung zu gewinnen ist. Da der Strahlungstransport etwa mit Lichtgeschwindigkeit erfolgt, ist dessen Relaxationszeit gegenüber der Wärmeleitung vernachlässigbar [ÖZISIK, 1973], so dass für die instationäre Heizdrahtmessung die Lösung der stationären Strahlungstransportgleichung vollkommen genügt.

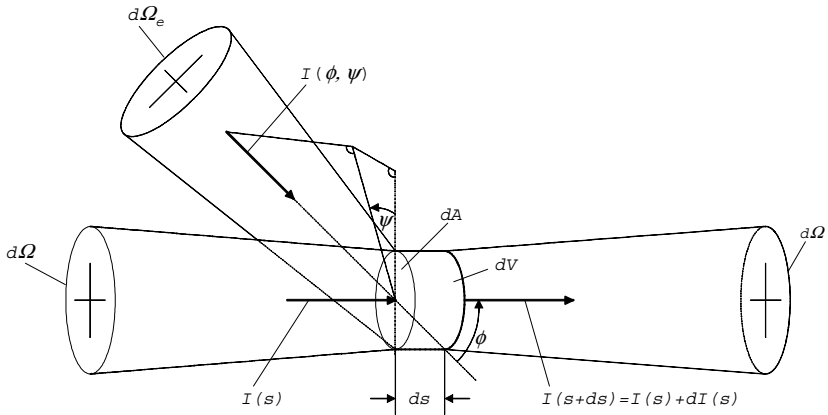


Abb. 3: Änderung der Strahlungsintensität $I(s)$ entlang einer Weglänge ds in einem absorbierenden, emittierenden und streuenden Medium.

In einem absorbierenden, emittierenden und streuenden Medium nimmt eine Strahlungsintensität $I(s)$ entlang einer Weglänge ds und im Raumwinkel $d\Omega$ um ds durch Absorption und Streuung ab, durch Emission des Volumenelements $dA \cdot ds$ und durch Einstreuung aller ankommenden Intensitäten $I(\phi, \psi)$, die vom Volumenelement in die s -Richtung gestreut werden, aber zu, wie in Abbildung 3 veranschaulicht ist. Dadurch ergibt sich für die Intensitätsänderung die allgemeine Strahlungstransportgleichung [SIEGEL, 1992]:

$$\frac{dI}{ds} = \vec{s} \cdot \nabla I = -(k_a + k_s)I + k_a I_b + \frac{k_s}{4\pi} \int_{4\pi} I(\vec{s}') \Phi(\vec{s} \cdot \vec{s}') d\Omega', \quad (4.8)$$

- mit
- I : gerichtete Strahlungsintensität,
 - I_b : Schwarzkörperintensität $= \sigma T^4 / \pi$,
 - k_a : Absorptionskoeffizient,
 - k_s : Streukoeffizient,
 - Φ : Streuungsphasenfunktion,
 - s : Koordinate parallel zum Strahlungsweg,
 - \vec{s} : Einheitsvektor parallel zum Pfad s ,
 - \vec{s}' : Einheitsvektor beliebiger Richtung,
 - Ω' : Raumwinkel.

Auf der rechten Seite der Gleichung (4.8) stellt der erste Term den Verlust durch Absorption und Streuung dar. Der zweite und dritte Term bedeuten den Zuwachs durch Emission und durch Einstreuung in s -Richtung.

Da das Medium sich zwischen den zwei diffus emittierenden und reflektierenden konzentrisch zylindrischen Grenzflächen (dem Draht und dem äußeren Probenrand) befindet, lauten die entsprechenden Randbedingungen der Strahlungstransportgleichung wie folgt:

$$r = r_w : \quad I(r_w, \vec{s}) = \varepsilon_w I_{b,w} + \frac{1 - \varepsilon_w}{\pi} \int_{\vec{n}_w \cdot \vec{s}' < 0} I(r_w, \vec{s}') |\vec{n}_w \cdot \vec{s}'| d\Omega' \quad (4.9)$$

$$r = r_a : \quad I(r_a, \vec{s}) = \varepsilon_a I_{b,a} + \frac{1 - \varepsilon_a}{\pi} \int_{\vec{n}_a \cdot \vec{s}' < 0} I(r_a, \vec{s}') |\vec{n}_a \cdot \vec{s}'| d\Omega' \quad (4.10)$$

- mit \vec{n} : Normalvektor der jeweiligen Grenzfläche
 ε : Emissivität der jeweiligen Grenzfläche
 Indizes w : Heizdraht
 a : äußerer Probenrand

Der erste Term bzw. der zweite Term auf der rechten Seite der Randbedingungsgleichungen (4.9) und (4.10) bedeutet die von der jeweiligen Grenzfläche emittierte Strahlung (Emission) bzw. den reflektierten Anteil der aus allen Richtungen der Halbkugel ankommenden Strahlung (Reflektion).

Insgesamt lässt sich somit das Problem der gekoppelten Strahlung/Leitung durch zwei Integral-Differentialgleichungen (4.1) und (4.8) für den Energie- und Strahlungstransport beschreiben, die zusammen mit den Anfangs- sowie Randbedingungen (4.3), (4.9) und (4.10) zu lösen sind. Eine Exaktlösung der Integral-Differentialgleichungen erfordert einen enormen Aufwand bei der mathematischen Herleitung und auch in der numerischen Berechnung, was für die in der vorliegenden Arbeit beabsichtigten umfangreichen Parameterstudien unnötige Belastungen bedeutet. Deshalb sind für den Zweck der vorliegenden Arbeit geeignete Näherungsmethoden aus der Fachliteratur auszuwählen.

4.2 Stand der Forschung im Hinblick auf Strahlungseffekte bei Heizdrahtmessungen

Forschungen nach Strahlungseffekten beim instationären Heizdrahtverfahren haben vor vielen Jahren angefangen. Die Motivation für diese Forschungsrichtung waren experimentelle Beobachtungen unterschiedlicher Messergebnisse zwischen stationären Messmethoden und dem instationären Heizdrahtverfahren. Zum Thema des Strahlungseffekts bei der Messung von thermischen Eigenschaften wurden auf der 9th European Thermophysical Properties Conference in England (Sept. 1984) interessante Diskussionen geführt [MILLS, 1985].

4.2.1 Strahlungseffekte bei Fluiden

Zahlreiche Wissenschaftler untersuchen sehr intensiv Strahlungseffekte bei Heizdrahtmessungen an Fluiden, die Strahlung absorbieren und damit eine Abweichung der gemessenen scheinbaren Wärmeleitfähigkeit von der strahlungsfreien Wärmeleitfähigkeit aufweisen. Bei [SAITO, 1978; 1980] wird eine modifizierte Integral-Methode zur Berechnung der gekoppelten Strahlung/Leitung in grauen, nicht-streuenden, semitransparenten Fluiden benutzt. Dabei berechnen die Verfasser die Strahlungsstromdichte aus der Temperaturverteilung bei reiner Wärmeleitung, was aber die Kopplung der Strahlung und Leitung nicht genügend berücksichtigt. Damit demonstrieren die Verfasser theoretisch den Prozess sowie den Mechanismus, durch den die Strahlung eine höhere effektive Wärmeleitfähigkeit verursacht und untersuchen die Abweichung der scheinbaren Wärmeleitfähigkeit von der realen Wärmeleitfähigkeit des Fluids. Mit dem numerischen Ergebnis zeigt SAITO, dass solche Abweichungen vom Absorptionskoeffizienten und vom Brechungsindex des Fluids, der Emissivität des Drahtes und der Temperatur abhängen.

MENASHE UND WAKEHAM [MENASHE, 1982] analysieren theoretisch den Wärmetransport durch Leitung und Strahlung bei Anwendung des Heizdrahtverfahrens auf Fluide durch Lösung der linearisierten partiellen Integral-Differentialgleichung für ein nicht-streuendes, graues Medium mit Hilfe eines numerischen Differenzenverfahrens. Die Verfasser schlussfolgern daraus, dass der Strahlungseffekt generell mit der Temperatur und dem Absorptionskoeffizienten steigt. In schwach absorbierenden Fluiden liefert nur die Strahlungsemission einen merklichen Beitrag zum Strahlungsstrom. Unter diesem Aspekt löst [NIETO DE CASTRO, 1983] analytisch die Energiegleichung, wobei als Strahlungsterm nur der linearisierte Emissionsterm auftritt und leitet daraus einen Korrekturterm für den Strahlungseffekt bei

„schwach absorbierenden“ Fluiden ab. Das Ergebnis zeigt unter diesen Bedingungen einen vernachlässigbar kleinen Strahlungseffekt.

Auf experimentellem Gebiet liefert [WANG, 1989] den Hinweis auf einen Strahlungseffekt bei Heizdrahtmessungen an schwach absorbierenden Fluiden. Dabei benutzt der Autor die Korrekturmethode von NIETO DE CASTRO und stellt fest, dass diese Methode nicht für den ganzen Messungsbereich korrekt funktioniert.

4.2.2 Strahlungseffekte bei strahlungsdurchlässigen Feststoffen

Während bei Fluiden angestrebt wird, die strahlungsfreie Wärmeleitfähigkeit zu erhalten, wird bei porösen Feststoffen stets die effektive Wärmeleitfähigkeit ermittelt, die den Strahlungsanteil einschließt. Besonders bei hochporösen Medien spielt der Strahlungsanteil im Hochtemperaturbereich eine dominierende Rolle. Große Abweichungen der Wärmeleitfähigkeit zwischen dem instationären Heizdraht- und stationären Messmethoden wurden beobachtet [MILLS, 1985], [DIETRICH, 1987], [HAGEMANN, 1982], [NEUMANN, 1988] und [SCHLEGEL, 1988], was in den meisten Fällen auf den Strahlungseffekt zurückgeführt wird. [FINE, 1977] zeigt übereinstimmende Messergebnisse zwischen Heizdrahtverfahren und anderen Messmethoden bei Materialien, bei denen der Wärmetransport durch Leitung überwiegt. Wenn jedoch der Wärmetransport durch Leitung und Strahlung erfolgt, könnte das Messergebnis aus dem Heizdrahtverfahren fehlerhaft werden [Fine, 1978].

Die theoretische Analyse des Heizdrahtverfahrens bei Anwendung auf Feststoffe, in denen der Strahlungstransport nicht vernachlässigbar ist, wurde erst in jüngster Zeit intensiver vorangetrieben. [EBERT, 1998] löst die Energieerhaltungsgleichungen bei Heizdrahtmessungen von nicht-streuenden, grauen Medien mittels der GREEN'schen Funktionen. Für die Strahlungstransportgleichung wird die MILNE-EDDINGTON-Näherung [EDDINGTON, 1926] angewandt. Das Problem wird mit der sukzessiven Approximationsmethode numerisch gelöst. Bei der Randbedingung am Heizdraht nimmt der Verfasser jedoch an, dass die Wärmeübertragung vom Draht zum Probenmedium nur durch reine Wärmeleitung erfolgt und damit der Strahlungsterm nicht berücksichtigt wird, welcher eigentlich nicht zu vernachlässigen ist. Die Vernachlässigung des Strahlungsanteils der Randbedingung führt zur ungenauen Berechnung des Temperaturanstieges des Heizdrahtes, insbesondere im Bereich kleiner Extinktionskoeffizienten. Aufgrund der experimentellen Feststellung der Abhängigkeit des normierten zeitlichen Temperaturanstieges $\Delta T_w / Q$ in Bezug auf die eingekoppelte Heizleistung

\dot{Q} pro Länge in der Arbeit von [WANG, 1991] berechnet EBERT die Abweichungen der normierten Temperaturanstieges $\Delta T_w / \dot{Q}$ bei unterschiedlichen Heizleistungen \dot{Q} und beobachtet systematische Abweichungen. Dies erklärt der Verfasser durch den nicht-linearen Charakter des Strahlungsterms und sieht eine Abhängigkeit der effektiven Wärmeleitfähigkeit von der Heizleistung voraus, falls man das simple Modell der idealen Linienquelle verwendet. Den Effekt der Heizleistung hält der Verfasser jedoch für gering.

YU und seine Mitarbeiter [YU, 1998] lösen die vollständige Integral-Differentialgleichung numerisch mit der Control-Volume-Methode, welche die gekoppelte Strahlung/Leitung in semitransparenten Medien beschreibt, um den Strahlungsbeitrag zum gesamten Wärmetransport bei Heizdrahtmessungen zu analysieren. In Parameterstudien werden Effekte des mittleren Absorptionskoeffizienten des Mediums und der Emissivität des Heizdrahtes auf den Temperaturanstieg untersucht. Damit zeigen die Autoren, dass die Strahlungsemission des Mediums, die wechselwirkende Strahlung innerhalb des Mediums und die Abstrahlung von der Heizdrahtoberfläche ins Medium beträchtliche Beiträge zum Wärmetransport im Hochtemperaturbereich leisten. Sowohl der Absorptionskoeffizient des Mediums als auch die Emissivität des Heizdrahtes beeinflussen erheblich den Temperaturanstieg des Heizdrahtes.

HAASE u.a. [HAASE, 1970] messen die Wärmeleitfähigkeit von Schlackenwolle (Rohdichte=130 kg/m³) und von Schaumglas (Rohdichte=141 kg/m³) mit dem Heizdrahtverfahren und finden, dass die gemessene Wärmeleitfähigkeit mit größerem Messstrom höher ausfällt. Eine solche Abhängigkeit wurde z.B. bei Silikatsteinen geringer Porosität nicht beobachtet [SCHULLE, 1962], sondern nur bei Dämmmaterialien hoher Porosität, bei denen die Wärmeleitfähigkeit stark von der Temperatur abhängig ist. Die Autoren schließen daraus, dass diese Abhängigkeit darauf zurückzuführen ist, dass der nach dem Heizdrahtverfahren ermittelten Wärmeleitfähigkeit keine eindeutige Bezugstemperatur zugeordnet werden kann. In den experimentellen Untersuchungen befassen sie sich daher mit der Frage, welchen Einfluss der Heizstrom auf die Temperatur des Prüfkörpers und die Wärmeleitfähigkeit hat und welche Prüfkörpertemperatur für die ermittelte Wärmeleitfähigkeit als Bezugstemperatur anzugeben ist. Die richtige Wärmeleitfähigkeit erhält man nach Ansicht der Autoren, wenn der Heizstrom so klein eingestellt würde, dass die Temperaturdifferenz des gesamten Messvorgangs klein bliebe, so dass die Änderung der Wärmeleitfähigkeit mit der Temperatur vernachlässigbar ist. Dies ist jedoch technisch nicht sinnvoll, weil eine derart kleine Temperaturdifferenz einen erheblichen apparativen und zeitlichen Aufwand erfordert, wenn die Messgenauigkeit sich

nicht verschlechtern soll. Die Autoren entwickeln dann empirisch ein Verfahren zur Feststellung der richtigen Wärmeleitfähigkeit für die Anfangstemperatur als Bezugstemperatur.

AKSEL'ROD UND VISHNEVSKII [AKSEL'ROD, 1984] erhalten experimentell unterschiedliche Wärmeleitfähigkeiten von Faserdämmstoffen (Rohdichte=130 kg/m³), wenn sie mit dem Heizdrahtverfahren mit unterschiedlichen Heizleistungen messen. Die Autoren erklären, dass sich die Wärmeleitfähigkeit von Faserdämmstoffen (deren Porosität nicht kleiner als 90% ist) mit steigender Temperatur stark erhöht. Dies ist auf den hohen Strahlungstransport, welcher der vierten Potenz der Temperatur proportional ist, zurückzuführen. Diese starke Temperaturabhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit bei Fasern führt bei Anwendung des Heizdrahtverfahrens zu höheren Werten der Wärmeleitfähigkeit, wenn die Heizleistung erhöht wird. Die Autoren finden eine lineare Relation zwischen der Heizleistung und der gemessenen Wärmeleitfähigkeit. Sie empfehlen, die Linien der linearen Relation auf die Heizleistung Null zu extrapolieren, um die wahre Wärmeleitfähigkeit des Prüfkörpers zu erhalten.

Im Rahmen eines Ringversuchs [GROß, 2001] wird die Wärmeleitfähigkeit von porösen Materialien aus unterschiedlichen Messverfahren verglichen. Im Vergleich zu stationären Verfahren erhalten GROß und seine Mitarbeiter mit dem Heizdrahtverfahren eine viel höhere Wärmeleitfähigkeit von hochporösen Faserplatten, insbesondere im Hochtemperaturbereich.

4.2.3 Schlussfolgerung

Zu der Feststellung, dass bei porösen Materialien die Strahlung Messergebnisse der Wärmeleitfähigkeit verändert, ist man sowohl in experimentellen Arbeiten als auch in theoretischen Analysen gekommen. Eine befriedigende theoretische Analyse des Strahlungseffekts in Heizdrahtmessungen bei strahlungsdurchlässigen Materialien und eine ausreichende Erklärung des Strahlungseffekts im Zusammenhang mit der Heizleistungsabhängigkeit sind nicht vorhanden, was deshalb als das angestrebte Ziel dieser Arbeit angesehen wird. Die oben durchgeführte Analyse der mathematischen Grundgleichungen zur Beschreibung der gekoppelten Strahlung/Leitung hat gezeigt, dass sie anhand des Diffusionsmodells in Form einer Wärmeleitungs- und deren entsprechenden Randbedingungsgleichung formuliert werden können, wenn der Strahlungstransport im Probenmedium ein Diffusionsprozess ist. Diese Bedingung muss insbesondere im Mediumbereich in der unmittelbaren Umgebung des Drahtes streng erfüllt werden, weil sein Einfluss auf den zeitlichen Temperaturanstieg des Drahtes von größter Bedeutung ist. Bei Erfüllung der Diffusionsbedingung ist die Anwendung

des Auswertungsverfahrens der Heizdrahtmethode auf das Problem der gekoppelten Strahlung/Leitung genau. Wie genau diese Anwendung dann ist, wenn der Strahlungstransport von einem Diffusionsprozess abweicht (d.h., wenn der Extinktionskoeffizient des Probenmediums abnimmt), kann nur durch eine numerische Simulation geklärt werden. Dabei sind folgende Arbeiten erforderlich:

- Theoretische Analyse des Strahlungstransports bei Heizdrahtmessungen anhand von Lösungsmethoden der Strahlungstransportgleichung, die für umfangreiche Parameterstudien einen möglichst geringen Rechenaufwand erfordern.
- Parameterstudien verschiedener Einflussparameter auf den Strahlungstransport sowie auf die effektive Wärmeleitfähigkeit.
- Untersuchung des Gültigkeitsbereiches des Diffusionsmodells bzw. der Lösung der idealen Linienquelle.
- Untersuchung des Problems der Bezugstemperatur und der Heizleistungsabhängigkeit der effektiven Wärmeleitfähigkeit.
- Schlussfolgerungen über Kriterien für die praktische Anwendung der Heizdrahtmethode auf poröse Medien.

4.3 Lösungsmethoden für die Strahlungstransportgleichung

4.3.1 Einführung

In der Fachliteratur existieren verschiedene numerische Methoden zur Lösung der Strahlungstransportgleichung, z.B. die Zonenmethode, die Monte-Carlo-Methode, die Methode der diskreten Ordinaten, die differentielle sowie die Momentmethode usw. Ausführliche Beschreibungen dieser Methoden findet man in [SIEGEL, 1992] und [MODEST, 1993].

Arbeiten, die sich mit der gekoppelten Strahlung/Leitung in einem Medium zwischen zwei konzentrischen Zylindern befassen, was der geometrischen Anordnung in der vorliegenden Arbeit entspricht (Innenzylinder: Heizdraht und Außenzylinder: äußere Berandung) und wo multidimensionale Effekte von Bedeutung sind, sind in der Literatur aufgrund der mathematischen Komplexität nur sehr begrenzt zu finden. Die MONTE-CARLO-Methode wurde zuerst von PERLMUTTER UND HOWELL [PERLMUTTER, 1964] für eine zylindrische, eindimensionale Geometrie angewandt. HEASLET UND WARMING

[HEASLET, 1966] entwickeln analytische und numerische Methoden zur Berechnung des Strahlungstransports in homogenen Medien der eindimensionalen zylindrischen Geometrie. FERNANDES UND FRANCIS [FERNANDES, 1982] präsentieren eine exakte Formulierung und Lösung für die gekoppelte Strahlung/Leitung in einem ringförmigen, absorbierenden, emittierenden und isotrop streuenden Medium, das sich zwischen diffus emittierenden und reflektierenden Berandungen mit definierten Temperaturen befindet. Das Problem wird mit der Finite-Element-Methode numerisch gelöst. Andere Arbeiten findet man in [AZAD, 1981], [Kesten, 1968], [PANDEY, 1989] und [LOYALKA, 1969].

Numerische Methoden mit großem Genauigkeitsanspruch erfordern jedoch einen hohen Rechenaufwand. Insbesondere bei der Heizdrahtmethode ist der Drahtdurchmesser sehr klein gegenüber der Probengröße, so dass für solche Berechnungen eine sehr große Anzahl von Stützstellen erforderlich ist und damit ein hoher Rechenaufwand. Daher wurde eine Vielzahl von Näherungsmethoden zur Lösung des Strahlungsproblems entwickelt. Zu den einfachsten Näherungsmethoden zählt die differentielle Approximation. Die Anwendung dieser Methode für eine zylindrische Geometrie findet sich bei CHANG UND SMITH [CHANG, 1970]. Die Verfasser untersuchen theoretisch den stationären und instationären Strahlung/Leitungstransport in absorbierenden und emittierenden Medien zwischen zwei coaxialen Zylindern unter Anwendung der MILNE-EDDINGTON-Approximation für die Lösung des Strahlungstransports, die auf der differentiellen Approximation basiert [MODEST, 1993].

Eine weitere Anwendung der differentiellen Approximation auf absorbierende, emittierende und anisotrop streuende Medien findet man bei MODEST UND AZAD [MODEST, 1980], wobei die Verfasser eine lineare Streuung annehmen. Die differentielle Approximation setzt eine isotrope Strahlungsintensitätsverteilung im Medium voraus und beschreibt deshalb den Strahlungstransport dann genau, wenn die optische Dicke des Mediums genügend groß ist. In optisch dünnen Medien, in denen die Intensitätsverteilung stark anisotrop sein kann, zeigt die differentielle Approximation ungenaue Ergebnisse [MODEST, 1978]. Aus diesem Grund wurden verbesserte und modifizierte Versionen der Methode entwickelt, die für alle Bedingungen genauere Ergebnisse liefern. Bei der modifizierten differentiellen Approximation werden zwei Intensitäten getrennt behandelt. Die eine Intensität stammt aus dem Medium durch Emission und Absorption und die andere aus der Emission der Berandungen, die innerhalb des Mediums nur durch Absorption geschwächt wird. Diese Methode wird von [OLFE, 1968] zur Berechnung der Strahlungs- und Temperaturverteilung in einem grauen Medium beim Strahlungsgleichgewicht zwischen zwei konzentrischen Kugeln oder Zylindern

dem verwendet. Eine verbesserte differentielle Approximation entwickelt [MODEST, 1974] unter Einführung von Geometrieparametern. Diese Methode verwendet [MODEST, 1978] zur Berechnung der Temperaturverteilung und Wärmestromverteilung an Oberflächen beim Strahlungsgleichgewicht. Eine Anwendung der modifizierten sowie der verbesserten differentiellen Approximation auf eine zylindrische Geometrie, wobei kein Strahlungsgleichgewicht existiert (im instationären Fall), ist nicht vorhanden.

Weitere aufwendige Näherungsmethoden zur Berechnung der gekoppelten Strahlung/Leitung in zylindrischen Geometrien findet man z.B. bei AZAD UND MODEST [AZAD, 1981]. Die Verfasser verwenden die exponentielle Kernel-Approximation für ein absorbierendes, emittierendes, linear-streuendes zylindrisches Medium und stellen deren Berechnungsergebnissen zum Vergleich Exaktergebnisse gegenüber, wobei sich eine gute Übereinstimmung auch in optisch dünnen Bereichen zeigt. [FIVELAND, 1982] und JAMALUDDIN UND SMITH [JAMALUDDIN, 1988] verwenden die Methode der diskreten Ordinaten zur Berechnung des Strahlungsstromes in zweidimensionalen zylindrischen Geometrien und zeigen gute Ergebnisse gegenüber Exakt- und Messergebnissen.

Bei der Auswahl einer Näherungsmethode für die Strahlungstransportgleichung in der vorliegenden Arbeit wurden folgende Punkte berücksichtigt:

- Das Heizdrahtverfahren soll durch ein möglichst genaues mathematisches Modell beschrieben werden.
- Optisch dicke sowie dünne Medien sollen berechenbar sein.
- Der Rechenaufwand soll möglichst gering sein, so dass umfangreiche Parameterstudien ermöglicht werden.

4.3.2 Differentielle Approximation

Die differentielle Approximation, auch als die P_1 -Approximation in der Fachliteratur [MODEST, 1993] bekannt, beruht auf Annahmen über die funktionale Abhängigkeit der Strahlungsintensität vom Ort in einer bestimmten Raumrichtung. Danach wird die Integral-Differentialgleichung in eine partielle Differentialgleichung überführt. Diese Methode wurde von CHANG UND SMITH [CHANG, 1970] zur Berechnung der Temperatur- und Strahlungsstromverteilung in einem absorbierenden emittierenden Medium zwischen zwei koaxialen Zylindern bekannter Temperatur und später von [EBERT, 1998] zur Simulation der Heizdrahtmessung verwendet. Wie oben bereits

erwähnt wurde, hat EBERT den Strahlungsterm in der Randbedingung am Draht nicht berücksichtigt. In der vorliegenden Arbeit wird der Strahlungsterm mit berechnet.

Bevor die Lösung der differentiellen Approximation abgeleitet wird, muss die Streuungsart festgelegt werden. Man kann die Streuungsphasenfunktion mit Reihen von LEGENDRE'schen Polynomen darstellen [CHU, 1955; CLARK, 1957]:

$$\Phi(\vec{s} \cdot \vec{s}') = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(\vec{s} \cdot \vec{s}') \quad (4.11)$$

Aufgrund der Komplexität der Streuung hoher Ordnung wird in dieser Arbeit auf die lineare Streuung

$$\Phi(\vec{s} \cdot \vec{s}') = 1 + a_1 \vec{s} \cdot \vec{s}' \quad (4.12)$$

eingeschränkt, wonach die gestreute Intensität vom Streuwinkel linear abhängt. Der Anisotropiefaktor a_1 ist nach der MIE-Theorie von der Partikelgröße und vom komplexen Brechungsindex abhängig [KAVIANY, 1995]. Zwischen a_1 und dem Asymmetriefaktor g besteht der Zusammenhang

$$a_1 = 3 \cdot g \quad (4.13)$$

In einem optisch dicken Medium, für das die differentielle Approximation gilt, zeigt die Strahlungsintensität nur eine geringe Abweichung von der isotropen Verteilung, so dass die Intensität wie folgt approximiert werden kann [MODEST, 1993]:

$$I(r, \vec{s}) \cong \frac{1}{4\pi} \left[G(r) + 3 \vec{q}_r(r) \cdot \vec{s} \right] \quad (4.14)$$

wobei $G(r) = \int_{4\pi} I d\Omega$ einfallende Strahlung und $\vec{q}_r(r) = \int_{4\pi} I(r, \vec{s}) \vec{s} d\Omega$ Strahlungsstromdichte darstellt. Die Strahlungstransportgleichung (4.8) wird mit 1 bzw. mit \vec{s} multipliziert und dann über den ganzen Raumwinkel 4π integriert. Es ergibt sich dann:

$$\nabla \cdot \vec{q}_r = k_a (4\pi I_b - G) \quad (4.15)$$

bzw.

$$\nabla G = -3 \left[k_a + \left(1 - \frac{a_1}{3}\right) k_s \right] \vec{q}_r. \quad (4.16)$$

Die Gleichungen (4.15) und (4.16) stellen die differentielle Approximation dar und können zusammen mit der Randbedingung [MODEST, 1993]

$$2\vec{q}_r \cdot \vec{n} = \frac{\varepsilon}{2 - \varepsilon} (4\pi I_b - G) \quad (4.17)$$

gelöst werden. In Gleichung (4.17) bezeichnen \vec{n} und ε den Normalvektor bzw. die Emissivität der betrachteten Grenzfläche.

Wie oben beschrieben ist, liegt der Vorteil dieser Methode in der einfachen mathematischen Formulierung und der Umsetzung in eine numerische Lösung. Anstelle der Verwendung der komplizierten GREEN'schen Funktion [CHANG, 1970; EBERT, 1998] kann man jedoch mit der simplen Finite-Differenzen-Methode das Problem numerisch einfacher lösen, die das Ergebnis in nur wenigen Minuten liefert. Der Nachteil der differentiellen Approximation zeigt sich aber im ungenauen Resultat bei optisch dünnen Medien.

Im Fall der instationären Heizdrahtmessung hat die optische Dicke der Probe eine geringere Bedeutung hinsichtlich der Genauigkeit der differentiellen Approximation, weil der zeitliche Temperaturanstieg des Heizdrahtes hauptsächlich vom zu vermessenden Material in der unmittelbaren Umgebung des Drahtes beeinflusst wird. Das bedeutet, nicht die optische Dicke, sondern die lokale optische Eigenschaft der Probe, nämlich die Extinktion, ist entscheidend für die Anwendbarkeit der differentiellen Approximation auf die Heizdrahtmessung. Die Frage, ab welchen Extinktionskoeffizienten die differentielle Approximation für die instationäre Heizdrahtmessung anwendbar ist, ist in der Literatur jedoch nicht geklärt. Es ist deshalb sinnvoll, in dieser Arbeit noch eine weitere Methode zur Lösung des Strahlungstransports einzubeziehen, die im Bereich kleiner Extinktionskoeffizienten hohe Genauigkeit liefern kann. Dabei kann auch festgestellt werden, bis zu welchem Grenzwert des Extinktionskoeffizienten die differentielle Approximation mit ausreichender Genauigkeit die Heizdrahtmessung simuliert. Diese zweite Methode wird im nächsten Teil beschrieben.

4.3.3 Methode der diskreten Ordinaten (S_N -Approximation)

Wie oben erwähnt wurde, liefert die differentielle Approximation ein fehlerhaftes Ergebnis für kleine Extinktionskoeffizienten, bei denen die Strahlungsintensität starke Anisotropie zeigen kann. Die differentielle Approximation arbeitet mit der integrierten Intensität und kann deshalb die richtungsabhängige Strahlungsintensität nicht erfassen. Für eine bessere Erfassung der Anisotropie der Strahlungsintensität wird in dieser Arbeit eine andere Methode einbezogen, welche die räumliche Verteilung der Strahlungsintensität in beliebige Anteile zerlegt und damit die Richtungsabhängigkeit besser darstellt, nämlich die Methode der diskreten Ordinaten, die in der Fachliteratur [MODEST, 1993] auch als die S_N -Approximation bekannt ist.

Die Methode der diskreten Ordinaten wurde zuerst von [CHANDRASEKHAR, 1960] in seiner Untersuchung der Strahlung von Sternen und der Atmosphäre eingeführt. Systematisch wird die Methode von [LEE, 1962], [LATHROP, 1966] und [CARLSON, 1968] auf Probleme in der Neutronentransporttheorie angewandt. Für allgemeine Probleme des Strahlungstransports findet die Methode in den Arbeiten von [TRUELOVE, 1987, 1988] und [FIVELAND, 1982, 1984, 1987] Anwendung.

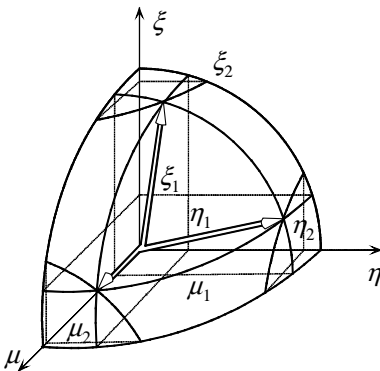


Abb. 4: Repräsentation der Umverteilung der Strahlungsintensität in diskrete Intensitäten mittels einer symmetrischen S_4 -Quadratur.

Bei der Methode der diskreten Ordinaten wird die räumliche Verteilung der Strahlungsintensität in eine diskrete Verteilung über den ganzen Raumwinkelbereich 4π überführt, wie Abbildung 4 anhand eines Beispiels der S_4 -Quadratur darstellt. Entsprechend der Anzahl M der diskreten Richtungen wird die Strahlungstransportgleichung in einem Satz von M partiellen

Differentialgleichungen formuliert. Somit ist die Methode der diskreten Ordinaten eine Methode der Finite-Differenzierung von richtungsabhängigen Variablen der Strahlungsgleichung. Damit wird die Strahlungstransportgleichung (4.8) für M verschiedene Raumrichtungen \vec{s}_i , $i = 1, 2, \dots, M$ gelöst, und die Integrale über Raumrichtungen werden durch numerische Quadraturen ersetzt:

$$\int_{4\pi} f(\vec{s}) d\Omega \cong \sum_{i=1}^M w_i f(\vec{s}_i), \quad (4.18)$$

wobei w_i das der Raumrichtung \vec{s}_i entsprechende Quadraturgewicht bezeichnet.

Auf diese Weise kann die Strahlungstransportgleichung (4.8) durch M partielle Differentialgleichungen approximiert werden:

$$\vec{s}_i \cdot \nabla I(\vec{s}_i) = k_a I_b - (k_a + k_s) I(\vec{s}_i) + \frac{k_s}{4\pi} \sum_{i'=1}^M w_{i'} I(\vec{s}_{i'}) \Phi(\vec{s}_i \cdot \vec{s}_{i'}), \quad (4.19)$$

mit $i = 1, 2, \dots, M$. Wenn der Einheitsvektor \vec{s}_i in drei prinzipielle Raumrichtungen zerlegt wird, kann \vec{s}_i in folgender Weise dargestellt werden:

$$\vec{s}_i = (\vec{s} \cdot \vec{x}) \vec{x} + (\vec{s} \cdot \vec{y}) \vec{y} + (\vec{s} \cdot \vec{z}) \vec{z} = \mu_i \vec{x} + \eta_i \vec{y} + \xi_i \vec{z}, \quad (4.20)$$

wobei μ_i, η_i, ξ_i als Richtungskosinusse bezeichnet werden, welche am Beispiel der Abbildung 4 veranschaulicht sind. Somit muss man für jede prinzipielle Raumrichtung N Richtungskosinusse betrachten. Dadurch ergeben sich aus der Kombination der Richtungskosinusse der drei prinzipiellen Raumrichtungen $M = N(N+2)$ unterschiedliche diskrete Richtungen für die Strahlungsintensität. „ S_N -Approximation“ bedeutet, dass N Richtungskosinusse für jede prinzipielle Raumrichtung verwendet werden. Am Beispiel der S_4 -Approximation in Abbildung 4 sind danach vier Richtungskosinusse in jeder prinzipiellen Raumrichtung zu betrachten, z.B. $\pm\mu_1$ und $\pm\mu_2$ auf der μ -Achse. Für eine ausführliche Beschreibung der Theorie der Methode wird auf [MODEST, 1993] hingewiesen.

