

Caos e Fractais

Ana Maria M. Morita, Fernando Nera Lenarduzzi e Juliana Conceição Precioso

ana.morita@hotmail.com, ferlenarduzzi@gmail.com, precioso@ibilce.unesp.br

Universidade Estadual Paulista, Departamento de Matemática - São José do Rio Preto-SP, CEP: 15054-000, Brazil.

Resumo

Neste artigo, trabalharemos principalmente com a família quadrática $Q_c(x) = x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$, onde o valor $c \in \mathbb{R}$ é denominado parâmetro da família. Desenvolveremos uma teoria para compreendermos o comportamento das possíveis órbitas de um sistema. Em seguida introduziremos a noção de caos, apresentando as condições para que um sistema dinâmico seja considerado caótico. Por fim, apresentaremos também uma breve introdução a teoria dos fractais.

Palavras-chave: Sistemas dinâmicos, órbita, bifurcação, caos, fractais.

Abstract

In this paper, we will work mainly with the quadratic family $Q_c(x) = x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$, where the value $c \in \mathbb{R}$ is denominated the parameter of the family. We will develop a theory for we understand the behavior of the possible orbits of a system. Soon afterwards, we will introduce the chaos notion, presenting the conditions so that a dynamic system is considered chaotic. Finally, we will also present an little introduction the theory of the fractals.

keywords: Dynamical systems, orbit, bifurcation, chaos, fractals.

1. Introdução

Os fenômenos ditos “caóticos” são aqueles onde não há previsibilidade. As variações climáticas e as oscilações da bolsa de valores são exemplos de fenômenos caóticos.

Atualmente, com o desenvolvimento da Matemática e das outras ciências, a Teoria do Caos surgiu com o objetivo de compreender e dar respostas a estes fenômenos imprevisíveis que se encontram na natureza e em nosso cotidiano.

Segundo a Teoria do Caos, a evolução de um sistema dinâmico depende crucialmente das suas condições iniciais. O trânsito é um bom exemplo. Já observou que há dias em que o congestionamento é maior? Tal transtorno pode ter sido causado por um carro acidentado, ou quem sabe uma empresa tenha dispensado seus funcionários mais cedo e houve um fluxo maior num cruzamento ou pode ter ocorrido outras situações semelhantes. Mesmo assim, o número de variáveis é grande e o comportamento do sistema depende muito das condições iniciais. Nunca se sabe quando o trânsito está bom ou ruim.

Uma das mais conhecidas bases da teoria do Caos é o chamado *efeito borboleta* que se refere às condições iniciais, segundo o qual, o bater de asas de uma simples borboleta poderia provocar um tufão do outro lado do planeta.

Neste trabalho apresentaremos de uma maneira simples e contextual, a teoria do caos dentro de um exemplo dinâmico real. Apresentaremos ainda, alguns conceitos e exemplos da

geometria presente nos sistemas caóticos conhecida como *geometria fractal*.

2. Um exemplo de sistema dinâmico

Como motivação para o nosso trabalho, apresentaremos agora, um exemplo de um sistema dinâmico bem simples, aplicado as finanças.

Consideremos a seguinte situação: suponha que depositamos R\$1.000 em um banco a juros de 10% ao ano. Se deixarmos n anos o dinheiro em nossa conta, quanto teremos em conta ao final deste período?

Ao final do primeiro ano aumentamos 10% ao nosso capital A_0 e obtemos o nosso novo montante A_1 , isto é,

$$A_1 = A_0 + 0.1A_0 = 1,1A_0$$

Dessa forma, temos que $A_1 = R\$1.100$. Dessa forma, ao final de cada ano, fazemos a mesma operação

$$A_2 = 1,1A_1, \quad A_3 = 1,1A_2, \quad \dots \quad A_n = 1,1A_{n-1}.$$

Note que estamos usando uma fórmula de recorrência, isto é, sempre se faz necessário saber um valor anterior para determinar o próximo. Mais ainda, podemos definir uma $F(x) = 1,1x$ de forma que:

$$A_1 = F(A_0), \quad A_2 = F(A_1), \quad A_3 = F(A_2), \quad \dots$$

Assim, podemos compor as funções F da seguinte forma

$$\begin{aligned} A_2 &= F(F(A_0)) = F \circ F(A_0) = (1, 1)^2 x \\ A_3 &= F(F(F(A_0))) = F \circ F \circ F(A_0) = (1, 1)^3 x \\ &\vdots \end{aligned}$$

De maneira geral, a n -ésima iteração de funções é dada por

$$F \circ \dots \circ F(x) = (1, 1)^n x$$

Então, para encontrarmos A_n basta calcularmos $(1, 1)^n$ e multiplicar por A_0 . Por exemplo, podemos verificar que $A_{10} = R\$2.593,74$.

3. Iterações e Órbitas

Nesta seção, definiremos iterada de uma função, órbita de um ponto e citaremos alguns tipos de órbitas.

Iterar uma função significa avaliar a função repetidamente, usando o valor obtido da avaliação anterior como o valor de entrada para a próxima. Para uma função F , $F^2(x)$ é a segunda iterada de F , avaliada em x , $F^3(x)$ é a terceira iterada, e mais geralmente, $F^n(x)$ seria a n -ésima iterada, ou seja, a n -ésima composição de F com ela mesma.

Definição 1. Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, a órbita de x_0 definida em F é a sequência dos pontos $x_0, x_1 = F(x_0), x_2 = F^2(x_0), \dots, x_n = F^n(x_0), \dots$. O ponto x_0 é chamado origem da órbita.

Exemplo 2. Seja $F(x) = \sqrt{x}$ e $x_0 = 81$, então a órbita de x_0 é:

$$x_0 = 81, x_1 = \sqrt{81} = 9, x_2 = \sqrt{9} = 3, x_3 = \sqrt{3} = 1,720, \dots$$

Note que se continuarmos esse processo, vemos que a órbita de x_0 converge para 1.

4. Tipos de Órbitas

Existem vários tipos de órbitas. O tipo de órbita mais importante é a do ponto fixo.

Definição 3. Um ponto fixo é um ponto x_0 satisfazendo $F(x_0) = x_0$ e, mais geralmente, $F^n(x_0) = x_0$, pois

$$F^n(x_0) = F^{n-1}(F(x_0)) = F^{n-1}(x_0) = \dots = F(x_0) = x_0.$$

Consequentemente, a órbita de um ponto x_0 é a sequência constante x_0, x_0, \dots . Pontos fixos são obtidos resolvendo a equação $F(x) = x$.

Interpretação gráfica: Os pontos fixos são determinados geometricamente pela interseção do gráfico da F com a reta $y = x$

Outro tipo de órbita importante é a órbita periódica.

Definição 4. Uma órbita é chamada órbita periódica ou ciclo se o ponto x_0 é um ponto periódico, isto é, temos $F^n(x_0) = x_0$, para algum $n > 0$ e $F^k(x_0) \neq x_0$ para $k < n$.

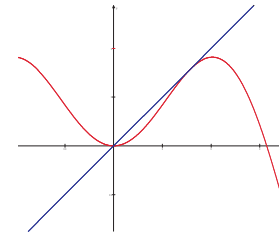


Figura 1: $F(x) = x \sin(x)$ e em azul a reta $y = x$.

Se x_0 for um ponto periódico, de período n , então a órbita de x_0 será uma sequência de números que se repetem a cada bloco de n elementos, isto é,

$$x_0, F(x_0), F^2(x_0) \dots F^{n-1}(x_0), x_0, F(x_0), F^2(x_0) \dots F^{n-1}(x_0), \dots$$

Se x_0 for um ponto periódico de período k , então x_0 será um ponto fixo para F^k , ou seja, $F^k(x_0) = x_0$. Logo, os pontos periódicos de período k , podem ser encontrados resolvendo a equação $F^k(x) = x$.

Exemplo 5. Com $F(x) = x^2 - 1$ e $x_0 = 0$, temos que o período da órbita é 2 uma vez que $F(0) = -1$ e $F(-1) = 0$. Dessa forma, a órbita de $x_0 = 0$ por $F(x) = x^2 - 1$, será composta por 0 e -1 da forma

$$0, -1, 0, -1, 0, -1, \dots$$

Além disso, F tem dois pontos fixos, $x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ os quais podem ser obtidos resolvendo-se a equação $x^2 - 1 = x$.

Anteriormente discutimos a órbita do ponto fixo e a órbita periódica. Existem também outros tipos de órbitas, a saber, as órbitas eventualmente fixas e eventualmente periódicas.

Definição 6. Um ponto x_0 é chamado ponto eventualmente fixo, ou eventualmente periódico, se x_0 não é um ponto fixo ou periódico, mas algum ponto da órbita de x_0 é fixo ou periódico.

Exemplo 7. 1 é um ponto eventualmente periódica para $F(x) = x^2 - 1$, pois $F(1) = 0$, $F(0) = -1$ e $F(-1) = 0$. Logo, F possui uma órbita eventualmente periódica para $x_0 = 1$. Temos a seguinte sequência como órbita

$$1, 0, -1, 0, -1, 0, -1, \dots$$

Exemplo 8. Seja $F(x) = x^2$ e $x_0 = -1$. Temos que a órbita de -1 é eventualmente fixa e dada por $-1, 1, 1, 1, \dots$.

