

ỨNG DỤNG NGUYÊN LÝ CỰC ĐẠI PONTRYAGIN TRONG TỐI ƯU TẦN SỐ DAO ĐỘNG TỰ DO CỦA TRỤC CHỊU XOẮN

Trần Đức Trung, Bùi Hải Lê*, Trần Minh Thúy

Viện Cơ khí, Trường Đại học Bách Khoa Hà Nội, số 1 Đại Cồ Việt, Hai Bà Trưng, Hà Nội

*Email: le.buihai@mail.hust.edu.vn

Đến Tòa soạn: 28/10/2013; Chấp nhận đăng: 15/4/2014

TÓM TẮT

Trong bài báo này, bài toán tối ưu tần số dao động tự do của trục chịu xoắn sử dụng nguyên lý cực đại Pontryagin, một nguyên lý điều khiển tối ưu, được trình bày. Trong đó, biến điều khiển là đường kính của các đoạn trục, hàm mục tiêu chứa các tần số dao động tự do của trục. Các biến đổi trong bài báo cho phép xác định dấu của hệ số tỉ lệ trong điều kiện cần tối ưu của bài toán. Cấu hình tối ưu và tần số tối ưu của trục được khảo sát với các trường hợp tối ưu tần số thứ nhất và thứ hai.

Từ khóa: tần số riêng, nguyên lý cực đại Pontryagin, trục chịu xoắn; tối ưu.

1. MỞ ĐẦU

Bài toán tối ưu trị riêng kết cấu sử dụng nguyên lý cực đại Pontryagin (PMP - Pontryagin's Maximum Principle) đã thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà khoa học trong và ngoài nước.

Sau khi PMP được phát biểu vào năm 1956 nhằm phục vụ ngành công nghiệp vũ trụ, được chứng minh vào năm 1960, nguyên lý này được sử dụng để tối ưu quá trình động lực từ thời điểm đầu t_0 đến thời điểm cuối t_f . Năm 1975, Grinev và Filipov [1], đã áp dụng PMP vào cơ học vật rắn biến dạng. Lúc này, PMP được sử dụng để tối ưu quá trình động lực từ tọa độ đầu x_0 đến tọa độ cuối x_f . Trong [1], bài toán tối ưu lực tới hạn của thanh chịu nén đúng tâm được nghiên cứu dưới dạng một quá trình tối ưu từ x_0 (đầu ngàm) đến tọa độ cuối x_f (đầu tự do). Grinev [2], đã nghiên cứu bài toán tìm kiếm hình dạng tối ưu của các thanh có khối lượng cực tiểu với tần số riêng cho trước sử dụng PMP. Trần Đức Trung và Vũ Thế Bình [3], đã khảo sát ảnh hưởng của khối lượng tập trung tại vị trí tùy ý đến cấu hình tối ưu trong bài toán dao động dọc của thanh có điều kiện biên ngàm – tự do sử dụng PMP. Trần Đức Trung và Nguyễn Dũng [4], đã nghiên cứu bài toán tìm quy luật biến đổi của diện tích mặt cắt ngang trong khoảng cho trước để với độ dài, trị riêng cho trước, biến dạng tuyệt đối của thanh ngàm – tự do đạt cực trị sử dụng PMP. Trần Đức Trung và Nguyễn Dũng [5, 6], đã nghiên cứu bài toán tối ưu lực tới hạn của thanh chịu nén đúng tâm với các điều kiện liên kết khác nhau sử dụng PMP. Szymczak [7], đã nghiên cứu bài toán lực tới hạn cực đại của mặt ổn định xoắn cho cột mảnh chịu nén có mặt cắt ngang hình chữ I đối xứng thay đổi trong khoảng cho trước sử dụng PMP. Szymczak [8], đã trình bày một phương pháp giải bài toán cực tiểu khối lượng của một dầm mảnh với tần số dao động tự do