Bei einer zylindrischen Geometrie, die in Abbildung 5 veranschaulicht ist, kann die Strahlungstransportgleichung (4.8) wie folgt ausgedrückt werden:

$$\sin \theta \cos \psi \frac{dI}{dr} - \frac{\sin \theta \sin \psi}{r} \frac{dI}{d\psi} + (k_a + k_s)I = k_a I_b + \frac{k_s}{4\pi} \int_{4\pi} I \Phi(\vec{s}' \cdot \vec{s}) d\Omega', \quad (4.21)$$

wobei der Polarwinkel θ von der z -Achse und der Azimutwinkel ψ von der lokalen Radialrichtung gemessen wird. Mit Einführung der Richtungskosinusse $\xi = \vec{s} \cdot \vec{e}_z = \cos \theta$, $\mu = \vec{s} \cdot \vec{e}_r = \sin \theta \cos \psi$ und $\eta = \vec{s} \cdot \vec{e}_{\psi_c} = \sin \theta \sin \psi$, kann man Gleichung (4.21) umformen zu:

$$\frac{\mu}{r} \frac{d(rI)}{dr} - \frac{1}{r} \frac{d(\eta I)}{d\psi} + (k_a + k_s)I = k_a I_b + \frac{k_s}{4\pi} \int_{4\pi} I(\vec{s}') \Phi(\vec{s}' \cdot \vec{s}) d\Omega' \quad (4.22)$$

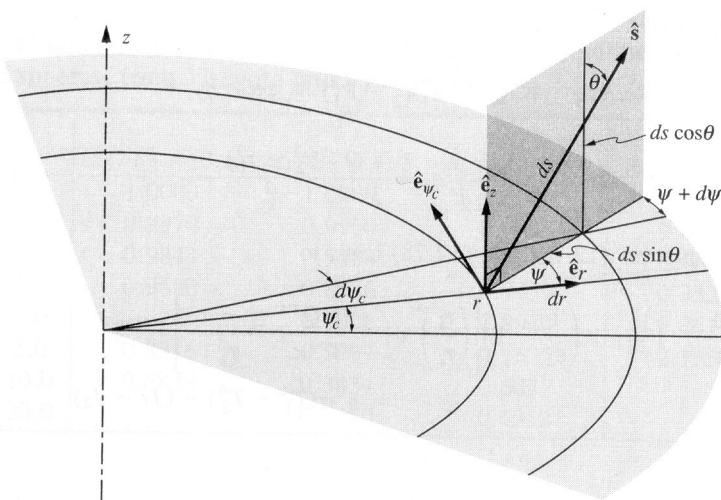


Abb. 5: Koordinaten für eine eindimensionale zylindrische Geometrie.

Für ein eindimensionales zylindrisches Medium gilt aufgrund der Achsensymmetrie:

$$I(r, \theta, \psi) = I(r, -\theta, \psi) = I(r, \theta, -\psi). \quad (4.23)$$

Das heißt, die Intensitäten bei positiven und negativen ξ sowie bei positiven und negativen η sind identisch im Betrag, so dass man bei der Berech-

nung nur positive ξ und η betrachtet. Dies führt zu $N_c = N(N+2)/4$ zu berechnenden diskreten Raumrichtungen, mit den Quadraturgewichten $w_i'' = 4w_i$. Gleichung (4.22) kann dann in Form von diskreten Ordinaten dargestellt werden:

$$\frac{\mu_i}{r} \frac{d(rI_i)}{dr} - \frac{1}{r} \left[\frac{d(\eta I)}{d\psi} \right]_{\psi=\psi_i} + (k_a + k_s) I_i = k_a I_b + \frac{k_s}{4\pi} \sum_{i'=1}^{N_c} w_{i'}'' I_{i'} \Phi(\vec{s}' \cdot \vec{s}), \quad (4.24)$$

mit $i=1, 2, \dots, N_c$. Entsprechende Randbedingungen für die diskreten Intensitäten lassen sich aus den Gleichungen (4.9) und (4.10) ableiten:

$$r = r_w : \quad I_i = \varepsilon_w I_{b,w} + \frac{(1 - \varepsilon_w)}{\pi} \sum_{i'} w_{i'}'' |\mu_{i'}| I_{i'}, \quad (\mu_i > 0, \mu_i < 0), \quad (4.25)$$

$$r = r_a : \quad I_i = \varepsilon_a I_{b,a} + \frac{(1 - \varepsilon_a)}{\pi} \sum_{i'} w_{i'}'' \mu_{i'} I_{i'}, \quad (\mu_i < 0, \mu_i > 0). \quad (4.26)$$

Die Gleichungen der diskreten Ordinaten bei einer achsensymmetrischen Geometrie sind aufgrund der Anwesenheit der Winkelableitung $d/d\psi$ kompliziert. CARLSON UND LATHROP [CARLSON, 1968] schlagen eine Direkt-Differenzierungstechnik der Winkelableitung vor, wonach die Winkelableitung auf der linken Seite der Gleichung (4.24) folgendermaßen differenziert wird:

$$\left[\frac{d(\eta I)}{d\psi} \right]_{\psi=\psi_i} = \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}} I_{i+\frac{1}{2}} - \alpha_{i-\frac{1}{2}} I_{i-\frac{1}{2}}}{w_i''}. \quad (4.27)$$

Die Raumrichtungen $i \pm \frac{1}{2}$ definieren die Ränder des Raumwinkelbereichs w_i'' , die zwei Intensitäten $I_{i \pm \frac{1}{2}}$ repräsentieren den Zufluss in und den Ausfluss aus dem Raumwinkelbereich. Die Größen der geometrischen Koeffizienten α hängen vom Schema der Differenzierung ab, aber nicht von der Intensität, so dass sie anhand eines einfachen Intensitätsfeldes bestimmt werden können, z.B. bei der isotropen Intensitätsverteilung ($I = \text{konst.}$):

$$\alpha_{i+\frac{1}{2}} - \alpha_{i-\frac{1}{2}} = w_i'' \frac{d\eta}{d\psi} \Big|_{\psi=\psi_i} = w_i'' \mu_i. \quad (4.28)$$

Die Umverteilung der Strahlungsintensität gilt, solange die Integration der Intensität über alle diskreten Richtungen gleich null ist, d.h.

$$\sum_{i=1}^{N_c} (\alpha_{i+\frac{1}{2}} I_{i+\frac{1}{2}} - \alpha_{i-\frac{1}{2}} I_{i-\frac{1}{2}}) = \alpha_{N_c+\frac{1}{2}} I_{N_c+\frac{1}{2}} - \alpha_{\frac{1}{2}} I_{\frac{1}{2}} = 0. \quad (4.29)$$

Die Summe ist gleich Null, wenn $\alpha_{\frac{1}{2}} = 0$ und $\alpha_{N_c+\frac{1}{2}} = 0$ sind. Mit den beiden Grenzwerten $\alpha_{\frac{1}{2}}$ und $\alpha_{N_c+\frac{1}{2}}$ können alle anderen Koeffizienten α anhand der Gleichung (4.28) bestimmt werden.

Mit der Differenzierung der Winkelableitung erhält man für die Gleichung (4.24):

$$\frac{\mu_i}{r} \frac{d(rI_i)}{dr} - \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}} I_{i+\frac{1}{2}} - \alpha_{i-\frac{1}{2}} I_{i-\frac{1}{2}}}{r w_i^*} + (k_a + k_s) I_i = k_a I_b + \frac{k_s}{4\pi} \sum_{i=1}^{N_c} w_i'' I_i \Phi(\vec{s}' \cdot \vec{s}). \quad (4.30)$$

Für die Streuungsphasenfunktion wird eine linear-anisotrope Streuung angenommen (s. Gleichung (4.12)):

$$\Phi(\vec{s}' \cdot \vec{s}) = 1 + a_1 \cos \phi, \quad (4.31)$$

wobei ϕ der Winkel zwischen der einfallenden und der gestreuten Intensität ist. Anstelle ϕ werden Richtungskosinusse eingeführt, man erhält dann:

$$\Phi(\vec{s}' \cdot \vec{s}) = 1 + a_1 \mu_i \mu_i'. \quad (4.32)$$

Die Gleichung (4.30) wird mit $2\pi r dr$ multipliziert und dann über den radialen Bereich (r_j, r_{j+1}) integriert, daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mu_i (A_{j+1} I_{i,j+1} - A_j I_{i,j}) - (A_{j+1} - A_j) \frac{\alpha_{i+\frac{1}{2}} I_{i+\frac{1}{2}}^0 - \alpha_{i-\frac{1}{2}} I_{i-\frac{1}{2}}^0}{w_m''} + B(k_a + k_s) I_i^0 \\ = B k_a I_b^0 + \frac{B k_s}{4\pi} \sum_{i=1}^{N_c} w_i'' I_i^0 (1 + a_1 \mu_i \mu_i'), \end{aligned} \quad (4.33)$$

mit $A_j = 2\pi r_j$ und $B = \pi(r_{j+1}^2 - r_j^2)$. Die Größen mit dem hochgesetzten Zeichen ⁰ bezeichnen Größen im Zellenmittelpunkt, nämlich bei $j + \frac{1}{2}$.

Lösungsverfahren der Gleichungen der diskreten Ordinaten:

Für die Lösbarkeit der Gleichungen (4.33) ist es notwendig, die Anzahl der Unbekannten zu reduzieren. Dies ist möglich durch die Relation der Intensitäten an den Zellenrändern und mit der Intensität im Zellenmittelpunkt I_i^0 . Für diese Relation wird in der Literatur häufig folgendes Schema verwendet:

$$I_i^0 = \zeta \cdot I_{i,j} + (1 - \zeta) \cdot I_{i,j+1} = \zeta \cdot I_{i-\frac{1}{2}}^0 + (1 - \zeta) \cdot I_{i+\frac{1}{2}}^0, \quad (4.34)$$

wobei ζ als ein konstantes Gewicht im Intervall $0 \leq \zeta \leq 1$ liegt. Dieses Schema wird von CARLSON UND LATHROP [CARLSON, 1968] vorgeschlagen und als „gewichtete Diamant-Differenzierung“ benannt. In der vorliegenden Arbeit wird die symmetrische Relation angewandt, d.h. mit dem Gewicht $\zeta = \frac{1}{2}$.

Die Berechnung mit der Gleichung (4.33) wird von $r = r_a$ bis $r = r_w$ (Richtung nach Innen) bei $\mu_i < 0$ und dann von $r = r_w$ bis $r = r_a$ (Richtung nach Außen) bei $\mu_i > 0$ durchgeführt:

Richtung nach Innen: $I_{i,j}$ und $I_{i+\frac{1}{2}}^0$ in Gleichung (4.33) werden mit Hilfe der Relationen in Gleichung (4.34) eliminiert. Man erhält:

$$I_i^0 = \frac{\mu_i A I_{i,j+1} + C I_{i-\frac{1}{2}}^0 - B(k_a I_b^0 - k_s I_s^0)}{\mu_i A + C - B(k_a + k_s)}, \quad \mu_i < 0, \quad (4.35)$$

Richtung nach Außen: Analog eliminiert man $I_{i,j+1}$ und $I_{i+\frac{1}{2}}^0$ in Gleichung (4.33). Es ergibt sich:

$$I_i^0 = \frac{\mu_i A I_{i,j} - C I_{i-\frac{1}{2}}^0 + B(k_a I_b^0 - k_s I_s^0)}{\mu_i A - C + B(k_a + k_s)}, \quad \mu_i > 0, \quad (4.36)$$

mit

$$A = A_j + A_{j+1}, \quad C = (A_{j+1} - A_j) \frac{(\alpha_{j-\frac{1}{2}} + \alpha_{j+\frac{1}{2}})}{w_j''} \quad \text{und} \quad I_s^0 = \sum_{i=1}^{N_z} w_i'' I_i^0 \frac{(1 + a_1 \mu_i \mu_i')}{4\pi}.$$

Das Lösungsverfahren arbeitet auf zwei Ebenen:

Global: Auf der globalen Ebene muss die Strahlungsintensität iterativ aktualisiert werden, weil die Randbedingungen und der Einstreuungsterm I_s eine Funktion der Intensität sind. Das Verfahren startet mit einer angenommenen Intensität der rechten Halbkugel am Außenrand r_a . Anhand der Randbedingung (4.26) wird die Intensität der linken Halbkugel bei r_a bestimmt, mit der sich die Intensität der linken Halbkugel am benachbarten Stützpunkt ermitteln lässt. Die Berechnung erfolgt in Richtung nach Innen bis zum Innenrand r_w . Dort wird mit Hilfe der Randbedingung (4.25) eine neue Intensität der rechten Halbkugel bei r_w ermittelt, mit der man die Intensität der rechten Halbkugel am benachbarten Punkt bestimmen kann. Diesmal geht es in Richtung nach Außen. Beim Erreichen des Außenrandes ist der erste Schritt der Iteration abgeschlossen. Der Vorgang wird bis zum Abbruch der Iteration wiederholt.

Lokal: Auf der lokalen Ebene erfolgt die Bestimmung der Intensität anhand der Gleichungen (4.35) und (4.36) von Punkt zu Punkt (in radialer Richtung) mit N_c diskreten Raumrichtungen in jedem Punkt. Dafür benötigt man die Anfangsgröße $I_{i-\frac{1}{2}}^0$ mit $i=1$. Diese Größe bekommt man in einer speziellen Richtung, wo die Winkelableitung verschwindet, nämlich bei $\eta=0$ und $\xi=\xi_i$. Zur Einhaltung der Symmetrie der Quadraturgrößen wird dieser speziellen Richtung das Gewicht Null zugewiesen. Mit der bekannten Intensität $I_{\frac{1}{2}}^0$ lassen sich die Intensitäten im Zellenmittelpunkt I_i^0 rekursiv ermitteln. Mit der bekannten Intensität im Zellenmittelpunkt kann man die Intensität am anderen Zellenrand unter Anwendung der Extrapolationsgleichung (4.34) ermitteln. Die Extrapolation auf diese Art kann eine negative Intensität liefern (insbesondere bei großen Gradienten oder ungenügender räumlicher Auflösung), die physikalisch nicht möglich ist. In diesem Fall wird die Intensität zu null gesetzt und das Strahlungsfeld aktualisiert. Dies kann manchmal zu Oszillationen und Instabilität führen. [FIVELAND, 1988] zeigt, dass solche negative Intensitäten minimiert werden können, wenn die Größe der Zellen unterhalb $\Delta r_j < |\mu_j|_{\min} / [(1-\zeta) \cdot E]$ gehalten wird. Das heißt, S_N -Approximationen höherer Ordnung N (mit kleineren minimalen μ_i) sowie Medien großer Extinktionskoeffizienten E erfordern ein feineres Gitter.

Auf diese Weise können alle diskreten Intensitäten I_i in allen Orten r_j berechnet werden, mit denen das Winkelintegral für die einfallende Intensität

$$G(r_j) = \int_{4\pi} I(r_j, \vec{s}) d\Omega \approx \sum_{i=1}^{N_c} w_i'' I_i(r_j) \quad (4.37)$$

bestimmt wird. Damit ist die Divergenz der Strahlungsstromdichte $\nabla \cdot \vec{q}_r(r)$, welche die Kopplung der Energiegleichung mit der Strahlungstransportgleichung darstellt, bei einer bekannten Temperaturverteilung nach Gleichung (4.2) ermittelbar. Die für die Randbedingung am Ort $r = r_w$ erforderliche Wärmestromdichte $\dot{q}_r(r_w)$ (s. Gleichung (4.3)) wird mittels der dortigen Verteilung der diskreten Intensitäten bestimmt:

$$\dot{q}_r(r_w) = \sum_i^{N_c} w_i'' \mu_i I_i. \quad (4.38)$$

Die Genauigkeit der S_N -Approximation hängt von dem verwendeten Quadraturverfahren ab. Obwohl die Auswahl eines Quadraturverfahrens beliebig ist, sollen die gewählten Quadraturgewichte w_i und die Richtungskosinusse (μ_i, ξ_i, η_i) eine möglichst gute Näherung bei der Berechnung der Winkelintegrale für die einfallende Intensität $G = \int_{4\pi} I d\Omega$ und der Strahlungsstromdichte $\dot{q}_r = \int_{4\pi} I \Omega d\Omega$ liefern. Zudem schlagen LATHROP UND CARLSON [LATHROP, 1965] vor, dass die Quadratur die Bedingung für die Diffusion auch erfüllen soll. In der vorliegenden Arbeit werden die den genannten Forderungen entsprechenden Quadraturen aus der Arbeit [FIVELAND, 1991], in der die Auswertung der einzelnen Verfahren numerisch durchgeführt und grafisch dargestellt ist, zur Anwendung herangezogen.

Während bei der differentiellen Approximation in jeder radialen Position lediglich eine integrierte Intensität berechnet wird, sind bei der S_N -Approximation $N(N+2)/4$ diskrete Intensitäten zu bestimmen. Der Rechenaufwand ist deshalb entsprechend vielfach höher. Damit ist jedoch eine genauere Berechnung der einfallenden Intensität und der Strahlungsstromdichte durch bessere Erfassung der Anisotropie der Intensität im kleinen Extinktionsbereich möglich.

4.4 Numerisches Lösungsverfahren für die gekoppelte Strahlung/Leitung

Für die numerische Simulation wird im Rahmen dieser Arbeit die Methode der Finite-Differenzen angewandt. In diesem Zusammenhang wurde sowohl das explizite als auch das implizite Verfahren untersucht. Dabei wurde festgestellt, dass beide Verfahren übereinstimmende Ergebnisse liefern. Weil das explizite Verfahren aufgrund äußerst kleiner erforderlicher Zeitschritte (konsistenzbedingt) zu langsam arbeitet, wird in der weiteren Arbeit nur das implizite Verfahren (IFD) angewandt.

Für eine hohe Genauigkeit der numerischen Berechnung muss der radiale Bereich $r_a - r_w$ entsprechend fein diskretisiert werden. Weil der Heizdraht-radius r_w gegenüber der Probengeometrie r_a aber sehr klein ist, ist eine große Anzahl von Stützpunkten erforderlich, was zu unzumutbar langen Rechenzeiten führt. Um Rechenzeit zu sparen, wird eine progressive Verteilung der Stützpunkte verwendet, wie Abbildung 6 veranschaulicht. Danach werden die ersten Zellen nahe am Heizdraht, wo die steilsten Gradienten auftreten, fein gewählt. Mit zunehmendem Radius, wo Temperatur- und Intensitätsgradienten kleiner sind, werden die Zellen größer. Somit bleibt die hohe Rechengenauigkeit erhalten und gleichzeitig wird die Stützpunktzahl und damit Rechenzeit gespart.

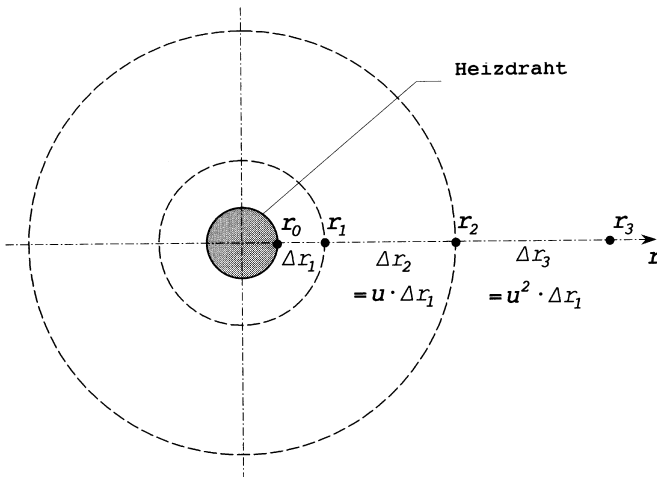


Abb. 6: Progressive Verteilung der Stützpunkte zur Diskretisierung der eindimensionalen radialen Geometrie.

4.4.1 Zur Energietransportgleichung

Mit der IFD-Methode und der gewählten räumlichen Diskretisierung kann die Energiegleichung (4.1)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \frac{\nabla \cdot \dot{q}_r}{\rho c_p} \quad (4.39)$$

wie folgt differenziert werden:

$$\begin{aligned} \frac{T_j^{(k+1)} - T_j^{(k)}}{\Delta t} = \\ a \cdot \left[\left(\frac{T_{j+1}^{(k+1)} - T_j^{(k+1)}}{\Delta r_{j+1}} - \frac{T_j^{(k+1)} - T_{j-1}^{(k+1)}}{\Delta r_j} \right) \cdot \frac{2}{\Delta r_j + \Delta r_{j+1}} + \frac{1}{r_j} \cdot \frac{T_{j+1}^{(k+1)} - T_{j-1}^{(k+1)}}{\Delta r_j + \Delta r_{j+1}} \right] \\ - \frac{\nabla \cdot \dot{q}_r^{(k+1)}(r_j)}{\rho c_p}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

In Gleichung (4.40) bezeichnet das Symbol $^{(k)}$ die Werte zur Zeit t_k und das Symbol $^{(k+1)}$ die Werte zur Zeit $t_{k+1} = t_k + \Delta t$. Die unbekanntenen Temperaturen zur Zeit t_{k+1} werden nun auf einer Seite und die bekannte Temperatur zur Zeit t_k sowie der Strahlungsterm auf der anderen Seite zusammengefasst. Daraus ergibt sich die implizite Differenzengleichung

$$C_j \cdot T_{j-1}^{(k+1)} + A_j \cdot T_j^{(k+1)} + B_j \cdot T_{j+1}^{(k+1)} = D_j, \quad (4.41)$$

wobei die Koeffizienten

$$\begin{aligned} A_j &= 1 + \frac{2a\Delta t}{\Delta r_j \cdot \Delta r_{j+1}}, \\ B_j &= \frac{-a\Delta t}{\Delta r_j + \Delta r_{j+1}} \cdot \left(\frac{1}{r_j} + \frac{2}{\Delta r_{j+1}} \right), \\ C_j &= \frac{a\Delta t}{\Delta r_j + \Delta r_{j+1}} \cdot \left(\frac{1}{r_j} - \frac{2}{\Delta r_j} \right) \end{aligned} \quad (4.42)$$

bei einer gegebenen Temperaturleitfähigkeit a und der gegebenen zeitlichen und räumlichen Diskretisierung Konstanten sind.

Der Koeffizient

$$D_j = T_j^{(k)} - \frac{\Delta t}{\rho c_p} \cdot \nabla \cdot \dot{q}_r^{(k+1)}(r_j) \quad (4.43)$$

ist bei einer bekannten Strahlungsstromdichte $\nabla \cdot \dot{q}_r^{(k+1)}(r_j)$, welche aus der Strahlungstransportgleichung ermittelt wird, und der bekannten Temperatur zur Zeit t_k bestimmbar.

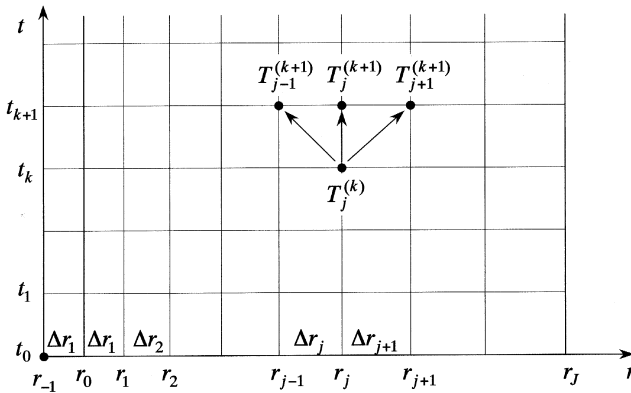


Abb. 7: Gitternetz zur Diskretisierung der Energiegleichung (4.39) und zur Veranschaulichung der Differenzgleichung (4.41).

Der Zusammenhang zwischen den unbekanntem Temperaturen zur Zeit t_{k+1} und der bekannten Temperatur zur Zeit t_k , wie Gleichung (4.41) darstellt, ist durch Abbildung 7 veranschaulicht. Die unbekanntem Temperaturen zur Zeit t_{k+1} müssen berechnet werden. Die Differenzgleichung (4.41) ergibt mit $j = 0, 1, 2, \dots, J$ ein lineares Gleichungssystem von $J + 1$ Gleichungen mit $J + 1$ Unbekanntem. Da die Temperatur am äußeren Probenrand gleich der bekannten Umgebungstemperatur ($T_j^{(k+1)} = T_0$) ist, bleiben nur noch J unbekanntem Temperaturen und die $(J + 1)$ -te Gleichung fällt damit heraus. Die Hauptdiagonale der Koeffizientenmatrix enthält die Koeffizienten A_j ;

die Sub- und Superdiagonale werden von den Koeffizienten C_j bzw. B_j gebildet; alle anderen Koeffizienten sind null. Der Term $C_0 \cdot T_{-1}^{(k+1)}$ in der ersten Gleichung ($j=0$) gehört nicht zu diesem Tridiagonalsystem und muss eliminiert werden, indem man die Randbedingung am Ort $r = r_0 = r_w$ berücksichtigt. Dafür wird die Randbedingungsgleichung (4.2) durch den zentralen Differenzenquotienten mit Hilfe eines fiktiven Gitterpunktes $j=-1$ approximiert:

$$\left. \frac{\partial T^{(k+1)}}{\partial r} \right|_{r=r_0} = \frac{T_1^{(k+1)} - T_{-1}^{(k+1)}}{2\Delta r_1} = -\frac{\dot{Q}}{2\pi r_w \lambda_c} + \frac{\dot{q}_r^{(k+1)}(r_0)}{\lambda_c}. \quad (4.44)$$

Durch Kombinieren der ersten Gleichung ($j=0$) mit Gleichung (4.44) wird der Term $T_{-1}^{(k+1)}$ eliminiert. Es ergibt sich eine neue Gleichung für die erste Gleichung ($j=0$) des Tridiagonalsystems:

$$A_0 \cdot T_0^{(k+1)} + (B_0 + C_0) \cdot T_1^{(k+1)} = D_0 - C_0 \Delta r_1 \frac{\dot{Q}}{\pi r_w \lambda_c} + \frac{2C_0 \Delta r_1}{\lambda_c} \cdot \dot{q}_r^{(k+1)}(r_0) \quad (4.45)$$

mit den neuen Koeffizienten

$$\begin{aligned} A_0 &= A_0, \\ B_0 &= B_0 + C_0, \\ D_0 &= D_0 - C_0 \Delta r_1 \frac{\dot{Q}}{\pi r_w \lambda_c} + \frac{2C_0 \Delta r_1}{\lambda_c} \cdot \dot{q}_r^{(k+1)}(r_0), \\ C_0 &= 0, \end{aligned} \quad (4.46)$$

wobei die Strahlungsstromdichte $\dot{q}_r^{(k+1)}(r_0)$ aus der Strahlungstransportgleichung zu berechnen ist. Da die Temperatur $T_j^{(k+1)} = T_0 = \text{konst.}$ ist, bleiben in der J -ten Gleichung nur noch zwei Unbekannte:

$$C_{J-1} \cdot T_{J-2}^{(k+1)} + A_{J-1} \cdot T_{J-1}^{(k+1)} = D_{J-1} - B_{J-1} \cdot T_0. \quad (4.47)$$

Dadurch ergeben sich für die letzte Gleichung ($j=J$) zwei neue Koeffizienten

$$\begin{aligned}
D_{J-1} &= D_{J-1} - B_{J-1} \cdot T_0, \\
B_{J-1} &= 0.
\end{aligned}
\tag{4.48}$$

Das zu jedem Zeitschritt zu lösende Tridiagonalsystem besteht aus J Gleichungen und hat die Gestalt

$$\begin{pmatrix}
A_0 & B_0 & 0 & & & & \\
C_1 & A_1 & B_1 & & & & \\
& \dots & \dots & \dots & & & \\
& & C_{J-2} & A_{J-2} & B_{J-2} & & \\
& & 0 & C_{J-1} & A_{J-1} & &
\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}
T_0^{(k+1)} \\
T_1^{(k+1)} \\
\dots \\
T_{J-2}^{(k+1)} \\
T_{J-1}^{(k+1)}
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
D_0 \\
D_1 \\
\dots \\
D_{J-2} \\
D_{J-1}
\end{pmatrix}.
\tag{4.49}$$

4.4.2 Zur Strahlungstransportgleichung

Die numerische Lösung der S_N -Approximation und deren Lösungsweg, welche für die IFD-Methode geeignet sind, wurden bereits im Abschnitt 4.3.3 beschrieben und wird an dieser Stelle deswegen nicht weiter betrachtet. Bei der S_N -Approximation wurden Berechnungsergebnisse der S_4 - bis S_{10} -Quadraturen miteinander verglichen, wobei keine wesentliche Änderung im Ergebnis zwischen den Quadraturen festgestellt wurde. In der vorliegenden Arbeit wird deshalb nur die S_4 -Quadratur verwendet, die den kleinsten Rechenaufwand benötigt.

Um die explizite Differentialgleichung der Strahlungstransportgleichung der differentiellen Approximation zu erhalten, wird Gleichung (4.16) mit dem ∇ -Operator behandelt und die dadurch entstandene Divergenz der Strahlungsstromdichte durch Gleichung (4.15) ersetzt. Daraus ergibt sich:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial G}{\partial r} - Z_1 \cdot G = -4Z_1 \sigma T^4,
\tag{4.50}$$

wobei die einfallende Strahlung G die Funktion darstellt und $Z_1 = 3k_a[k_a + (1 - a_1/3) \cdot k_s]$ eine Konstante bezeichnet. Mit der vorhandenen räumlichen Diskretisierung für die Energiegleichung ergibt sich für Gleichung (4.50) die Differenzengleichung

$$c_j \cdot G_{j-1} + a_j \cdot G_j + b_j \cdot G_{j+1} = d_j
\tag{4.51}$$

und die zugehörigen Koeffizienten

$$\begin{aligned}
 a_j &= Z_1 + \frac{2}{\Delta r_j \cdot \Delta r_{j+1}}, \\
 b_j &= \frac{-1}{\Delta r_j + \Delta r_{j+1}} \cdot \left(\frac{1}{r_j} + \frac{2}{\Delta r_{j+1}} \right), \\
 c_j &= \frac{1}{\Delta r_j + \Delta r_{j+1}} \cdot \left(\frac{1}{r_j} - \frac{2}{\Delta r_j} \right),
 \end{aligned} \tag{4.52}$$

die bei gegebenen Stoffeigenschaften der Messprobe nur vom Diskretisierungsschema abhängig sind. Der Koeffizient auf der rechten Seite der Gleichung (4.51)

$$d_j = -4Z_1\sigma T_j^4, \tag{4.53}$$

ist von der Temperatur abhängig, welche jedoch mit der Energiegleichung ermittelt werden kann. Mit der Gleichung (4.51) entsteht für $j = 0, 1, 2, \dots, J$ wiederum ein lineares Gleichungssystem der $J + 1$ Gleichungen mit $J + 1$ Unbekannten des Strahlungstransports. In diesem Tridiagonalsystem darf in der ersten Gleichung ($j = 0$) der Term $c_0 \cdot G_{-1}$ und in der letzten Gleichung ($j = J + 1$) der Term $c_J \cdot G_{J+1}$ nicht auftreten. Diese Terme werden durch Berücksichtigung der Randbedingungen eliminiert.

Die Randbedingungen erhält man, indem die Strahlungsstromdichte in Gleichung (4.16) durch Gleichung (4.17) ersetzt wird. Am Rand $r = r_0 = r_w$, wo das Produkt $\vec{q} \cdot \vec{n}$ positiv ist, ergibt sich die Randbedingung

$$\left. \frac{\partial G}{\partial r} \right|_{r=r_0} = Z_2 \cdot [4\sigma T^4(r_0) - G(r_0)], \tag{4.54}$$

mit
$$Z_2 = -\frac{3\varepsilon_w}{2(2 - \varepsilon_w)} \cdot [k_a + (1 - a_1/3) \cdot k_s].$$

Gleichung (4.54) wird durch den zentralen Differenzenquotienten mit Hilfe eines fiktiven Gitterpunktes $j = -1$ approximiert:

$$\left. \frac{\partial G}{\partial r} \right|_{r=r_0} = \frac{G_1 - G_{-1}}{2\Delta r_1} = Z_2 \cdot [4\sigma T^4(r_0) - G_0]. \quad (4.55)$$

Durch Kombination der Gleichung (4.55) mit der ersten Gleichung ($j=0$) des Tridiagonalsystems wird der Term G_{-1} eliminiert. Als erste Gleichung des Tridiagonalsystems entsteht dann eine neue Gleichung mit den entsprechenden neuen zugehörigen Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_0 &= a_0 + 2Z_2\Delta r_1 c_0, \\ b_0 &= b_0 + c_0, \\ d_0 &= d_0 + 8Z_2\Delta r_1\sigma T^4(r_0), \\ c_0 &= 0. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Analog für die Randbedingung am Ort $r=r_J=r_a$, wo das Produkt $\vec{q} \cdot \vec{n}$ negativ ist, erhält man für die letzte Gleichung ($j=J+1$) die zugehörigen Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_J &= a_J - 2Z_3\Delta r_J b_J, \\ c_J &= c_J + b_J, \\ d_J &= d_J - 8Z_3\Delta r_J\sigma T^4(r_J), \\ b_J &= 0, \end{aligned} \quad (4.57)$$

mit $Z_3 = \frac{3\varepsilon_a}{2(2-\varepsilon_a)} \cdot [k_a + (1-a_1/3) \cdot k_s].$

Bei einer bekannten Temperaturverteilung lässt sich das Strahlungsfeld bei der differentiellen Approximation bestimmen mittels des Tridiagonalsystems

$$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & & & \\ c_1 & a_1 & b_1 & & & \\ & \dots & \dots & \dots & & \\ & & c_{J-1} & a_{J-1} & b_{J-1} & \\ & & 0 & c_J & a_J & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} G_0 \\ G_1 \\ \dots \\ G_{J-1} \\ G_J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \dots \\ d_{J-1} \\ d_J \end{pmatrix}. \quad (4.58)$$

4.4.3 Vorgehensweise der Iteration

Mit der Anfangstemperaturverteilung $T_j^{(0)} = T_0$ zur Zeit t_0 und einer beliebig angenommenen Intensitätsverteilung $I_j^{(1)}$ zur Zeit t_1 (in nachfolgenden Berechnungen mit der Anfangsintensitätsverteilung $I_j^{(1)} = \sigma T_0^4 / \pi$) startet die Iteration mit dem Lösen der Gleichung (4.49) zur Bestimmung der Temperaturverteilung $T_j^{(1)}$ zur Zeit t_1 . Anhand dieser Temperaturverteilung wird das Intensitätsfeld zur Zeit t_1 aktualisiert. Bei der S_N -Approximation erfolgt innerhalb des Aktualisierungsverfahrens des Intensitätsfeldes noch eine zusätzliche Subiteration (s. Abschnitt 4.3.3). Mit dem aktualisierten Intensitätsfeld zur Zeit t_1 setzt die Iteration zur Aktualisierung der Temperaturverteilung $T_j^{(1)}$ zur Zeit t_1 fort. Der Iterationsprozess wird abgebrochen, wenn das Genauigkeitskriterium

$$\left\{ \sum_j [(T_j^{(k+1)})^{(n+1)} - (T_j^{(k+1)})^{(n)}]^2 \right\}^{1/2} < \delta \quad (4.59)$$

erreicht wird. In dieser Beziehung bezeichnet das hochgesetzte Symbol $^{(n)}$ bzw. $^{(n+1)}$ die Funktionswerte zum (n) -ten bzw. $(n+1)$ -ten Iterationsschritt und δ die Iterationsgenauigkeit. In nachfolgenden Berechnungen wird $\delta = 10^{-4}$ gewählt. Für die Subiteration des Intensitätsfeldes bei der S_N -Approximation gilt auch das Genauigkeitskriterium (4.59), wobei anstelle der Funktion T die Intensität I anzugeben ist. Nach dem Abbruch des Iterationsprozesses sind die Temperaturverteilung $T_j^{(1)}$ und das Intensitätsfeld $I_j^{(1)}$ zur Zeit t_1 ermittelt. Mit dieser Temperaturverteilung $T_j^{(1)}$ und einer angenommenen Intensitätsverteilung $I_j^{(2)}$ zur Zeit t_2 wird die Temperaturverteilung $T_j^{(2)}$ und das Intensitätsfeld $I_j^{(2)}$ zur Zeit t_2 analog zum ersten Gang ermittelt. Auf diese Weise lassen sich die Verteilung der Temperatur und des Strahlungsfeldes eines beliebigen Berechnungszeitraumes bestimmen.