5. Análise gráfica das órbitas e retrato de fase

Suponha que tenhamos o gráfico de F e gostaríamos de determinar a órbita de um determinado ponto x_0 . Começaremos sobrepondo a reta diagonal $y = x$ sobre o gráfico de F . Como vimos na Definição 1.3, os pontos de interseção da diagonal

com o gráfico de F , nos fornecem os pontos fixos de F . Para encontrar a órbita de x_0 , começamos com o ponto (x_0, x_0) que encontra-se na reta diagonal. Deste ponto, traçamos uma reta vertical que tocará o gráfico de F no ponto $(x_0, F(x_0))$. Traçando a reta horizontal que passa por este ponto, tocaremos a reta diagonal no ponto $(F(x_0), F(x_0))$. Para determinar o próximo ponto desenhamos a reta vertical partindo de $(F(x_0), F(x_0))$ em direção ao gráfico; isto nos fornece $(F(x_0), F^2(x_0))$. Novamente, traçamos a linha horizontal para encontrar a diagonal e assim sucessivamente.

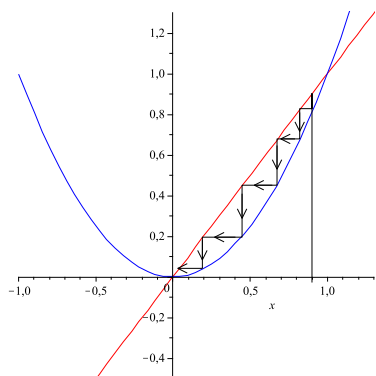


Figura 2: Em vermelho temos a função $F(x) = x^2$ e em azul a reta $y = x$.

A análise gráfica nos permite determinar o comportamento das órbitas de um sistema dinâmico. Lancemos mão de outra ferramenta: o Retrato de Fase. Esta é uma representação na reta real das órbitas de um sistema. Representamos os pontos fixos em um retrato de fase por pontos e a dinâmica da órbita por setas.

Exemplo 9. Para a função $F(x) = x^3$, os pontos fixos são $-1, 0$ e 1 . Se $|x_0| < 1$, então $F_n(x_0) \rightarrow 0$, por outro lado se $|x_0| > 1$, então $F_n(x_0)$ diverge. A análise gráfica e o retrato de fase desta função estão representados na figura abaixo.

6. Teorema do Ponto Fixo

Teorema 10. (Teorema do Ponto Fixo) Suponha que $F : [a, b] \rightarrow [a, b]$ é contínua. Então existe um ponto fixo para F em $[a, b]$.

Demonstração. Considere a função $H : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $H(x) = F(x) - x$. Como F é contínua, segue que H é contínua. Além disso, H satisfaz

$$H(a) = F(a) - a \geq 0 \text{ e } H(b) = F(b) - b \leq 0.$$

Dessa forma, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $c \in [a, b]$, com $H(c) = 0$. Assim, $H(c) = F(c) - c = 0$, o que implica que $F(c) = c$. Portanto, c é um ponto fixo. \square

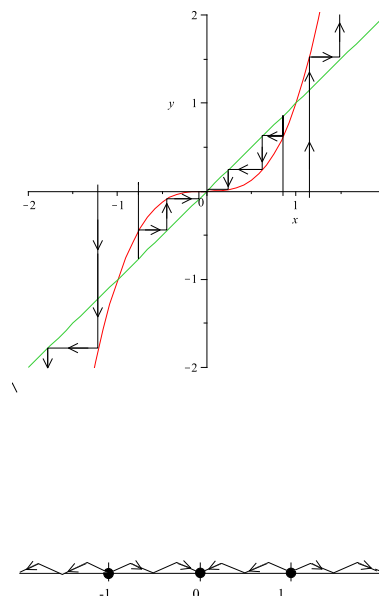


Figura 3: Acima temos a análise gráfica e abaixo o retrato de fase.

7. Ponto fixo atrator e repulsor

Definição 11. Suponha que x_0 é um ponto fixo de F . Então, x_0 é um ponto fixo atrator, se $|F'(x_0)| < 1$. O ponto x_0 é um ponto fixo repulsor, se $|F'(x_0)| > 1$. Finalmente, se $|F'(x_0)| = 1$, o ponto fixo é chamado de neutro ou indiferente.

Teorema 12. (Teorema do Ponto Fixo Atrator) Suponha que x_0 é um ponto fixo atrator para F . Então, existe um intervalo I , que contém x_0 em seu interior tal que a seguinte condição é satisfeita: se $x \in I$, então $F^n(x) \in I$, para todo n e $F^n(x) \rightarrow x_0$ quando $n \rightarrow +\infty$.

Demonstração. Como $|F'(x_0)| < 1$, existe $\lambda > 0$ tal que $|F'(x_0)| < \lambda < 1$. Podemos escolher um $\delta > 0$, de forma que $|F'(x)| < \lambda$, se x pertence ao intervalo $I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Seja p um ponto de I . Pelo Teorema do Valor Médio

$$\frac{|F(p) - F(x_0)|}{|p - x_0|} = |F'(k)| < \lambda, \text{ para algum } k \text{ entre } p \text{ e } x_0.$$

Então, uma vez que x_0 é um ponto fixo,

$$|F(p) - F(x_0)| = |F(p) - x_0| < \lambda|p - x_0|.$$

Temos então, que a distância de $F(p)$ à x_0 é menor do que a distância de p à x_0 , pois $0 < \lambda < 1$. Em particular, $F(p)$ também pertence ao intervalo I . Portanto, podemos aplicar novamente o mesmo argumento para $F(p)$ e $F(x_0)$ e obter

$$\begin{aligned} |F^2(p) - x_0| &= |F^2(p) - F^2(x_0)| \\ &< \lambda|F(p) - F(x_0)| \\ &= \lambda|F(p) - x_0| \\ &< \lambda(\lambda|p - x_0|) \\ &= \lambda^2|p - x_0|. \\ &< \lambda|p - x_0| \end{aligned}$$

Note que $F^2(p)$ está ainda mais próximo de x_0 . Observe ainda, que podemos continuar usando o mesmo argumento para obter

$$|F^n(p) - x_0| < \lambda^n |x - x_0|.$$

Agora, como $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda^n = 0$, $F^n(p) \rightarrow x_0$ quando $n \rightarrow \infty$. \square

Teorema 13. (Teorema do Ponto Fixo Repulsor) *Suponha que x_0 é um ponto fixo repulsor de F . Então existe um intervalo I que contém x_0 em seu interior e com a seguinte condição satisfeita: se $x \in I$ e $x \neq x_0$, então existe um inteiro $n > 0$ tal que $F^n(x) \notin I$.*

Demonstração. A demonstração é análoga a do teorema do ponto fixo atrator. \square

Vejamos agora, alguns exemplos de pontos fixos neutros.

Exemplo 14. *Considere a função identidade $f(x) = x$. Todos os pontos são fixados por f , mas nenhum é atrator ou repulsor.*

Exemplo 15. *Seja $f(x) = -x$. O ponto zero é o único ponto fixo, mas zero não é atrator e nem repulsor, pois*

$$x_0 = x, f(x_0) = -x, f(f(x_0)) = x, \dots, \forall x \in \mathbb{R} - \{0\},$$

isto é, as órbitas dos pontos $x \neq 0$ são 2-ciclos.

Exemplo 16. *A função $f(x) = x - x^2$ tem como ponto fixo $x_0 = 0$. Este ponto é fixo e é atrator à direita e repulsor à esquerda.*

8. Pontos periódicos

Um ponto periódico também pode ser classificado como atrator, repulsor ou neutro. Aqui, o cálculo é um pouco mais complexo e por esta razão, começaremos com um exemplo. Considere a função $F(x) = x^2 - 1$. Note que F tem um ciclo atrator de período 2 com órbita $0, -1, 0, -1, \dots$. Os pontos 0 e -1 são os pontos fixos da segunda iterada $F^2(x) = (x^2 - 1)^2 - 1 = x^4 - 2x^2$.

Temos que $(F^2)'(x) = 4x(x^2 - 1)$, o que implica que $(F^2)'(0) = (F^2)'(-1) = 0$. Logo, $|(F^2)'(0)| < 1$ e $|(F^2)'(-1)| < 1$.

Portanto, os pontos fixos de F^2 , 0 e -1 , são pontos fixos atratores.

Essas idéias nos motivam a estender as definições de atração e repulsão para ciclos de uma maneira natural:

Definição 17. *Um ponto periódico de período n é atrator (repulsor) se é um ponto fixo atrator (repulsor) para F^n .*

Algumas órbitas periódicas podem conter alguns pontos que são atratores e alguns que são repulsores. Para determinar se um ponto periódico x_0 de período n é atrator ou repulsor, devemos computar a derivada da F^n para x_0 . Utilizando a regra da cadeia, temos

$$\begin{aligned} (F^n)'(x_0) &= F'(F^{n-1}(x_0)) \cdot (F^{n-1})'(x_0) \\ &= F'(x_{n-1}) \cdot F'(x_{n-2}) \dots F'(x_0). \end{aligned}$$

9. Dinâmica das Aplicações Quadráticas

Nosso objetivo é entender a dinâmica da família quadrática Q_c , quando o parâmetro c varia. Para isso, encontramos inicialmente seus pontos fixos. Estes pontos são obtidos resolvendo-se a equação $x^2 + c = x$, a qual tem duas raízes:

$$\begin{aligned} p_+ &= \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - 4c}) \\ p_- &= \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4c}). \end{aligned}$$

Dessa forma, concluímos que Q_c não tem pontos fixos, se $c > \frac{1}{4}$, $p_+ = p_- = \frac{1}{2}$, se $c = \frac{1}{4}$ e Q_c tem dois pontos fixos distintos $p_+ > p_-$, se $c < \frac{1}{4}$.