xoắn cho trước có kể đến ảnh hưởng của lực dọc trục sử dụng PMP. Atanackovic và Simic [9], đã sử dụng PMP, tích phân số và phương pháp Ritz để xác định hình dáng tối ưu của cột Pflüger. Glavardanov và Atanackovic [10], đã sử dụng PMP để thiết lập và giải bài toán hình dáng tối ưu của một thanh đàn hồi chịu lực tập trung chống lại mất ổn định với thể tích nhỏ nhất, có kể đến ảnh hưởng nén, xoắn. Atanackovic [11], đã sử dụng PMP để xác định hình dạng tối ưu của thanh quay tròn chống lại mất ổn định, có khối lượng nhỏ nhất và tốc độ tới hạn cho trước. Atanackovic và Braun [12], đã sử dụng PMP, công thức Rayleigh để xác định hình dáng tối của thanh quay tròn để chống mất ổn định, công thức biến phân được biến đổi về bài toán biên phi tuyến bậc năm, quan hệ tuyến tính giữa thể tích thanh và bình phương tốc độ tới hạn đã được thiết lập. Atanackovic và Novakovic [13], đã sử dụng PMP để xác định hình dáng tối ưu của một dầm đàn hồi trên nền đàn hồi (kiểu Winkler) chịu nén cho trường hợp tối ưu hai trị riêng đầu tiên. Atanackovic [14], đã sử dụng PMP để xác định hình dạng tối ưu chống lại mất ổn định của một cột được đặt trong trọng trường không đổi, liên kết gối tựa đơn giản tại đầu dưới và ngàm tại đầu trên. Jelcic và Atanackovic [15], đã sử dụng PMP để xác định hình dáng tối ưu chống lại mất ổn định với khối lượng nhỏ nhất của một cột quay tròn được đặt trong một trọng trường không đổi dọc theo trục của cột. Braun [16], đã nghiên cứu hình dáng tối ưu chống lại mất ổn định của một thanh quay tròn chịu nén sử dụng PMP. Atanackovic vcs [17], đã nghiên cứu hình dáng tối ưu chống lại mất ổn định của dầm đàn hồi, ngàm hai đầu, được đặt trên nền đàn hồi kiểu Winkler sử dụng PMP. Glavardanov vcs [18], đã nghiên cứu cấu hình tối ưu của dầm Pflüger kích thước micro/nano chống lại mất ổn định với mô hình Eringen's sử dụng PMP.

Nhận xét: Một bài toán tối ưu kết cấu có thể coi là một bài toán quy hoạch toán học (tìm kiếm lời giải tối ưu trong không gian tham số - PS). Để tìm lời giải tối ưu trong PS cho bài toán có n biến thiết kế, tổng số giải pháp khả thi là m^n (giả sử mỗi biến thiết kế được rời rạc thành m giá trị). Khi m và n tăng lên thì thời gian tính toán sẽ rất lớn đặc biệt là với các thuật toán tìm kiếm lời giải tối ưu tổng thể và mang tính ngẫu nhiên như Monte Carlo hay thuật toán di truyền (GA). Sử dụng PMP hay các nguyên lý biến phân (tìm kiếm lời giải tối ưu trong không gian trạng thái - SS) để tìm điều kiện tối ưu có thể **giảm bớt kích thước của không gian tìm kiếm**. Với điều kiện tối ưu thu được, có thể **đánh giá định tính kết quả của bài toán trước khi giải** và bài toán tối ưu gồm n biến thiết kế sẽ được chuyển về n bài toán tối ưu một biến thiết kế. Nếu $m = 100$ và $n = 100$ thì tổng số giải pháp khả thi trong PS và SS lần lượt là 100^{100} và $100 \cdot 100$. PMP cho phép tìm giá trị **cực đại** của hàm Hamilton thỏa mãn hệ phương trình liên hợp Hamilton gồm các biến trạng thái ban đầu và các biến trạng thái liên hợp thay vì giải trực tiếp hàm mục tiêu **cực tiểu**. Trong một số trường hợp các biến trạng thái ban đầu tỉ lệ với các biến trạng thái liên hợp thông qua hệ số tỉ lệ k . Đây là một điều kiện thuận lợi để xác định giá trị cực đại của hàm Hamilton hay giải quyết bài toán tối ưu. Trong các nghiên cứu kể trên, bài toán tối ưu kết cấu được giải quyết với dạng chung như sau: Tối ưu đơn mục tiêu: cực tiểu tổng thể tích của kết cấu; Phải cho trước trị riêng của kết cấu; Sử dụng PMP, trong đó hệ số tỉ lệ k chưa được xác định; Biến điều khiển phải liên tục và không bị chặn. Cách đặt và giải quyết bài toán tối ưu như trên còn nhiều hạn chế vì: Phải sử dụng nguyên lý đối ngẫu chưa được chứng minh chặt chẽ để suy ra bài toán cực đại trị riêng của kết cấu với tổng thể tích cho trước; Nếu không cho trước trị riêng kết cấu thì sẽ thu được nghiệm tầm thường. Trong khi, nếu tìm cực trị (cực đại hoặc cực tiểu) trị riêng của kết cấu thì bài toán sẽ không bị tầm thường ngay cả khi có hoặc không có tổng thể tích cho trước; Chưa giải quyết bài toán với hàm mục tiêu chứa trực tiếp trị riêng của kết cấu hay tối ưu đa mục tiêu đồng thời trị riêng và tổng thể tích kết cấu; Chưa giải quyết trường hợp biến điều khiển không liên tục hoặc bị chặn. Gần đây, nhóm tác giả đã công bố một số công trình nghiên cứu liên quan đến hướng nghiên cứu kể trên. Trong [19] và [20], bài toán tối ưu tần số riêng của trục chịu dao động xoắn sử dụng PMP đã được nghiên cứu. Bài toán tối ưu tần số riêng của dầm chịu dao động uốn sử dụng PMP được trình bày trong [21]. Thiết kế hình dạng tối