Hinsichtlich der zeitlichen Diskretisierung wurde nach vielen Untersuchungen ein Zeitschritt von $\Delta t = 0,01$ s festgelegt, womit eine ausreichende Genauigkeit erreicht wird. Mit diesem Zeitschritt werden alle Berechnungen in der vorliegenden Arbeit durchgeführt.

5 Ergebnisse der numerischen Simulation

Für die folgenden Untersuchungen des Strahlungseffektes bei Heizdrahtmessungen an einem porösen Material geringer Wärmeleitfähigkeit wird im Rahmen dieser Arbeit ein Satz von temperaturunabhängigen thermischen Stoffeigenschaften der Probe

- $\lambda_c = 0,0346 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ (Wärmeleitfähigkeit reiner Wärmeleitung)
- $\rho c_p = 135.200 \text{ J} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{K}^{-1}$ (volumetrische Wärmekapazität)

verwendet. Diese Stoffwerte wurden bei Keramikfasern bestimmt. Der Heizdraht hat einen Radius von

- $r_w = 0,25 \text{ mm}$.

Dieser Radius wird gewöhnlich bei praktischen Messungen an festen Stoffen verwendet und ist die Obergrenze, die in der deutschen Norm DIN EN 993-14 empfohlen ist. Zur Untersuchung der Berandungsemissivität werden zwei Emissivitäten des Drahtes in Betrachtung gezogen:

- $\varepsilon_w = 0,1$: kennzeichnet eine vorwiegend reflektierende Drahtoberfläche und
- $\varepsilon_w = 1,0$: kennzeichnet eine ideal emittierende und absorbierende Drahtoberfläche.

Der Strahlungseffekt soll bis zum Hochtemperaturbereich untersucht werden. Dafür werden drei Umgebungstemperaturen betrachtet

- Raumtemperatur: $\vartheta_0 = 25 \text{ }^\circ\text{C}$,
- Hochtemperaturbereich: $\vartheta_0 = 500 \text{ }^\circ\text{C}$,
 $\vartheta_0 = 1.000 \text{ }^\circ\text{C}$.

Für die Untersuchung der Abhängigkeit von der längenbezogenen Heizleistung \dot{Q} wird variiert im Bereich:

$$0,25 \text{ W/m} \leq \dot{Q} \leq 4 \text{ W/m}.$$

Um den Einfluss des äußeren Probenrandes auf die Berechnungsergebnisse auszuschließen, wird aus dem jeweiligen untersuchten Extinktionskoeffi-

zienten E die effektive Wärmeleitfähigkeit λ_{eff} nach dem Diffusionsmodell (Gleichung (2.12)) berechnet, mit der sich die entsprechende effektive Temperaturleitfähigkeit a_{eff} bestimmen lässt. Mit dieser effektiven Temperaturleitfähigkeit wird ein entsprechender äußerer Probenradius r_a nach Ungleichung (3.12) ermittelt. Bei $E=0$ sowie bei sehr kleinen E -Werten wird r_a genügend groß gewählt, so dass die Drahttemperatur sich nur unwesentlich verändert.

5.1 Fall der reinen Wärmeleitung ($E \rightarrow \infty$)

Zum Genauigkeitstest wird im allgemeinen die numerische Lösung mit einer analytischen Lösung verglichen. Da eine analytische Lösung des betrachteten Strahlung/Leitungsproblems nicht möglich ist, wird im folgenden die bekannte analytische Lösung für den Fall reiner Wärmeleitung [CARSLAW, 1959] zum Vergleich herangezogen. Für den Grenzfall der reinen Wärmeleitung, wobei aufgrund des unendlichen Extinktionskoeffizienten $E \rightarrow \infty$ der Strahlungstransport ausfällt, setzt man in Gleichung (4.1) $\nabla \cdot q_r = 0$ und in deren Randbedingung (4.3) $\dot{q}_r = 0$. Die analytische Lösung des daraus resultierenden Wärmeleitproblems lautet nach [CARSLAW, 1959]:

$$\Delta T(r, t) = \frac{\dot{Q}}{2\pi\lambda_c} \ln\left(\frac{r_a}{r}\right) + \frac{\dot{Q}}{2\lambda_c r_w} \sum_{i=1}^{\infty} \exp(-\kappa\beta_i^2 t) \frac{J_0^2(r_a\beta_i)[J_0(r\beta_i)Y_1(r_w\beta_i) - Y_0(r\beta_i)J_1(r_w\beta_i)]}{\beta_i[J_1^2(r_w\beta_i) - J_0^2(r_a\beta_i)]}, \quad (5.1)$$

wobei β_i die positiven Nullstellen von $J_1(r_w\beta_i)Y_0(r_a\beta_i) - Y_1(r_w\beta_i)J_0(r_a\beta_i) = 0$ bezeichnet. Neben der analytischen Lösung wird das Wärmeleitproblem mittels der IFD-Methode numerisch gelöst. Beide Lösungen werden miteinander verglichen, um zu überprüfen, ob die IFD-Lösung mit der gewählten Diskretisierung genügende Genauigkeit liefert.

In diesem Untersuchungsfall wurde mit der Heizleistung $\dot{Q} = 1 \text{ W/m}$ bei $v_0 = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ simuliert. In Abbildung 8 ist die prozentuale Abweichung der Drahtübertemperatur der IFD-Lösung von der analytischen Lösung der reinen Wärmeleitung nach [CARSLAW, 1959]

$$\frac{\Delta T_w(IFD) - \Delta T_w(Analytik)}{\Delta T_w(Analytik)} \cdot 100\% \quad (5.2)$$

in Abhängigkeit der von Zeit dargestellt (Kurve mit den Quadraten). Die IFD-Lösung $\Delta T_w(IFD)$ liegt generell unter der analytischen Lösung $\Delta T_w(Analytik)$, weil die Randbedingung am Heizdraht approximiert wird zu:

$$\left. \frac{\Delta T}{\Delta r} \right|_{r=r_w} \cong -\frac{\dot{Q}}{2\pi r_w \lambda_c} \quad (5.3)$$

Die IFD-Lösung nähert sich der analytischen Lösung an, wenn Δr in Gleichung (5.3) gegen null geht. Aufgrund des numerisch bedingt großen Δr ist $\Delta T_w(IFD)$ stets kleiner als $\Delta T_w(Analytik)$. Der Betrag der Abweichungen ist jedoch überall kleiner als 0,15%, er kann durch feinere Zellen in der Drahtnähe verringert werden. Die Abweichung im großen Zeitbereich (100.–600. Sekunde), in dem Messdaten für die Auswertung der Wärmeleitfähigkeit abgelesen werden, ist jedoch geringer (<0,05%). Diese hohe Genauigkeit ist deshalb akzeptabel.

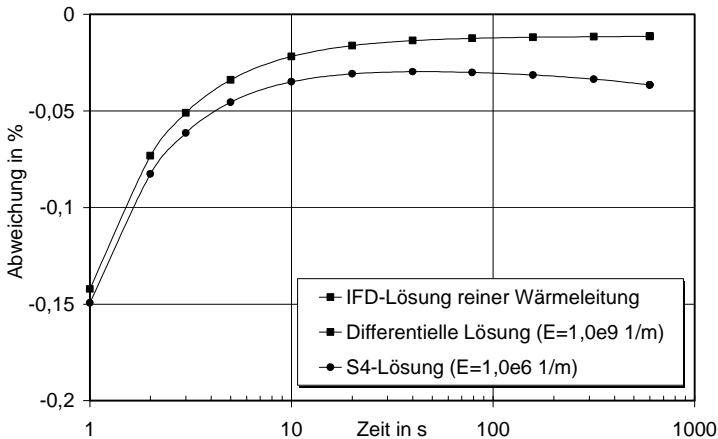


Abb. 8: Prozentuale Abweichung der Drahtübertemperatur der IFD-Lösung für reine Wärmeleitung, der differentiellen und der S_4 -Lösung von der analytischen Lösung nach [CARSLAW, 1959].

Nachdem die IFD-Methode den Genauigkeitstest bestanden hat, werden nachfolgend die differentielle und die S_4 -Approximation im Grenzfall der reinen Wärmeleitung getestet. Entsprechend der reinen Wärmeleitung ($E \rightarrow \infty$) wird bei der Berechnung mittels der beiden Approximationen ein großer E -Wert eingegeben. Die differentielle Lösung der gekoppelten Strahlung/Leitung mit dem Extinktionskoeffizienten $E = 10^9 \text{ m}^{-1}$ liefert eine ausgezeichnete Übereinstimmung mit der IFD-Lösung der reinen Wärmeleitung. In Abbildung 8 stimmt die Kurve der differentiellen Lösung mit der Kurve der IFD-Lösung der reinen Wärmeleitung überein. Beide Lösungen sind deshalb durch die mit den quadratischen Symbolen versehenen Kurve angezeigt. Dies bestätigt nochmals die Genauigkeit der differentiellen Approximation bei optisch dicken Medien, was auch in der Fachliteratur erwähnt wurde.

Bei der S_4 -Approximation wurde ein Extinktionskoeffizient von $E = 10^6 \text{ m}^{-1}$ gewählt. Mit größeren E -Werten erfordert die Approximation aufgrund der Rechenstabilität eine feinere Verteilung der Stützpunkte und damit eine höhere Rechenzeit. Bereits mit dem gewählten E -Wert liefert die S_4 -Lösung ein sehr gutes Ergebnis. Die Abweichung der S_4 - zur analytischen Lösung liegt im ganzen betrachteten Zeitraum unterhalb 0,15 %. Die S_4 -Kurve liegt etwas unterhalb der Kurve der IFD-Lösung der reinen Wärmeleitung, da es bei dem gewählten E -Wert mit einer geringfügig höheren effektiven Wärmeleitfähigkeit und damit einem höheren Wärmeverlust zu rechnen ist, welcher eine kleinere Übertemperatur des Drahtes zur Folge hat.

Im Grenzfall der reinen Wärmeleitung ($E \rightarrow \infty$) zeigen beide Approximationsmethoden sehr gute Genauigkeit. Die Berandungsemissivität ε_w hat bei einem so großen Extinktionskoeffizienten keinen Einfluss auf die Übertemperatur gezeigt. Im folgenden wird der andere Grenzfall, nämlich der Transparenzfall bei $E = 0$, untersucht.

5.2 Fall der Transparenz ($E = 0$)

Im Fall eines transparenten Mediums ist der Strahlungstransport völlig von der Wärmeleitung entkoppelt, da das Medium nicht mehr am Strahlungstransport teilnimmt. Zwischen den Oberflächen der Berandungen erfolgt ein direkter Strahlungsaustausch, der nur von der Temperatur und Emissivität der Berandungen abhängt [SIEGEL, 1992]:

$$\dot{Q}_r = 2\pi r_w \frac{\sigma(T_w^4 - T_a^4)}{\frac{1}{\varepsilon_w} + \frac{r_w}{r_a} \left(\frac{1}{\varepsilon_a} - 1 \right)}. \quad (5.4)$$

Innerhalb des Mediums wird Wärme ausschließlich durch Leitung übertragen. Dieses Problem entspricht der Wärmeleitungsgleichung (3.2). Bei der Randbedingung am Ort $r = r_w$ muss man jedoch die Strahlungsstromdichte von der eingekoppelten Heizleistung abziehen, um den Energieanteil, welcher durch Wärmeleitung transportiert wird, zu erhalten:

$$-2\pi r_w \lambda_c \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_w} = \dot{Q} - \dot{Q}_r. \quad (5.5)$$

Da der Strahlungsstrom \dot{Q}_r von der zeitlich veränderlichen Drahttemperatur T_w abhängt ($T_a = T_0$ bleibt konstant), muss das Problem iterativ gelöst werden. Für die Simulation dieses Problems wird die IFD-Methode verwendet. Aufgrund der guten Genauigkeit der IFD-Methode, die bereits im Fall der reinen Wärmeleitung festgestellt wurde, kann die IFD-Lösung des Transparenzfalles als Exaktlösung betrachtet werden, mit der die differentielle und die S_4 -Lösung verglichen werden. Für die Berechnung mit den beiden Approximationen bei einer Heizleistung von $\dot{Q} = 1 \text{ W/m}$ wird entsprechend der Transparenz der Extinktionskoeffizient $E = 0$ verwendet.

Aus den Ergebnissen geht hervor, dass die S_4 -Lösung der Drahtübertemperatur eine sehr gute Übereinstimmung mit der Exaktlösung zeigt. Im ganzen Zeitraum (1.–600. Sekunde) liegen Abweichungen unterhalb 0,001%. Eine grafische Darstellung derartiger kleiner Abweichungen erscheint an dieser Stelle nicht notwendig.

Im Gegensatz dazu zeigt die differentielle Lösung erwartungsgemäß große Abweichungen von der Exaktlösung, da diese Näherungsmethode im optisch dünnen Bereich ungenau arbeitet (s. Abbildungen 9 und 10). Generell liefert die differentielle Approximation der Exaktlösung gegenüber niedrigere Drahtübertemperaturen. Die absolute Abweichung steigt mit zunehmender Berandungsemissivität ε_w und zunehmender Umgebungstemperatur T_0 , bei denen die Strahlung intensiver wird.

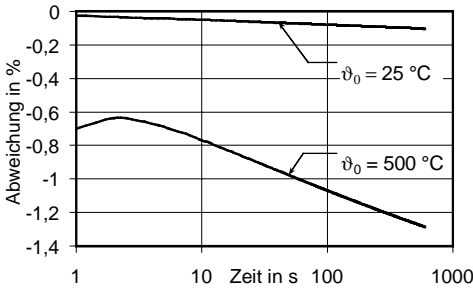


Abb. 9: Abweichung der differentiellen Lösung von der Exaktlösung im Transparenzfall bei $\varepsilon_w = 0,1$.

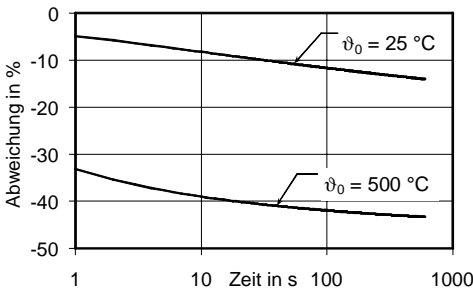


Abb. 10: Abweichung der differentiellen Lösung von der Exaktlösung im Transparenzfall bei $\varepsilon_w = 1$.

An dieser Stelle ist es ersichtlich, dass die S_4 -Approximation in den zwei Grenzfällen hervorragende Genauigkeit liefert, was auch im ganzen Intervall $0 < E < \infty$ zu erwarten ist. Die differentielle Approximation zeigt bisher nur im opaken Grenzfall ($E \rightarrow \infty$) ausgezeichnete Genauigkeit, im transparenten Grenzfall aber große Abweichungen. In welchem Extinktionsbereich die differentielle Approximation genau arbeitet, wird nachfolgend weiter untersucht.

5.3 Variation des Extinktionskoeffizienten ($0 < E < \infty$)

In diesem Abschnitt werden zunächst absorbierende und emittierende Medien untersucht. Absorbierende, emittierende und streuende Medien kommen später in Betrachtung.

5.3.1 Vergleich der differentiellen mit der S_4 -Approximation

Zur Untersuchung der Genauigkeit der differentiellen Approximation im ganzen Extinktionsbereich $0 \leq E < \infty$ wird ihre Lösung mit der S_4 -Lösung verglichen. Daraus werden Schlussfolgerungen über ihren Anwendungsbereich hinsichtlich der Extinktion gezogen.

Die Abbildungen 11 und 12 zeigen die prozentualen Abweichungen der Drahtübertemperatur der differentiellen von der S_4 -Lösung

$$\frac{\Delta T_w(\text{DIFF}) - \Delta T_w(S_4)}{\Delta T_w(S_4)} \cdot 100\% \quad (5.6)$$

bei den Umgebungstemperaturen $\vartheta_0 = 25^\circ\text{C}$ und $\vartheta_0 = 500^\circ\text{C}$, die mit der Heizleistung $\dot{Q} = 1 \text{ W/m}$ berechnet wurden. Nur die Abweichungen in der 100. und 600. Sekunde sind hierbei angezeigt, da innerhalb des Zeitraumes zwischen den beiden Zeitpunkten in praktischen Heizdrahtmessungen die Drahttemperatur abgelesen wird.

Wie erwartet liefert die differentielle Approximation sehr grobe Ungenauigkeiten im kleinen Extinktionsbereich. Die Abweichung nimmt jedoch mit zunehmender Extinktion E ab, bei der das Medium optisch dicker wird. Die Höhe der Abweichung hängt insbesondere bei kleinen Extinktionskoeffizienten stark von der Drahtemissivität ε_w ab. Da die differentielle Approximation einen diffusiven Strahlungstransport im optisch dicken Medium voraussetzt, wird der Strahlungstransport bei ihrer Anwendung auf eine kleine Extinktion zwangsläufig als diffusiv behandelt. Als Ergebnis ergibt sich darum ein fehlerhaftes Strahlungsfeld. Die differentielle Approximation soll darum nur bei ausreichend großen Extinktionskoeffizienten angewandt werden, da bereits kleine Ungenauigkeiten im zeitlichen Temperaturanstieg des Heizdrahtes die Bestimmung der effektiven Wärmeleitfähigkeit erheblich verfälschen können.

Bei der Umgebungstemperatur $\vartheta_0 = 25^\circ\text{C}$ zeigt die differentielle Approximation für $E > 5 \cdot 10^3 \text{ m}^{-1}$ eine Abweichung kleiner als 1%, welche aber bei der Umgebungstemperatur $\vartheta_0 = 500^\circ\text{C}$ erst für $E > 2,5 \cdot 10^4 \text{ m}^{-1}$ zu beobachten ist. Der Grund liegt darin, dass im Hochtemperaturbereich der Strahlungstransport sehr intensiv erfolgt. Insgesamt nimmt deshalb die

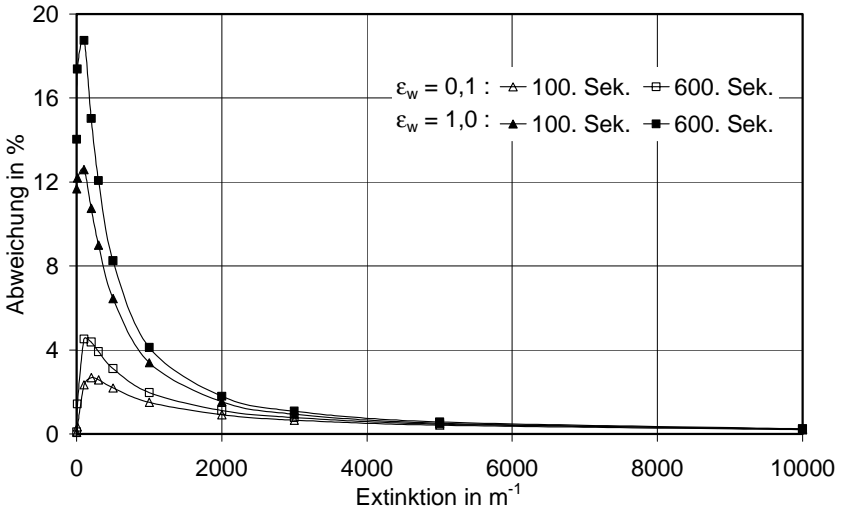


Abb. 11: Abweichung der Drahtübertemperatur der differentiellen gegenüber der S_4 -Lösung in Abhängigkeit von der Extinktion, bei $\vartheta_0 = 25\text{ }^\circ\text{C}$.

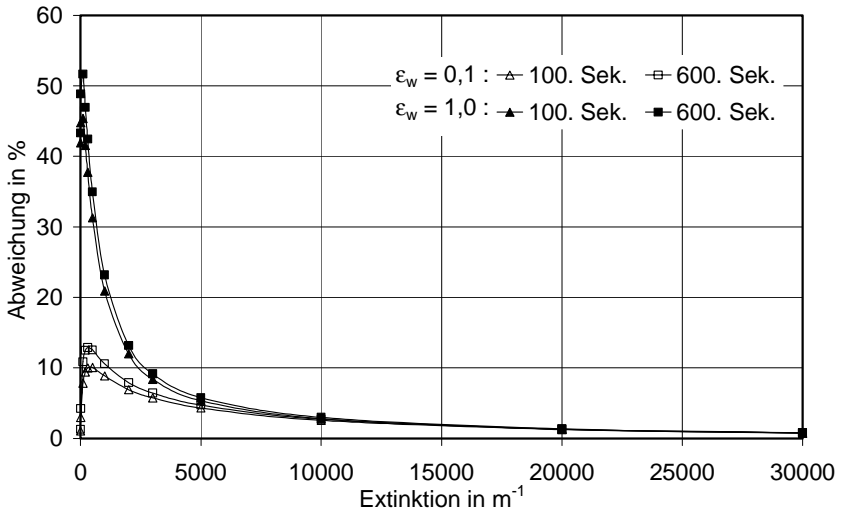


Abb. 12: Abweichung der Drahtübertemperatur der differentiellen gegenüber der S_4 -Lösung in Abhängigkeit von der Extinktion, bei $\vartheta_0 = 500\text{ }^\circ\text{C}$.

Abweichung des tatsächlichen Strahlungstransports vom Diffusionsmodell zu. Die Anwendbarkeit der differentiellen Approximation ist darum bei hohen Temperaturen stärker beschränkt (s. Abbildung 12). Auch hohe Berandungsemissivitäten tragen zum intensiven Strahlungstransport in der unmittelbaren Umgebung des Drahtes bei, was letztendlich zu einer weiteren Abweichung vom Diffusionsmodell führt. Die Abbildungen verdeutlichen darum höhere Abweichungen der differentiellen von der S_4 -Lösung bei der Emissivität $\varepsilon_w = 1$ im Vergleich zu $\varepsilon_w = 0,1$.

Die kontinuierliche Abnahme der Abweichung der differentiellen gegenüber der S_4 -Lösung mit zunehmendem Extinktionskoeffizienten E bestätigt zusammen mit den Genauigkeitstests in den beiden Grenzfällen die zunehmende Genauigkeit der differentiellen Approximation bei größer werdendem Extinktionskoeffizienten sowie die Genauigkeit der S_4 -Approximation bei beliebigen E -Wert. An dieser Stelle kann die Schlussfolgerung gezogen werden, dass die S_4 -Approximation zur Lösung der Strahlungstransportgleichung bei beliebiger Extinktion geeignet ist. Aufgrund der Einschränkung der Anwendbarkeit der differentiellen Approximation hinsichtlich des Extinktionsbereiches wird in den weiteren Abschnitten nur die S_4 -Approximation für die weitere Simulation verwendet.

5.3.2 Zeitabhängige Übertemperatur des Heizdrahtes

Zur Ermittlung der Wärmeleitfähigkeit bei der Heizdrahtmethode wird theoretisch der Anstieg eines linearen Abschnittes des logarithmisch zeitlichen Drahttemperaturverlaufes verwendet. Bei Anwendung der Heizdrahtmethode auf das Problem der gekoppelten Strahlung/Leitung wird erwartet, dass durch Strahlungseffekte der zeitliche Drahttemperaturverlauf mehr oder weniger von einer linearen Form abweicht. In diesem Abschnitt wird daher durch Variation des Extinktionskoeffizienten E untersucht, inwieweit die Strahlung in einem transparenten bis opaken Medium den zeitlichen Übertemperaturverlauf des Drahtes beeinflusst. In den S_4 -Berechnungen bei der Umgebungstemperatur $\vartheta_0 = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ wird daher der Extinktionskoeffizient E von 0 bis ∞ variiert.

Die zeitlichen Verläufe der Drahtübertemperatur für die Umgebungstemperatur $\vartheta_0 = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ sind in Abbildung 13 für $\varepsilon_w = 0,1$ und in Abbildung 14 für $\varepsilon_w = 1$ dargestellt. Wie erwartet, liegen alle Übertemperaturen des Drahtes

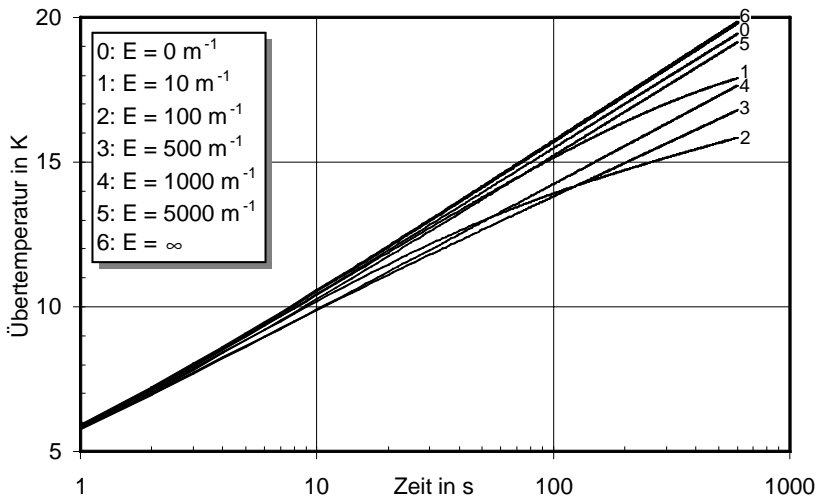


Abb. 13: Zeitabhängige Übertemperatur des Drahtes bei $\vartheta_0 = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ und $\varepsilon_w = 0,1$.

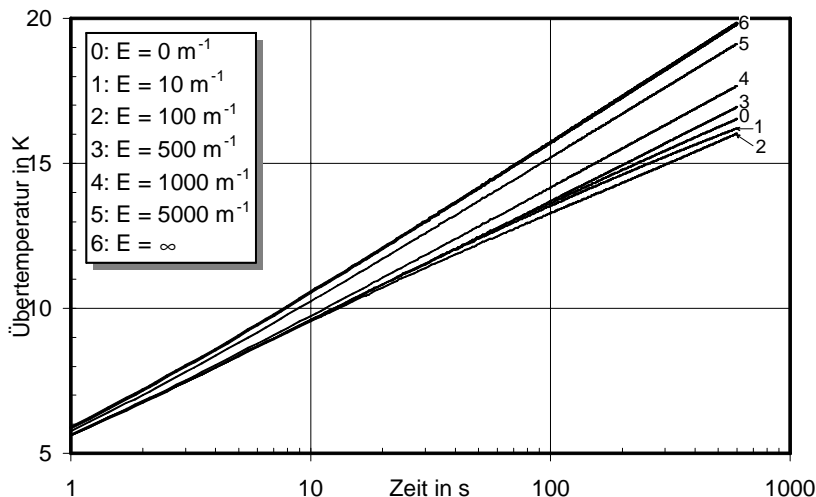


Abb. 14: Zeitabhängige Übertemperatur des Drahtes bei $\vartheta_0 = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ und $\varepsilon_w = 1$.

bei endlicher Extinktion unterhalb der Grenzkurve der reinen Wärmeleitung ($E = \infty$), da der Wärmetransport aufgrund des zusätzlichen Beitrages des Strahlungstransports zunimmt und damit die Drahttemperatur sinkt. Je kleiner der Extinktionskoeffizient ist, umso stärker ist der Strahlungstransport und desto kleiner ist dadurch die Drahttemperatur. Diese Tendenz gilt jedoch nicht im ganzen Extinktionsbereich von 0 bis ∞ . Bei den Abbildungen ist deutlich zu erkennen, dass die Drahttemperatur wieder zunimmt, wenn der Extinktionskoeffizient im Bereich $10^2 \text{ m}^{-1} < E < 5 \cdot 10^2 \text{ m}^{-1}$ weiter sinkt. Die Wende der Tendenz ist auf das Verhalten der Strahlung zurückzuführen. Das Phänomen wird im folgenden in der Reihenfolge $E = 0 \rightarrow \infty$ erläutert:

Im transparenten Fall ($E = 0$) erfolgt der Strahlungstransport durch den direkten Strahlungsaustausch zwischen der Drahtoberfläche und der äußeren Berandung. Das Medium absorbiert und emittiert nicht. Innerhalb des Mediums erfolgt nur der Leitungstransport, durch den das Medium aufgeheizt wird. Bei kleinen Berandungsemissivitäten ε_w nähert sich der Drahttemperaturverlauf der Kurve der reinen Wärmeleitung. Für blanke Heizdrähte mit $\varepsilon_w = 0$ gleicht der Drahttemperaturverlauf dem Verlauf der reinen Wärmeleitung, da überhaupt kein Strahlungsaustausch zwischen den Oberflächen der Berandung stattfindet. Mit zunehmender Berandungsemissivität ε_w erhöht sich der Strahlungstransport und der Drahttemperaturverlauf (Kurve „0“) entfernt sich deshalb weiter von dem der reinen Wärmeleitung (Kurve „6“) in Richtung zu kleineren Werten.

Nimmt der Extinktionskoeffizient E etwas zu, dann absorbiert und emittiert das Medium. Die zum Extinktionskoeffizienten umgekehrt proportionale mittlere freie Weglänge der Photonen $l_m = 1/E$ ist noch so groß, dass mehr Strahlungsenergie vom Draht und gleichzeitig vom Medium in der Drahtnähe, welches durch Wärmeleitung Übertemperatur erreicht hat, an weiter entfernt liegende Bereiche oder sogar an die äußere Berandung abgegeben wird als im Fall der Transparenz. Im diesem Fall erhöht sich der gesamte Energieverlust des Drahtes, so dass die Drahttemperatur im Vergleich zum Transparenzfall abnimmt. Bei niedrigen Extinktionskoeffizienten ist der Strahlungstransport jedoch noch schwach, insbesondere in kleinen Zeiten, wenn die Temperaturdifferenz im Medium noch gering ist. Der Energietransport erfolgt noch wesentlich durch Leitung, deshalb bleibt der Drahttemperaturverlauf zunächst nahe an der Kurve der reinen Wärmeleitung. Erst in späteren Zeiten erreicht der Mediumbereich in der Drahtnähe eine höhere Übertemperatur, so dass die von diesem Mediumbereich emittierte Strahlungsenergie und somit der gesamte Energieverlust noch

stärker zunimmt. Da der Strahlungstransport der vierten Potenz der Temperatur proportional ist, nimmt der Anstieg des Drahttemperaturverlaufs mit zunehmender Temperatur in großen Zeiten sehr stark ab. Darum ist die Biegung der Drahttemperaturverläufe in großen Zeiten besonders ausgeprägt.

Erhöht sich der Extinktionskoeffizient weiter in einem bestimmten Bereich, in dem die mittlere freie Weglänge der Photonen l_m und die Temperaturdifferenz im Abstand l_m noch groß genug ist, dann nimmt die vom in der Drahtnähe befindlichen Medium emittierte Strahlung zu. Damit steigt der gesamte Energieverlust und die Drahttemperatur sinkt weiter. In Abbildung 13 und 14 ist deshalb die Abnahme der Drahttemperatur bei zunehmendem Extinktionskoeffizienten zu sehen (im Bereich $E=0 \rightarrow 10^2 \text{ m}^{-1}$, d.h. Kurve „0“ bis „2“). Der Drahttemperaturverlauf entfernt sich noch mehr von der Kurve der reinen Wärmeleitung.

Nimmt der Extinktionskoeffizient weiter zu, verkürzt sich die mittlere freie Weglänge der Photonen l_m . Erreicht die mittlere freie Weglänge l_m kleine Werte, bei denen die Temperaturdifferenz in diesem Abstand l_m so gering ist, dann verringert sich der Strahlungstransport. In diesem Fall bedeutet die Zunahme des Extinktionskoeffizienten die Senkung des Strahlungstransports und dadurch des gesamten Energieverlustes. Die Drahttemperatur nimmt deshalb wieder zu. Mit zunehmender Extinktion nähert sich der Drahttemperaturverlauf der Kurve der reinen Wärmeleitung. Geht der Extinktionskoeffizient gegen ∞ , wird Strahlung in jeder Stelle völlig absorbiert. Der Strahlungstransport verschwindet, nur die Wärmeleitung bleibt als einziger Transportmechanismus im Medium. Der Drahttemperaturverlauf gleicht der Kurve der reinen Wärmeleitung.

Während der Extinktionskoeffizient E den Strahlungstransport innerhalb des Probenmediums steuert und damit den Strahlungsenergieverlust vom Draht und den Drahttemperaturanstieg indirekt beeinflusst, übt die Berandungsemissivität ε_w einen direkten Einfluss auf den Strahlungsenergieverlust des Drahtes und damit den Drahttemperaturanstieg aus. Beim Vergleich der Abbildungen 13 und 14 ist deutlich zu erkennen, dass die hohe Berandungsemissivität $\varepsilon_w=1$ eine Senkung der Drahttemperatur verursacht. Mit zunehmender Extinktion verkürzt sich die mittlere freien Weglänge der Photonen, entlang deren nur noch eine geringere Temperaturdifferenz vorliegt. Damit sinkt insgesamt die vom Draht emittierte Strahlungsenergie. Im Bereich großer Extinktionskoeffizienten lässt deshalb der Einfluss der Emissivität des Heizdrahtes auf die Drahttemperatur nach.

Das Phänomen der Abnahme und erneuten Zunahme der Drahttemperatur bei Variation des Extinktionskoeffizienten im Bereich $0 \leq E < \infty$ wird auch bei SAITO [SAITO, 1980] beobachtet. Saito nimmt die Drahttemperatur als Summe aus den Temperaturen T_c und T_r an. Die Temperatur T_c entspricht der Drahttemperatur der reinen Wärmeleitung und die Temperatur T_r stellt die Abweichung vom Fall der reinen Wärmeleitung durch Anwesenheit der Strahlung dar. Im analytischen Ergebnis zeigt Saito, dass der Absolutwert von T_r zunächst zunimmt, wenn E größer als null wird. Ab einem bestimmten Wert von E nimmt der Absolutwert von T_r wieder ab und konvergiert zu null bei $E \rightarrow \infty$.