No caso $c > \frac{1}{4}$, o gráfico de Q_c é uma parábola côncava para cima e este gráfico não intercepta a diagonal $y = x$. Assim, a análise gráfica mostra que neste caso, todas as órbitas de Q_c tendem para o infinito e, portanto a dinâmica fica completamente entendida.

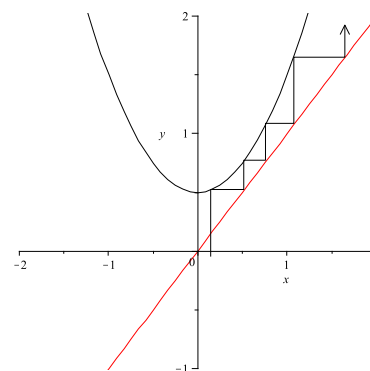


Figura 4: Todas órbitas de $Q_c(x) = x^2 + c$ para $c > \frac{1}{4}$ tendem ao infinito

Quando $c = \frac{1}{4}$, o gráfico de Q_c toca a diagonal em um único ponto e quando $c < \frac{1}{4}$, o gráfico de Q_c toca a diagonal em dois pontos. Portanto, em $c < \frac{1}{4}$, encontramos nossa primeira bifurcação. Bifurcação significa uma divisão em dois. Na próxima seção chamaremos este tipo de bifurcação de sela-nó ou bifurcação tangente.

Podemos verificar que p_{\pm} são atratores, repulsores ou neutros, dependendo do parâmetro c . Uma vez que $Q'_c(x) = 2x$, temos

$$Q'_c(p_+) = 1 + \sqrt{1 - 4c} \text{ e } Q'_c(p_-) = 1 - \sqrt{1 - 4c}.$$

Note que $Q'_c(p_+) = 1$, se $c = \frac{1}{4}$. Assim, p_+ é um ponto fixo neutro. Agora, se $c < \frac{1}{4}$, então $Q'_c(p_+) > 1$, pois $\sqrt{1 - 4c} > 0$ para c nestas condições. Portanto, p_+ é ponto fixo repulsor.

Analisemos agora o ponto fixo p_- . Temos que $Q'_c(p_-) = 1$, quando $c = \frac{1}{4}$, ou seja, neste caso p_- é um ponto fixo neutro.

Quando c é ligeiramente menor que $\frac{1}{4}$, $Q'_c(p_-) < 1$, então p_- torna-se atrator. Observe que

$$\begin{aligned} |Q'_c(p_-)| < 1 &\Leftrightarrow -1 < Q'_c(p_-) < 1 \\ &\Leftrightarrow 0 < \sqrt{1-4c} < 2 \\ &\Leftrightarrow -\frac{3}{4} < c < \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Portanto, p_- é atrator, quando $-\frac{3}{4} < c < \frac{1}{4}$.

Note ainda, que $Q_c(p_-) = 1$, quando $c = -\frac{3}{4}$, e portanto, p_- é neutro. Se $c < -\frac{3}{4}$, então $Q_c(p_-) < -1$. Logo, p_- é repulsor.

Podemos resumir toda a discussão acima, no seguinte resultado:

Proposição 18. (A Primeira Bifurcação) Para a família $Q_c(x) = x^2 + c$

i) Todas as órbitas tendem ao infinito, se $c > \frac{1}{4}$.

ii) Quando $c = \frac{1}{4}$, Q_c tem um único ponto fixo $p_+ = p_- = \frac{1}{2}$, o qual é neutro.

iii) Para todo $c < \frac{1}{4}$, Q_c tem dois pontos fixos p_+ e p_- . O ponto fixo p_+ é sempre repulsor.

a) Se $-\frac{3}{4} < c < \frac{1}{4}$, p_- é atrator.

b) Se $c = -\frac{3}{4}$, p_- é neutro.

c) Se $c < -\frac{3}{4}$, p_- é repulsor.

Se $c \leq \frac{1}{4}$, as dinâmicas mais interessantes ocorrem no intervalo $-p_+ \leq x \leq p_+$. Note que $Q_c(-p_+) = p_+$, então $-p_+$ é um ponto eventualmente fixo. Na verdade, a análise gráfica mostra que, se $p > p_+$ ou $p < -p_+$, então a órbita de p tende ao infinito. Para $-\frac{3}{4} < c < \frac{1}{4}$, todas órbitas no intervalo $(-p_+, p_+)$ tendem para o ponto fixo atrator p_- .

Quando $c < -\frac{3}{4}$ aparece um ciclo de período 2. Para encontrar os pontos de período 2, basta resolver a equação, $Q_c^2(x) = x$, cujas soluções são: $p_+ = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1-4c})$ e $p_- = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4c})$. Daí, fazendo a divisão de $Q_c^2(x)$ por $(x-p_+)(x-p_-)$ encontramos o polinômio $x^2 + x + c + 1$, cujas raízes são os pontos $q_+ = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-4c-3})$ e $q_- = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{-4c-3})$. Desta forma, é fácil ver que, se $c = -\frac{3}{4}$, temos $q_+ = q_- = p_-$, que é um ponto fixo neutro para Q_c . Note que q_+ e q_- são reais se, e somente se, $-4c-3 \geq 0$, ou seja, se $c \leq -\frac{3}{4}$. Portanto, temos um novo tipo de bifurcação chamada *bifurcação de duplicação de período*.

Quando c é menor que $-\frac{3}{4}$, duas coisas acontecem: O ponto fixo p_- se torna repulsor e um novo 2-ciclo surge em q_{\pm} . Note que quando $c = -\frac{3}{4}$, $q_+ = q_- = -\frac{1}{2} = p_-$, então estes períodos se originam em p_- .

Observe que $(Q_c^2)'(q_+) = Q'_c(q_+)Q'_c(q_-) = (-1 + \sqrt{-4c-3})(-1 - \sqrt{-4c-3}) = 4c + 4$, pois $Q_c(q_+) = q_-$. Logo, $|(Q_c^2)'(q_+)| < 1$ se, e somente se, $|4c + 4| < 1$, ou seja, $-\frac{5}{4} < c < -\frac{3}{4}$, $|(Q_c^2)'(q_+)| > 1$, se $c < -\frac{5}{4}$ e finalmente, $|(Q_c^2)'(q_+)| = 1$, se $c = -\frac{5}{4}$.

Portanto, temos demonstrado a seguinte proposição:

Proposição 19. (A Segunda Bifurcação) Para a família $Q_c(x) = x^2 + c$, concluímos que:

i) Para $-\frac{3}{4} < c < \frac{1}{4}$, Q_c tem um ponto fixo atrator em p_- e nenhum 2-ciclo.

ii) Para $c = -\frac{3}{4}$, Q_c tem um ponto fixo neutro em $p_- = q_{\pm}$ e nenhum 2-ciclo.

iii) Para $-\frac{5}{4} < c < -\frac{3}{4}$, Q_c tem dois pontos fixos repulsores p_+ e p_- e q_{\pm} é um 2-ciclo atrator.

iv) Para $c < -\frac{5}{4}$, Q_c tem dois pontos fixos repulsores p_+ e p_- e q_{\pm} é um 2-ciclo repulsor.

10. A bifurcação Sela-Nó

Consideraremos uma família de funções a um parâmetro F_{λ} . Para cada parâmetro λ , F_{λ} é um função de x . Por exemplo, $F_{\lambda}(x) = \lambda x(1-x)$, $S_{\lambda}(x) = \lambda \sin x$ e $E_{\lambda}(x) = e^x + \lambda$ são todas famílias de funções a um parâmetro.

Bifurcações ocorrem em uma família de funções a um parâmetro quando existe uma mudança na estrutura do ponto fixo ou periódico quando λ passa por algum valor particular de parâmetro. Entre as mais importantes bifurcações está a *sela-nó ou bifurcação tangente*.

Definição 20. Uma família de funções F_{λ} sofre uma bifurcação sela-nó (ou tangente) no parâmetro de valor λ_0 , se existe um intervalo aberto I e um $\epsilon > 0$ tal que:

1. Para $\lambda_0 - \epsilon < \lambda < \lambda_0$, F_{λ} não tem pontos fixos no intervalo I .

2. Para $\lambda = \lambda_0$, F_{λ} tem um ponto fixo em I e este ponto fixo é neutro.

3. Para $\lambda_0 < \lambda < \lambda_0 + \epsilon$, F_{λ} tem dois pontos fixos em I , um atrator e um repulsor.

Intuitivamente, esta definição significa o seguinte: uma bifurcação sela-nó ou tangente, ocorre se as funções F_{λ} não tem pontos fixos no intervalo I , para valores de λ ligeiramente menores que λ_0 , tem exatamente um ponto fixo em I , quando $\lambda = \lambda_0$, e tem exatamente dois pontos fixos em I , para λ 's ligeiramente maiores que λ_0 .

Exemplo 21. A família quadrática $Q_c(x) = x^2 + c$ tem uma bifurcação sela-nó em $c = \frac{1}{4}$, como discutido previamente.