ưu của cột Pflüger với lực tới hạn cực đại sử dụng PMP đã được trình bày trong [22]. Đặc biệt, năm 2012, nhóm tác giả đã công bố được 01 bài báo trên tạp chí Meccanica (tạp chí SCI) [23] về tối ưu tần số riêng trục chịu xoắn sử dụng PMP. Bài toán tối ưu trong nghiên cứu này nhằm điều khiển *tần số riêng thứ nhất* của trục chịu xoắn có kể đến ảnh hưởng của khối lượng tập trung và TMD sử dụng PMP để thiết lập điều kiện tối ưu cho bài toán với phiếm hàm mục tiêu Maier. Các kết quả nghiên cứu kể trên của nhóm tác giả đã bước đầu khắc phục được một số hạn chế trong các công trình của các tác giả nước ngoài đã công bố, cụ thể như sau: Đã xác định tường minh hệ số tỉ lệ k giữa hệ phương trình vi phân trạng thái của kết cấu và hệ phương trình vi phân liên hợp trong hàm Hamilton (điều kiện tối ưu của PMP); Hàm mục tiêu chứa trực tiếp trị riêng của kết cấu và có thể chứa đồng thời trị riêng và tổng thể tích kết cấu; Giải trọn vẹn bài toán tối ưu đa mục tiêu gồm trị riêng và thể tích kết cấu với sự thể hiện của tập Pareto; Biến thiết kế (mặt cắt ngang) có thể không liên tục và bị chặn. Trong bài báo này, bài toán tối ưu tần số dao động tự do của trục chịu xoắn sử dụng PMP được trình bày với biến điều khiển là đường kính của các đoạn trục, hàm mục tiêu chứa các tần số dao động tự do của trục. Các biến đổi trong bài báo cho phép xác định dấu của hệ số tỉ lệ trong điều kiện cần tối ưu của bài toán. Cấu hình tối ưu và tần số tối ưu của trục chịu xoắn được khảo sát với các trường hợp tối ưu *tần số riêng thứ nhất và thứ hai*.

2. ĐẶT BÀI TOÁN

Với chiều dài L , khối lượng riêng được cho bài toán dao động xoắn, dao động dọc của thanh và bài toán dao động ngang của dây có chung một phương trình vi phân sóng một chiều.