Insgesamt wird dieses Phänomen von zwei Faktoren gesteuert: der mittleren freien Weglänge der Photonen l_m (oder der Extinktion E) und der Temperaturdifferenz zwischen Anfang und Ende der mittleren freien Weglänge. Bei sehr kleinen Extinktionskoeffizienten E liegen große mittlere freie Weglängen der Photonen l_m und hohe Temperaturdifferenzen vor (aufgrund der sehr steilen Temperaturgefälle im Medium bei Heizdrahtmessungen). Wenn diese Verhältnisse erhalten bleiben, dann nimmt der Strahlungstransport mit dem zunehmenden Absorptions-/Emissionsvermögen E des Mediums zu. Die Drahttemperatur sinkt dadurch. Wenn die Extinktion so groß ist, dass diese Verhältnisse nicht mehr bestehen, dann kommt es zu einer Wende: die Drahttemperatur steigt mit zunehmender Extinktion.

Die Geradlinigkeit des Drahttemperaturverlaufs nach der logarithmischen Zeit, wie sie im Fall der reinen Wärmeleitung zu erwarten ist, erkennt man deutlich in den Abbildungen 13 und 14 bei sehr großen Extinktionskoeffizienten. Die Krümmung der Kurven tritt mit kleiner werdendem Extinktionskoeffizienten auf. Theoretisch kann man nur die Wärmeleitfähigkeit ermitteln, wenn der logarithmisch zeitliche Drahttemperaturverlauf die gerade Form hat, was auf einen diffusiven Wärmetransportsprozess zurückzuführen ist. Mit Auftritt der Krümmung im Temperaturverlauf verliert der Energietransport den diffusiven Charakter und die Voraussetzung für die Anwendung der Lösung der idealen Linienquelle besteht nicht mehr. Inwieweit man hinsichtlich der Extinktion die Lösung der idealen Linienquelle anwenden darf, wird in den nachfolgenden Abschnitten weiter untersucht.

5.3.3 Radiale Übertemperaturprofile

In diesem Abschnitt wird ein Blick auf die radialen Übertemperaturprofile im Medium ermöglicht und der Einfluss der Strahlungsparameter auf die Profile diskutiert. Zu diesem Zweck werden S_4 -Berechnungen bei den Umgebungstemperaturen $25\text{ }^\circ\text{C}$ und $500\text{ }^\circ\text{C}$ mit zwei unterschiedlichen Extinktionskoeffizienten ($E=10^2$ und 10^4 m^{-1}) durchgeführt, die optisch dünne und dickere Medien darstellen sollen.

Abbildungen 15a und 15b stellen zu drei unterschiedlichen Zeitpunkten die Übertemperaturprofile im Medium bei der Umgebungstemperatur $\vartheta_0 = 25\text{ }^\circ\text{C}$ dar. Wie in den Abbildungen zu sehen ist, herrscht in Drahtnähe der nahezu logarithmische Temperaturabfall, der im Fall reiner Wärmeleitung zu beobachten ist. Mit zunehmendem Extinktionskoeffizienten E steigt die Übertemperatur überall, da die Strahlung stärker eingedämmt wird, der Strahlungsenergieverlust in die Umgebung dadurch abnimmt und das Medium gleichzeitig mehr Energie absorbieren kann (vergl. 15a und 15b).

Die Berandungsemissivität ε_w beeinflusst die Temperaturverteilung bei kleinen Extinktionskoeffizienten stark, bei denen die vom Draht emittierte Strahlung weite Bereiche im Medium durchdringen kann. Darum bedeutet eine größere Berandungsemissivität ε_w eine höhere Strahlungsemission vom Draht und damit eine kleinere Temperatur des Drahtes und des Mediumbereiches nahe am Draht, wie man in Abbildung 15a bei den Kurven der 1. und 10. Sekunde erkennen kann. In der 600. Sekunde ist die Drahttemperatur bei der größeren Berandungsemissivität $\varepsilon_w=1$ jedoch größer. Dies wird im nächsten Abschnitt mit Hilfe der Verteilung der Wärmestromdichten erklärt. Die große Einflussweite der vom Draht emittierte Strahlung deutet auf einen nichtdiffusiven Strahlungstransport in der unmittelbaren Umgebung des Drahtes hin, was die Unanwendbarkeit der Heizdrahtmethode voraussagen kann.

Bei größeren Extinktionskoeffizienten wird die vom Draht emittierte Strahlung absorbiert, bevor sie tiefer eindringt. Der Einfluss der Berandungsemissivität beschränkt sich mit zunehmender Extinktion auf einen immer kleineren Mediumbereich nahe am Draht. Bei $E=10^4\text{ m}^{-1}$ ist deshalb der Unterschied des Profils zwischen den Berandungsemissivitäten $\varepsilon_w = 0,1$ und $\varepsilon_w = 1$ kaum noch zu erkennen (Abbildung 15b).

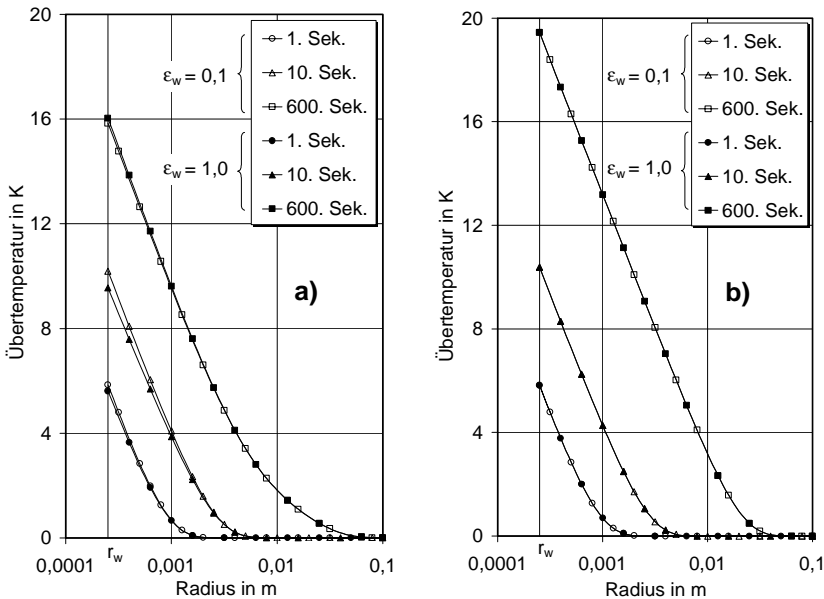


Abb. 15: Profile der Übertemperatur im Probenmedium bei $\vartheta_0 = 25^\circ\text{C}$:
 a) $E = 10^2 \text{ m}^{-1}$; b) $E = 10^4 \text{ m}^{-1}$.

In Abbildung 16 sind Übertemperaturprofile bei der Umgebungstemperatur $\vartheta_0 = 500^\circ\text{C}$ dargestellt. In diesem Hochtemperaturbereich ist der Strahlungstransport intensiver, insbesondere im kleinen Extinktionsbereich. Das macht deshalb den Unterschied des Temperaturprofils zwischen kleinen und großen Extinktionskoeffizienten deutlicher. Im Vergleich zur kleineren Umgebungstemperatur $\vartheta_0 = 25^\circ\text{C}$ steigt in diesem Fall der gesamte Energietransport und dadurch nimmt die Übertemperatur im Medium ab.

Der Einfluss der Berandungsemissivität auf die Temperaturprofile ist bei der kleinen Extinktion $E = 10^4 \text{ m}^{-1}$ deutlicher zu erkennen. Bemerkenswert sind dabei die sehr steilen Temperaturgefälle in der Drahtnähe bzw. flachen Temperaturgefälle in weiter entfernt liegenden Mediumbereichen, welche auf die starke Strahlungsenergieabgabe der unmittelbaren Umgebung des Drahtes mit hoher Temperatur durch Emission bzw. auf die Annahme großer ankommender Strahlungsenergie bei den weiteren Bereichen

(aufgrund der weiten Eindringtiefe der Strahlung) zurückzuführen ist. Diese Erscheinung deutet auf eine größere Abweichung vom Diffusionsprozess hin, im Vergleich zum Fall $\vartheta_0 = 25\text{ }^\circ\text{C}$. Sie lässt jedoch im Bereich hoher Extinktionskoeffizienten nach, so dass sie bei $E = 10^4\text{ m}^{-1}$ in Abbildung 16b schlecht erkennbar ist.

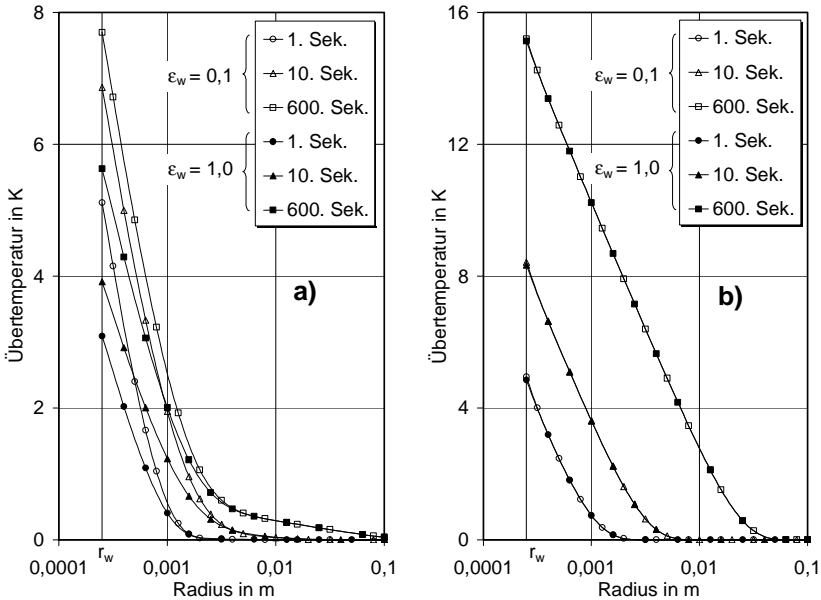


Abb. 16: Profile der Übertemperatur im Probenmedium bei $\vartheta_0 = 500\text{ }^\circ\text{C}$:

a) $E = 10^2\text{ m}^{-1}$;

b) $E = 10^4\text{ m}^{-1}$

5.3.4 Verteilung der Leitungs- und Strahlungsstromdichte

In diesem Abschnitt werden die Wärmestromdichten durch Leitung \dot{q}_c und Strahlung \dot{q}_r diskutiert, um Strahlungseffekte bei Heizdrahtmessungen an porösen Materialien zu verdeutlichen. Daten für Leitungs- und Strahlungsstromdichten zu drei unterschiedlichen Zeiten (1., 10. und 600. Sekunde) aus den Berechnungen des Abschnitts 5.3.3 werden grafisch dargestellt, wobei

zwei Berandungsemissivitäten $\varepsilon_w = 0,1$ und $\varepsilon_w = 1$ als Parameter ihren Einfluss veranschaulichen. Aus der Temperaturverteilung kann die Leitungsstromdichte anhand der bekannten Wärmeleitfähigkeit reiner Wärmeleitung berechnet werden

$$\dot{q}_c(r_j) = -\lambda_c \left. \frac{\Delta T}{\Delta r} \right|_{r=r_j} . \quad (5.7)$$

Die örtliche Strahlungsstromdichte lässt sich aus der örtlichen diskreten Intensitätsverteilung ermitteln

$$\dot{q}_r(r_j) = \sum_i w'_i \mu_i I_{i,j} . \quad (5.8)$$

Abbildungen 17 und 18 zeigen die \dot{q}_c - und \dot{q}_r -Verteilungen bei der Umgebungstemperatur $\vartheta_0 = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ und der Extinktion $E = 10^4 \text{ m}^{-1}$. Beim Vergleich der Abbildungen 17 und 18 erkennt man sehr große \dot{q}_c -Werte am Draht und in seiner nahen Umgebung im Vergleich zu \dot{q}_r . Das Verhältnis von \dot{q}_r zu \dot{q}_c liegt unterhalb 1:12. Das heißt, am Draht und in seiner unmittelbaren Umgebung erfolgt die Wärmeübertragung im wesentlichen durch Leitung. Wie in Abbildung 17 zu sehen ist, ergibt sich in Drahtnähe aufgrund des steilen Temperaturgradienten (s. Abbildung 15a) eine auch sehr steile \dot{q}_c -Verteilung. Das flache Temperaturgefälle in weiteren Mediumbereichen hat deshalb die flache \dot{q}_c -Verteilung zur Folge. Im allgemeinen haben die \dot{q}_c -Verteilungen eine uniforme Gestalt. Im Gegensatz dazu zeigt die \dot{q}_r -Verteilung in Abbildung 18 sehr unterschiedliche Verläufe.

In kleinen Zeiten (z.B. in der 1. und 10. Sekunde) zeigt die \dot{q}_r -Verteilung in Abbildung 18 bei der großen Berandungsemissivität $\varepsilon_w = 1$, bei welcher der Draht maximal emittiert, einen ähnlichen Verlauf wie im Transparenzfall ($\dot{q}_r \sim 1/r$), denn das Medium ist mit $E = 10^2 \text{ m}^{-1}$ optisch dünn. Deshalb kann die vom Draht emittierte Strahlung sehr tief ins Medium eindringen. Außerdem hat das Medium in kleinen Zeiten noch sehr niedrige Übertemperaturen. Der Beitrag der Strahlung vom Medium zur gesamten Strahlung ist gegenüber der vom Draht emittierten Strahlung noch sehr klein. Die

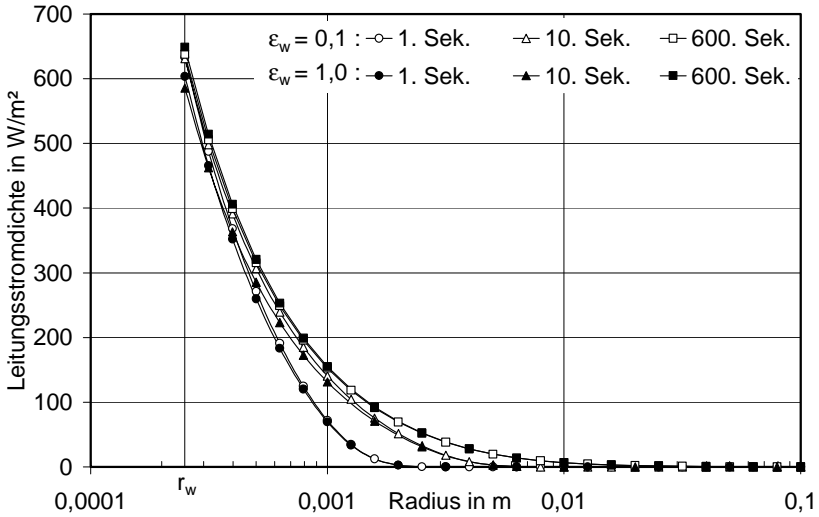


Abb. 17: \dot{q}_c -Verteilung bei $\vartheta_0 = 25\text{ }^\circ\text{C}$ und $E = 10^2\text{ m}^{-1}$.

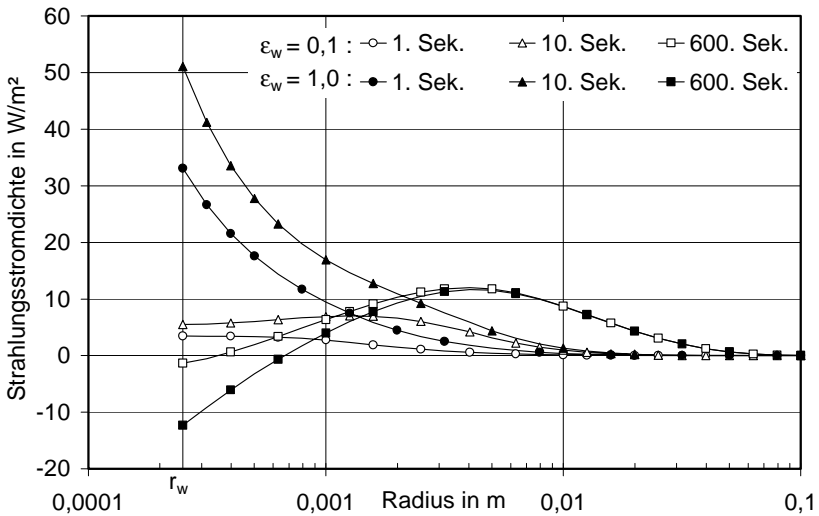


Abb. 18: \dot{q}_r -Verteilung bei $\vartheta_0 = 25\text{ }^\circ\text{C}$ und $E = 10^2\text{ m}^{-1}$.

radiale \dot{q}_r -Verteilung wird wesentlich von der vom Draht emittierten Strahlung geprägt. Der kleine Beitrag der Strahlung vom Medium führt lediglich zu geringfügig größeren \dot{q}_r -Werten.

Bei der kleinen Berandungsemissivität $\varepsilon_w = 0,1$ emittiert der Draht jedoch schwach. Deshalb zeigt die \dot{q}_r -Verteilung in diesem Fall keinen steilen Abfall wie bei $\varepsilon_w = 1$, sondern eine flache Form, was auf einen großen Beitrag der Strahlung vom Medium (im Verhältnis zur gesamten Strahlung) zurückzuführen ist. Die Höhe von \dot{q}_r ist am Draht sowie in dessen unmittelbaren Umgebung wesentlich durch die Strahlungsemission des Drahtes und innerhalb des Mediums hauptsächlich durch Strahlung des Mediums bestimmt. In der 10. Sekunde hat der Mediumbereich nahe am Draht etwas höhere Übertemperatur. Damit kann er vermehrt abstrahlen, so dass ein Maximum von \dot{q}_r in einer weiter entfernt liegenden Stelle auftritt (s. Abbildung 18).

In großen Zeiten hat ein großer zylindrischer Mediumbereich um den Draht höhere Übertemperaturen, welcher dadurch sehr intensiv abstrahlt. Deshalb nimmt in der unmittelbaren Umgebung des Drahtes die Strahlungsintensität in negativer Richtung sehr stark zu (aufgrund der vermehrten Abstrahlung), was zu einer Verringerung der Nettostrahlungsstromdichte in diesem Bereich führt. Dieser Effekt der zeitlich wachsenden rückwärts emittierten Strahlung wird auch bei [SAITO, 1980] beobachtet. SAITO berechnet jedoch die Strahlungsstromdichte aus der Temperaturverteilung des Wärmeleitfalls. Deshalb wird die Wechselwirkung zwischen Strahlung und Leitung nicht genügend berücksichtigt. Daher lässt sich bei Saito ein weiterer Strahlungseffekt nicht beobachten, der nachfolgend erklärt wird.

Mit einer nicht verschwindenden Berandungsemissivität emittiert der Draht Strahlung, die aufgrund der großen mittleren freien Weglänge der Photonen weit entfernt liegende Volumenelemente im Medium vor Absorption erreichen kann. Wegen des steilen Temperaturgefälles im Medium haben diese Volumenelemente in kleinen Zeiten eine sehr niedrige Übertemperatur. Dadurch ist die Temperaturdifferenz zwischen dem Draht und diesen Volumenelementen groß, was zu einem starken Strahlungsaustausch führt. Die Volumenelemente erhalten neben Leitung und Strahlungstransport innerhalb des Mediums noch zusätzliche Strahlungsenergie direkt vom Draht durch einen sogenannten „kurzschlussartigen Strahlungstransport“. Dadurch erwärmen sich diese Volumenelemente und seine unmittelbare Umgebung zusätzlich. Der kurzschlussartige Strahlungseffekt verstärkt deshalb den Strahlungseffekt der zeitlich wachsenden rückwärts emittierten

Strahlung in großen Zeiten, so dass die Strahlungsstromdichte am Draht und in dessen unmittelbaren Umgebung noch stärker abnimmt. Im gerade betrachteten Fall führen beide Strahlungseffekte sogar zu einer negativen Nettostrahlungsstromdichte, wie z.B. in der 600. Sekunde zu beobachten ist (Abbildung 18). Je stärker der Draht emittiert, desto mehr Energie absorbieren diese Volumenelemente und umso mehr Strahlung emittieren sie in negativer Richtung zurück, so dass sich der Betrag der negativen Nettostrahlungsstromdichte mit zunehmender Berandungsemissivität ε_w erhöht. Dadurch ist die Drahttemperatur der 600. Sekunde bei $\varepsilon_w = 1$ größer als die bei $\varepsilon_w = 0,1$, was bereits in Abbildung 15a beobachtet wurde. Aufgrund der negativen Strahlungsstromdichte am Draht entsteht dort eine überhöhte Leitungstromdichte, deren Betrag die zugeführte Heizleistung übertrifft, z.B. in der 600. Sekunde:

$$\dot{q}_c = 648,8 \text{ W/m}^2 > \dot{q} = \dot{Q}/(2\pi r_w) = 636,6 \text{ W/m}^2 .$$

Abbildungen 19 und 20 stellen Wärmestromdichten bei der gleichen Umgebungstemperatur, aber in einem optisch dickeren Medium der Extinktion $E = 10^4 \text{ m}^{-1}$ grafisch dar. Der gesamte Strahlungstransport ist durch den großen Extinktionskoeffizienten sehr gering im Vergleich zum letzten Fall. Das Verhältnis von \dot{q}_r zu \dot{q}_c liegt daher unterhalb 1:78. Die Wärmeleitung ist dadurch dominierender. Bei dem so großen Extinktionskoeffizienten zeigt die Berandungsemissivität einen sehr geringen Einfluss auf die Verteilung der Wärmestromdichten, da die vom Draht emittierte Strahlung im Abstand der mittleren freien Weglänge $l_m = 1/E = 10^{-4} \text{ m}$ bereits völlig absorbiert wird. Der Einfluss von ε_w ist nur noch im sehr kleinen den Draht umgebenden Bereich bei der \dot{q}_r -Verteilung zu erkennen, bei den großen \dot{q}_c -Werten sind die so niedrigen Unterschiede kaum ersichtlich.

Mit dem großen Extinktionskoeffizienten absorbiert und emittiert das Medium sehr stark, so dass die Strahlungsemission des Mediums stärker als die des Drahtes wird. Die Strahlungsstromdichte bildet darum ein scharfes Maximum, das sich etwa in einem Abstand der mittleren freien Weglänge der Photonen l_m vom Draht befindet. Das Maximum tritt sehr früh auf und bewegt sich mit der Zeit etwas zum größeren Radius, was auf einen größeren Bereich intensiver Emission zurückzuführen ist.

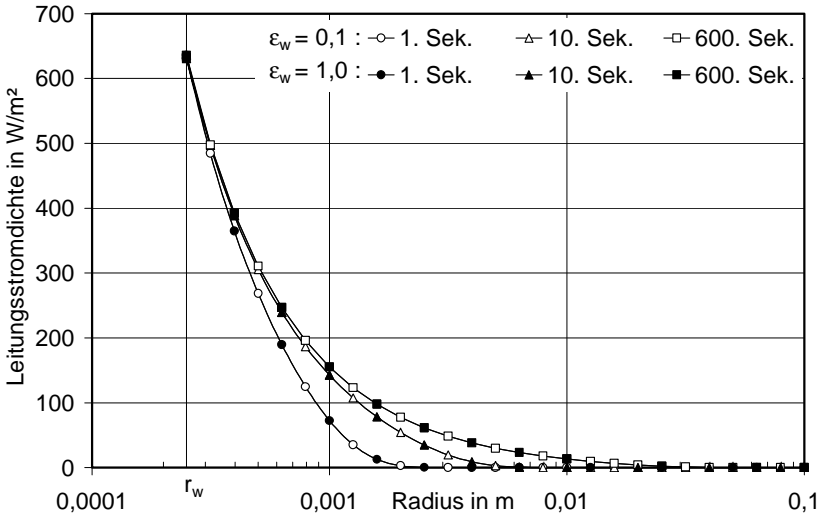


Abb. 19: \dot{q}_c -Verteilung bei $\vartheta_0 = 25\text{ }^\circ\text{C}$ und $E = 10^4\text{ m}^{-1}$.

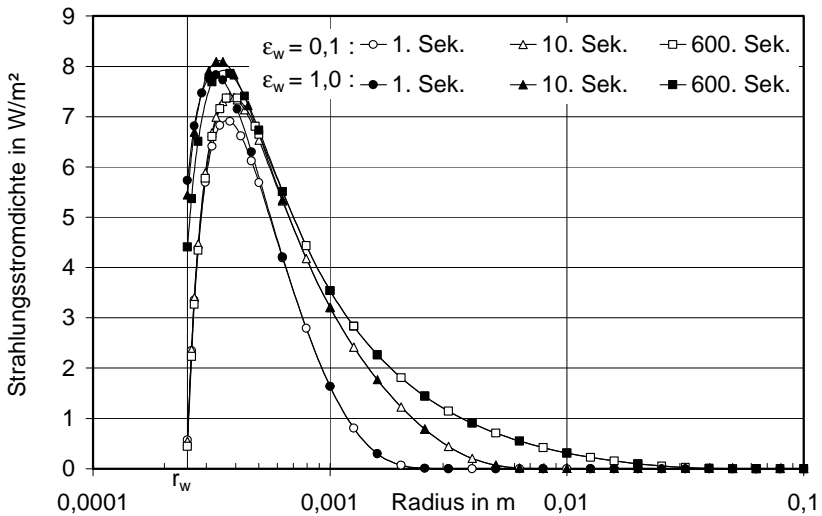


Abb. 20: \dot{q}_r -Verteilung bei $\vartheta_0 = 25\text{ }^\circ\text{C}$ und $E = 10^4\text{ m}^{-1}$.

Da der Strahlungstransport durch den hohen Extinktionskoeffizienten stark eingedämmt wird, nimmt die Temperatur der unmittelbaren Umgebung des Drahtes im Vergleich zum letzten Extinktionsfall zu. Die Abstrahlung dieser Umgebung ist dadurch intensiver. Außerdem ist die mittlere freie Weglänge der Photonen in diesem Fall sehr gering und die Temperaturdifferenz zwischen dem Draht und den Volumenelementen, welche die vom Draht emittierte Strahlung vor Absorption erreicht, nimmt stark ab. Diese Verhältnisse führen dazu, dass die beiden oben beobachteten Strahlungseffekte erheblich eingeschränkt werden. Negative Strahlungsstromdichten treten daher in diesem Fall nicht auf. Die abgeschwächten Strahlungseffekte können jedoch noch eine geringe zeitliche Abnahme der Strahlungsstromdichte im kleinen den Draht umgebenden Bereich hervorrufen, was in Abbildung 20 bei $\varepsilon_w=1$ deutlich erkennbar ist. Aufgrund der starken Absorption und Emission des Mediums fangen in diesem Fall die beiden Strahlungseffekte sehr früh an, so dass die zeitliche \dot{q}_r -Abnahme bereits zwischen der 1. und 10. Sekunde stattfindet, welche bei $E=10^2 \text{ m}^{-1}$ erst zwischen der 10. und 600. Sekunde zu beobachten war (s. Abbildung 18). Im Vergleich zum Fall $E=10^2 \text{ m}^{-1}$ lässt in diesem Fall der Einfluss der Berandungsemissivität ε_w stark nach, was auf eine Annäherung des Strahlungstransports an einem Diffusionsprozess hindeutet.

Nachdem die Verteilung der Wärmestromdichten bei der kleinen Umgebungstemperatur $\vartheta_0 = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ erklärt wurde, wird nun ein Blick auf die Verteilung im Hochtemperaturbereich geworfen. In Abbildungen 21 und 22 sind die \dot{q}_c - und \dot{q}_r -Verteilung bei $E=10^2 \text{ m}^{-1}$ und $\vartheta_0 = 500 \text{ }^\circ\text{C}$ aufgetragen.

Der Hochtemperaturbereich ist durch eine sehr intensive Strahlung gekennzeichnet, da der Strahlungstransport zu T^4 proportional ist. Tatsächlich sind in Abbildung 22 sehr große Strahlungsstromdichten zu beobachten. Das Verhältnis von \dot{q}_r zu \dot{q}_c beträgt in diesem Fall sogar bis zu 1:1,8. Der Unterschied der Strahlungsstromdichte zwischen der kleinen ($\varepsilon_w = 0,1$) und der großen Berandungsemissivität ($\varepsilon_w = 1$) ist besonders groß, was auf den großen Beitrag der vom Draht emittierten Strahlung zurückzuführen ist und einen deutlich nichtdiffusiven Strahlungstransport im Medium bedeutet. Ein kleiner Temperaturunterschied im Hochtemperaturbereich kann aufgrund der Proportionalität zu T^4 eine erhebliche Differenz der Strahlungsemission hervorrufen. Die dadurch sehr starke Strahlungsemission des

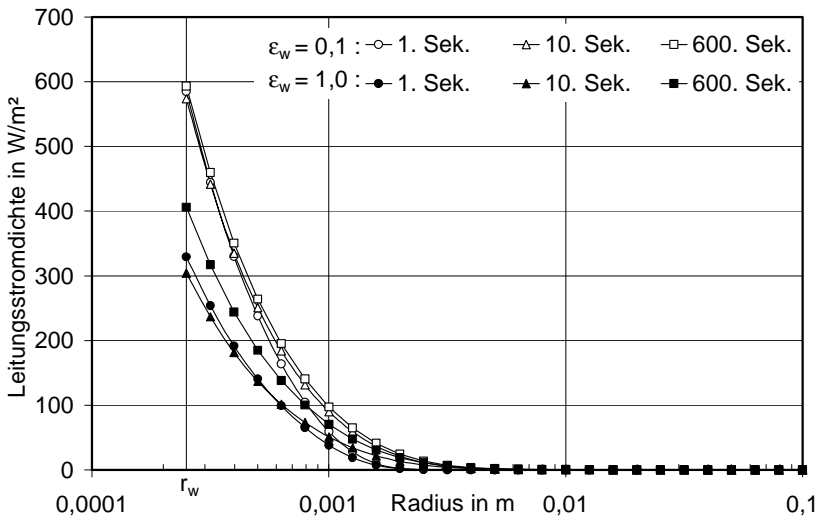


Abb. 21: q_c -Verteilung bei $\vartheta_0 = 500\text{ }^\circ\text{C}$ und $E = 10^2\text{ m}^{-1}$.

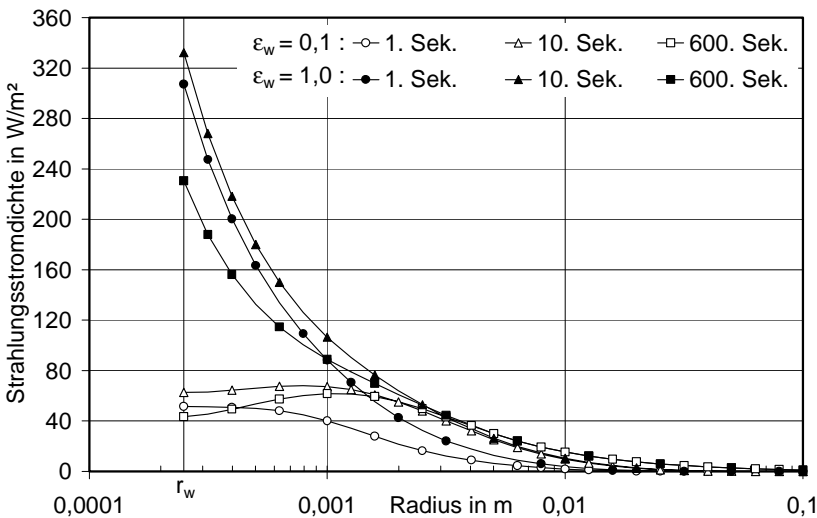


Abb. 22: q_r -Verteilung bei $\vartheta_0 = 500\text{ }^\circ\text{C}$ und $E = 10^2\text{ m}^{-1}$.

Drahtes sowie seiner unmittelbaren Umgebung überdeckt deshalb die zeitlich wachsende Strahlungsstromdichte der negativen Richtung in großen Zeiten (aufgrund der beiden Strahlungseffekte), so dass eine negative Nettostrahlungsstromdichte, die bei $\vartheta_0 = 25\text{ }^\circ\text{C}$ bereits beobachtet wurde (s. Abbildung 18), unterdrückt wird. Die zeitliche Abnahme der Strahlungsstromdichte am Draht und in dessen breiten unmittelbaren Umgebung ist in großen Zeiten jedoch sehr groß (z.B. bei 600. Sekunde, Abbildung 22).

Bei dem großen Extinktionskoeffizienten $E = 10^4\text{ m}^{-1}$ zeigen die Wärmestromdichten im Hochtemperaturbereich ($\vartheta_0 = 500\text{ }^\circ\text{C}$, Abbildungen 23 und 24) ähnliche Verläufe wie im Fall $\vartheta_0 = 25\text{ }^\circ\text{C}$. Die Strahlungsstromdichte ist jedoch in diesem Fall noch sehr groß. Der Unterschied der Wärmestromdichten im Vergleich zwischen den Berandungsemissivitäten ist etwa innerhalb des Abstandes der mittleren freien Weglänge der Photonen l_m vom Draht beträchtlich, was auf einen nichtdiffusiven Strahlungstransport in diesem Mediumbereich hindeutet.

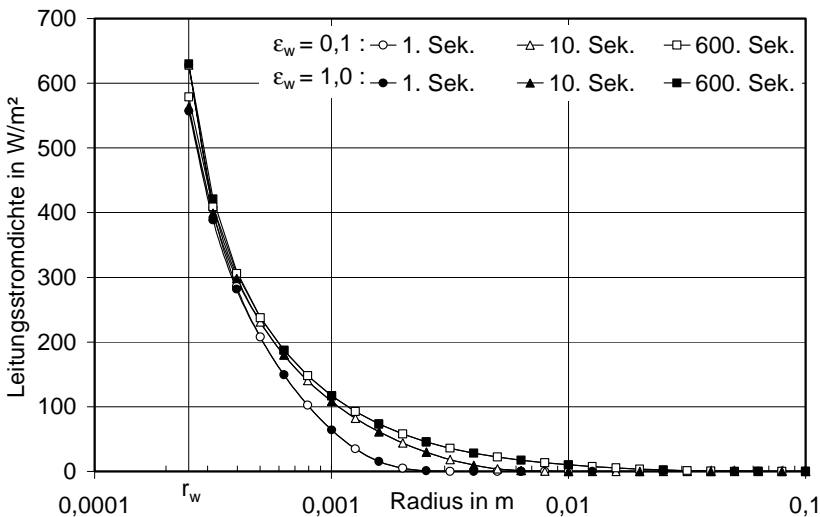


Abb. 23: \dot{q}_c -Verteilung bei $\vartheta_0 = 500\text{ }^\circ\text{C}$ und $E = 10^4\text{ m}^{-1}$.