Neste exemplo podemos tomar o intervalo I como sendo toda a reta real. Não existem pontos fixos quando $c > \frac{1}{4}$, existe um ponto fixo neutro quando $c = \frac{1}{4}$ e um par de pontos fixos (um

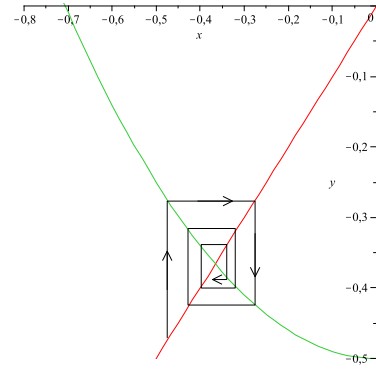
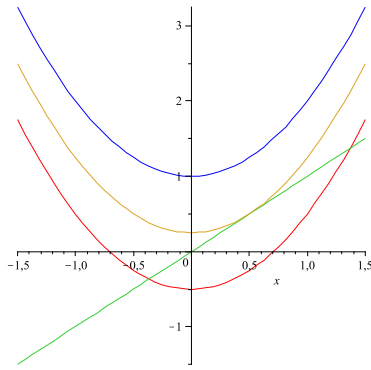


Figura 5: Em azul, $Q_1(x)$; em amarelo, $Q_{\frac{1}{4}}(x)$; em vermelho, $Q_{-\frac{1}{2}}(x)$; em verde, a reta $y = x$.

atrator e um repulsor) para $-\frac{3}{4} < c < \frac{1}{4}$. Note que podemos tomar $\epsilon = 1$ neste exemplo.

11. A Bifurcação de Duplicação de Período

Definição 22. Uma família de funções a um parâmetro F_λ , sofre uma bifurcação de duplicação de período no parâmetro de valor $\lambda = \lambda_0$, se existe um intervalo aberto I e um $\epsilon > 0$ tal que:

1. Para cada λ no intervalo $[\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon]$, existe um único ponto fixo p_λ para F_λ em I .
2. Para $\lambda_0 - \epsilon < \lambda \leq \lambda_0$, F_λ não tem 2-ciclos em I e p_λ é atrator (respectivamente, repulsor).
3. Para $\lambda_0 < \lambda < \lambda_0 + \epsilon$, existe um único 2-ciclo q_λ^1, q_λ^2 em I com $F_\lambda(q_\lambda^1) = q_\lambda^2$. Este 2-ciclo é atrator (respectivamente repulsor). Enquanto, o ponto fixo p_λ é repulsor (respectivamente atrator).
4. Quando $\lambda \rightarrow \lambda_0$, temos $q_\lambda^i \rightarrow p_{\lambda_0}$.

Exemplo 23. Considere a família $F_\lambda(x) = \lambda x - x^3$. Note que esta família tem um ponto fixo em 0, para todo λ . Quando $-1 < \lambda < 1$, este ponto fixo é atrator. Quando $\lambda = -1$, 0 é neutro. E quando $\lambda < -1$, 0 é repulsor.

Uma bifurcação de duplicação de período ocorre em $\lambda = -1$. O caminho mais fácil para verificar isso, é notar que F_λ é uma função ímpar. Isto é, $F_\lambda(-x) = -F_\lambda(x)$ para todo x . Em particular, se $F_\lambda(x_0) = -x_0$, então temos $F_\lambda^2(x_0) = F_\lambda(-x_0) = -F_\lambda(x_0) = x_0$. Deste modo, podemos resolver a equação $F_\lambda(x) = -x$ para encontrar 2-ciclos. Isto produz a equação

$$\lambda x - x^3 = -x,$$

cujas raízes são $x = 0, \sqrt{\lambda + 1}, -\sqrt{\lambda + 1}$. O ponto 0 é nosso ponto fixo, e as outras raízes formam um 2-ciclo. Observe que este ciclo aparece somente quando $\lambda > -1$.

12. O caso $c = -2$

Vamos analisar as órbitas de $Q_{-2}(x) = x^2 - 2$. Lembre-se que toda dinâmica interessante de Q_c está situada em $-p_+ \leq x \leq$

p_+ , onde p_+ é o ponto fixo repulsor, com $p_+ > 0$. Para $c = -2$, temos $p_+ = 2$, então nos concentraremos no intervalo $[-2, 2]$, o qual chamaremos de I .

Observe que Q_{-2} é estritamente crescente em $[0, 2]$, e leva este subintervalo em I de maneira injetora. Analogamente, Q_{-2} é estritamente decrescente no subintervalo $[-2, 0]$ e também leva este subintervalo em I de maneira injetora. Logo, todo ponto de I , (exceto -2), tem duas pré-imagens em I , uma em $[-2, 0]$ e a outra em $[0, 2]$.

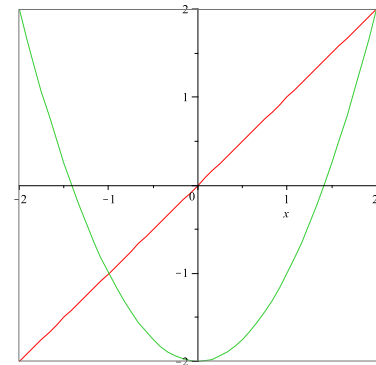
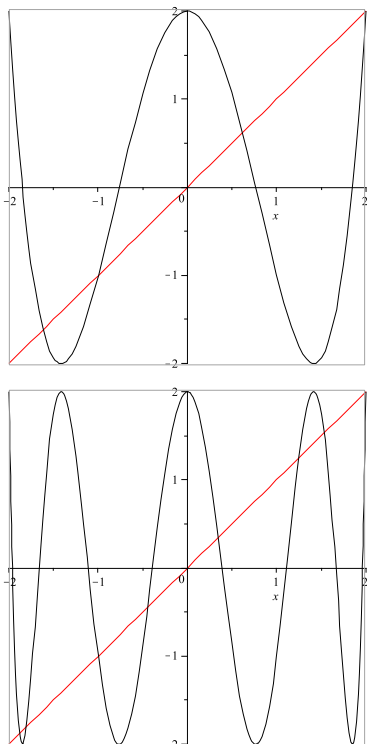


Figura 6: Em verde Q_{-2} e em vermelho $y = x$.

Sabemos que $[0, 2]$ e $[-2, 0]$ são ambos levados por Q_{-2} em I , assim, com exceção do ponto -2, todos os pontos de I tem duas pré-imagens em $[0, 2]$ por Q_{-2}^2 e o mesmo ocorre para $[-2, 0]$. Dessa forma, conseguimos encontrar 2 “vales” em Q_{-2}^2 e 4 intervalos que são levados por Q_{-2}^2 em I . Usando o mesmo argumento, podemos encontrar 4 “vales” em Q_{-2}^3 e 8 intervalos que são levados pela Q_{-2}^3 em I .

Seguindo a mesma linha de raciocínio, veremos que Q_{-2}^n tem 2^{n-1} “vales” em I . O gráfico de Q_{-2}^n , intercepta a diagonal, no mínimo, 2^n vezes em I . Cada cruzamento fornece um ponto periódico de período n . Então, temos o seguinte resultado:

Teorema 24. A função Q_{-2} tem no mínimo 2^n pontos periódicos de período n no intervalo $-2 \leq x \leq 2$.



13. O caso $c < -2$

Considere o intervalo $I = [-2, 2]$. Para $c < -2$, a órbita de alguns pontos não permanecem neste intervalo I e tendem para o infinito. Porém, existem órbitas que nunca deixam o intervalo I , como por exemplo, a órbita dos pontos fixos.

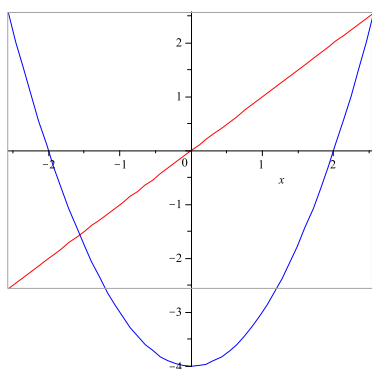


Figura 7: Gráfico de Q_c para $c < -2$.

Denotemos por λ , o conjunto de pontos cuja órbita nunca deixa o intervalo I . Isto é,

$$\Lambda = \{x \in I / Q_c^n(x) \in I, \forall n\}.$$

Seja A_1 , o intervalo constituído pelos pontos cuja primeira iterada sai do intervalo I . Assim, as órbitas desses pontos, tendem para o infinito. Para a segunda iterada, temos um par de intervalos que chamaremos de A_2 , constituído pelos pontos onde

a segunda iterada sai do intervalo I . Logo, as órbitas desses pontos tendem para o infinito. Assim, continuando o processo, teremos o conjunto A_n , constituído pelos pontos cuja n -ésima iterada sai do intervalo I cujas órbitas tendem para o infinito. Retirando os conjuntos A_1, A_2, \dots, A_n do intervalo I teremos o conjunto λ .

Teorema 25. *Suponha $c < -2$. Então o conjunto de pontos de Λ cujas órbitas sobre Q_c não tendem ao infinito é um conjunto fechado, não-vazio em I que não contém intervalos.*

Demonstração. Temos que os dois pontos extremos do intervalo I pertencem ao conjunto λ . Além disso, os pontos extremos de cada conjunto A_i , com $i = 1, \dots, n$ que foram retirados do intervalo I também pertencem ao conjunto λ . Logo, o conjunto λ não é vazio.