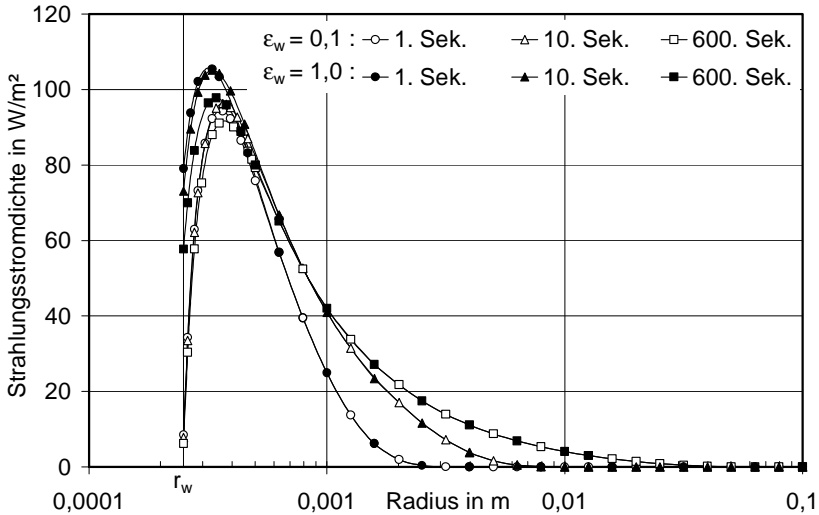


Abb. 24: q_r -Verteilung bei $\vartheta_0 = 500\text{ }^\circ\text{C}$ und $E = 10^4\text{ m}^{-1}$.

5.3.5 Schlussfolgerung

Die Untersuchung der radialen Übertemperaturprofile und der Verteilung der Wärmestromdichten liefert bereits wichtige Informationen über das Verhalten der Strahlung in den betrachteten Fällen, d.h. darüber, unter welchen Bedingungen und weshalb der Strahlungstransport mehr oder weniger von einem Diffusionsprozess abweicht. Bei kleinen Extinktionskoeffizienten (bei großen mittleren freien Weglängen der Photonen) kann Strahlung tief eindringen. Der Effekt der zeitlich wachsenden rückwärts emittierten Strahlung des Mediums und der kurzschlussartige Strahlungseffekt verbreiten sich in einem großen Mediumbereich, so dass sich die Temperatur und die Wärmestromdichten einer großen Umgebung des Drahtes bei Variation der Berandungsemissivität erheblich ändern. Das bedeutet, dass der Strahlungstransport kein lokaler Prozess ist. Messungen unter großem Einfluss der Berandungsemissivität liefern Messergebnisse, die von der Messanordnung abhängen und daher nicht als Materialeigenschaft der Messprobe anzusehen sind.

Mit zunehmendem Extinktionskoeffizienten beschränken sich solche Effekte auf immer kleinere Mediumbereiche. Ihr Einfluss auf die Temperatur sowie

auf die Wärmestromdichten des Medium nimmt dadurch ab. Der Strahlungstransport nähert sich einem Diffusionsprozess.

Falls der Strahlungstransport ein Diffusionsprozess ist, muss die Strahlungsstromdichte z.B. am Draht mit der Zeit zunehmen, weil die Temperatur zeitlich zunimmt und der Strahlungstransport der vierten Potenz der Temperatur proportional ist. Aufgrund des Einflusses der beiden oben beschriebenen Strahlungseffekte ist diese Bedingung jedoch nicht in allen betrachteten Fällen erfüllt, zumindest nicht im ganzen Zeitraum von der 1. bis zur 600. Sekunde. Zur Veranschaulichung dieser Problematik wird die zeitliche Strahlungsstromdichte am Draht, wo der instationäre Wärmetransport den größten Einfluss auf den zeitlichen Temperaturanstieg des Drahtes hat, bei Variation des Extinktionskoeffizienten untersucht.

Das Ergebnis für die Umgebungstemperatur $\vartheta_0 = 25\text{ }^\circ\text{C}$ und die Berandungsemissivität $\varepsilon_w = 0,1$ ist in Abbildung 25 dargestellt (im Fall $\varepsilon_w = 1$ zeigt \dot{q}_r gleiche Verläufe, jedoch mit etwa 10-fach größeren absoluten Beträgen). Bei dem kleinen Extinktionskoeffizienten $E = 10^2\text{ m}^{-1}$ nimmt \dot{q}_r im frühen Zeitraum aufgrund der Temperaturzunahme des Drahtes und der niedrigen Übertemperatur des Mediums mit der Zeit zu. Die Abnahme von \dot{q}_r in großen Zeiten ist auf den Einfluss der beiden Strahlungseffekte

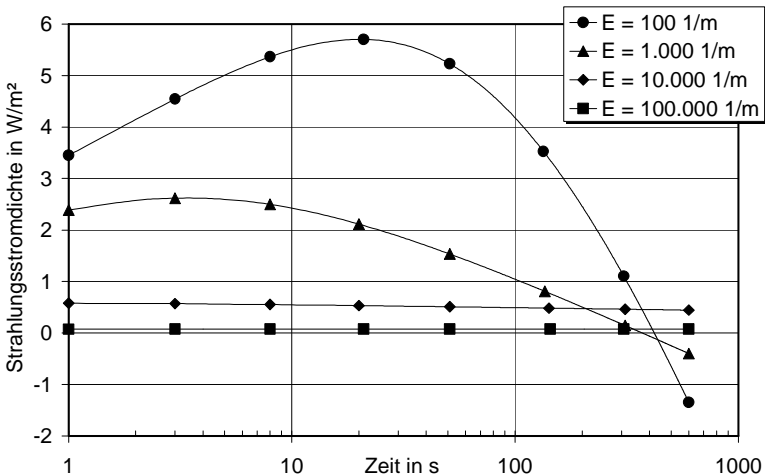


Abb. 25: Zeitabhängige Strahlungsstromdichte am Draht ($r = r_w$) bei $\vartheta_0 = 25\text{ }^\circ\text{C}$ und $\varepsilon_w = 0,1$.

zurückzuführen. Diese Effekte lassen jedoch mit zunehmendem Extinktionskoeffizienten E nach und verschwindet bei einem ausreichend großen E , so dass z.B. bei $E=10^5 \text{ m}^{-1}$ nur noch eine Zunahme der Strahlungsstromdichte mit der Zeit zu beobachten ist. Dies bestätigt in diesem Fall einen klaren diffusiven Strahlungstransport. Aufgrund des so großen E -Wertes ist der Strahlungstransport sehr schwach, so dass die zeitliche Zunahme von \dot{q}_r in Abbildung 25 schlecht zu erkennen ist (jedoch erkennbar bei Zahlenwerten).

Im Hochtemperaturbereich, z.B. bei $\vartheta_0 = 500 \text{ }^\circ\text{C}$, ändert sich die Wärmestromdichte am Draht sehr stark mit der Zeit im Vergleich zum Fall $\vartheta_0 = 25 \text{ }^\circ\text{C}$, was eine erhöhte Abweichung des Strahlungstransports von einem Diffusionsprozess bedeutet. Die Annäherung an den Diffusionsprozess tritt in diesem Fall erst bei einem größeren Extinktionskoeffizienten ein. Wie Abbildungen 25 und 26 zeigen, nimmt \dot{q}_r bei $\vartheta_0 = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ und $E=10^4 \text{ m}^{-1}$ mit der Zeit unwesentlich ab, während \dot{q}_r sich bei der Hochtemperatur $\vartheta_0 = 500 \text{ }^\circ\text{C}$ (und bei dem gleichen Extinktionskoeffizienten) aber noch sehr stark ändert. Die Abnahme von \dot{q}_r bei $\vartheta_0 = 500 \text{ }^\circ\text{C}$ verschwindet erst bei ca. $E=10^5 \text{ m}^{-1}$.

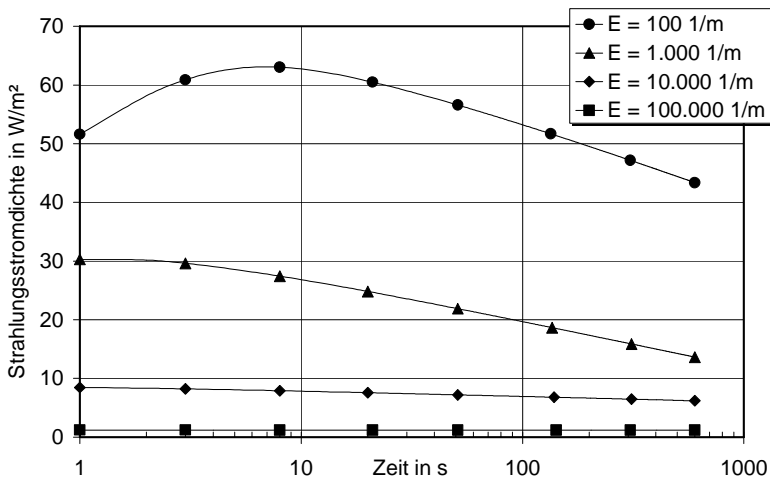


Abb. 26: Zeitabhängige Strahlungsstromdichte am Draht ($r = r_w$) bei $\vartheta_0 = 500 \text{ }^\circ\text{C}$ und $\varepsilon_w = 0,1$.

5.4 Bestimmung der effektiven Wärmeleitfähigkeit

Die letzten Abschnitte haben qualitativ gezeigt, unter welchen Bedingungen der Strahlungstransport sich einem Diffusionsprozess nähert. Zur quantitativen Beurteilung der Anwendbarkeit der Heizdrahtmethode auf poröse Materialien ist jedoch eine konkrete Angabe deren Genauigkeit notwendig, was sich als Aufgabe dieses Abschnittes darstellt.

Dieser Abschnitt beschäftigt sich daher mit der Ermittlung der effektiven Wärmeleitfähigkeit aus dem logarithmisch zeitlichen Verlauf der Drahttemperatur, was der üblichen Praxis einer experimentellen Heizdrahtmessung entspricht, und mit dem Vergleich der auf diese Weise ermittelten effektiven Wärmeleitfähigkeit mit der effektiven Wärmeleitfähigkeit, die als Vergleichsbezug mittels des Diffusionsmodells

$$\lambda_{\text{eff, Diffusion}}(T_r) = \lambda_c + \frac{16}{3} \cdot \frac{\sigma}{E} \cdot T_r^3 \quad (5.9)$$

bestimmt wird. Durch die Untersuchung der Abweichung des Vergleichs kann man über den Gültigkeitsbereich der Lösung der idealen Linienquelle (hinsichtlich des Extinktionskoeffizienten) bei Anwendung der Heizdrahtmethode auf poröse Materialien quantitativ beurteilen.

Da die effektive Wärmeleitfähigkeit nach dem Diffusionsmodell von der Temperatur abhängt und die Drahttemperatur während einer Heizdrahtmessung deutlich zunimmt, besteht keine eindeutige Zuordnung der gemessenen Wärmeleitfähigkeit zu einer zugehörigen Bezugstemperatur. Eine physikalisch mittlere Temperatur der Messprobe als Bezugstemperatur in einer instationären Heizdrahtmessung ist jedoch nicht möglich, da innerhalb der Messprobe eine instationär typische Temperaturverteilung vorliegt. Aus diesem Grund werden in diesem Abschnitt zwei Vergleichsmöglichkeiten herangezogen, die für die praktische Anwendung von Bedeutung sind:

5.4.1 Anfangstemperatur als Bezugstemperatur

Als Bezugstemperatur wird die Umgebungs- oder Anfangstemperatur T_0 herangezogen. Danach ist die mittlere Strahlungstemperatur $T_r = T_0$, und die entsprechende effektive Wärmeleitfähigkeit $\lambda_{\text{eff, Diffusion}}(T_0)$ bleibt daher bei einer konstanten Wärmeleitfähigkeit durch reine Wärmeleitung λ_c und einem konstanten Extinktionskoeffizienten E unverändert. $\lambda_{\text{eff, Diffusion}}(T_0)$

wird mit der effektiven Wärmeleitfähigkeit $\lambda_{eff, Anstieg}$ verglichen, welche anhand des logarithmisch zeitlichen Drahttemperaturanstieges bestimmt wird (nach Gleichung (3.7)), was der üblichen Praxis entspricht. Dabei wird untersucht, wie weit $\lambda_{eff, Anstieg}$ von $\lambda_{eff, Diffusion}(T_0)$ abweicht, um möglichst Hinweise über die Genauigkeit der Heizdrahtmethode bei Anwendung auf poröse Materialien verschiedener Extinktion sowie über das Problem der Bezugstemperatur und der damit verbundenen Heizleistungsabhängigkeit zu erhalten.

Da $\lambda_{eff, Diffusion}(T_0)$ sich auf die Anfangstemperatur T_0 bezieht und in einer Heizdrahtmessung nur Übertemperaturen vorliegen, muss die wahre Bezugstemperatur höher als die Anfangstemperatur sein. Da die effektive Wärmeleitfähigkeit mit der dritten Potenz der Temperatur zunimmt, muss die gemessene effektive Wärmeleitfähigkeit aufgrund der höheren wahren Bezugstemperatur größer als die des Diffusionsmodells sein, d.h.:

$$\lambda_{eff, Anstieg} > \lambda_{eff, Diffusion}(T_0) . \quad (5.10)$$

Für den Vergleich zwischen $\lambda_{eff, Anstieg}$ und $\lambda_{eff, Diffusion}(T_0)$ wird nachfolgend die prozentuale Abweichung

$$\frac{\lambda_{eff, Anstieg} - \lambda_{eff, Diffusion}(T_0)}{\lambda_{eff, Diffusion}(T_0)} \cdot 100\% \quad (5.11)$$

dargestellt, die positiv sein muss.

5.4.1.1 Zeitliche effektive Wärmeleitfähigkeit

Zunächst wird untersucht, wie die zeitliche effektive Wärmeleitfähigkeit $\lambda_{eff, Anstieg}(t)$, die nach dem Anstieg der Drahttemperatur im Zeitraum von 1. bis 600. Sekunde sekundengenau ermittelt wird, von der effektiven Wärmeleitfähigkeit nach dem Diffusionsmodell $\lambda_{eff, Diffusion}(T_0)$ abweicht. Berechnungen mit Extinktionskoeffizienten $E < 10^3 \text{ m}^{-1}$ liefern negative Abweichungen mit sehr großen absoluten Werten, was eine große Abweichung des Strahlungstransports von einem Diffusionsprozess bedeutet. Aus diesem Grund reicht es aus, Ergebnisse bei Extinktionskoeffizienten $E \geq 10^3 \text{ m}^{-1}$ zu diskutieren.

Abbildung 27 stellt die zeitliche prozentuale Abweichung nach Gleichung (5.11) bei Umgebungstemperatur $\vartheta_0 = 25\text{ }^\circ\text{C}$ und $E = 10^3\text{ m}^{-1}$ dar. Bei diesem Extinktionskoeffizienten sind noch negative Abweichungen zu beobachten, die eine Unterbestimmung der effektiven Wärmeleitfähigkeit der Messprobe bedeuten, was nach Gleichung (5.11) nicht möglich ist. Die negative Abweichung kann nur durch die Ungültigkeit der Lösung der idealen Linienquelle nach Gleichung (3.7) erklärt werden. Dies lässt sich durch folgendes Beispiel verdeutlichen:

Der Vergleich zwischen $\lambda_{eff, Anstieg}$ und $\lambda_{eff, Diffusion}(T_0)$ erfolgt durch die Gegenüberstellung

$$\begin{aligned} \lambda_{eff, Anstieg} & \stackrel{?}{=} \lambda_{eff, Diffusion}(T_0) \quad \text{oder} \\ \frac{\dot{Q}}{4\pi} \frac{\ln t_2 - \ln t_1}{T_2 - T_1} & \stackrel{?}{=} \lambda_c + \frac{16}{3} \frac{\sigma}{E} T_0^3. \end{aligned} \quad (5.12)$$

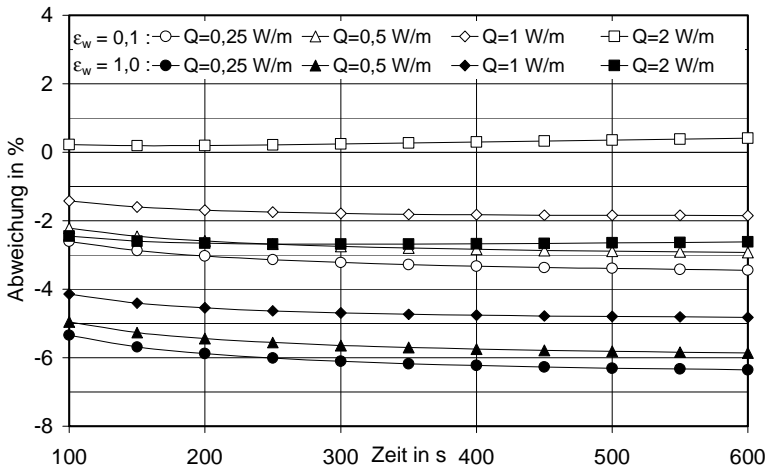


Abb. 27: Zeitliche Abweichung von $\lambda_{eff, Anstieg}$ gegenüber $\lambda_{eff, Diffusion}(T_0)$ bei $\vartheta_0 = 25\text{ }^\circ\text{C}$, $E = 10^3\text{ m}^{-1}$ und $\dot{Q} = 1\text{ W/m}$.

Wenn $E=0$ ist, geht $\lambda_{\text{eff, Diffusion}}(T_0) \rightarrow \infty$. Für die Gültigkeit der (5.12) müsste der Anstieg des logarithmisch zeitlichen Drahttemperaturverlaufes $(T_2 - T_1)/(\ln t_2 - \ln t_1) = 0$ sein, d.h. eine konstante Drahtübertemperatur, was praktisch nicht möglich ist. Wie Abbildungen 13 und 14 zeigen, haben die logarithmisch zeitlichen Drahttemperaturverläufe bei $E=0$ keinen Null-Anstieg. Gleichung (5.12) ist somit bei $E=0$ ungültig. Man erhält dadurch negative Abweichungen. Auch bei kleinen E -Werten ist $\lambda_{\text{eff, Diffusion}}(T_0)$ zu groß, so dass negative Abweichungen immer noch auftreten, wie in Abbildung 27 zu sehen ist. Das Problem ist schließlich auf die Nichterfüllung der Diffusionsbedingung zurückzuführen, da der Strahlungsprozess von einem Diffusionsprozess abweicht, insbesondere in der unmittelbaren Umgebung des Heizdrahtes, die den zeitlichen Anstieg der Drahttemperatur direkt beeinflusst. Bei großen Berandungsemissivitäten (z.B. $\varepsilon_w = 1$) findet am Draht ein starker Strahlungstransport statt, was zu einer stärkeren Abweichung des Strahlungstransports von einem Diffusionsprozess führt. Darum zeigt Abbildung 27 größere Abweichungen bei der großen Berandungsemissivität $\varepsilon_w = 1$. Durch Erhöhung der Heizleistung nimmt $\lambda_{\text{eff, Anstieg}}$ aufgrund der Proportionalität zur Heizleistung \dot{Q} zu (s. Gleichung (5.12)), so dass die negative Abweichung kompensiert wird und die absolute Abweichung abnimmt. Zufällig kann darum mit einer genügend großen Heizleistung der richtige Wert der effektiven Wärmeleitfähigkeit gemessen werden, was sowohl physikalisch als auch praktisch aber nicht vertretbar ist.

Wenn sich der Strahlungstransport mit zunehmendem Extinktionskoeffizienten E einem Diffusionsprozess annähert, nimmt dann die absolute Abweichung ab. Erst ab einem genügend großen Extinktionskoeffizienten tritt die Gültigkeit der Gleichung (5.12) ein, und die Anwendung der Lösung der idealen Linienquelle ist mit guter Genauigkeit erreicht. Tatsächlich ist für die Umgebungstemperatur $\vartheta_0 = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ erst ab ca. $E = 10^4 \text{ m}^{-1}$ nahezu keine negative Abweichung mehr zu beobachten, wie Abbildung 28 deutlich darstellt. Ab diesem E -Wert kann die Lösung der idealen Linienquelle zur Auswertung von Messdaten zur Ermittlung der effektiven Wärmeleitfähigkeit angewandt werden, oder anders ausgedrückt muss man feststellen, dass die Heizdrahtmethode bei Medien der Extinktion $E \geq 10^4 \text{ m}^{-1}$ bei der Umgebungstemperatur $\vartheta_0 = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ verwendet werden kann. Wie Abbildung 28 zeigt, ist der Einfluss der Berandungsemissivität ε_w bei dem so großen Extinktionskoeffizienten erheblich eingedämmt. Das deutet auf einen mehr lokalen Strahlungstransport am Draht hin.

Die zeitliche Änderung der Abweichung im betrachteten Zeitraum ist sehr gering. Die Verlaufform der zeitlichen Abnahme von $\lambda_{eff, Anstieg}$ ist auf die Langzeitnäherung der Lösung der idealen Linienquelle (Gleichung 3.6) zurückzuführen.

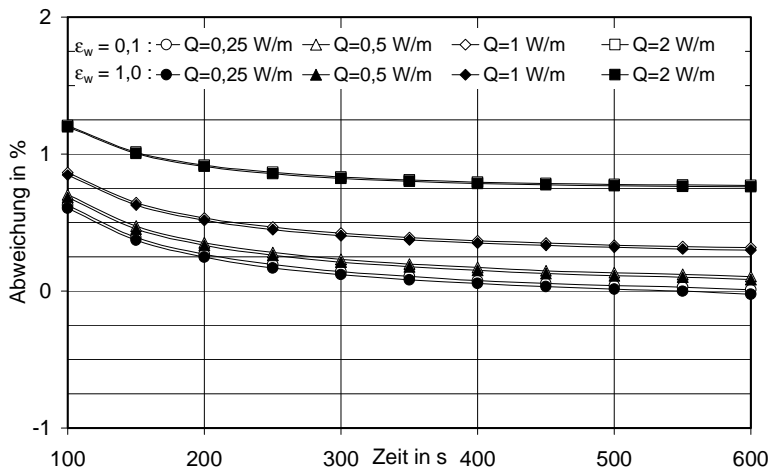


Abb. 28: Zeitliche Abweichung von $\lambda_{eff, Anstieg}$ gegenüber $\lambda_{eff, Diffusion}(T_0)$ bei $v_0 = 25 \text{ }^\circ\text{C}$, $E = 10^4 \text{ m}^{-1}$ und $\dot{Q} = 1 \text{ W/m}$.

5.4.1.2 Mittlere effektive Wärmeleitfähigkeit

Bis zu dieser Stelle wurde für die Ermittlung $\lambda_{eff, Anstieg}$ der Anstieg des logarithmisch zeitlichen Drahttemperaturverlaufes bei jeder Sekunde im Zeitraum von der 100. bis 600. Sekunde berechnet. In der Praxis verwendet man den Anstieg eines linearen Abschnittes des Drahttemperaturverlaufes, welcher bei einem Drahtradius $r_w = 0,25 \text{ mm}$ und bei Messung von Festkörpern etwa dem Abschnitt zwischen der 120. und 600. Sekunde entspricht. Für den praktischen Zweck wird im folgenden auch dieser mittlere Anstieg des genannten Zeitabschnittes

$$\frac{T_w(t = 600s) - T_w(t = 120s)}{\ln 600 - \ln 120}$$

verwendet. Da bei den nachfolgend untersuchten Fällen die Änderung des Anstieges im betrachteten Zeitabschnitt nicht mehr als 1% beträgt, ist die Verwendung des mittleren Anstieges gerechtfertigt.

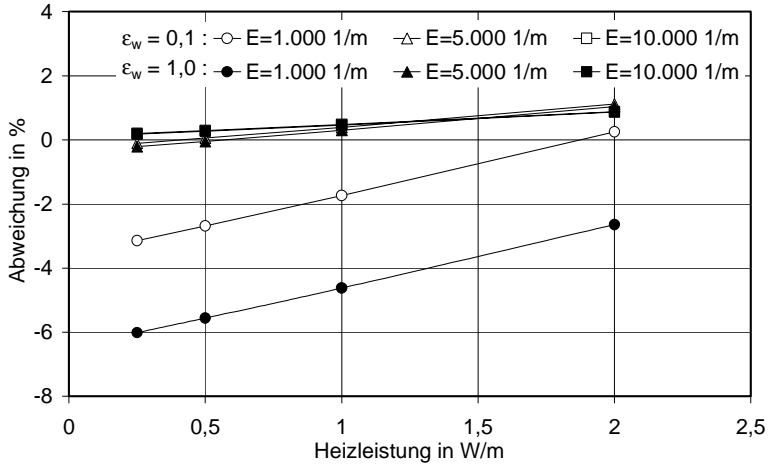


Abb. 29: Prozentuale Abweichung von $\lambda_{eff, Anstieg}$ gegenüber $\lambda_{eff, Diffusion}(T_0)$ in Abhängigkeit von der Heizleistung bei $\vartheta_0 = 25 \text{ }^\circ\text{C}$.

In Abbildung 29 ist die prozentuale Abweichung von $\lambda_{eff, Anstieg}$ gegenüber $\lambda_{eff, Diffusion}(T_0)$ in Abhängigkeit von der Heizleistung \dot{Q} bei Umgebungstemperatur $\vartheta_0 = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ aufgetragen. Auf den ersten Blick ist sofort die lineare Abhängigkeit der effektiven Wärmeleitfähigkeit $\lambda_{eff, Anstieg}$ von der Heizleistung \dot{Q} zu erkennen. Das bestätigt experimentelle Beobachtungen, z.B. in der Arbeit von [AKSEL'ROD, 1984]. Die Abweichung ist hierbei für drei unterschiedliche Extinktionskoeffizienten ($E = 10^3$, $5 \cdot 10^3$, und 10^4 m^{-1}) bei Variation der Berandungsemissivität ($\epsilon_w = 0,1$ und $1,0$) dargestellt. Hier ist nochmals eine grobe Unterbestimmung der effektiven Wärmeleitfähigkeit $\lambda_{eff, Anstieg}$ beim kleinen Extinktionskoeffizienten $E = 10^3 \text{ m}^{-1}$ zu beobachten, bei dem sich der große ϵ_w -Einfluss bemerkbar macht. Die Unterbestimmung und der ϵ_w -Einfluss schränken sich jedoch in optisch dickeren Medien (der größeren Extinktion) ein und verschwinden bei ca.

$E = 10^4 \text{ m}^{-1}$, was den Eintritt der Gültigkeit der Lösung der idealen Linienquelle bedeutet. Wie erwartet erhält man in diesem Fall durch Extrapolation der linearen Relation auf die Heizleistung $\dot{Q} = 0$ etwa den $\lambda_{\text{eff, Diffusion}}(T_0)$ -Wert, welcher der effektiven Wärmeleitfähigkeit mit der Anfangstemperatur T_0 als zugehöriger Bezugstemperatur entspricht. Diese Methode liefert jedoch bei kleineren Extinktionskoeffizienten zu niedrige effektive Wärmeleitfähigkeit, was zum Beispiel in Abbildung 29 bei $E = 10^3 \text{ m}^{-1}$ deutlich dargestellt ist.

Im Hochtemperaturbereich ist der Gültigkeitsbereich der Lösung der idealen Linienquelle auf noch höhere Extinktionskoeffizienten beschränkt. Dies wird verdeutlicht durch Simulationen bei den Umgebungstemperaturen $\vartheta_0 = 500 \text{ }^\circ\text{C}$ und $\vartheta_0 = 1.000 \text{ }^\circ\text{C}$. Während für $\vartheta_0 = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ die negative Abweichung von $\lambda_{\text{eff, Anstieg}}$ gegenüber $\lambda_{\text{eff, Diffusion}}(T_0)$ bei $E = 10^4 \text{ m}^{-1}$ nahezu verschwindet, verschiebt sich die Abweichung für $\vartheta_0 = 500 \text{ }^\circ\text{C}$ bzw. $\vartheta_0 = 1.000 \text{ }^\circ\text{C}$ erst bei ca. $E = 5 \cdot 10^3 \text{ m}^{-1}$ bzw. $E = 10^5 \text{ m}^{-1}$ in den positiven Bereich, wie Abbildungen 30 und 31 bestätigen. Im Hochtemperaturbereich ist der Strahlungstransport sehr intensiv, so dass er sich erst bei viel höheren Extinktionskoeffizienten einem Diffusionsprozess annähert. Die Anwendbarkeit der Heizdrahtmethode liegt deshalb im Hochtemperaturbereich bei optisch viel dickeren Medien. Auch im Hochtemperaturbereich kommt die lineare Abhängigkeit der effektiven Wärmeleitfähigkeit $\lambda_{\text{eff, Anstieg}}$ von der Heizleistung \dot{Q} vor.

Mit weiter zunehmendem Extinktionskoeffizienten wird der lineare Einfluss der Heizleistung kleiner. Geht $E \rightarrow \infty$, was dem Fall reiner Wärmeleitung entspricht, dann ist der Anstieg gleich 0. Das Medium hat nur noch die konstante temperaturunabhängige Wärmeleitfähigkeit durch reine Wärmeleitung λ_c .

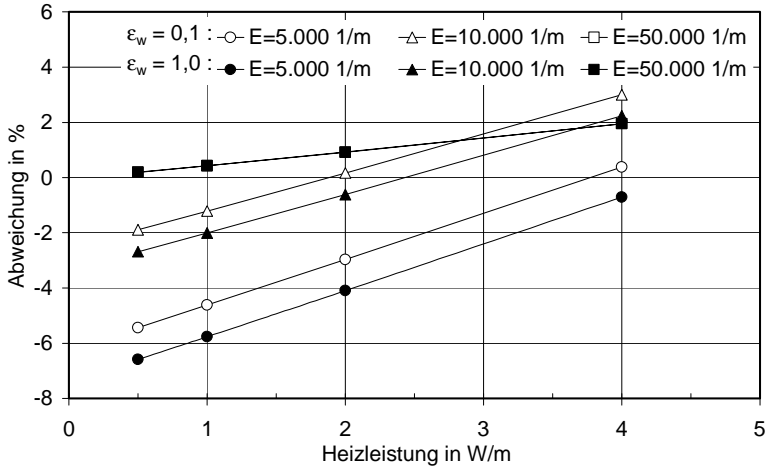


Abb. 30: Prozentuale Abweichung von $\lambda_{eff, Anstieg}$ gegenüber $\lambda_{eff, Diffusion}(T_0)$ in Abhängigkeit von der Heizleistung bei $\vartheta_0 = 500 \text{ }^\circ\text{C}$.

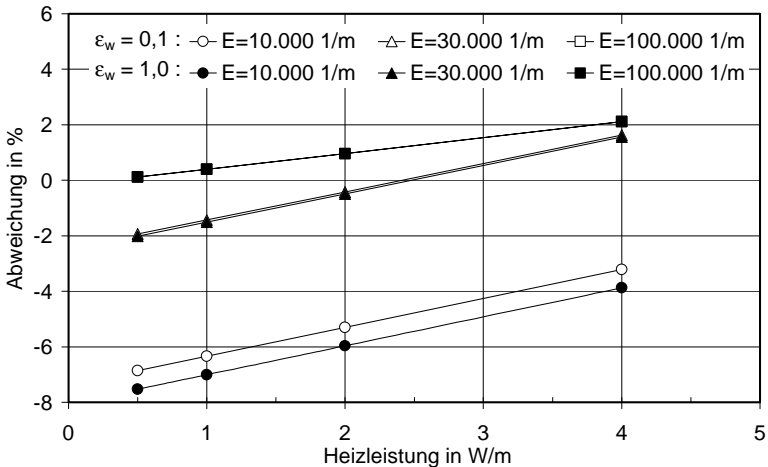


Abb. 31: Prozentuale Abweichung von $\lambda_{eff, Anstieg}$ gegenüber $\lambda_{eff, Diffusion}(T_0)$ in Abhängigkeit von der Heizleistung bei $\vartheta_0 = 1.000 \text{ }^\circ\text{C}$.

5.4.2 Mitteltemperatur als Bezugstemperatur

Die zweite Variante der Bezugstemperatur bezieht sich auf die praktische Anwendung des Heizdrahtverfahrens, wobei man anstelle der Anfangstemperatur T_0 eine Mitteltemperatur T_{mittel} als die der gemessenen effektiven Wärmeleitfähigkeit zugehörige Bezugstemperatur verwendet, welche als Mittelwert der Temperaturen am Anfang und Ende eines Ablesevorgangs ermittelt wird. Werden z.B. Drahttemperaturen in der 120. und 600. Sekunde zur Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit verwendet, dann lautet die Mitteltemperatur wie folgt:

$$T_{mittel} = \frac{T_w(t = 120s) + T_w(t = 600s)}{2} . \quad (5.13)$$

Eine solche Mitteltemperatur ist eigentlich physikalisch nicht begründet. Deshalb wird in diesem Abschnitt untersucht, ob eine derartige Mitteltemperatur als Bezugstemperatur praktisch vertretbar ist.

Zu diesem Zweck wird die Mitteltemperatur T_{mittel} zur Berechnung der effektiven Wärmeleitfähigkeit nach dem Diffusionsmodell $\lambda_{eff, Diffusion}(T_{mittel})$ verwendet, wobei für die mittlere Strahlungstemperatur T_r in Gleichung (5.9) T_{mittel} eingesetzt wird. Mit $\lambda_{eff, Diffusion}(T_{mittel})$ wird nun jeweils $\lambda_{eff, Anstieg}$ verglichen, wofür die prozentuale Abweichung

$$\frac{\lambda_{eff, Anstieg} - \lambda_{eff, Diffusion}(T_{mittel})}{\lambda_{eff, Diffusion}(T_{mittel})} \cdot 100\% \quad (5.14)$$

grafisch angezeigt wird.

Wie Abbildung 32 deutlich darstellt, besteht für die Umgebungstemperatur $\vartheta_0 = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ eine sehr gute Übereinstimmung zwischen $\lambda_{eff, Anstieg}$ und $\lambda_{eff, Diffusion}(T_{mittel})$ bei dem Extinktionskoeffizienten $E = 10^4 \text{ m}^{-1}$, der zum Gültigkeitsbereich der Lösung der idealen Linienquelle bei $\vartheta_0 = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ gehört, wie bereits im letzten Abschnitt festgestellt wurde. Bei allen Einstellungen der Heizleistung und der damit verbundenen Drahtüber-temperatur scheint die Mitteltemperatur T_{mittel} als Bezugstemperatur geeignet zu sein. Für kleinere Extinktionskoeffizienten E besteht nach wie

vor eine Unterbestimmung der effektiven Wärmeleitfähigkeit $\lambda_{eff, Anstieg}$. Die Abweichung zur wahren Wärmeleitfähigkeit nimmt mit abnehmendem E zu.

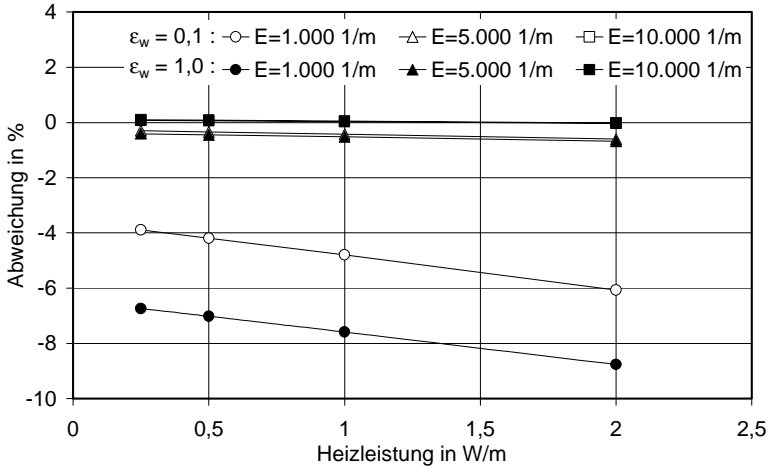


Abb. 32: Prozentuale Abweichung von $\lambda_{eff, Anstieg}$ gegenüber $\lambda_{eff, Diffusion}(T_{mittel})$ in Abhängigkeit von der Heizleistung bei $\vartheta_0 = 25 \text{ }^\circ\text{C}$.