Vamos mostrar que Λ não contém intervalos. Suponha que $c < -\frac{(5 + 2\sqrt{5})}{4} \cong -2.368$. Logo, $|Q'_c(x)| > 1, \forall x \in I - A_1$. Em particular, existe uma constante $\mu > 1$ de forma que $|Q'_c(x)| \geq \mu \forall x \in I - A_1$.

Suponhamos agora, que Λ contém um intervalo J . Seja l o comprimento do intervalo J , $l > 0$. Como $|Q'_c(x)| > \mu, \forall x \in J$, se x e y são dois pontos quaisquer de J , pelo Teorema do Valor Médio temos

$$|Q_c(x) - Q_c(y)| > \mu|x - y|,$$

isto é, o comprimento do intervalo $Q_c(J)$ é maior do que μl :

$$Q_c(J) > \mu l.$$

Como $J \subset \Lambda$, temos que $Q_c(J) \subset \Lambda$. Dessa forma, usando o mesmo argumento para o intervalo $Q_c(J)$, temos

$$Q_c^2(J) > \mu^2 l,$$

ou seja, o comprimento de $Q_c^2(J)$ é maior do que $\mu^2 l$.

Continuando o processo, obtemos

$$Q_c^n(J) > \mu^n l,$$

que significa que o comprimento de $Q_c^n(J)$ é maior do que $\mu^n l$.

Como $\mu > 1$, quando $n \rightarrow \infty$, temos que $\mu^n \rightarrow \infty$. Isto é uma contradição, pois $Q_c^n(J)$ está contido em Λ que por sua vez, está contido em I que tem comprimento finito.

Por fim, observamos que Λ é um subconjunto fechado de I , pois Λ^c é a união dos conjuntos abertos $(-\infty, p_+), (p_+, +\infty)$ e de todos os A'_n s. □

Observação:

O Teorema 25 é válido para todos os valores de $c < -2$. Na demonstração apresentada acima, supomos que $c < -\frac{(5 + 2\sqrt{5})}{4}$. O caso em que valores de c mais próximos de -2 são considerados, é bem mais difícil e será omitida.

14. O Conjunto do Terço Médio de Cantor

O conjunto do Terço Médio de Cantor, que veremos adiante, é o fractal mais simples definido no intervalo $[0, 1]$.

Para construir este conjunto, começamos com o intervalo $0 \leq x \leq 1$. Deste intervalo removemos o terço médio: o intervalo aberto $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$. Note que deixamos as extremidades para trás. O que sobra é um par de intervalos fechados, cada um deles com um terço do tamanho original. Agora, de cada um dos intervalos que sobraram removemos o terço médio. Isto é, do intervalo $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$ removemos $\frac{1}{9} < x < \frac{2}{9}$, e de $\frac{2}{3} \leq x \leq 1$ removemos $\frac{7}{9} < x < \frac{8}{9}$. Repita este processo várias vezes. Em cada etapa remova o terço médio dos intervalos que sobraram na etapa anterior. O que resta após essas sucessivas retiradas de intervalos abertos, é o que chamamos de Conjunto do Terço Médio de Cantor, que denotaremos por K .

Uma das características notáveis do Conjunto de Cantor é o fato que K é não enumerável. Para verificar isso, fazemos uma breve digressão sobre expansões ternárias de números reais. Relembremos que as séries geométricas

$$\sum_{i=0}^{\infty} a^i = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots$$

convergem se $|a| < 1$ e, na verdade,

$$\sum_{i=0}^{\infty} a^i = \frac{1}{1-a}.$$

Mais geralmente,

$$\sum_{i=k}^{\infty} a^i = \frac{a^k}{1-a}.$$

Definição 26. A sequência de inteiros $0, s_1 s_2 s_3 \dots$ onde cada s_i é 0, 1 ou 2 é chamada expansão ternária de x se

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{s_i}{3^i}.$$

Exemplo 27. A sequência $0, 020202 \dots$ é a expansão ternária de $\frac{1}{4}$ já que

$$\frac{0}{3^1} + \frac{2}{3^2} + \frac{0}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \dots = 2 \left[\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{9} \right)^i \right] = \frac{1}{4}.$$

Observe que se x tem expansão ternária $0, s_1 s_2 s_3 \dots$, então o dígito s_1 determina em qual terço do intervalo $[0, 1]$ x está contido. Se $s_1 = 0$, então $x \in \left[0, \frac{1}{3} \right]$; se $s_1 = 1$, então $x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right]$; se $s_1 = 2$, então $x \in \left[\frac{2}{3}, 1 \right]$. A razão para isso é que a representação das séries de x ,

$$\sum_{i=2}^{\infty} \frac{s_i}{3^i}$$

não são maiores que

$$\sum_{i=2}^{\infty} \frac{2}{3^i} = \frac{1}{3}.$$

Usando esse mesmo argumento, vemos que o segundo dígito s_2 nos diz em qual terço destes subintervalos x está. A razão para isso é que as séries

$$\sum_{i=3}^{\infty} \frac{s_i}{3^i},$$

que representam x , neste caso não são maiores que $\frac{1}{9}$.

Assim, vemos que expansões ternárias tem uma relação direta com os pontos no conjunto de Cantor. Em particular, se x tem expansão ternária com alguma entrada $s_n = 1$, então x deve estar em um dos intervalos que foram removidos durante a construção de K . A única exceção, é se x é um ponto da extremidade desse intervalo, e nesse caso, x tem uma expansão ternária alternativa que não tem 1's. Deste modo podemos dizer que o Conjunto de Cantor é o conjunto de números reais em $[0, 1]$, para o qual existe uma expansão ternária não contendo 1's.

Teorema 28. O conjunto do Terço Médio de Cantor é não enumerável.

Demonstração. Montaremos uma correspondência biunívoca entre pontos no Conjunto de Cantor e pontos no intervalo $[0, 1]$. Dado $x \in K$, considere a expansão ternária de x que não contem 1's. Então troque todo "2" nessa expansão por "1" e considere a sequência resultante como a expansão binária de um número em $[0, 1]$.

Assim, $\frac{1}{4} \in K$. Agora, associamos a $\frac{1}{4}$ a sequência binária $0, 010101 \dots$ que corresponde a $\frac{1}{3}$ visto que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^i = \frac{1}{3}.$$

A correspondência entre sequências binárias e ternárias é claramente bijetora. Como o intervalo $[0, 1]$ é não enumerável, o resultado segue. \square

15. Caos

Agora, introduziremos a noção de caos. Mostraremos que existem alguns sistemas dinâmicos que são caóticos, mas que no entanto, podem ser compreendidos. Descreveremos como isto acontece, primeiramente para a função deslocamento e depois para outros exemplos inclusive para a família quadrática.

16. As propriedades de um Sistema Caótico

Definição 29. Suponhamos que X é um conjunto e Y um subconjunto de X . Dizemos que Y é denso em X se, para

qualquer $x \in X$, existe y em Y arbitrariamente próximo de x . Equivalentemente, Y é denso em X , se para qualquer $x \in X$, conseguirmos encontrar uma sequência $\{y_n\} \in Y$ que converge para x .

Exemplo 30. O conjunto dos números racionais é denso em \mathbb{R} .

Seja x um número real qualquer. Devemos encontrar uma sequência de racionais, que converge para x . Se x é racional, não há o que fazer. Suponhamos que x é irracional. Precisaremos da seguinte definição:

Definição 31. O espaço sequência em dois símbolos é o conjunto

$$\Sigma = \{(s_0 s_1 s_2 \dots) \mid s_j = 0 \text{ ou } 1\}.$$

Uma vez que x é um irracional, x tem uma expansão decimal infinita da forma

$$x = a_n \dots a_0, b_1 b_2 b_3 \dots,$$

onde os a_i 's e os b_j 's são dígitos de 0 a 9. Agora, para $j = 1, 2, 3, \dots$, seja

$$x_j = a_n \dots a_0, b_1 b_2 \dots b_j.$$

Como x_j tem uma expansão decimal finita, x_j é um número racional. Claramente $x_j \rightarrow x$ quando $j \rightarrow +\infty$. Logo, existe um sequência de números racionais convergindo para x e, portanto, \mathbb{Q} é denso em \mathbb{R} .

Definição 32. A aplicação deslocamento $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ é definida por

$$\sigma(s_0 s_1 s_2 \dots) = (s_1 s_2 s_3 \dots)$$

Estudaremos agora, a dinâmica da aplicação deslocamento σ , no espaço das sequências Σ . Nossa primeira observação é que o subconjunto de Σ que consiste de todos os pontos periódicos em Σ é um subconjunto denso. Para isto, devemos mostrar que, dado qualquer $s = (s_0 s_1 s_2 \dots)$ em Σ , podemos encontrar um ponto periódico arbitrariamente próximo de s .

Tomemos $\varepsilon > 0$ e $n \in \mathbb{Z}$, tal que $\left(\frac{1}{2}\right)^n < \varepsilon$. Precisaremos do seguinte resultado:

Teorema 33. (Teorema da Proximidade) Sejam $s, t \in \Sigma$ e suponha $s_i = t_i$, $i = 0, 1, \dots, n$. Então, $d[s, t] \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Reciprocamente, se $d[s, t] \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$, então $s_i = t_i$, para $i \leq n$.

Acima, $d[s, t] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}$ denota a distância entre $s = (s_0 s_1 s_2 \dots)$ e $t = (t_0 t_1 t_2 \dots) \in \Sigma$. Além disso, d é uma métrica em Σ .

Podemos agora escrever um ponto periódico que dista $\frac{1}{2^n}$ unidades de s . Seja $t_n = (s_0 s_1 \dots s_n s_0 s_1 \dots s_n)$. As primeiras $(n + 1)$ entradas de t_n e s são as mesmas. Assim, pelo Teorema da Proximidade:

$$d[s, t_n] \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

Uma vez que ε e s são arbitrários, encontramos uma sequência (t_n) que converge para s quando $n \rightarrow \infty$.

A segunda propriedade de σ é que existe um ponto cuja órbita é densa em Σ . Isto é, podemos encontrar uma órbita a qual fica arbitrariamente próxima de qualquer ponto de Σ . Claramente, este tipo de órbita não pode ser periódica. Vamos descrever tal órbita.

Considere o ponto

$$\hat{s} = (\underbrace{0\ 1}_{1 \text{ bloco}} \ \underbrace{00\ 01\ 10\ 11}_{2 \text{ blocos}} \ \dots).$$

Isto é, \hat{s} é a sequência que consiste de todos os possíveis blocos de 0's e 1's de comprimento 1, em seguida os de comprimento 2 e assim sucessivamente. O ponto \hat{s} tem uma órbita que forma um subconjunto denso de Σ .

Tomemos $s = (s_0 s_1 s_2 \dots)$, $\varepsilon > 0$ e n , tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Mostraremos agora, que a órbita de \hat{s} está a uma distância de $\frac{1}{2^n}$ de s .

Temos que um dos blocos de \hat{s} de comprimento $n + 1$ cujos dígitos são $s_0 s_1 \dots s_n$. Suponhamos que a entrada s_0 é o k -ésimo dígito na sequência. Logo, se aplicarmos σ^k em \hat{s} , teremos que as primeiras $n + 1$ entradas de $\sigma^k(\hat{s})$ serão $s_0 s_1 \dots s_n$. Então, pelo Teorema da Proximidade temos

$$d[\sigma^n(\hat{s}), s] \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

O conceito de transitividade que apresentaremos a seguir, está intimamente relacionado com a propriedade de órbita densa.

Definição 34. Um sistema dinâmico é transitivo, se para qualquer par de pontos x e y e qualquer $\varepsilon > 0$ existir um terceiro ponto z a uma distância de no máximo ε de x , e sua órbita está a uma distância ε de y .

Um sistema dinâmico que tem uma órbita densa é transitivo. A recíproca também é verdadeira.

A terceira propriedade da função deslocamento é a dependência sensível das condições iniciais.

Definição 35. Um sistema dinâmico F depende sensitivamente das condições iniciais se existe $\beta > 0$, tal que $\forall x$ e $\forall \varepsilon > 0$, existe y a uma distância menor do que ε de x e existe um número natural k , tal que a distância entre $F^k(x)$ e $F^k(y)$ é pelo menos β .

Verificaremos que a aplicação σ , depende sensitivamente das condições iniciais. Para isto, tomemos $\beta = 1$. Para qualquer $s \in \Sigma$ e $\varepsilon > 0$ escolhamos n , tal que $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Suponha que $t \in \Sigma$ satisfazendo $d[s, t] < \frac{1}{2^n}$, mas $t \neq s$. Então, temos que $t_i = s_i$, para $i = 0, 1, \dots, n$. No entanto, como $t \neq s$, existe $k > n$, tal que $s_k \neq t_k$. Logo, $|s_k - t_k| = 1$.

Consideremos $\sigma^k(s)$ e $\sigma^k(t)$. As entradas iniciais de cada uma das sequências são diferentes e, portanto,

$$d[\sigma^k(s), \sigma^k(t)] \geq \frac{|s_k - t_k|}{2^0} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{0}{2^i} = 1 = \beta.$$

Isto prova que a aplicação deslocamento depende sensitivamente das condições iniciais.

As três propriedades discutidas acima, são os ingredientes básicos de um sistema caótico:

Definição 36. Um sistema dinâmico F é caótico se:

- 1) Os pontos periódicos de F são densos.
- 2) F é transitivo.
- 3) F depende sensitivamente das condições iniciais.

Vimos que a aplicação deslocamento satisfaz as três condições necessárias para um sistema dinâmico ser caótico. Logo, provamos o seguinte teorema:

Teorema 37. $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ é um sistema dinâmico caótico.

Nosso objetivo agora é mostrar que para parâmetros c 's adequados, a família quadrática $Q_c(x) = x^2 + c$ é caótica no conjunto $\Lambda = \{x \in I / Q_c^n(x) \in I, \forall n\}$, $I = [-2, 2]$. Para isto, apresentaremos algumas definições e resultados que serão utilizados.

Definição 38. Uma aplicação h é um homeomorfismo, se h é contínua, bijetora e h^{-1} é contínua.

Definição 39. Sejam $F : X \rightarrow X$ e $G : Y \rightarrow Y$ duas funções. Dizemos que F e G são conjugadas, se existe um homeomorfismo $h : X \rightarrow Y$, tal que $h \circ F = G \circ h$. A aplicação h é chamada conjugação.

Proposição 40. (A Proposição da Densidade) Suponha $F : X \rightarrow Y$ contínua e sobrejetora e suponha $D \subset X$ é um subconjunto denso. Então $F(D)$ é denso em Y .

Demonstração: Tome $y_0 \in Y$ e $\varepsilon > 0$. Como F é sobrejetora, existe $x_0 \in X$ tal que $F(x_0) = y_0$. Como F é contínua, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, então $F(x) \in (F(x_0) - \varepsilon, F(x_0) + \varepsilon)$. Como D é denso em X , podemos tomar $\bar{x} \in D$, com $\bar{x} \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Portanto, $z = F(\bar{x}) \in F(D)$ e $z \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$. Portanto $F(D)$ é denso em Y .

Agora, considere $\Lambda = \{x \in I / Q_c^n(x) \in I, \forall n\}$, $I = [-2, 2]$ e A_1 o intervalo constituído pelos pontos cuja primeira iterada de Q_c sai do intervalo I , como definidos no capítulo anterior. Para valores de $c < -2$, o conjunto $I - A_1$ consiste de dois intervalos fechados que serão denotados por I_0 e I_1 . Note que tais intervalos são disjuntos.

Definição 41. Seja $x \in \Lambda$. O itinerário de x é a sequência infinita de 0's e 1's dada por

$$S(x) = (s_0 s_1 s_2 \dots),$$

onde $s_j = 0$, se $Q_c^j(x) \in I_0$ e $s_j = 1$, se $Q_c^j(x) \in I_1$.

Teorema 42. Suponha $c < -\frac{(5 + 2\sqrt{5})}{4}$. Então $S : \Lambda \rightarrow \Sigma$ é um homeomorfismo.

Demonstração. Para a demonstração deste teorema, veja a referência [1]. \square

Teorema 43. Se $x \in \Lambda$, então $S \circ Q_c(x) = \sigma \circ S(x)$.

Demonstração. Para a demonstração deste teorema, veja a referência [1]. \square

Teorema 44. (Teorema da Conjugação) A aplicação deslocamento em Σ é conjugada de Q_c em Λ , quando $c < \frac{(5 + 2\sqrt{5})}{4}$.

Demonstração. Para a demonstração deste teorema, veja a referência [1]. \square

Teorema 45. Suponha $c < -\frac{(5 + 2\sqrt{5})}{4}$. Então a aplicação quadrática $Q_c(x) = x^2 + c$ é caótica no conjunto Λ .

Demonstração. Temos que $S : \Lambda \rightarrow \Sigma$ é uma conjugação para valores de $c < -\frac{(5 + 2\sqrt{5})}{4}$. Daí, temos que S é um homeomorfismo, ou seja, S é injetora, sobrejetora, contínua e possui inversa contínua.

Portanto, a proposição densidade garante que o conjunto de pontos periódicos de Q_c é denso em Λ , desde que S^{-1} leve pontos periódicos de σ em pontos periódicos de Q_c .

Também, se s' é uma órbita densa para σ , então a proposição da densidade garante que a órbita de $S^{-1}(s')$ é uma órbita densa para Q_c , e então Q_c é transitivo.

Agora, para provar que Q_c é caótico, precisamos exibir uma dependência sensitiva.

Lembremos que Λ está contido na união de dois intervalos fechados I_0 e I_1 os quais são disjuntos. Escolhamos β menor que a distância mínima entre estes intervalos. Seja $x, y \in \Lambda$ com $x \neq y$. Uma vez que S é um homeomorfismo, $S(x) \neq S(y)$. Como consequência, estas duas sequências diferem em alguma entrada, digamos na k -ésima. Isto significa que $Q_c^k(x)$ e $Q_c^k(y)$ permanecem cada um em um intervalo I_j . Daí, a distância entre $Q_c^k(x)$ e $Q_c^k(y)$ é ao menos β . Portanto, qualquer órbita próxima de x , em algum momento se separa da órbita de x a uma distância de pelo menos β .

Portanto, a família quadrática $Q_c(x) = x^2 + c$ é caótica no conjunto Λ . \square

17. Outros Sistemas Caóticos

Na seção anterior, mostramos que a aplicação quadrática Q_c é caótica no conjunto Λ , quando $c < -\frac{5 + 2\sqrt{5}}{4}$. De certa forma, este resultado pode parecer insatisfatório, pois o conjunto Λ no qual Q_c é caótica é "pequeno", na verdade, Λ é um conjunto de Cantor. Nesta seção, mostraremos que a aplicação quadrática $Q_{-2}(x) = x^2 - 2$ é caótica em todo o intervalo $[-2, 2]$.