Der gleiche Effekt kommt auch im Hochtemperaturbereich vor. Das bestätigen die Abbildungen 33 und 34 für die Umgebungstemperaturen $\vartheta_0 = 500 \text{ }^\circ\text{C}$ und $\vartheta_0 = 1000 \text{ }^\circ\text{C}$.

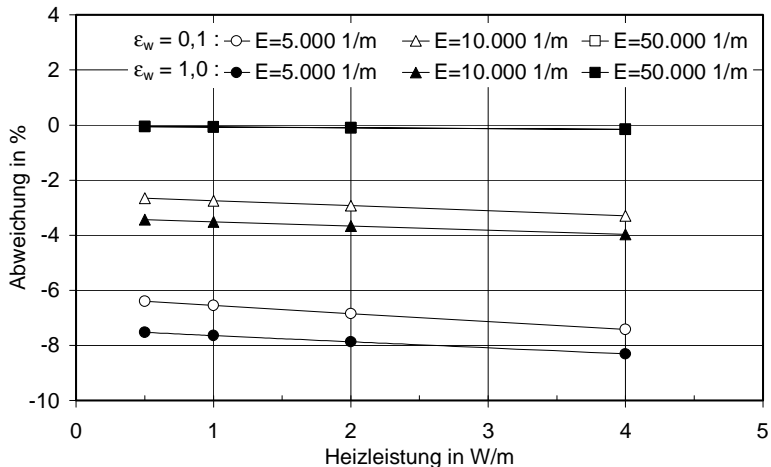


Abb. 33: Prozentuale Abweichung von $\lambda_{eff, Anstieg}$ gegenüber

$\lambda_{eff, Diffusion}(T_{mittel})$ in Abhängigkeit von der Heizleistung bei $\vartheta_0 = 500$ °C.

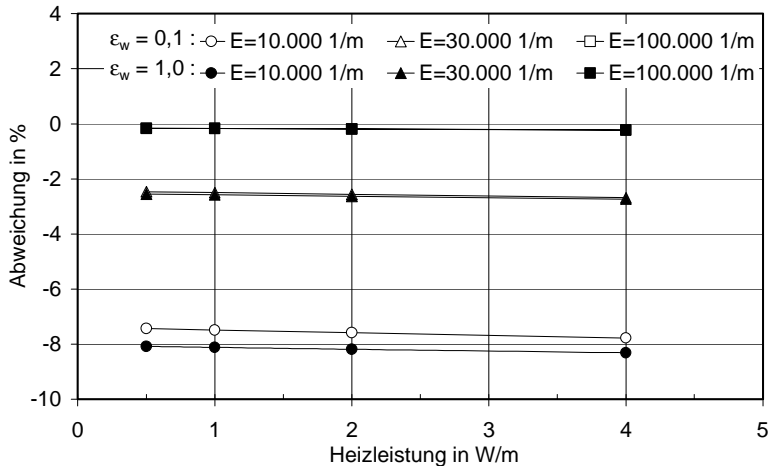


Abb. 34: Prozentuale Abweichung von $\lambda_{eff, Anstieg}$ gegenüber

$\lambda_{eff, Diffusion}(T_{mittel})$ in Abhängigkeit von der Heizleistung bei $\vartheta_0 = 1.000$ °C.

5.4.3 Schlussfolgerung

Für die drei betrachteten Umgebungstemperaturen ($\vartheta_0 = 25\text{ }^\circ\text{C}$, $500\text{ }^\circ\text{C}$ und $1.000\text{ }^\circ\text{C}$) wurde jeweils eine Untergrenze für den Extinktionskoeffizienten ermittelt, in dem die Gültigkeit der Lösung der idealen Linienquelle besteht. Eine Unterschreitung der jeweiligen Untergrenze (bei konstanter Umgebungstemperatur) sowie eine Erhöhung der Umgebungstemperatur (bei konstanter Extinktion) haben eine Unterbestimmung der effektiven Wärmeleitfähigkeit zur Folge. Eine solche Unterbestimmung der Wärmeleitfähigkeit wird auch bei [KINGERY, 1961] beobachtet, als der Verfasser die gemessenen Wärmeleitfähigkeiten von amorphem Silizium aus instationären Heizdrahtmessungen [WRAY, 1959] und stationären Plattenmessungen [LEE, 1960] miteinander vergleicht (s. Abbildung A.2 im Anhang).

Die praktische Anwendbarkeit der Heizdrahtmethode kann sich jedoch auf etwas kleinere Extinktionskoeffizienten ausdehnen, wenn man sich auf den allgemeinen Genauigkeitsbereich der Heizdrahtmethode bezieht. Bei praktischen Heizdrahtmessungen liegt die Drahtübertemperatur in der 600. Sekunde zwischen 18 K und 40 K. Solche Drahtübertemperaturen entsprechen einem Heizleistungsbereich von $1\text{ W/m} \leq \dot{Q} \leq 2\text{ W/m}$. Wie die Abbildungen 29 bis 34 zeigen, kann man bei Einstellung des genannten Heizleistungsbereiches die Heizdrahtmethode beispielweise für $\vartheta_0 = 25\text{ }^\circ\text{C}$ bei $E \geq 5 \cdot 10^3\text{ m}^{-1}$, für $\vartheta_0 = 500\text{ }^\circ\text{C}$ bei $E \geq 10^4\text{ m}^{-1}$ und für $\vartheta_0 = 1.000\text{ }^\circ\text{C}$ bei $E \geq 3 \cdot 10^4\text{ m}^{-1}$ anwenden und dabei entweder die Anfangs- oder Mitteltemperatur als Bezugstemperatur verwenden, wenn dabei eine Ungenauigkeit noch innerhalb $\pm 5\%$ (typisch für die Heizdrahtmethode) akzeptabel wird.

Die Beurteilung der Genauigkeit von Heizdrahtmessungen an porösen Materialien benötigt daher Kenntnisse der Strahlungseigenschaft der Messprobe, nämlich des Extinktionskoeffizienten.

5.5 Einfluss der Streuung

Bisher wurde angenommen, dass der Strahlungstransport im Medium ausschließlich durch Absorption und Reemission erfolgt. In diesem Abschnitt wird ein absorbierendes, emittierendes und anisotrop streuendes Medium untersucht, um einen kurzen Einblick in den Einfluss der Streuung auf Heizdrahtmessungen zu vermitteln. Zur Beschreibung des anisotropen Streuverhaltens wird hierbei eine linear-anisotrope Streuung verwendet, bei der die gestreute Intensität I_s vom Kosinus des Streuwinkels μ_s linear abhängig ist. Die entsprechende Phasenfunktion ist im Abschnitt 4.3.3, Gleichung (4.32) angegeben. Ob Strahlung mehr rückwärts oder vorwärts gestreut wird, kann mit dem Asymmetriefaktor g oder dem Anisotropiefaktor a_1 durch Setzen seines Vorzeichens angepasst werden (s. Abschnitt 2.3). In der folgenden Simulation wird mit der Streualbedo $\omega_0 = 0,5$ gerechnet, die bedeutet, dass Strahlung zu 50% absorbiert und zu 50% gestreut wird. Eine höhere Albedo ist für poröse Dämmstoffe unrealistisch. Zum Variieren der Anisotropie der Streuung gehen drei Werte des Anisotropiefaktors a_1 in die Berechnung ein:

- $a_1 = -1$ heißt vorwiegende Rückwärtsstreuung,
- $a_1 = 0$ entspricht isotroper Streuung und
- $a_1 = +1$ bedeutet vorwiegende Vorwärtsstreuung.

Zur Verdeutlichung des Einflusses der Streuung auf die Drahtübertemperatur werden S_4 -Berechnungen für die Umgebungstemperatur $\vartheta_0 = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ bei Variation des Extinktionskoeffizienten E und der Berandungsemissivität ε_w durchgeführt. Die Drahtübertemperatur des streuenden Falls wird mit der des nichtstreuenden Mediums des gleichen Extinktionskoeffizienten verglichen. Die prozentuale Abweichung

$$\frac{\Delta T_{w,\omega_0=0,5} - \Delta T_{w,\omega_0=0}}{\Delta T_{w,\omega_0=0}} \cdot 100\% \quad (5.15)$$

ist in den Abbildungen 35a, b und c grafisch dargestellt.

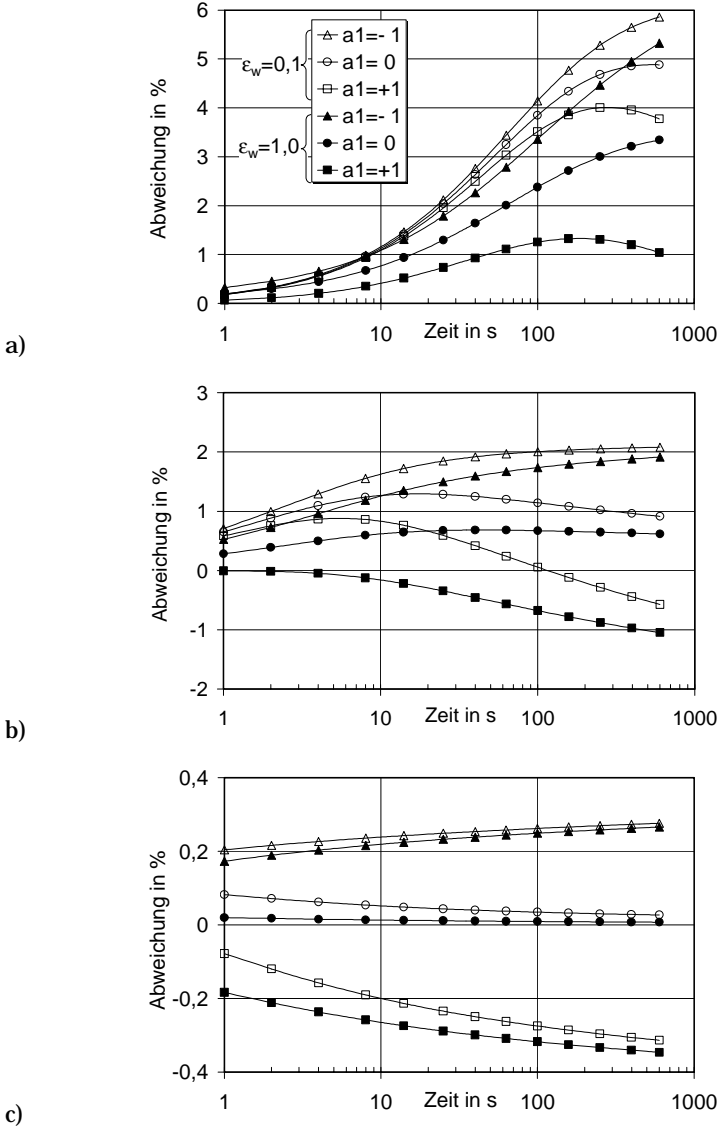


Abb. 35: Einfluss der Streuung auf die Drahtübertemperatur bei $v_0 = 25 \text{ }^\circ\text{C}$, $\dot{Q} = 1 \text{ W/m}$ und a) $E = 10^2 \text{ m}^{-1}$; b) $E = 10^3 \text{ m}^{-1}$; c) $E = 10^4 \text{ m}^{-1}$.

Absorption/Reemission und isotrope Streuung ($a_1 = 0$) sind gleichwertige Prozesse, da absorbierte Strahlung wieder isotrop reemittiert wird. Während die Intensität nach der Streuung sich nicht verringert, nimmt die Intensität nach dem Vorgang Absorption/Reemission aufgrund der Erhöhung der inneren Energie des absorbierenden Volumenelements ab. Rückwärts gestreute Strahlung ist deshalb größer als rückwärts reemittierte Strahlung, so dass es bei der isotropen Streuung zu einer Verringerung des Nettostrahlungsstromes und dadurch zur Erhöhung der Drahtübertemperatur kommt, wie die Abbildungen 35a, b und c mit den Kurven der Kreise die positiven Abweichungen deutlich widerspiegeln.

Im Vergleich zur isotropen Streuung wird bei der vorwiegenden Rückwärtsstreuung ($a_1 = -1$) noch mehr Strahlung in die negative Richtung zurück gestreut. Daher verringert sich der Nettostrahlungsstrom noch mehr und dadurch nimmt die Drahttemperatur stärker zu. In diesem Fall liegen deshalb die Abweichungen (Kurven mit den Dreiecken) oberhalb den der isotropen Streuung.

Ob im Fall vorwiegender Vorwärtsstreuung ($a_1 = +1$) die rückwärts gestreute Strahlung stärker oder schwächer als die rückwärts reemittierte Strahlung ist, hängt von der Temperatur des emittierenden Volumenelements ab. Bei kleinen Extinktionskoeffizienten kann Strahlung tiefer eindringen, bevor sie gestreut und absorbiert wird. Das Volumenelement, das die Strahlung vor Absorption und Streuung erreicht, hat aufgrund des steilen Temperaturgradienten bei instationären Heizdrahtmessungen eine niedrige Übertemperatur, so dass seine reemittierte Strahlung im Vergleich zur von ihm gestreuten Strahlung kleiner ist. Aus diesem Grund zeigt die vorwiegende Vorwärtsstreuung beim Extinktionskoeffizienten $E = 100 \text{ m}^{-1}$ noch eine Erhöhung der Drahtübertemperatur im Vergleich zum nichtstreuenden Medium (siehe die mit Quadraten versehenen Kurven in Abbildung 35a). Mit zunehmendem Extinktionskoeffizienten E (und dadurch abnehmender mittlerer freier Weglänge $l_m = 1/E$) hat das durch die Strahlung vor Absorption und Streuung erreichte Volumenelement eine größere Übertemperatur, so dass seine reemittierte Strahlung immer größer wird. Mit genügend großer Übertemperatur kann im Fall vorwiegender Vorwärtsstreuung die vom Volumenelement rückwärts reemittierte Strahlung stärker als die rückwärts gestreute Strahlung sein, und das bedeutet, dass bei der vorwiegenden Vorwärtsstreuung eine Abnahme der Drahtübertemperatur zustande kommt, wie im Fall des Extinktionskoeffizienten $E = 10^4 \text{ m}^{-1}$ in Abbildung 35c (Kurven mit Quadraten) deutlich erkennbar ist. Der Fall $E = 10^3 \text{ m}^{-1}$ stellt dabei eine Übergangsphase dar (Abbildung 35b).

Im allgemeinen zeigt eine größere Berandungsemissivität ε_w einen höheren Strahlungsenergieverlust des Drahtes und dadurch eine kleinere Drahttemperatur. Deshalb liegen die Kurven für $\varepsilon_w = 1$ (der gefüllten Symbole) unterhalb den entsprechenden Kurven für $\varepsilon_w = 0,1$ (der ungefüllten Symbole).

Der Einfluss der Streuung auf die Drahtübertemperatur verringert sich jedoch mit zunehmendem Extinktionskoeffizienten E , da die Differenz zwischen der gestreuten und reemittierten Strahlung aufgrund der abnehmenden Temperaturdifferenz entsprechend der kleinen werdenden mittleren freien Weglänge l_m abnimmt. Im großen Extinktionsbereich ist die Abweichung sehr gering (s. Abbildung 35c). An dieser Stelle wird die Hauptfrage untersucht, wie die Streuung die gemessene effektive Wärmeleitfähigkeit beeinflusst.

Im letzten Abschnitt wurde festgestellt, dass das Heizdrahtverfahren im Bereich großer Extinktionskoeffizienten angewandt werden soll. In diesem Bereich zeigt die Streuung jedoch einen geringen Einfluss auf die Drahtübertemperatur. Deshalb wird erwartet, dass bei Anwendbarkeit des Heizdrahtverfahrens keine bedeutende Änderung der effektiven Wärmeleitfähigkeit durch Streuung auftritt. Für diese Frage wird bei der Umgebungstemperatur $\vartheta_0 = 25\text{ }^\circ\text{C}$ bzw. $500\text{ }^\circ\text{C}$ mit dem Extinktionskoeffizienten $E = 10^4\text{ m}^{-1}$ bzw. $5 \cdot 10^4\text{ m}^{-1}$ untersucht, wo die Lösung der idealen Linienquelle gültig ist. Die nach dem Anstieg des logarithmisch zeitlichen Drahttemperaturverlaufes (zwischen der 120. und 600. Sekunde) ausgewertete effektive Wärmeleitfähigkeit $\lambda_{eff, Anstieg}$ wird mit der nach dem Diffusionsmodell berechneten effektiven Wärmeleitfähigkeit $\lambda_{eff, Diffusion}(T_{mittel})$ (auf der Basis der Mitteltemperatur) verglichen und die prozentuale Abweichung (nach Gleichung (5.14)) angegeben. Bei der Anwendung des Diffusionsmodells ist jedoch der effektive Extinktionskoeffizienten E^* erforderlich, welcher die anisotrope Streuung berücksichtigt (s. Abschnitt 2.3).

Tabelle 2 gibt die prozentualen Abweichungen von $\lambda_{eff, Anstieg}$ gegenüber $\lambda_{eff, Diffusion}(T_{mittel})$ an. Im Fall ohne Streuung ($\omega_0 = 0$) wurde bereits im letzten Abschnitt eine hohe Genauigkeit der ausgewerteten effektiven Wärmeleitfähigkeit festgestellt, wenn für die Umgebungstemperatur $\vartheta_0 = 25\text{ }^\circ\text{C}$ bzw. $\vartheta_0 = 500\text{ }^\circ\text{C}$ Medien der Extinktion ab $E = 10^4\text{ m}^{-1}$ bzw. $E = 5 \cdot 10^4\text{ m}^{-1}$ vermessen werden. Die geringen Abweichungen der gemess-

senen Wärmeleitfähigkeit von dem wahren Wert sind in den grauen Spalten der Tabelle 2 angegeben. Die Abweichungen für den Fall mit Streuung der Albedo $\omega_0 = 0,5$ sind auch sehr gering. Beim Vergleich ist zu erkennen, dass isotrope Streuung und vorwiegende Rückwärtsstreuung zu einer leichten Erhöhung der Abweichung führt, Vorwärtsstreuung aber zu einer leichten Verringerung. Größere Abweichungen bei kleineren Extinktionskoeffizienten sind im Bezug auf die Betrachtungen der Abbildungen 35a, b und c zu erwarten.

Zusammenfassend kann zum Einfluss der Streuung die Schlussfolgerung gezogen werden, dass im großen Extinktionsbereich, wo das Heizdrahtverfahren mit guter Genauigkeit angewandt werden kann, der Einfluss der Streuung auf Messergebnisse vernachlässigbar klein ist.

Tab. 2: Prozentuale Abweichung von $\lambda_{\text{eff, Anstieg}}$ gegenüber $\lambda_{\text{eff, Diffusion}}(T_{\text{mittel}})$ im nichtstreuenden ($\omega_0 = 0$) und anisotrop streuenden Medium ($\omega_0 = 0,5$).

	ε_w	$\omega_0 = 0$	$\omega_0 = 0,5$		
			$a_1 = -1$	$a_1 = 0$	$a_1 = +1$
$\vartheta_0 = 25 \text{ }^\circ\text{C}, \quad E = 10^4 \text{ m}^{-1}$	0,1	0,050	0,101	0,052	-0,018
	1,0	0,033	0,084	0,033	-0,040
$\vartheta_0 = 500 \text{ }^\circ\text{C}, \quad E = 5 \cdot 10^4 \text{ m}^{-1}$	0,1	-0,064	0,010	-0,050	-0,134
	1,0	-0,070	0,003	-0,058	-0,143

5.6 Einfluss des thermischen Kontaktwiderstandes

5.6.1 Einführung

Bis hierher wurde in der vorliegenden Arbeit angenommen, dass zwischen dem Draht und der Messprobe ein idealer Kontakt vorliegt. Bei realen Heizdrahtmessungen an porösen Materialien, die generell raue Oberflächen haben, ist der Kontakt der Messprobe zum Heizdraht meist unvollständig. Zwischen Draht und Probe kommen oft kleine Hohlräume vor, die je nach Beschaffenheit der Probenoberfläche unterschiedliche Dimension und Häufigkeit aufweisen und dadurch die Messwerte beeinflussen. In vielen Fällen vermeidet man das Problem, indem man die Hohlräume mit Pulver des Materials füllt. Diese Lösung hat aber den Nachteil, dass an der Kontaktstelle ein anderer Stoff als den der Messprobe auftritt. In anderen Fällen kann diese Lösung nicht verwendet werden, zum Beispiel bei der Vermessung von Fasermaterialien, bei denen man mit Anwesenheit von kleinen Hohlräumen oder eines Luftspaltes an der Kontaktstelle messen muss. Im Fall ohne Luftspalt besteht zwischen dem Draht und dem inneren Probenrand keine Temperaturdifferenz. Zwischen dem Draht und dem inneren Probenrand erfolgt deshalb kein Strahlungsaustausch. Im Fall mit einem Luftspalt liegt eine Temperaturdifferenz zwischen dem Draht und dem inneren Probenrand vor, die durch Wärmeleitung im Luftspalt hervorgerufen wird. Es entsteht darum ein direkter Strahlungsaustausch zwischen beiden Oberflächen (unter der Annahme, dass die Luft für Wärmestrahlung transparent ist), welcher von der Temperatur und der Strahlungseigenschaft der Oberflächen, des Drahtes und des inneren Probenrandes, abhängig ist. In diesem Zusammenhang bestehen deshalb zwei zusätzlich zu untersuchende Einflussfaktoren auf den Wärmetransport:

- Die Luftspaltdicke d_l beeinflusst die Temperatur des Drahtes T_w und des inneren Probenrandes T_m .
- Die Strahlungstransmissivität τ_m des inneren Probenrandes steuert den direkten Strahlungsaustausch zwischen ihm und dem Draht.

Eine experimentelle Untersuchung im Zusammenhang mit der Transmissivität der Probenoberfläche findet man in der Arbeit von [NAGASHIMA, 1987]. Der Verfasser führt Heizdrahtmessungen eines Materials bei unterschiedlichen Temperaturen bis zu 1000 °C durch, wobei er durch unterschiedliche Beschichtungen des inneren Probenrandes deren Transmissivität variiert. Seine experimentellen Ergebnisse zeigen eine systematische Differenz der gemessenen Wärmeleitfähigkeit bei Variation der Temperatur. Generell

wird bei Proben mit höherer Transmissivität des inneren Probenrandes eine höhere Wärmeleitfähigkeit gemessen. Diese Differenz nimmt mit zunehmender Temperatur zu.

Während Strahlung an den vom Nagashima beschichteten Probenoberflächen reflektiert und absorbiert wird, kann Strahlung an einer unbeschichteten Oberfläche eines strahlungsdurchlässigen porösen Probenmediums neben Reflektion je nach der Extinktion tiefer in die Probe hinein dringen kann, bevor sie absorbiert wird. Dieses Problem entspricht realen Heizdrahtmessungen an porösen Materialien und wird in diesem Abschnitt durch die numerische Simulation theoretisch untersucht.

5.6.2 Lösungsmethode

Das betrachtete Problem ist in Abbildung 36 dargestellt. Hierbei werden nur absorbierende und emittierende Medien untersucht, Streuung bleibt dabei außer Betrachtung. Zwischen dem Heizdraht und einem absorbierenden und emittierenden Medium befindet sich ein Luftspalt der Dicke $d_l = r_m - r_w$. Zur Vereinfachung werden folgende Annahmen getroffen:

- Luft sei für Wärmestrahlung transparent.
- Konvektion innerhalb des Luftspaltes sei vernachlässigt.
- Zwischen Luft und den Oberflächen (dem Draht und dem inneren Probenrand) trete kein konvektiver Wärmeübergang auf. In der Luft erfolge nur Wärmeleitung.
- Der innere Probenrand reflektiere Strahlung diffus.
- Andere Annahmen des Problems ohne Luftspalt bleiben hierbei erhalten.

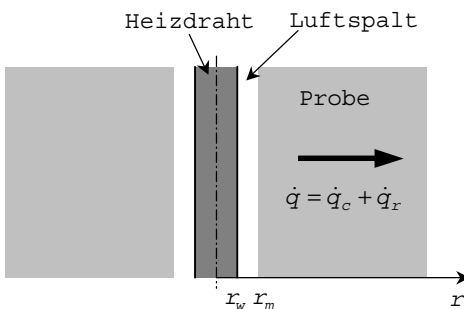


Abb. 36: Durch den Luftspalt zwischen dem Draht und der Probe hervorgerufener thermischer Kontaktwiderstand bei Heizdrahtmessungen.

Vom Draht bis zum Außenrand der Probe erfolgt der Wärmetransport zunächst durch Wärmeleitung innerhalb des Luftspaltes sowie den direkten Strahlungsaustausch zwischen dem Draht und dem Innenrand der Probe und dann durch die gekoppelte Strahlung/Leitung innerhalb des Probenmediums.

Bei diesem Problem existieren gleichzeitig zwei Medien, durch die Energie vom Draht bis zum Außenrand der Probe transportiert wird. Es sind deshalb zwei Differentialgleichungen für den Energietransport und eine Strahlungstransportgleichung für das Probenmedium zu lösen. Für den Luftspalt gilt die Energiegleichung:

$$(\rho c_p)_l \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_l \cdot \nabla^2 T, \quad (r_w \leq r \leq r_m), \quad (5.16)$$

mit der Randbedingung

$$t \geq 0, r = r_w : \quad \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{\dot{Q}}{2\pi r_w \lambda_l} + \frac{\dot{q}_r(r_w)}{\lambda_l}, \quad (5.17)$$

und für das Medium gilt

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_c \nabla^2 T - \nabla \cdot \vec{q}_r, \quad (r_m \leq r \leq r_a), \quad (5.18)$$

mit der Randbedingung

$$t \geq 0, r = r_a : \quad T(r_a) = T_0, \quad (5.19)$$

wobei der Index "l" für Luft steht. An der Grenzfläche $r = r_m$ erhält man die dritte Randbedingung durch Energiebilanzierung:

$$t \geq 0, r = r_m : \quad -\lambda_l \frac{\partial T}{\partial r} = -\lambda_c \frac{\partial T}{\partial r}, \quad (5.20)$$

welche die beiden Energiegleichungen (5.16) und (5.18) verbindet. Wie beim Problem ohne Luftspalt lautet die Anfangsbedingung des betrachteten Systems:

$$t \leq 0 : \quad T(r) = T_0. \quad (5.21)$$

Zur Lösung der Strahlungstransportgleichung wird die S_N -Approximation verwendet, die im Abschnitt 4.3.3 beschrieben wurde. Die einfachere differentielle Approximation wird aufgrund ihrer Einschränkung unterlassen. Die Anwendung der S_N -Approximation erfolgt nur für das Probenmedium im radialen Bereich $r_m \leq r \leq r_a$. Da es sich am inneren Probenrand $r = r_m$ um eine andere Randbedingung als die des Problems ohne Spalt handelt, wie Abbildung 37 zeigt, muss im folgenden die neue Randbedingung abgeleitet werden.

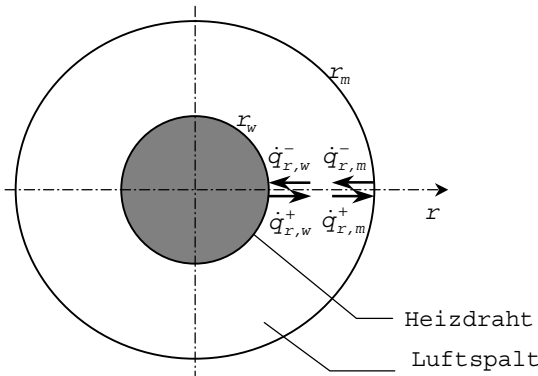


Abb. 37: Strahlungsstromdichten im Luftspalt.

Die Bestrahlung der Drahtoberfläche errechnet sich nach

$$A_w \dot{q}_{r,w}^- = F_{w,m} A_w \dot{q}_{r,m}^-, \quad (5.22)$$

wobei A_w die Drahtumfangsfläche und $F_{w,m}=1$ der Sichtfaktor von der Drahtoberfläche zur inneren Probenoberfläche ist. Daraus ergibt sich

$$\dot{q}_{r,w}^- = \dot{q}_{r,m}^-. \quad (5.23)$$

Die vom Draht ausgehende Strahlung $\dot{q}_{r,w}^+$ setzt sich aus der emittierten Strahlung und dem reflektierten Anteil der Bestrahlung zusammen

$$\dot{q}_{r,w}^+ = \varepsilon_w \pi I_{b,w} + (1 - \varepsilon_w) \dot{q}_{r,w}^- = \varepsilon_w \pi I_{b,w} + (1 - \varepsilon_w) \dot{q}_{r,m}^-. \quad (5.24)$$

Die Bestrahlung der inneren Probenoberfläche von der Luftseite lässt sich ermitteln durch

$$A_m \dot{q}_{r,m}^+ = F_{m,w} A_m \dot{q}_{r,w}^+ + F_{m,m} A_m \dot{q}_{r,m}^-, \quad (5.25)$$

wobei A_m die Umfangsfläche des inneren Probenrandes, $F_{m,w} = r_w / r_m$ den Sichtfaktor von der inneren Proben- zur Drahtoberfläche und $F_{m,m} = 1 - (r_w / r_m)$ den Sichtfaktor von der inneren Probenoberfläche zu sich selbst bezeichnen. Durch Einsetzen von $\dot{q}_{r,w}^+$ aus Gleichung (5.24) in Gleichung (5.25) ergibt sich

$$\dot{q}_{r,m}^+ = \frac{r_w}{r_m} \varepsilon_w \pi I_{b,w} + \left(1 - \frac{r_w}{r_m} \varepsilon_w \right) \dot{q}_{r,m}^-, \quad (5.26)$$

wobei die vom inneren Probenrand abgehende Strahlung $\dot{q}_{r,m}^-$ aus der von der Probeseite abgegebenen Strahlung und dem reflektierten Anteil der Strahlung besteht, die von der Luftseite am Innenrand ankommt:

$$\dot{q}_{r,m}^- = \sum_i W_i'' |\mu_i| I_i + (1 - \tau_m) \dot{q}_{r,m}^+, \quad (\mu_i < 0) \quad (5.27)$$

Von der an der inneren Probenoberfläche ankommenden Strahlungsstromdichte $\dot{q}_{r,m}^+$ nimmt nur der transmittierte Anteil $\tau_m \cdot \dot{q}_{r,m}^+$ am Strahlungstransport innerhalb der Probe teil. Da der Draht diffus angenommen wird, ist die Strahlungsintensität am Ort $r = r_m$ in positiver Richtung isotrop verteilt. Durch Kombinieren der Gleichungen (5.26) und (5.27) erhält man schließlich die Randbedingung der Strahlungstransportgleichung am Ort

$$r = r_m : \quad I_i = \frac{\frac{r_w}{r_m} \varepsilon_w I_{b,w} + \frac{1 - \frac{r_w}{r_m} \varepsilon_w}{\pi} \sum_i W_i'' |\mu_i| I_i}{1 + \frac{r_w}{r_m} \frac{\varepsilon_w}{\tau_m} - \frac{r_w}{r_m} \varepsilon_w}, \quad (\mu_i > 0, \mu_i < 0) \quad (5.28)$$

Gleichung (5.28) unterscheidet sich nicht von der Gleichung (4.25) des Problems ohne Luftspalt, wenn der Luftspalt und die Reflektion am inneren Probenrand verschwinden, d.h. $r_m = r_w$ und $\tau_m = 1$.

Da der Strahlungsstrom innerhalb des Luftspaltes konstant bleibt, kann die Strahlungsstromdichte $\dot{q}_r(r_w)$ in der Randbedingung (5.17) anhand der diskreten Strahlungsintensitäten am Ort $r = r_m$ bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
 \dot{q}_r(r_w) &= \frac{r_m}{r_w} \dot{q}_{r,m} \\
 &= \frac{r_m}{r_w} (\dot{q}_{r,m}^+ - \dot{q}_{r,m}^-) \\
 &= \frac{r_m}{r_w} \sum_i^{N_c} w_i' \mu_i I_i.
 \end{aligned} \tag{5.29}$$

Die Strahlungstransportgleichung ist dann lösbar, wenn die Temperaturverteilung bekannt ist. Diese lässt sich mittels der beiden Energiegleichungen (5.16) und (5.18) bestimmen, welche wiederum auf der Basis des bekannten Strahlungsfeldes gelöst werden. Das System ist darum iterativ zu lösen.

5.6.3 Numerische Ergebnisse

Der Unterschied dieses Problems gegenüber dem Fall ohne Spalt ist die Anwesenheit eines Luftspaltes zwischen dem Draht und der Messprobe. Für die numerische Simulation erfolgt die Diskretisierung bei diesem Problem analog zum letzten Fall. Im Luftspaltbereich ($r_w \leq r \leq r_m$) wird die Wärmeleitungsgleichung (5.16) und im Mediumbereich ($r_m \leq r \leq r_a$) die Energiegleichung der gekoppelten Strahlung/Leitung (5.18) analog zum Problem ohne Spalt differenziert. Die Kombination der beiden so entstandenen Differenzgleichungen der Gleichungen (5.16) und (5.18) ergibt ein Tridiagonalsystem für den gesamten radialen Bereich ($r_w \leq r \leq r_a$), das auf analoge Weise gelöst werden kann. Die Strahlungstransportgleichung des Mediumbereiches ($r_m \leq r \leq r_a$) wird auch analog behandelt. Insgesamt ergeben sich zwei Tridiagonalsysteme (eines mit der Temperatur als orts- und zeitabhängige und ein anderes mit der Intensität als ortsabhängige Funktion), welche simultan und iterativ lösbar sind. Die numerische Simulation erfolgt wieder mittels der IFD-Methode.

Um zu untersuchen, wie die Spaltdicke d_j und die Transmissivität τ_m der inneren Probenoberfläche die Messergebnisse einer Heizdrahtmessung verändern, werden in der Simulation d_j und τ_m variiert. Ihre Werte sind in

Tabelle 3 ausgeführt. Da die meisten realen porösen Dämmstoffe keinen großen Reflektionsgrad zeigen, werden hierbei mit Transmissivitäten im Bereich $0,5 \leq \tau_m \leq 1,0$ untersucht. Weil eine Abhängigkeit des Strahlungsaustausches innerhalb des Luftspaltes zwischen dem Draht und der Probe von der Berandungsemissivität und der Drahttemperatur vorauszusehen ist, wird sie durch Variation der Berandungsemissivität ε_w und der Heizleistung \dot{Q} untersucht.

Tab. 3: Zur *Simulation des thermischen Kontaktwiderstandes verwendete Parameter.*

d_l	[μm]	2	10	100	
τ_m	[-]	1,0	0,9	0,8	0,5
ε_w	[-]	0,1	1,0		
\dot{Q}	[W/m]	0,25	0,5	1	2

Die Untersuchung beschränkt sich nur auf den Extinktionsbereich, für den im Fall ohne Luftspalt die Lösung der idealen Linienquelle anwendbar ist, wie im Fall ohne Luftspalt bereits festgestellt wurde:

- $\vartheta_0 = 25 \text{ }^\circ\text{C}$: $E \geq 10^4 \text{ m}^{-1}$
- $\vartheta_0 = 500 \text{ }^\circ\text{C}$: $E \geq 5 \cdot 10^4 \text{ m}^{-1}$

Andere Stoffwerte des Probenmediums ($\lambda_c, \rho c_p$) bleiben erhalten. Die zur Simulation benötigten Stoffwerte von Luft, die Wärmeleitfähigkeit λ_l und die volumetrische Wärmekapazität $(\rho c_p)_l$, werden je nach der Umgebungstemperatur den in der Literatur tabellierten Daten entnommen:

Tab. 4: Zur *Simulation des thermischen Kontaktwiderstandes verwendete Stoffwerte von Luft.*

		$\vartheta_0 = 25 \text{ }^\circ\text{C}$	$\vartheta_0 = 500 \text{ }^\circ\text{C}$
λ_l	[W·m ⁻¹ ·K]	0,026	0,0556
$(\rho c_p)_l$	[J·m ⁻³ ·K ⁻¹]	1196	492

Die Veränderung der Messergebnisse durch den Einfluss von d_l und τ_m wird anhand der prozentualen Abweichung der nach dem zeitlichen Temperaturanstieg des Drahtes ermittelten Wärmeleitfähigkeit von der nach dem Diffusionsmodell berechneten Wärmeleitfähigkeit ausgedrückt, wobei als mittlere Strahlungstemperatur die Mitteltemperatur verwendet wird (s. Gleichung 5.14).

Da die Änderung der prozentualen Abweichung von $\lambda_{eff, Anstieg}$ gegenüber $\lambda_{eff, Diffusion}(T_{mittel})$ keinen charakteristischen Trend bei Variation der Einflussparameter ($d_l, \tau_m, \varepsilon_w, \dot{Q}$) zeigt, sind die prozentualen Abweichungen bei $\vartheta_0 = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ und $E = 10^4 \text{ m}^{-1}$ in Tabelle 5 angegeben.

Tab. 5: Durch thermischen Kontaktwiderstand verursachte Abweichungen (%) von $\lambda_{eff, Anstieg}$ gegenüber $\lambda_{eff, Diffusion}(T_{mittel})$ bei $\vartheta_0 = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ und $E = 10^4 \text{ m}^{-1}$ in Abhängigkeit von der Luftspaltdicke d_l , der Transmissivität τ_m der Probenoberfläche, der Heizleistung \dot{Q} und der Berandungsemissivität ε_w . $\varepsilon_w = 0,1$ und $\varepsilon_w = 1,0$ (fettgedruckt).

d_l [μm]	τ_m	\dot{Q} [W/m]							
		0,25		0,5		1		2	
2	0,5	5,73	-51,22	0,90	-30,74	-0,03	-11,90	-0,14	3,23
	0,8	0,10	-17,52	0,06	1,26	0,02	3,86	-0,05	-0,23
	0,9	0,09	3,54	0,07	1,26	0,04	-0,06	-0,03	-0,16
	1,0	0,10	0,08	0,09	0,07	0,05	0,04	-0,02	-0,02
10	0,5	6,99	-50,85	0,74	-30,11	-0,03	-10,94	-0,15	4,56
	0,8	0,12	-16,42	0,08	2,62	0,04	1,61	-0,04	-0,28
	0,9	0,11	4,95	0,10	0,87	0,06	-0,06	-0,02	-0,17
	1,0	0,13	0,10	0,11	0,09	0,08	0,06	0,00	0,00
100	0,5	12,14	-44,96	0,53	-21,04	0,09	0,34	-0,07	5,59
	0,8	0,39	-2,54	0,36	10,13	0,30	0,20	0,18	-0,38
	0,9	0,42	11,84	0,40	0,35	0,34	0,10	0,23	0,01
	1,0	0,45	0,43	0,43	0,42	0,38	0,41	0,27	0,38

Aus diesen Ergebnissen können jedoch folgende Merkmale beobachtet werden:

- Im allgemeinen ist die Abweichung bei der niedrigen Berandungsemissivität $\varepsilon_w = 0,1$ sehr gering, bei welcher der Strahlungsaustausch zwischen dem Draht und der Probe stark unterdrückt wird. Erst bei kleinen Transmissivitäten der Probeninnenfläche, z.B. bei $\tau_m = 0,5$, wird die Änderung sensibler.
- Bei der Berandungsemissivität $\varepsilon_w = 1$, welche die maximale Strahlungsemission des Drahtes bedeutet, schwankt die Abweichung sowohl im negativen als auch im positiven Bereich sehr stark, insbesondere bei niedrigen Transmissivitäten der Probenoberfläche τ_m , bei denen die vom Draht stark emittierte Strahlung erheblich zum Draht zurück reflektiert wird.
- Die Abweichung bei der Transmissivität $\tau_m = 1$, wo keine Reflektion an der Probeninnenfläche geschieht, unterscheidet sich unwesentlich von der Abweichung im Fall ohne Luftspalt (vergl. mit Abbildung 32). Ohne Reflektion dringt die gesamte Strahlung vom Draht in das Medium hinein, wo sie durch Absorption und Reemission weiter übertragen wird. Dies findet auch im Fall ohne Luftspalt statt. Der einzige Unterschied zwischen beiden Fällen liegt darin, dass bei Anwesenheit des Luftspaltes eine geringfügig kleine Temperaturdifferenz zwischen dem Draht und der Probeoberfläche vorliegt, welche im anderen Fall aufgrund des idealen Kontakts nicht vorhanden ist. Wie im Fall ohne Luftspalt wird bei diesem Problem die Strahlung auf dem Transportweg vom Draht in das Medium durch die Probenoberfläche nicht gestört, so dass keine wesentliche Änderung der Abweichung in der effektiven Wärmeleitfähigkeit auftritt. Bei Transmissivitäten $\tau_m < 1$ stellt die innere Probenoberfläche eine Störung des Strahlungstransports dar, was eine große Veränderung der Messergebnisse hervorruft.
- Aus den Kenntnissen, die aus den drei letzten Punkten gewonnen wurden, kann an dieser Stelle die Schlussfolgerung gezogen werden, dass das Verhalten des Strahlungsaustauschprozesses innerhalb des Luftspaltes den entscheidenden Faktor darstellt, in welchem Maß Messergebnisse verändert werden.
- Im Fall der Transmissivität $\tau_m = 1$ gilt die Regel, dass die Abweichung mit zunehmender Spaltdicke zunimmt. Die Zunahme ist jedoch sehr

gering. Eine größere Spaltdicke bedeutet eine höhere Temperaturdifferenz zwischen dem Draht und der inneren Probenoberfläche und dadurch einen größeren Strahlungsstrom, der den Spalt passiert. Insgesamt ergibt sich ein kleinerer thermischer Widerstand und damit eine größere effektive Wärmeleitfähigkeit, wie die Werte in Tabelle 5 deutlich bestätigen. Diese Regel ist jedoch nicht gültig, wenn an der inneren Probenoberfläche Strahlung reflektiert wird, d.h. bei $\tau_m < 1$.

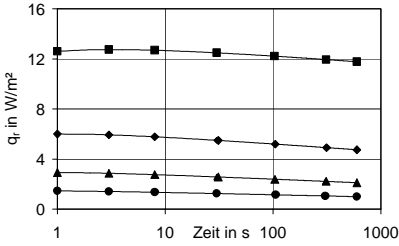
Da die effektive Wärmeleitfähigkeit sich bei der Transmissivität $\tau_m = 1$ mit hoher Genauigkeit (d.h. mit sehr geringeren Abweichungen von $\lambda_{eff, Anstieg}$ gegenüber $\lambda_{eff, Diffusion}(T_{mittel})$) ermitteln lässt, wird diese Konfiguration als Bezug genommen, mit dem andere Konfigurationen der Transmissivitäten $\tau_m < 1$ verglichen werden. Prinzipiell bedeutet die Reflektion an der inneren Probenoberfläche eine Abnahme des Strahlungstransports und damit eine Zunahme des thermischen Widerstandes, was letztendlich zu einer Abnahme der gemessenen effektiven Wärmeleitfähigkeit führen muss. Dies ist nach den Angaben in Tabelle 5 jedoch nicht bei allen Transmissivitäten $\tau_m < 1$ der Fall, wenn die Abweichungen bei $\tau_m < 1$ den Abweichungen bei $\tau_m = 1$ zum Vergleich gegenübergestellt werden. Dieser Prinzip gilt eigentlich nur im stationären Zustand. Bei einer instationären Heizdrahtmessung hängt die gemessene effektive Wärmeleitfähigkeit vom zeitlichen Anstieg der Drahttemperatur ab. Da der Strahlungstransport innerhalb des Luftspaltes von der Temperaturdifferenz abhängig ist, die sich zeitlich ändert, variiert sich der Strahlungstransport mit der Zeit. Schließlich ist die Zunahme des thermischen Widerstandes durch die Strahlungsreflektion im instationären Fall nicht allein entscheidend, ob die gemessene effektive Wärmeleitfähigkeit ab oder zunimmt, sondern eher das zeitliche Verhalten dieser Zunahme, oder genauer ausgedrückt, das zeitliche Verhalten des Strahlungsaustausches zwischen dem Draht und der inneren Probenoberfläche. Zur Verdeutlichung des zeitlichen Verhaltens des Strahlungsaustausches innerhalb des Luftspaltes sind die zeitabhängigen Strahlungsstromdichten am Draht in Abbildung 38 dargestellt, die bei $\vartheta_0 = 25 \text{ }^\circ\text{C}$, $E = 10^4 \text{ m}^{-1}$, $\varepsilon_w = 1$ und $d_l = 2 \text{ }\mu\text{m}$ berechnet wurden. Bei $\varepsilon_w = 0,1$ zeigen die Strahlungsstromdichten gleiche Verläufe, jedoch mit etwa 9-fach kleineren Beträgen.

Wie Abbildung 38a den Fall der Transmissivität $\tau_m = 1$ zeigt, ändert sich die Strahlungsstromdichte am Draht gering mit der Zeit. Solche Verläufe wurden auch im Fall ohne Spalt bei ansonsten gleichen Parametern beobachtet. Im ganzen berechneten Zeitbereich ist die Strahlungsstrom-

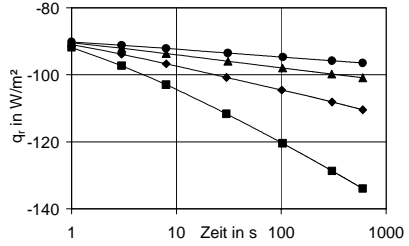
dichte positiv. Bei $\tau_m \leq 0,9$, wie Abbildungen 38b, c und d zeigen, hat die Strahlungsstromdichte negative Werte. Eine Anwendung des Diffusionsmodells in diesem Fall würde eine negative Strahlungsleitfähigkeit ergeben, was physikalisch unmöglich ist. Damit scheitert in diesem Fall die Auswertung der Heizdrahtmessung mittels der Lösung der idealen Linienquelle.

Die negative Strahlungsstromdichte entsteht durch die Reflektion der Strahlung an der inneren Probenoberfläche. Zur Erklärung der negativen Strahlungsstromdichte am Draht wird zunächst Abbildung 38a betrachtet, bei der keine Reflektion an der Probeninnenfläche stattfindet ($\tau_m = 1$). In diesem Fall bildet sich innerhalb des Probenmediums aufgrund des von innen nach außen gebildeten Temperaturgefälles lediglich eine Verteilung der positiven Strahlungsstromdichte. Die vom Draht emittierte Strahlung wird von den betroffenen Volumenelementen des Mediums absorbiert und wieder in alle Raumrichtungen isotrop reemittiert. Die Verteilung der Strahlungsstromdichte bleibt damit positiv. Es ist bekannt, dass die Strahlungsemission der vierten Potenz der Temperatur proportional ist. Bereits bei der Raumtemperatur ist die emittierte Strahlung des Mediums relativ groß. Das heißt, die Komponenten der Strahlungsstromdichte in positiver Richtung \dot{q}_r^+ und in negativer Richtung \dot{q}_r^- sind groß. Die beiden unterscheiden sich im Betrag jedoch nicht wesentlich voneinander, so dass die Nettostrahlungsstromdichte $\dot{q}_r = \dot{q}_r^+ - \dot{q}_r^-$ insgesamt dem Betrag der Komponenten gegenüber sehr klein ist. Wie Abbildung 38a anzeigt, liegt der Betrag der Nettostrahlungsstromdichte in diesem Fall unterhalb 13 W/m (während sich die Komponenten im Wertebereich 450 ÷ 720 W/m variieren). Durch Reflektion an der inneren Probenoberfläche wird der Komponente der negativen Richtung \dot{q}_r^- ein $(1 - \tau_m)$ -tel der vom Draht aus ankommenden Strahlungsenergie zugeschrieben, so dass in diesem Fall $\dot{q}_r^+ < \dot{q}_r^-$ ist und die negative Nettostrahlungsstromdichte auftritt.

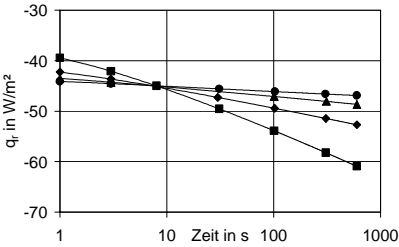
Eine höhere Heizleistung bedeutet eine größere Drahttemperatur und damit eine stärkere Strahlungsemission des Drahtes. Deswegen nimmt in kleinen Zeiten die Strahlungsstromdichte mit zunehmender Heizleistung zu, wie in Abbildung 38a zu erkennen ist. In großen Zeiten emittiert ein großer Mediumbereich intensiv, so dass die Strahlungsstromdichte am Draht mit der Zeit abnimmt (aufgrund der Strahlungseffekte).



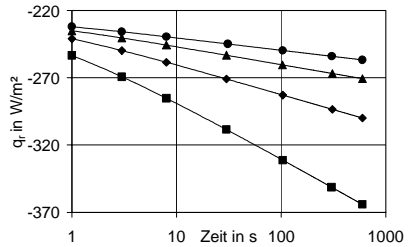
a)



c)



b)



d)

Abb. 38: Zeitabhängige Strahlungsstromdichte am Draht ($r = r_w$) bei $\vartheta_0 = 25^\circ\text{C}$, $E = 10^4 \text{ m}^{-1}$, $d_f = 2 \mu\text{m}$, $\varepsilon_w = 1,0$ und

$\dot{Q} =$	●	0,25 W/m	$\tau_m =$	a)	1,0
	▲	0,5 W/m		b)	0,9
	◆	1 W/m		c)	0,8
	■	2 W/m		d)	0,5

Bei $\tau_m = 0,9$ gilt in kleinen Zeiten noch die Regel, dass die Strahlungsstromdichte mit zunehmender Heizleistung zu nimmt (Abbildung 38b). In großen Zeiten ergibt sich der umgekehrte Effekt, da eine stärkere Strahlungsemission vom Draht bei einer höheren Heizleistung in diesem Fall eine höhere von der inneren Probenoberfläche reflektierte Strahlung bedeutet und der kurzschlussartige Strahlungseffekt zunimmt. Dadurch nimmt der Betrag der negativen Strahlungsstromdichte mit der Zeit zu.

Bei kleineren Transmissivitäten (z.B. $\tau_m = 0,8$ in Abbildung 38c und $\tau_m = 0,5$ in Abbildung 38d) tritt bereits in kleinen Zeiten eine erheblich hohe reflektierte Strahlung aufgrund des großen Reflektionsgrades auf, dass in

diesen Fällen die Zunahme der Heizleistung eine Abnahme der Strahlungsstromdichte bedeutet, wie die Abbildungen verdeutlichen.

Da die zeitliche Änderung der Strahlungsstromdichte von vielen zeitabhängigen Faktoren (der Drahttemperatur, der an der inneren Probenoberfläche reflektierten Strahlung und dem kurzschlussartigen Strahlungseffekt) bestimmt wird, die auch voneinander abhängen, ist eine Feststellung des Charakters des zeitlichen Verhaltens der Strahlungsstromdichte in Abhängigkeit von den untersuchten Parametern (d_l , τ_m , ε_w , \dot{Q}) bei Transmissivitäten $\tau_m < 1$ nicht möglich. Aus diesem Grund ist die Schwankung der Abweichungen bei kleinen Transmissivitäten nicht zu charakterisieren.

Die Schwankung der Abweichung von $\lambda_{eff, Anstieg}$ gegenüber $\lambda_{eff, Diffusion}(T_{mittel})$ nimmt im Hochtemperaturbereich zu, z.B. bei $v_0 = 500 \text{ }^\circ\text{C}$, wo der Strahlungstransport noch intensiver erfolgt, wie Tabelle 6 veranschaulicht. Ansonsten ändern sich die anderen Erscheinungen nicht, die bei $v_0 = 25 \text{ }^\circ\text{C}$ beobachtet wurden.

Tab. 6: Durch thermischen Kontaktwiderstand verursachte Abweichungen (%) von $\lambda_{eff, Anstieg}$ gegenüber $\lambda_{eff, Diffusion}(T_{mittel})$ bei $v_0 = 500 \text{ }^\circ\text{C}$ und $E = 5 \cdot 10^4 \text{ m}^{-1}$ in Abhängigkeit von der Luftspaltdicke d_l , der Transmissivität τ_m der Probenoberfläche, der Heizleistung \dot{Q} und der Berandungsemissivität ε_w , $\varepsilon_w = 0,1$ und $\varepsilon_w = 1,0$ (fettgedruckt).

d_l [μm]	τ_m	\dot{Q} [W/m]							
		0,25		0,5		1		2	
2	0,8	146,32	-51,34	0,72	-5,81	-0,13	77,11	-0,20	212,77
	0,9	0,30	4,11	-0,07	94,86	-0,10	207,10	-0,14	0,57
	1,0	-0,04	-0,04	-0,04	-0,05	-0,06	-0,06	-0,09	-0,09
10	0,8	54,63	-42,35	0,52	11,43	-0,15	109,00	-0,21	144,84
	0,9	0,17	22,21	-0,06	126,10	-0,09	73,69	-0,13	0,20
	1,0	-0,01	-0,02	-0,02	-0,02	-0,03	-0,04	-0,06	-0,06
100	0,8	0,76	25,40	0,00	133,93	-0,07	6,51	-0,12	-2,25
	0,9	0,24	153,19	0,19	7,04	0,17	-0,68	0,15	-1,11
	1,0	0,36	0,35	0,36	0,36	0,36	0,39	0,37	0,45

6 Zusammenfassung

Die instationäre Heizdrahtmethode ist ein Standardverfahren zur Ermittlung der Wärmeleitfähigkeit von Gasen, Flüssigkeiten und Feststoffen. Hierbei wird mittels eines Heizdrahtes innerhalb der Messprobe eine Linienquelle erzeugt. Je nach der Wärmeleitfähigkeit der Messprobe ergeben sich unterschiedliche zeitliche Temperaturanstiege des Heizdrahtes, aus denen man die Wärmeleitfähigkeit der Messprobe ermitteln kann.

Bei Feststoffen wurde das Verfahren eigentlich für homogene opake Materialien entwickelt, bei denen der Wärmetransport lediglich durch den diffusiven Leitungsprozess erfolgt. In der Praxis wird das Heizdrahtverfahren jedoch sehr häufig auf poröse Materialien angewandt, in denen neben dem Leitungsvorgang die Strahlung zusätzlich zur gesamten Wärmeübertragung in der Messprobe beiträgt. Dieser Beitrag zum gesamten Wärmetransport nimmt mit zunehmender Porosität und steigender Temperatur sehr stark zu. Abhängig von den Strahlungseigenschaften der Messprobe kann der Strahlungstransport als ein diffusiver oder nichtdiffusiver Vorgang angesehen werden. Im ersten Fall ist die Bestimmung der effektiven Wärmeleitfähigkeit eines porösen Medium mittels des Heizdrahtverfahrens möglich. Im letzten Fall kann die Anwendung des Heizdrahtverfahrens versagen. Die Unterscheidung beider Fälle beim instationären Heizdrahtverfahren ist bisher nicht geklärt. Darum beobachtet man in der praktischen Anwendung des Heizdrahtverfahrens auf poröse Materialien sehr häufig große Abweichungen der Wärmeleitfähigkeit beim Vergleich zwischen dem instationären Heizdrahtverfahren und stationären Messverfahren.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde deshalb der Wärmetransport bei instationären Heizdrahtmessungen durch numerische Simulation theoretisch untersucht. Ausgehend von einem grauen Medium, welches durch zwei koaxiale, in axialer Richtung unendlich ausgedehnte Zylinder (Heizdraht und äußere Berandung) begrenzt ist, wurde dabei das gekoppelte Integral-Differentialgleichungssystem für den Energie- und Strahlungstransport mittels der bewährten Finite-Differenzen-Methode gelöst. Dabei kann der Strahlungsstrom in der Probe durch die stationäre Strahlungstransportgleichung beschrieben werden. Zur Lösung der Strahlungstransportgleichung wurden zwei Näherungsmethoden herangezogen, die simple differentielle Approximation und die Methode der diskreten Ordinaten (S_N -Approximation).

Beide Methoden wurden sowohl im Grenzfall der Transparenz ($E=0$), der ein Wärmeleitungsproblem darstellt und dessen Exaktlösung einfach zu erhalten ist, als auch im Grenzfall der reinen Wärmeleitung ($E \rightarrow \infty$), bei der die analytische Lösung vorhanden ist, getestet. Dabei lieferte die diffe-

rentielle Approximation, die nur im optisch dicken Medien anwendbar ist, im Wärmeleitungsfall erwartungsgemäß genaue Ergebnisse. Die Methode der diskreten Ordinaten arbeitet sowohl im transparenten als auch im opaken Fall genau, so dass dies auch im ganzen Bereich $0 \leq E \leq \infty$ zu erwarten ist. Der Vergleich beider Methoden bei Variation des Extinktionskoeffizienten zeigt erwartungsgemäß eine abnehmende Abweichung ihrer Ergebnisse mit zunehmendem Extinktionskoeffizienten. Bereits bei diesem Vergleich kann der Bereich des Extinktionskoeffizienten, in dem die Lösung der idealen Linienquelle der Heizdrahtmethode gültig ist, vorausgesehen werden. Um eine Übersicht über den Effekt sowie das *diffusive* Verhalten der Strahlung im ganzen Bereich $0 \leq E \leq \infty$ zu erhalten, wurde in der vorliegenden Arbeit durchgehend die Methode der diskreten Ordinaten angewandt.

Die Untersuchung konzentriert sich auf Strahlungseffekte bei Heizdrahtmessungen an porösen Dämmstoffen. Deshalb wurde mit einer bestimmten konstanten Wärmeleitfähigkeit durch reine Wärmeleitung λ_c und einer bestimmten konstanten volumetrischen Wärmekapazität ρc_p simuliert. Eine Variation der beiden Parameter wurde vorgenommen, dabei war jedoch keine wesentliche Änderung im Ergebnis (hinsichtlich der Gültigkeitsbereiche der Extinktion) zu beobachten.

Im Hinblick auf Strahlungseffekte bei Heizdrahtmessungen an porösen strahlungsdurchlässigen Medien wurde anhand der Simulationsergebnisse festgestellt, dass das Auswertungsverfahren der Heizdrahtmethode nur im Bereich großer Extinktionskoeffizienten angewandt werden darf, in dem der Strahlungstransport diffusiv erfolgt. Die Grenze verschiebt sich zu größeren Extinktionskoeffizienten, wenn die Heizdrahtmessung bei höheren Umgebungstemperaturen durchgeführt wird. Je nach der Umgebungstemperatur liegt der Gültigkeitsbereich der Extinktion zum Beispiel bei

- $E \geq 10^4 m^{-1}$ für $\vartheta_0 = 25 \text{ }^\circ\text{C}$,
- $E \geq 5 \cdot 10^4 m^{-1}$ für $\vartheta_0 = 500 \text{ }^\circ\text{C}$,
- $E \geq 10^5 m^{-1}$ für $\vartheta_0 = 1.000 \text{ }^\circ\text{C}$.

Im jeweils genannten Extinktionsbereich zeigt die Emissivität des Drahtes ε_w keinen Einfluss auf die Drahttemperatur, so dass die Messwerte nicht von der Messanordnung abhängen. Die in diesem Fall aus dem zeitlichen Drahttemperaturverlauf ermittelte effektive Wärmeleitfähigkeit stellt eine materialspezifische temperaturabhängige Größe dar und setzt sich additiv aus Wärmeleitfähigkeit durch reine Wärmeleitung und Strahlungsleitfähig-

keit zusammen. Bei Unterschreitung der Untergrenze des jeweiligen Extinktionsbereiches ist mit einer Unterbestimmung der effektiven Wärmeleitfähigkeit zu rechnen. Mit abnehmendem Extinktionskoeffizienten nimmt die Unterbestimmung zu, der Einfluss der Berandungsemissivität wächst und der Strahlungstransport weicht immer mehr von einem diffusiven Prozess ab.

Außerdem wurde auch festgestellt, dass tatsächlich ein linearer Zusammenhang zwischen der im Draht eingekoppelten Heizleistung und der gemessenen effektiven Wärmeleitfähigkeit existiert. Mit Hilfe dieses Zusammenhangs ist es nach den Simulationsergebnissen möglich, die effektive Wärmeleitfähigkeit mit der Umgebungstemperatur als Bezugstemperatur mit guter Genauigkeit zu extrapolieren. Die Verwendung der mittleren Temperatur als Bezugstemperatur für die gemessene effektive Wärmeleitfähigkeit, die aus der Anfangs- und Endtemperatur eines Datenablesevorgangs gemittelt wird (in der Praxis liegt dieser Vorgang bei Vermessung von Feststoffen zwischen der zweiten und zehnten Minute), kann auch mit guter Genauigkeit akzeptiert werden. Diese beiden Verfahren gelten jedoch nur in den Gültigkeitsbereichen der Extinktion.

In den oben genannten Extinktionsbereichen ist der Einfluss der Streuung auf den zeitlichen Temperaturanstieg des Drahtes nach den Simulationsergebnissen vernachlässigbar klein, so dass die Abweichung der gemessenen von der tatsächlichen effektiven Wärmeleitfähigkeit unbedeutend ist.

In einem weiteren Teil der vorliegenden Arbeit wurde neben dem Problem der gekoppelten Strahlung/Leitung zusätzlich der thermische Kontaktwiderstand untersucht, der durch das Vorhandensein eines Luftspaltes zwischen dem Heizdraht und der Messprobe auftritt, was bei Vermessung von porösen Materialien nicht immer vermieden werden kann. Dabei wurde angenommen, dass die Luft in diesem Spalt für Wärmestrahlung vollkommen durchlässig ist und der konvektive Wärmeübergang vernachlässigt werden kann. Da es zu einem direkten Strahlungsaustausch zwischen Draht- und Probenoberfläche kommt, spielen die Strahlungseigenschaften der Oberflächen (Draht und Probe) sowie die Temperaturdifferenz, die von der Spaltdicke abhängt, eine wichtige Rolle im Strahlungsaustauschprozess innerhalb des Spaltes. Die numerische Simulation bei Variation der beiden in diesem Fall zusätzlich auftretenden Parameter, der Spaltdicke und der Transmissivität der inneren Probenoberfläche, ergab, dass keine wesentliche Verfälschung von Messwerten der effektiven Wärmeleitfähigkeit der Probe entsteht, solange die Probenoberfläche Strahlung nicht reflektiert. Im anderen Fall existiert innerhalb des Spaltes eine negative Strahlungsstromdichte, so dass die Anwendung des Diffusionsmodells im Grunde genommen nicht zulässig ist. Nach den Simulationsergebnissen ändert sich in diesem

Fall die Abweichung der gemessenen von der tatsächlichen effektiven Wärmeleitfähigkeit sehr sensibel bei Variation der Heizleistung, der Berandungsemissivität und der Umgebungstemperatur. Im allgemeinen sollten möglichst blanke Drähte geringer Emissivität verwendet und der Reflektionsgrad der Probeoberfläche beispielsweise durch Beschichtung reduziert werden, um die Genauigkeit der Messwerte garantieren.

Durch die numerische Simulation ist es damit gelungen, die Strahlungseffekte bei der Heizdrahtmessung an porösen Materialien zu erklären, die möglicherweise Abweichungen der gemessenen von der tatsächlichen effektiven Wärmeleitfähigkeit hervorrufen, wie sie bereits vielfach beobachtet und veröffentlicht wurden. Da eine analytische Lösung der gekoppelten Strahlung/Leitung nicht möglich ist, steht kein spezielles Auswertungsverfahren für die Klasse von strahlungsdurchlässigen Materialien zur Verfügung. Die Anwendung des klassischen Auswertungsverfahrens der Heizdrahtmethode, das sich auf die Lösung der idealen Linienquelle bezieht, erfordert deshalb die Kenntnis der Strahlungseigenschaften der Messprobe, um die Genauigkeit der Messung beurteilen zu können. Auch die Reduzierung des thermischen Kontaktwiderstandes zwischen dem Draht und der Messprobe ist für die Genauigkeit von Heizdrahtmessungen an porösen Materialien von Bedeutung. Zukünftige Arbeiten könnten sich mit der Untersuchung von Proben mit wellenlängenabhängiger Extinktion und des dynamischen Verfahrens der Heizdrahtmethode beschäftigen.

Symbolverzeichnis

Lateinische Symbole:

A	m^2	Fläche
D	m	Probendicke
E	m^{-1}	Extinktionskoeffizient
E^*	m^{-1}	effektiver Extinktionskoeffizient
$E_1(x)$	–	Exponentialintegral
$F_{i,j}$	–	Sichtfaktor
G	W m^{-2}	Winkelintegral einfallender Strahlungsintensität
I	$\text{W m}^{-2} \text{sr}^{-1}$	Strahlungsintensität
I_b	$\text{W m}^{-2} \text{sr}^{-1}$	Schwarzkörperintensität $= \sigma T^4 / \pi$
$J_{0,1}(x)$	–	Besselfunktion
Kn	–	Knudsenzahl
M	–	Anzahl der diskreten Ordinaten der S_N -Approximation
N	–	Ordnung der S_N -Approximation
\dot{Q}	W m^{-1}	längenbezogene Heizleistung
R	$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$	Gaskonstante
T	K	Temperatur
$Y_{0,1}(x)$	–	Besselfunktion
a	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$	Temperaturleitfähigkeit
a_1	–	Anisotropiefaktor der Streuungsphasenfunktion
c_v	$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$	spezifische Wärmekapazität bei konstantem Volumen
c_p	$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$	spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck
d_p	m	Porengröße
d_l	–	Luftspaltdicke
$f(\Lambda, T)$	–	Gewichtungsfunktion
g	–	Asymmetriefaktor
k_a	m^{-1}	Absorptionskoeffizient
k_s	m^{-1}	Streuungskoeffizient
l	m	mittlere freie Weglänge von Teilchen
l_f	m	mittlere freie Weglänge der Phononen
l_g	m	mittlere freie Weglänge der Gasmoleküle

l_m	m	mittlere freie Weglänge der Photonen
m	kg	Masse eines Gasatoms
n	–	Teilchenzahldichte, Brechungsindex
\vec{n}	–	Normalvektor
p	Pa	Druck
\dot{q}	W m ⁻²	Wärmestromdichte
r	m	radiale Koordinate
\vec{s}	–	Einheitsvektor parallel zur Strahlrichtung
t	s	Zeitvariable
u	J kg ⁻¹	innere Energie
v	m s ⁻¹	Teilchengeschwindigkeit
\bar{v}	m s ⁻¹	mittlere Teilchengeschwindigkeit
w_i	–	Quadratrgewichte der S_N -Approximation
x, y, z	m	Koordinaten

Griechische Symbole:

Φ	–	Streuungsphasenfunktion
Λ	m	Wellenlänge
Ω	sr	Raumwinkel
$\alpha_{i\pm 1/2}$	–	geometrische Koeffizienten
β_i	–	Nullstellen
χ	–	Konstante
δT_i	K	Korrekturterme der Drahttemperatur
ε	–	Emissivität
ϕ	°, rad	Winkel zwischen einfallender und gestreuter Intensität
φ	–	Konstante
γ_a	–	Akkommodationskoeffizient
η	–	Richtungskosinus
λ	W m ⁻¹ K ⁻¹	Wärmeleitfähigkeit
μ	–	Richtungskosinus
θ	°, rad	Polarwinkel
ϑ	°C	Temperatur
ρ	kg m ⁻³	Dichte
σ_0	m ²	Stoßquerschnitt der Gasatome
τ_m	–	Transmissivität der Probenoberfläche

τ_0	–	optische Dicke
ξ	–	Richtungskosinus
ψ	°, rad	Azimutwinkel
ω_0	–	Albedo
ζ	–	Gewicht

Hochgestellte Indizes:

0	Werte im Zellenmittelpunkt
+	positive Richtung
–	negative Richtung

Tiefgestellte Indizes:

0	Anfangs-/Umgebungswert
<i>Anstieg</i>	nach dem Anstieg des zeitlichen Drahttemperaturverlaufes
<i>Diffusion</i>	nach dem Diffusionsmodell
<i>a</i>	Probenaußenrand
<i>c</i>	Wärmeleitung
<i>eff</i>	effektiv
<i>f</i>	Festkörper
<i>g</i>	Gas
<i>id</i>	ideal
<i>l</i>	Luft
<i>m</i>	Probeninnenfläche
<i>max</i>	maximal
<i>min</i>	minimal
<i>mittel</i>	Mittelwert
<i>r</i>	Strahlung
<i>real</i>	real
<i>w</i>	Heizdraht

Abkürzungen:

IFD	implizite Finite-Differenzen-Methode
-----	--------------------------------------

Konstanten:

C	$1,781 = e^\gamma$	–	Konstante
k_B	$1,38 \cdot 10^{-23}$	J K ⁻¹	Boltzmannkonstante
γ	0,572	–	Eulerkonstante
σ	$5,67 \cdot 10^{-8}$	W m ⁻² K ⁻⁴	Stefan-Boltzmann-Konstante

Literaturverzeichnis

[AKSEL'ROD, 1984] AKSEL'ROD E.I., I.I. VISHNEVSKII: Use of the hot wire methode for measuring the thermal conductivity of lightweight, fiber and powder refractory materials. Ukrainian Scientific-Research Institut of Refractories. Translated from Ogneupory. No. 4, pp. 49-53, 1984.

[AZAD, 1981] AZAD F.H., M.F. MODEST: Evaluation of the radiative heat flux in absorbing, emitting and linear-anisotropically scattering cylindrical media. ASME Journal of Heat Transfer, vol. 103, pp. 350-356, 1981.