Teorema 46. A função $Q_{-2}(x) = x^2 - 2$ é caótica em $[-2, 2]$.

Demonstração. Considere a função $V(x) = 2|x| - 2$. Veja o gráfico de V na figura (6.1). Note que o gráfico leva o intervalo $[-2, 2]$ nele mesmo, exatamente como $Q_{-2} = x^2 - 2$.

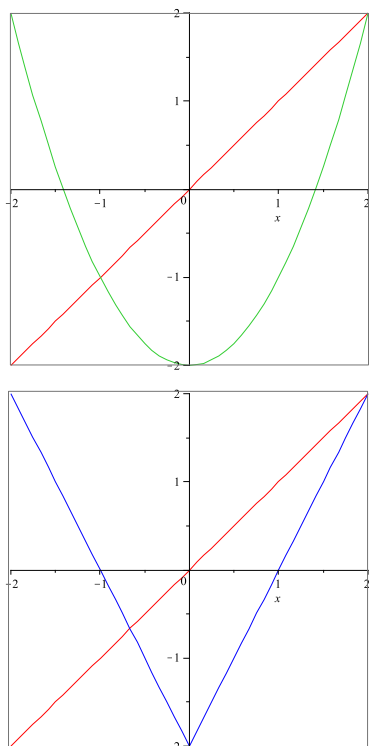


Figura 8: Em verde, $Q_{-2}(x)$; em azul, $V(x)$; em vermelho a reta $y = x$.

A análise gráfica mostra que se $|x| > 2$, então a órbita de x sobre V tende ao infinito, novamente como ocorre com $Q_{-2} = x^2 - 2$. Observe que

$$V^2(x) = 2|2|x| - 2| - 2 = |4|x| - 4| - 2.$$

Assim,

$$V^2(x) = \begin{cases} 4x - 6, & \text{se } x \geq 1 \\ -4x + 2, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 4x + 2, & \text{se } -1 < x < 0 \\ -4x - 6, & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$

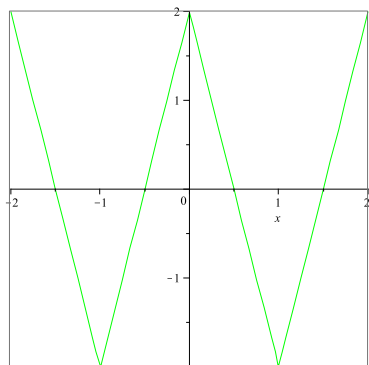


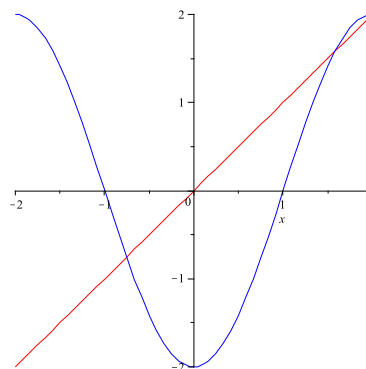
Figura 9: $V^2(x) = |4|x| - 4| - 2$

Note que o gráfico de V^2 consiste de 4 fragmentos lineares, cada um com coeficiente angular 4 ou -4. Em geral, o gráfico

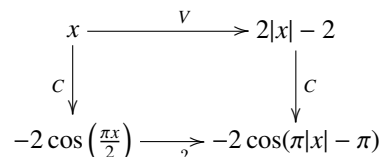
de V^n consiste de 2^n fragmentos, cada um com coeficiente angular 2^n ou -2^n . Cada uma dessas porções lineares do gráfico é definida num intervalo de comprimento $\frac{1}{2^{n-2}}$.

Para comprovar que V é caótico, consideremos um subintervalo aberto J em $[-2, 2]$. Note que conforme a observação acima podemos sempre encontrar um subintervalo de J , de comprimento $\frac{1}{2^{n-2}}$ no qual o gráfico de V^n estende-se de -2 a 2 . Em particular, V^n tem um ponto fixo em J , então, isso prova que pontos periódicos são densos em $[-2, 2]$. Além disso, a imagem de J cobre todo o intervalo $[-2, 2]$ e, portanto, V é transitivo. Finalmente, para qualquer $x \in J$, existe um $y \in J$ tal que $|V^n(x) - V^n(y)| \geq 2$. Deste modo, podemos escolher $\beta = 2$ e temos a dependência das condições iniciais.

Agora, usaremos este fato para provar que Q_{-2} é também caótica. Considere a função $C(x) = -2 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$. Esta função leva o intervalo $[-2, 2]$ nele mesmo. Ver figura



Considere o diagrama:



Gostaríamos de descobrir qual aplicação completa o diagrama acima. Observe que

$$\begin{aligned} -2 \cos(\pi|x| - \pi) &= 2 \cos(\pi|x|) \\ &= 2 \cos(\pi x) \\ &= 2 \cos\left(2 \cdot \frac{\pi x}{2}\right) \\ &= 4 \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) - 2 \\ &= \left(2 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)^2 - 2 \\ &= \left(-2 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)^2 - 2 \end{aligned}$$

Isto é, F é a função que satisfaz:

$$-2 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \xrightarrow{F} \left(-2 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)^2 - 2.$$

Fazendo $u = -2 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ temos $F(u) = u^2 - 2 = Q_{-2}(u)$. Assim, obtemos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} [-2, 2] & \xrightarrow{V} & [-2, 2] \\ c \downarrow & & \downarrow c \\ [-2, 2] & \xrightarrow{Q_{-2}} & [-2, 2] \end{array}$$

Apesar de parecer, C não é uma conjugação, pois C não é injetora e, portanto, não é um homeomorfismo. No entanto, o diagrama comutativo mostra que C leva órbitas de V em órbitas de Q_{-2} . Observe ainda, que C leva ciclos em ciclos, (mas C não preserva necessariamente o período dos ciclos). Uma vez que C é contínua e sobrejetora, a Proposição da Densidade mostra que Q_{-2} tem pontos periódicos que são densos, assim como uma órbita densa. Já que n pode ser escolhido tal que V^n aplique arbitrariamente intervalos pequenos sobre todo $[-2, 2]$, o mesmo deve ser verdade para Q_{-2} . Isto prova a dependência sensitiva e concluímos que $Q_{-2}(x) = x^2 - 2$ é caótica em $[-2, 2]$. \square

18. Fractais

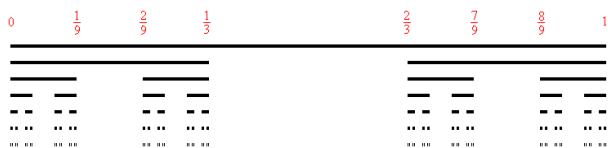
Neste capítulo iremos estudar a geometria de determinados conjuntos, chamados fractais.

Definição 47. *Um fractal é um subconjunto de \mathbb{R}^n , o qual é auto-similar e cuja dimensão fractal, que definiremos adiante, excede a dimensão topológica.*

Começamos o estudo da geometria de fractais considerado três exemplos importantes:

19. O conjunto de Cantor

O conjunto do Terço-Médio de Cantor K , é obtido através de sucessivas remoções de intervalos abertos do intervalo $[0, 1]$, os quais são o terço médio do intervalo anterior.



Uma das mais importantes propriedades de um fractal é conhecida como auto-similaridade. A grosso modo, auto-similaridade significa que se ampliarmos uma parte microscópica deste fractal, a imagem que obteremos será semelhante a original. Por exemplo, note que K pode ser decomposto em dois subconjuntos distintos, a porção de K em $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ e a porção em $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Se examinarmos cada uma destas porções, vemos que elas assemelham-se ao conjunto de Cantor original K . A única diferença é que o intervalo original (utilizado na

construção do conjunto de Cantor) é menor por um fator de $\frac{1}{3}$, isto significa que se ampliarmos cada uma destas porções de K , por um fator de 3, obteremos o conjunto original.

Mais precisamente, para ampliar estas porções de K , usamos transformações afim.

Seja $L(x) = 3x$. Se aplicarmos L a porção de K em $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, vemos que L leva $\left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right]$ em $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$, $\left[\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right]$ em $\left[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right]$, e assim por diante. Cada “abertura” na porção de K em $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ é levada pela transformação L em uma “abertura” em K . Para ampliarmos porção de K em $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ usamos a transformação afim, $R(x) = 3x - 2$.

Note também que, na n -ésima etapa da construção do conjunto de Cantor K , teremos 2^n pequenas cópias de K , cada uma das quais pode ser ampliada por um fator de 3^n , para obtermos todo o conjunto de Cantor.

20. O triângulo de Sierpinski

O triângulo de Sierpinski, pode ser construído de forma semelhante ao conjunto de Cantor. Iniciamos com um triângulo equilátero. Unindo os pontos médios de seus lados, obtemos 4 triângulos equiláteros. Removemos o triângulo central obtemos 3 triângulos, cujas dimensões são exatamente metade das do triângulo original. Continuando este processo a imagem resultante será denotada por T e chamada de triângulo de Sierpinski.

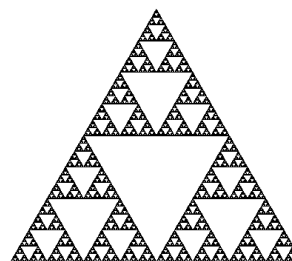


Figura 10: Triângulo de Sierpinski.