[BHATTACHARYYA, 1980] BHATTACHARYYA R.K.: Heat-transfer model for fibrous insulations. Thermal Insulation Performance, ASTM STP 718, D.L.McElroy and R.P.Tye, Eds., American Society for Testing and Materials, pp. 272-286,1980.

[CAPS, 1986] CAPS R.: Strahlungswärmeströme in evakuierten thermischen Superisolationen. Diss. Uni. Würzburg, 1986.

[CAPS, 1997] CAPS R., U. HEINEMANN, J. FRICKE: Thermal conductivity of polyimide foams. International Journal of Heat Mass Transfer 40, No. 2, pp. 269-280, 1997.

[CARLSON, 1968] CARLSON B.G., K.F. LATHROP: Transport theory – The method of discrete ordinates. In Computing Methods in Reactor Physics, eds. H. Greenspan, C.N. Kelber, and D. Okrent, Gordon & Breach, New York, 1968.

[CARSLAW, 1948] CARSLAW H.S., J.C. JAEGER: Conduction of Heat in Solids. Clarendon Press, Oxford, 1948.

[CHANDRASEKHAR, 1960] CHANDRASEKHAR S.: Radiative transfer. Dover Publications, 1960.

[CHARVAT, 1957] CHARVAT F.R., W.D. KINGERY: Effect of microstructure on conductivity of single-phase ceramics. Journal of the American Cermic Society 40, No. 9, pp. 306-315, 1957.

[CHU, 1955] CHU C.M., S.W. CHURCHILL: Representation of the angular distribution of radiation scattered by a spherical particle. Journal of the Optical Society of America, vol. 45, no. 11, pp. 958-962, 1955.

[CLARK, 1957] CLARK G.C., C.M. CHU, S.W. CHURCHILL: Angular distribution coefficients for radiation scattered by a spherical particle. Journal of the Optical Society of America, vol. 47, pp. 81-84, 1957.

[DEBYE, 1914] DEBYE P.: „Zustandsgleichung und Quantenhypothese mit einem Anhang über Wärmeleitung“. In: „Vorträge über die kinetische Theorie der Materie und der Elektrizität“ von M. Planck et al. (Mathematische Vorlesungen an der Universität Göttingen: IV.) Teubner, Leipzig, S. 19-60, 1914.

[DIETRICH, 1987] DIETRICH P.: Qualitätskriterien und Prüfmethode keramischer Fasern und Faserprodukte. Silikatechnik 38, Heft 10, 1987.

[EBERT, 1998] EBERT H.P., J. FRICKE: Influence of radiative transport on hot-wire thermal conductivity measurements. High Temperatures – High Pressures 30, pp. 665-669, 1998.

[EDDINGTON, 1926] EDDINGTON A.S.: The Internal Constitution of Stars. Cambridge University Press, London, England, 1926.

[EUCKEN, 1911] EUCKEN A.: Über die Temperaturabhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit fester Nichtmetalle. Annalen der Physik 34, S. 185-211, 1911.

[EUCKEN, 1932] EUCKEN A.: Die Wärmeleitfähigkeit keramischer feuerfester Stoffe; Ihre Berechnung aus der Wärmeleitfähigkeit der Bestandteile. Forsch. Gebiete Ingenieurwesen B3; Forschungsheft Nr. 353, 1932.

[EUCKEN, 1938] EUCKEN A., H. Englert: Die experimentelle Bestimmung des Wärmeleitvermögens einiger verfestigter Gase und Flüssigkeiten. Zeitschrift für die Gesamte Kälte-Industrie 45, S. 109-118, 1938.

[EUCKEN, 1940] EUCKEN A.: Allgemeine Gesetzmäßigkeiten für das Wärmeleitvermögen verschiedener Stoffe und Aggregatzustände. Forschung 11. Band, Heft 1, S. 6-20, 1940.

[FERNANDES, 1982] FERNANDES R., J. FRANCIS: Combined conductive and radiative heat transfer in an absorbing, emitting and scattering cylindrical medium. ASME Journal of Heat Transfer, vol. 104, pp. 594-601, 1982.

[FINE, 1977] FINE H.A. et al.: Thermal properties of Adobe. Ashrae Transaction, American Society of Heating, Refrigeration and Air Conditioning Engineers, Vol. 83, pp. 80-88, 1977.

[FINE, 1978] FINE H.A.: Analysis of the applicability of the hot-wire technique for determination of the thermal conductivity of diathermanous materials. Thermal Transmission Measurements of Insulation, ASTM STP 660, R.P.Tye, Ed., American Society for Testing and Materials, pp. 147-153, 1978.

[FISCHER, 1940] FISCHER J.: Rechnungsgrundlagen für das nichtstationäre Verfahren zur Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit. Forschung Ausgabe B 11, Nr. 6, S. 348-349, 1940.

[FIVELAND, 1982] FIVELAND W.A.: A discrete ordinates method for predicting radiative heat transfer in axisymmetric enclosures. ASME Paper 82-HAT-20, 1982.

[FIVELAND, 1984] FIVELAND W.A.: Discrete ordinates solutions of the radiative transport equation for rectangular enclosures. ASME Journal of Heat Transfer, vol. 106, pp. 699-706, 1984.

[FIVELAND, 1987] FIVELAND W.A.: Discrete ordinates methods for radiative heat transfer in isotropically and anisotropically scattering media. ASME Journal of Heat Transfer, vol. 109, pp. 809-812, 1987.

[FIVELAND, 1988] FIVELAND W.A.: Three-dimensional radiative heat-transfer solution by discrete-ordinates method. Journal of Thermophysics and Heat Transfer, vol. 2, no. 4, pp. 309-316, Oct 1988.

[FIVELAND, 1991] FIVELAND W.A.: The selection of discrete ordinate quadrature sets for anisotropic scattering. HTD-vol. 160, Fundamentals of Radiation Heat Transfer, ASME, 1991.

[GIEDT, 1985] GIEDT W.H., D.R. WILLIS: Rarefied Gases, Handbook of Heat Transfer, Fundamentals. W.M.Rohsenow et al., Editors, 2nd Edition, McGraw-Hill, 1985.

[GILLAM, 1955] GILLAM D.G., L. ROMBEN, H.E. NISSEN, O. LAMM: Acta Chemica Scandinavia 9, p. 641, 1955.

[GROB, 2001] GROB U., U. BARTH, R. WULF, L.T.S. TRAN: Thermal conductivity of non-isotropic materials measured by various methods. High Temperatures – High Pressures 33, pp. 141-150, 2001.

[HAASE, 1970] HAASE T., W. TROMMER, C. SCHEIBNER: Ein verbessertes Verfahren zur genaueren Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit bei Isolierstoffen nach der Heißdrahtmethode. Silikatechnik 21, Heft 7, 1970.

[HAGEMANN, 1982] HAGEMANN L., E. PETERS: Thermal conductivity – Comparison of methods: ASTM-method – hot-wire method and its variations. *Interterm 2*, pp. 131-135, 1982.

[HAKANSSON, 1988] HAKANSSON B., P. ANDERSSON, G. Bäckström: Improved hot-wire procedure for thermophysical measurements under pressure. *Review of scientific instruments* 59, pp. 2269-2275, 1988.

[HEALY, 1976] HEALY J.J., J.J. DE GROOT, J. KESTIN: The theory of the transient hot-wire method for measuring thermal conductivity. *Physica* 82C, pp. 392-408, 1976.

[HEASLET, 1966] HEASLET M.A., R.F. WARMING: Theoretical predictions of radiative transfer in homogeneous cylindrical medium. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, vol. 6, pp. 751-774, 1966.

[HELD, 1932] VAN DE HELD E.F.M.: *Warmte-Techniek*, 1932.

[HELD, 1949] VAN DE HELD E.F.M., F.G. VAN DRUNEN: A method of measuring the thermal conductivity of liquids. *Physica* 15, pp. 865-881 1949.

[HORROCKS, 1963] HORROCKS J.K., E. MCLAUGHLIN: Non-steady-state measurements of the thermal conductivities of liquid polyphenyls. *Proceedings of the Royal Society* 273 A, pp. 259-274, 1962.

[HRUBESH, 1994] HRUBESH L.W., R.W. PEKALA: Thermal properties of organic and inorganic aerosols. *J. Mat. Sci.* 9, pp. 731-738, 1994.

[JAMALUDDIN, 1988] JAMALUDDIN A.S., P.J. SMITH: Predicting radiative transfer in axisymmetric cylindrical enclosures using the discrete ordinates method. *Combustion Science and Technology*, vol. 62, pp. 173-186, 1988.

[KAVIANY, 1995] KAVIANY M.: *Principles of heat transfer in porous media*. 2. Ed., Springer-Verlag New York, Inc., 1995.

[KESTEN, 1968] KESTEN A.S.: Radiant heat flux distribution in a cylindrically-symmetric nonisothermal gas with temperature-dependent absorption coefficient. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, vol. 8, pp. 419-434, 1968.

[KESTIN, 1978] KESTIN J., W.A. WAKEHAM: A contribution to the theory of the transient hot-wire technique for thermal conductivity measurements. *Physica* a 92A, pp. 102-116, 1978.

[KINGERY, 1955] KINGERY W.D.: Temperature dependence of conductivity for single-phase ceramics. Journal of the American Ceramic Society 38, No. 7, pp. 251-255, 1955.

[KINGERY, 1961] KINGERY W.D.: Heat-Conductivity Process in Glass. Journal of the American Ceramic Society, Vol. 44, No. 7, pp. 302-304, 1961.

[KITTEL, 1949] KITTEL C.: Interpretation of thermal conductivity of glasses. Physical review 75, No. 6, pp. 972-974, 1949.

[KITTEL, 1973] KITTEL C.: Einführung in die Festkörperphysik. Oldenbourg, München – Wiley & Sons, Frankfurt am Main, 1973.

[KLEMENS, 1951] KLEMENS P.G.: Thermal conductivity dielectric solids at low temperatures. Proceedings of the Royal Society of London A 208, pp. 108-133, 1951.

[KNUDSEN, 1911] KNUDSEN M.: Die molekulare Wärmeleitung der Gase und der Akkommodationskoeffizient. Annalen der Physik 34, S. 594, 1911.

[KRISCHER, 1956] KRISCHER O.: Die wissenschaftlichen Grundlagen der Trocknungs-technik. 1.Auflage, Springer-Verlag Berlin, 1956.

[LATHROP, 1966] LATHROP K.D.: Use of discrete-ordinate methods for solution of photon transport problem. Nuclear science and engineering, vol. 24, pp. 381-388, 1966.

[LEE, 1960] LEE D.W., KINGERY W.D.: Radiation Energy Transfer and Thermal Conductivity of Ceramic Oxides. Journal of the American Ceramic Society, Vol. 43, No. 11, pp. 594-607, 1960.

[LEE, 1962] LEE C.E.: The discrete S_N approximation to transport theory. Technical Information series report LA2595, Lawrence Livermore Laboratory, 1962.

[LEE, 1969] LEE D.W., W.D. KINGERY: Radiation energy transfer and thermal conductivity of ceramic oxides. Journal of the American Ceramic Society 43, No. 11, pp. 594-607, 1960.

[LIANG, 1995] LIANG X.G.: The boundary induced error on the measurement of thermal conductivity by transient hot wire method. Measurement science and technology 6, pp. 467-471, 1995.

[LOEB, 1954] LOEB A.I.: A theory of thermal conductivity of porous materials. J. Amer. Ceram. Soc. 37, No. 2, pp. 96-99, 1954.

[LOYALKA, 1969] LOYALKA S.K.: Radiative heat transfer between parallel plates and concentric cylinders. International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 12, pp. 1513-1517, 1969.

[MAGLIC, 1992] MAGLIC K.D., A. CEZAIIRLIYAN, V.E. PELETSKY: Compendium of thermophysical property measurement methods. Vol. 1 and 2, Plenum Press, New York – London, 1992.

[MCLAUGHLIN, 1971] MCLAUGHLIN E., J.P. PITTMAN: Philosophical transactions of the Royal Society of London A 270, p. 557, 1971.

[MENASHE, 1982] MENASHE J., W.A. WAKEHAM: Effect of absorption of radiation on thermal conductivity measurements by the transient hot-wire technique. International Journal of Heat Mass Transfer 25, No. 5, pp. 661-673, 1982.

[MILLS, 1985] MILLS K.C., W.A. WAKEHAM: Effect of radiation on thermal transport measurements. High Temperatures – High Pressures 17, pp. 343-348, 1985.

[MILNE, 1930] MILNE F.A.: Thermodynamics of stars, in: Handbuch der Astrophysik 3, Springer-Verlag, OHG, Berlin, S. 65-255, 1930.

[MODEST, 1974] MODEST M.F.: Two-dimensional radiative equilibrium of a gray medium in a plane layer bounded by gray non-isothermal walls. ASME Journal of Heat Transfer, vol. 96C, pp. 483-488, 1974.

[MODEST, 1978] MODEST M.F., STEVENS D.S.: Two-dimensional radiative equilibrium of a gray medium between concentric cylinders. Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, vol. 19, pp. 353-365, 1978.

[MODEST, 1980] MODEST M.F., F.H. AZAD: The differential approximation for radiative transfer in an emitting, absorbing and anisotropically scattering medium. Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, vol. 23, pp. 117-120, 1980.

[MODEST, 1993] MODEST M.F.: Radiative heat transfer. McGraw-Hill, Inc., 1993

[NAGASHIMA, 1987] NAGASHIMA A., I. TAKAHASHI: The effect of radiation in transient hot-wire measurements on solids. High Temperatures – High Pressures 19, pp. 261-267, 1987.

[NEUMANN, 1988] NEUMANN W., W. HEMMINGER: Die Wärmeleitfähigkeit von Magnetitstein, Feuerleichtstein und einem Wärmedämmstoff, gemessen mit unterschiedlichen Verfahren. Cfi/Ber. DKD, Nr. 11/12, S. 480-485, 1998.

[NIETO DE CASTRO, 1976] NIETO DE CASTRO C.A., J.C.G. CALADO, W.A. WAKEHAM, M. DIX: An apparatus to measure the thermal conductivity of liquids. Journal of Physics E9, p. 1073-1080, 1976.

[NIETO DE CASTRO, 1983] NIETO DE CASTRO C.A., S.F.Y. LI, G.C. MAITLAND, W.A. WAKEHAM: Thermal conductivity of toluene in the temperature range 35-90 °C at pressures up to 600 MPa. International Journal of Thermophys 4, No. 4, pp. 311-327, 1983.

[NIETO DE CASTRO, 1988] NIETO DE CASTRO C.A., B. TAXIS, H.M. RODER, W.A. WAKEHAM: Thermal diffusivity measurement by the transient hot-wire technique: A reappraisal. International Journal of Thermophys 9, No. 3, pp. 293-316, 1988.

[NIETO DE CASTRO, 1990] NIETO DE CASTRO C.A.: Thermal Conductivity 21. Hrsg. Cremens C.J. Fine H.A., Plenum, New York, pp. 17-36, 1990.

[NIETO DE CASTRO, 1991] NIETO DE CASTRO C.A., R.A. PERKINS, H.M. RODER: Radiative heat transfer in transient hot-wire measurement of thermal conductivity. International Journal of Thermophys 12, No. 6, pp. 985-997, 1991.

[NILSSON, 1989] NILSON O., RÜSCHENPÖHLER G., GROB J. UND FRICKE J.: High Temperatures – High Pressures 21, pp. 267, 1989.

[OLFE, 1968] OLFE D.B.: Application of the modified differential approximation to radiative transfer in a gray medium between concentric spheres and cylinders. Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, vol. 8, pp. 899-907, 1968.

[ÖZISIK, 1973] ÖZISIK M.: Radiative transfer and interactions with conduction and convection. John Wiley & Sons, Inc. New York, 1973.

[PANDEY, 1989] PANDEY D.K.: Combined conduction and radiation heat transfer in concentric cylindrical media. Journal of Thermophysics, vol. 3, no. 1, pp. 75-82, 1989.

[PEIERLS, 1929] PEIERLS R.: Zur kinetischen Theorie der Wärmeleitung in Kristallen. Annalen der Physik 3, S. 1055-1101, 1929.

[PERLMUTTER, 1964] PERLMUTTER M., J.R. HOWELL: Radiant transfer through a gray gas between concentric cylinders using Monte Carlo. ASME Journal of Heat Transfer, vol. 86, no. 2, pp. 169-179, 1964.

[PFRIEM, 1938] PFRIEM H.: Nichtstationäres Verfahren zur Messung der Wärme- und Temperaturleitfähigkeit von Flüssigkeiten. VDI-Zeitschrift 82, Nr. 3, S. 71-71, 1938.

[RATH, 1990] RATH D., A. STEIFF: Zur Berechnung der effektiven Wärmeleitfähigkeit von evakuierten Dämmmaterialien. Chemie-Ingenieur-Technik 62, Nr. 11, S. 956-957, 1990.

[REIF, 1990] REIF F.: Statische Physik 3. Auflage, Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1990.

[ROSSELAND, 1936] ROSSELAND S.: Theoretical Astrophysics: Atomic Theory and the Analysis of Stellar Atmospheres and Anvelopes, Clarendon Press, Oxford, 1936.

[RUSSEL, 1935] RUSSEL H.W.: Principles of heat flow in porous insulators. Journal of the American Cermic Society 18, No. 1, pp. 1-5, 1935.

[SAITO, 1978] SAITO A., J.E.S. VENART: Radiation effects with the transient line source measurement of fluid thermal conductivity. Proceedings of the 6th International Heat Transfer Conference, Washington D.C. USA, 1978.

[SAITO, 1980] SAITO A.: Review of transient line source technique. Bulletin of the JSME 23, No. 183, pp. 1459-1466, 1980.

[SCHLEGEL, 1988] SCHLEGEL E.: Kritische Bemerkungen zur Wärmeleitfähigkeit feuerfester Baustoffe. Vortrag 10 ibausil, Weimar, 1988.

[SCHULLE, 1962] SCHULLE W.: Über die Eignung der dynamischen Heizdrahtmethode zur Bestimmung der Wärmeleitzahl von feuerfesten Baustoffen bei Raumtemperatur und bei höheren Temperaturen. Dissertation, Bergakademie Freiberg, 1962.

[SIEGEL, 1972] SIEGEL R., J.R. HOWELL: Thermal Radiation Heat Transfer. McGraw Hill Kogakusha Ltd., Tokio, 1972.

[SMOLUCHOWSKI, 1898] SMOLUCHOWSKI M.: Über den Temperatursprung bei der Wärmeleitung in Gasen. Sitzungsbericht der Akademischen Wissenschaften (Wiener Bericht) 107, S. 304-329, 1898.

[SPRINGER, 1971] SPRINGER G.S.: Heat transfer in rarefied gases. *Advan. Heat Transfer* 7, pp. 163-218, 1971.

[STÄLHANE, 1931] STÄLHANE B., S. PYK: Neue Methode zur Bestimmung der Wärmeleitzahlen. *Teknisk Tidskrift* 61, pp. 389-393, 1931.

[STARK, 1993] STARK C., J. FRICKE: Improved heat transfer models to fibrous insulations. *International Journal of Heat Mass Transfer* 36, pp. 617-625, 1993.

[THIGPEN, 1959] THIGPEN J.J., B.E. SHORT: The apparent thermal conductivity of fibrous materials. ASME-Paper, No. 59-A-293, New York, pp. 1-8, 1959.

[TRAUSTEL, 1961] TRAUSTEL S., J. PANDA, P. Jacob: Beiträge zur Erforschung des Wärmeleitvermögens von Mischkörpern aus Komponenten verschiedener Leitfähigkeiten mit Hilfe der elektrischen Analogie. *Tonind.-Ztg.* 85, No. 24, S. 565-569, 1961.

[TRUELOVE, 1987] TRUELOVE J.S.: Discrete-ordinate solutions of the radiation transport equation. *ASME Journal of Heat Transfer*, vol. 109, no. 4, pp. 1048-1051, 1987.

[TRUELOVE, 1988] TRUELOVE J.S.: Three-dimensional radiation in absorbing-emitting-scattering media using the discrete-ordinates approximation. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, vol. 39, no. 1, pp. 27-31, 1988.

[VDI-WÄRMEATLAS] VDI-Wärmeatlas, Berechnungsblätter für den Wärmeübergang, 7. Aufl., VDI-Verlag 1994.

[VISKANTA, 1962] VISKANTA R., R.J. GROSH: Heat Transfer by simultaneous conduction and radiation in an absorbing medium. *ASME Journal of Heat Transfer* 84, No. 1, pp. 63-72, 1962.

[WANG, 1989] WANG G., R.C. PRASAD, J.E.S. VENART: Radiation correction and onset of free convection in the transient line-source technique (experimental observations in fluids). *Thermal conductivity 20*, Eds.: P.H.Hasselmann & J.R.Thomas, Plenum New York, 1989.

[WANG, 1991] WANG G.H., J.E.S. VENART, R.C. PRASAD: 11th Symp. Thermophys. Properties, Boulder/Col., USA, 1991.

[WOLF, 1994] WOLF J.R., W.C. STRIEDER: Pressure-dependent gas heat transport in a spherical pore. *AIChE Journal* 40, pp. 1287-1296, 1994.

[WRAY, 1959] WRAY K.L., CONNOLLY, T.J.: Thermal conductivity of clear fused silica at high temperatures. *Journal of Applied Physics*, Vol. 30, No. 11, pp. 1702-1705, 1959.

[YU, 1998] YU F., X. ZHANG, X. YIN, Z. GAO: Simultaneous conduction and radiation in semitransparent media for transient hot-wire experiments. *High Temperatures – High Pressures* 30, pp. 105-111, 1998.

[YU, 2000] YU F., X. ZHANG, G. GAO: Thermal conductivity measurement of semitransparent solids by hot-wire technique. *International Journal of Thermophysics* 21, No. 2, pp. 465-478, 2000.

[ZEHNER, 1970] ZEHNER P., E.U. SCHLÜNDER: Wärmeleitfähigkeit von Schüttungen bei mäßigen Temperaturen. *Chemie-Ingenieur-Technik* 42, S. 933-941, 1970.

[ZENG, 1994] ZENG S.Q., A.J. HURT, W. CAO, R. GRIEF: Pore size distribution and apparent gas conductivity of silica aerogel. *ASME Journal of Heat Transfer* 116, pp. 756-759, 1994.

[ZHENG, 1994] ZHENG L., W. STRIEDER: Knudsen void gas heat transport in fibrous media. *International Journal of Heat Mass Transfer* 37, pp. 1433-1440, 1994.

Abbildungsverzeichnis

1	Schematische Messanordnung des Kreuzdrahtverfahrens	17
2	Gekoppelte Strahlung/Leitung bei instationären Heizdraht- messungen	22
3	Änderung der Strahlungsintensität $I(s)$ entlang einer Weglänge ds in einem absorbierenden, emittierenden und streuenden Medium	27
4	Repräsentation der Umverteilung der Strahlungsintensität in diskrete Intensitäten mittels einer symmetrischen S_4 -Quadratur	38
5	Koordinaten für eine eindimensionale zylindrische Geometrie.....	40
6	Progressive Verteilung der Stützpunkte zur Diskretisierung der eindimensionalen radialen Geometrie	46
7	Gitternetz zur Diskretisierung der Energiegleichung (4.39) und zur Veranschaulichung der Differenzgleichung (4.41)	48
8	Prozentuale Abweichung der Drahtübertemperatur der IFD-Lösung für reine Wärmeleitung, der differentiellen und der S_4 -Lösung	56
9	Abweichung der differentiellen Lösung von der Exaktlösung im Transparenzfall bei $\varepsilon_w = 0,1$	59
10	Abweichung der differentiellen Lösung von der Exaktlösung im Transparenzfall bei $\varepsilon_w = 1$	59
11	Prozentuale Abweichung der Drahtübertemperatur der differentiellen gegenüber der S_4 -Lösung in Abhängigkeit von der Extinktion bei $\vartheta_0 = 25\text{ }^\circ\text{C}$	61
12	Prozentuale Abweichung der Drahtübertemperatur der differentiellen gegenüber der S_4 -Lösung in Abhängigkeit von der Extinktion bei $\vartheta_0 = 500\text{ }^\circ\text{C}$	61
13	Zeitabhängige Übertemperatur des Drahtes bei $\vartheta_0 = 25\text{ }^\circ\text{C}$ und $\varepsilon_w = 0,1$	63
14	Zeitabhängige Übertemperatur des Drahtes bei $\vartheta_0 = 25\text{ }^\circ\text{C}$ und $\varepsilon_w = 1$	63

15	Profile der Übertemperatur im Probenmedium bei $\vartheta_0 = 25\text{ }^\circ\text{C}$	68
16	Profile der Übertemperatur im Probenmedium bei $\vartheta_0 = 500\text{ }^\circ\text{C}$	69
17	\dot{q}_c -Verteilung bei $\vartheta_0 = 25\text{ }^\circ\text{C}$ und $E = 10^2\text{ m}^{-1}$	71
18	\dot{q}_r -Verteilung bei $\vartheta_0 = 25\text{ }^\circ\text{C}$ und $E = 10^2\text{ m}^{-1}$	71
19	\dot{q}_c -Verteilung bei $\vartheta_0 = 25\text{ }^\circ\text{C}$ und $E = 10^4\text{ m}^{-1}$	74
20	\dot{q}_r -Verteilung bei $\vartheta_0 = 25\text{ }^\circ\text{C}$ und $E = 10^4\text{ m}^{-1}$	74
21	\dot{q}_c -Verteilung bei $\vartheta_0 = 500\text{ }^\circ\text{C}$ und $E = 10^2\text{ m}^{-1}$	76
22	\dot{q}_r -Verteilung bei $\vartheta_0 = 500\text{ }^\circ\text{C}$ und $E = 10^2\text{ m}^{-1}$	76
23	\dot{q}_c -Verteilung bei $\vartheta_0 = 500\text{ }^\circ\text{C}$ und $E = 10^4\text{ m}^{-1}$	77
24	\dot{q}_r -Verteilung bei $\vartheta_0 = 500\text{ }^\circ\text{C}$ und $E = 10^4\text{ m}^{-1}$	78
25	Zeitabhängige Strahlungsstromdichte am Draht bei $\vartheta_0 = 25\text{ }^\circ\text{C}$	79
26	Zeitabhängige Strahlungsstromdichte am Draht bei $\vartheta_0 = 500\text{ }^\circ\text{C}$	80
27	Zeitliche Abweichung von $\lambda_{eff, Anstieg}$ gegenüber $\lambda_{eff, Diffusion}(T_0)$ bei $\vartheta_0 = 25\text{ }^\circ\text{C}$, $E = 10^3\text{ m}^{-1}$ und $\dot{Q} = 1\text{ W/m}$	83
28	Zeitliche Abweichung von $\lambda_{eff, Anstieg}$ gegenüber $\lambda_{eff, Diffusion}(T_0)$ bei $\vartheta_0 = 25\text{ }^\circ\text{C}$, $E = 10^4\text{ m}^{-1}$ und $\dot{Q} = 1\text{ W/m}$	85
29	Prozentuale Abweichung von $\lambda_{eff, Anstieg}$ gegenüber $\lambda_{eff, Diffusion}(T_0)$ in Abhängigkeit von der Heizleistung bei $\vartheta_0 = 25\text{ }^\circ\text{C}$	86
30	Prozentuale Abweichung von $\lambda_{eff, Anstieg}$ gegenüber $\lambda_{eff, Diffusion}(T_0)$ in Abhängigkeit von der Heizleistung bei $\vartheta_0 = 500\text{ }^\circ\text{C}$	88
31	Prozentuale Abweichung von $\lambda_{eff, Anstieg}$ gegenüber $\lambda_{eff, Diffusion}(T_0)$ in Abhängigkeit von der Heizleistung bei $\vartheta_0 = 1.000\text{ }^\circ\text{C}$	88
32	Prozentuale Abweichung von $\lambda_{eff, Anstieg}$ gegenüber $\lambda_{eff, Diffusion}(T_{mittel})$ in Abhängigkeit von der Heizleistung bei $\vartheta_0 = 25\text{ }^\circ\text{C}$	90

33	Prozentuale Abweichung von $\lambda_{\text{eff, Anstieg}}$ gegenüber $\lambda_{\text{eff, Diffusion}}(T_{\text{mittel}})$ in Abhängigkeit von der Heizleistung bei $\vartheta_0 = 500 \text{ }^\circ\text{C}$	91
34	Prozentuale Abweichung von $\lambda_{\text{eff, Anstieg}}$ gegenüber $\lambda_{\text{eff, Diffusion}}(T_{\text{mittel}})$ in Abhängigkeit von der Heizleistung bei $\vartheta_0 = 1.000 \text{ }^\circ\text{C}$	91
35	Einfluss der Streuung auf die Drahtübertemperatur bei $\vartheta_0 = 25 \text{ }^\circ\text{C}$.	94
36	Durch den Luftspalt zwischen dem Draht und der Probe hervorge- rufener thermischer Kontaktwiderstand bei Heizdrahtmessungen ...	99
37	Strahlungsstromdichten im Luftspalt	101
38	Zeitabhängige Strahlungsstromdichte am Draht bei $\vartheta_0 = 25 \text{ }^\circ\text{C}$	109
A.1	ROSSELAND-Mittelwert der spezifischen Extinktion von Glassfasern	133
A.2	Vergleich der gemessenen effektiven Wärmeleitfähigkeiten von amorphem Silizium	134

Tabellenverzeichnis

1	Effektive, dichtespezifische, wellenlängengemittelte Extinktionskoeffizienten E^*/ρ verschiedener Superisolationen	11
2	Prozentuale Abweichung von $\lambda_{eff, Anstieg}$ gegenüber $\lambda_{eff, Diffusion}(T_{mittel})$ im nichtstreuenden ($\omega_0 = 0$) und anisotrop streuenden Medium ($\omega_0 = 0,5$)	97
3	Zur Simulation des thermischen Kontaktwiderstandes verwendete Parameter	104
4	Zur Simulation des thermischen Kontaktwiderstandes verwendete Stoffwerte von Luft	104
5	Durch thermischen Kontaktwiderstand verursachte Abweichung von $\lambda_{eff, Anstieg}$ gegenüber $\lambda_{eff, Diffusion}(T_{mittel})$ bei $\vartheta_0 = 25\text{ }^\circ\text{C}$	105
6	Durch thermischen Kontaktwiderstand verursachte Abweichung von $\lambda_{eff, Anstieg}$ gegenüber $\lambda_{eff, Diffusion}(T_{mittel})$ bei $\vartheta_0 = 500\text{ }^\circ\text{C}$	110

Anhang

A.1 Berücksichtigung der Streuung in effektiver Extinktion

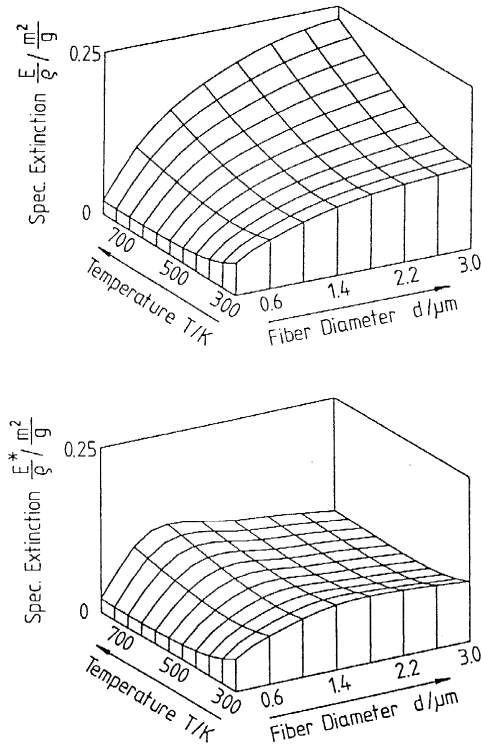


Abb. A.1: Rosseland-Mittelwert der spezifischen Extinktion von Glasfasern in Abhängigkeit von Temperatur T und Faserdicke d bei senkrechtem Strahlungseinfall [CAPS, 1986]

- a) ohne Berücksichtigung der Vorwärtsstreuung, E/ρ ,
- b) effektive spezifische Extinktion, E^*/ρ .

A.2 Vergleich von λ_{eff} aus Heizdraht- und Plattenmessungen

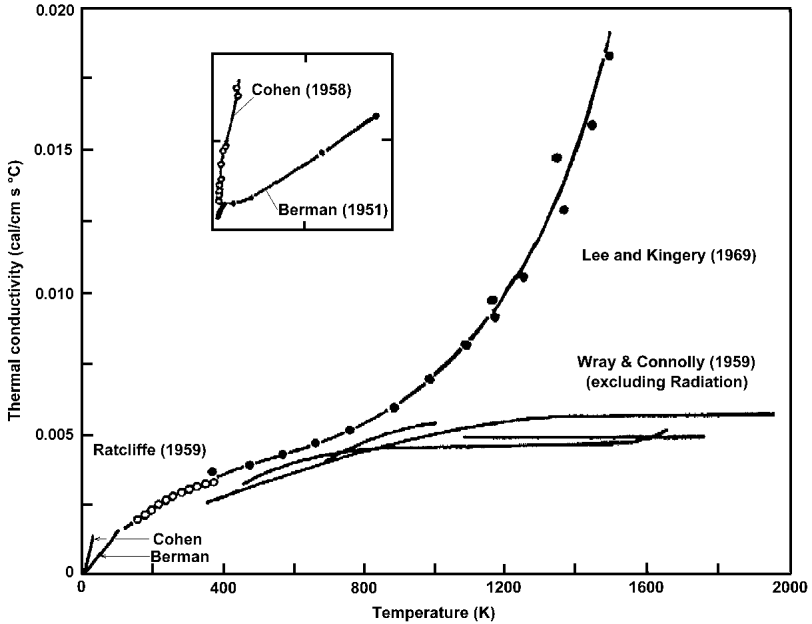


Abb. A.2: Vergleich der gemessenen effektiven Wärmeleitfähigkeiten von amorphem Silizium aus instationären Heizdrahtmessungen [WRAY, 1959] und aus stationären Plattenmessungen [LEE, 1960] (Auszug aus [KINGERY, 1961]).

Lebenslauf

Le-Thanh-Son Tran

geboren am 29.04.1970 in Saigon, Vietnam

Schulbildung

1976 – 1988 Grundschule bis Oberschule und Abitur in Saigon, Vietnam

Deutschkurs

1988 – 1989 an der Hochschule für Fremdsprachen in Hanoi, Vietnam

1989 – 1990 an der Technischen Hochschule Zwickau

Hochschulstudium

10/90 – 09/95 Verfahrenstechnik / Thermischer Maschinenbau
an der Universität Magdeburg

10/95 – 09/97 Aufbaustudium Informatik (kein Abschluss)
an der Universität Magdeburg

10/97 – 09/00 Stipendiat im Graduiertenkolleg
an der Technischen Universität Bergakademie Freiberg

Berufstätigkeit

11/00 – 08/02 Wissenschaftlicher Mitarbeiter
am Institut für Wärmetechnik und Thermodynamik
der Technischen Universität Bergakademie Freiberg