O triângulo de Sierpinski também é auto-similar, entretanto, o fator de ampliação é 2. Por exemplo, depois de remover o triângulo equilátero central na primeira etapa da construção, ficamos com três pequenas cópias de T cujas dimensões são metade da dimensão de todo o triângulo.

Na n -ésima etapa desta construção temos 3^n triângulos e cada um deles pode ser ampliado por um fator de 2^n para produzir o triângulo original.

21. O floco de neve de Koch

Diferente do triângulo de Sierpinski, o floco de neve de Koch é gerado por uma infinita sucessão de adições de parte de um triângulo. Começamos com a fronteira de um triângulo equilátero com lados de tamanho 1. O primeiro passo neste processo, é remover o terço médio de cada lado do triângulo, exatamente como fizemos na construção do conjunto de Cantor. Entretanto, devemos repor cada uma dessas partes com duas partes de tamanho igual, dando à região um formato de estrela. Esta nova figura tem doze lados, cada um com tamanho $\frac{1}{3}$. Repetindo este processo, de cada um dos lados removemos o terço médio e re colocamos uma “protuberância” triangular constituída de duas partes de tamanho $\frac{1}{9}$. Continuando este processo repetidamente obtemos uma curva ondulada. Este objeto é chamado de floco de neve de Koch.

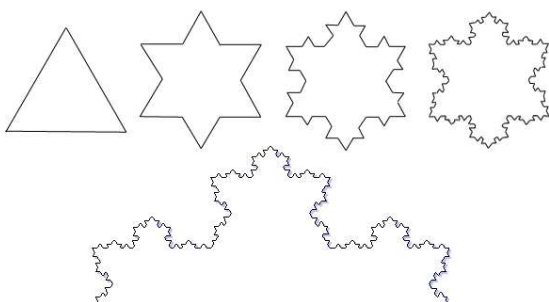


Figura 11: Construção do floco de neve de Koch.

Claramente, existem partes do floco de neve que são auto-similares. Suponha que estamos olhando um dos lados do floco de neve. O que vemos é a chamada curva de Koch.

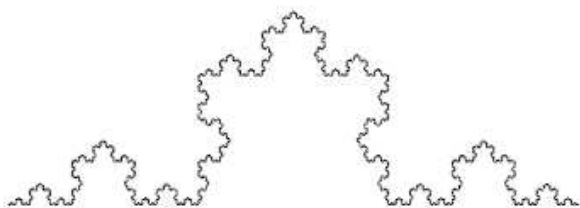


Figura 12: Curva de Koch.

Se examinarmos o terço extremidade desta curva e ampliarmos esta porção por um fator 3, vemos novamente a mesma figura. Em cada etapa da construção da curva de Koch, a ampliação por um fator 3 produz a imagem anterior. Isto significa que a curva de Koch é auto-similar.

O floco de neve de Koch tem uma interessante propriedade geométrica: ele tem área finita mas seu perímetro é infinito!

Para verificar este fato, sejam N_0, N_1, N_2, \dots o número de lados do floco de neve correspondente à etapa da construção.

Então, temos

$$\begin{aligned} N_0 &= 3 \\ N_1 &= 4 \cdot 3 = 12 \\ N_2 &= 4 \cdot 12 = 4^2 \cdot 3 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ N_k &= 4N_{k-1} = 4^k \cdot 3 \end{aligned}$$

Agora vamos computar o perímetro. Seja L_k o tamanho de um segmento do perímetro, depois da k -ésima etapa. No início, cada lado tem tamanho 1; depois da primeira adição, cada lado tem tamanho $\frac{1}{3}$; depois da segunda, cada lado tem tamanho $\frac{1}{3^2}$, e assim por diante. Na k -ésima etapa,

$$L_k = \frac{1}{3^k}.$$

Agora, seja P_k o perímetro da figura na k -ésima etapa. Claramente, $P_n = N_k \cdot L_k$.

Então, tem-se:

$$P_k = N_k \cdot L_k = 4^k \cdot 3 \cdot \frac{1}{3^k} = \left(\frac{4}{3}\right)^k \cdot 3,$$

quando $k \rightarrow \infty, P_k \rightarrow \infty$.

A área contida dentro do floco de neve é mais difícil para computar, mas podemos verificar facilmente, usando geometria plana, que o floco de neve está contido em um quadrado no plano, cujos lados tem tamanho $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Portanto, esta área é certamente menor que $\frac{4}{3}$.

22. Dimensão Topológica

Definição 48. Um conjunto S tem dimensão topológica 0, se para qualquer ponto de S existe uma região arbitrariamente pequena de forma que a fronteira da região não contenha nenhum ponto do conjunto.

Exemplo 49. O conjunto do Terço Médio de Cantor K , tem dimensão topológica 0. Note que, quaisquer dois pontos do conjunto K , são separados por pelo menos uma “abertura”. Logo, para qualquer ponto de K , existe uma região arbitrariamente pequena cuja fronteira não contém nenhum ponto do conjunto.

Definição 50. Um conjunto S tem dimensão topológica k , se para cada ponto do conjunto S , existe uma vizinhança arbitrariamente pequena cuja fronteira intercepta S em um conjunto de dimensão $k-1$ e k é o menor inteiro não negativo para o qual isto ocorre.

Exemplo 51. A reta no plano, tem dimensão topológica 1.

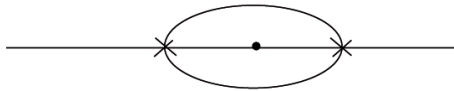


Figura 13: A fronteira da vizinhança intercepta a reta em um conjunto de dimensão 0.

Observe que para qualquer ponto da reta teremos pequenas vizinhanças no plano, cujas fronteiras interceptam a reta em dois pontos, ou seja, a interseção da reta com a fronteira das vizinhanças tem dimensão 0.

23. Dimensão Fractal

Definição 52. Um conjunto S é chamado auto-similar afim, se S pode ser subdividido em k conjuntos congruentes, cada um dos quais pode ser ampliado por um fator constante M , para obtermos todo o conjunto S .

Exemplo 53. O conjunto de Cantor, o triângulo de Sierpinski, o floco de neve de Koch e a reta, são exemplos de conjuntos auto-similares afins.

Definição 54. Suponha que o conjunto auto-similar afim S possa ser subdividido em k partes congruentes, onde cada um destes pedaços pode ser ampliado por um fator M , de forma a gerar S . Então, a dimensão fractal D de S é

$$D = \frac{\log(k)}{\log(M)} = \frac{\log(\text{número de pedaços})}{\log(\text{fator de ampliação})}$$

Exemplo 55. • Segmento de Reta: dividindo um segmento de reta em n partes, seu fator de ampliação também é n . Assim,

$$D = \frac{\log(n)}{\log(n)} = 1$$

Portanto, a dimensão fractal de um segmento de reta é 1.

• Triângulo de Sierpinski: observe que podemos dividir o triângulo original em 3 triângulos congruentes onde o fator de ampliação é 2.

Dessa forma,

$$D = \frac{\log(3)}{\log(2)} = 1.584 \dots$$

Note que D não é um número inteiro!

• Curva de Koch: Cada lado do triângulo original é decomposto em 4 novos lados e o fator de ampliação é 3. Portanto:

$$D = \frac{\log(4)}{\log(3)} = 1.261 \dots$$

Observe que usamos os lados do floco de neve, pois nenhum pedaço deste objeto pode ser ampliado de forma a obtermos todo o floco de neve. No entanto, pedaços dos lados são auto-similares.

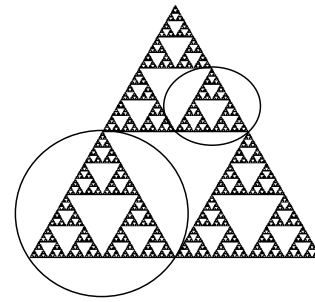


Figura 14: Triângulo de Sierpinski

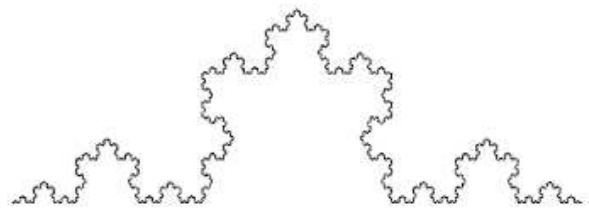


Figura 15: Curva de Koch.

• Conjunto de Cantor: observe que o número de intervalos em cada estágio da construção é 2^n e o fator de ampliação é 3^n . Logo:

$$D = \frac{\log(2^n)}{\log(3^n)} = \frac{n \log(2)}{n \log(3)} = \frac{\log(2)}{\log(3)} = 0.6309 \dots$$

Observação: Pudemos computar facilmente as dimensões nos exemplos acima, pois o fator de ampliação cresce à mesma taxa que o número de pedaços na figura, mas isto nem sempre acontece. Para muitos fractais, a dimensão exata é desconhecida.

Referências

- [1] Devaney, Robert L. *A First Course in Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experiment*, Addison-Wesley Publishing Company, 1992.
- [2] Lima, E. L., *Um curso de Análise*, Vol I, Rio de Janeiro, IMPA, CNPq, 1982.
- [3] Guidorizzi, H. L., *Um curso de cálculo*, Vol I e II, LTC Editora, 5ª Edição.