Trong trường hợp dao động xoắn với góc xoay $\bar{\psi} = \bar{\psi}(x; t)$, G – mô đun đàn hồi trượt của vật liệu, J – mô men quán tính độc cực của mặt cắt ngang, phương trình dao động có dạng:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[GJ(x) \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \right] - J(x) \rho \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial t^2} = 0 \quad (1a)$$

và trong trường hợp dao động dọc của thanh hay dao động ngang của dây căng với $\bar{\psi}(x, t)$ là chuyển vị tương ứng và hằng số vật liệu là E – mô đun đàn hồi chịu kéo nén, đặc trưng hình học của mặt cắt ngang sẽ là F – diện tích, thì, phương trình dao động có dạng:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[EF(x) \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \right] - F(x) \rho \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial t^2} = 0 \quad (1b)$$

Sau khi loại bỏ yếu tố thời gian t nhờ thay $\bar{\psi} = \phi(x) \sin \omega t$ vào (1a) ta có phương trình dạng dao động riêng cho bài toán xoắn (hai bài toán còn lại cũng tương tự):

$$\frac{d}{dx} \left[GJ(x) \frac{d\phi}{dx} \right] + J(x) \rho \omega^2 \phi = 0 \quad (2)$$

ở đây $J(x)$ thay đổi trong một miền hữu hạn. Sự thay đổi này có thể vì hai lí do.

Thứ nhất có thể là theo ý muốn con người để nhận được giá trị max hay min của tần số riêng.

Thứ hai là do kích thước mặt cắt dùng trong tính toán là kích thước danh nghĩa do đó giá trị tần số riêng tính được cũng chỉ là danh nghĩa. Giá trị thực của tần số là bất định và thuộc miền $[\min, \max]$ phụ thuộc vào dung sai kích thước mặt cắt ngang.

Cho điều kiện biên cụ thể là $\phi(0) = 0$ ở đầu trái. Hình thức hóa tần số như một biến trạng thái suy rộng được trình bày trong [1] ta có thể phát biểu bài toán điều khiển tối ưu sau:

Cho hệ phương trình động lực với các biến trạng thái ϕ, M, ω :

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{dx} = \frac{M}{GJ(x)} \\ \frac{dM}{dx} = -J(x)\rho\omega^2\phi \\ \frac{d\omega}{dx} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Ở trạng thái các điểm đầu và cuối $x=0, x=L$ có:

$$\phi(0) = 0, \quad M(L) = 0 \quad (4)$$

Xác định luật điều khiển $J(x)$, ($0 \leq x \leq L$) thỏa mãn điều kiện:

$$J_1(x) \leq J(x) \leq J_2(x) \quad (5)$$

Phiếm hàm Maier ở trạng thái cuối đạt:

$$c\omega(L) = \min (c = \pm 1) \quad (6)$$

ở đây $c = 1$ ứng với $\omega(L) = \min$, $c = -1$ ứng với $\omega(L) = \max$.

3. ỨNG DỤNG PMP ĐỂ TÌM ĐIỀU KIỆN CẦN TỐI ƯU

Trong phần này, PMP [24, 25] được sử dụng để thiết lập điều kiện cần tối ưu tần số riêng cho trục chịu xoắn với các bước được thực hiện lần lượt như sau:

- Xây dựng hàm Hamilton từ (3) với các biến trạng thái liên hợp bổ sung P_ϕ, P_M, P_ω :

$$H = P_\phi \frac{M}{GJ(x)} - P_M J(x)\rho\omega^2\phi \quad (7)$$

- Viết hệ phương trình vi phân liên hợp:

$$\begin{cases} \frac{dP_\phi}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial \phi} = J(x)\rho\omega^2 P_M \\ \frac{dP_M}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial M} = -\frac{M}{GJ(x)} P_\phi \\ \frac{dP_\omega}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial \omega} = 2J(x)\rho\omega\phi P_M \end{cases} \quad (8)$$

Với điều kiện hoành ở hai điểm đầu, cuối của quá trình động lực thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{aligned} P(L) - P(0) + P_M(L) - P_M(0) + M(L) - M(0) - P_\phi(L) + P_\phi(0) &= 0 \\ -P_M(0) - M(0) - P_\phi(0) + c\omega(L) &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Xét tới (4) ta có:

$$P(L) - P(0) + P_M(L) - P_M(0) + M(L) - M(0) - P_\phi(0) + c\omega(L) = 0$$

hay

$$P(L) - P_M(0) - M(0) - P(0) - \phi(0) + (P(L) + c) - P(L) = 0$$

Các biến phân là độc lập nên ta có:

$$P(L) = P_M(0) = P(0) = P(L) + c = 0 \quad (10)$$

Thay ký hiệu cho biến liên hợp:

$$\begin{cases} p_\phi = -M_H \\ p_M = \phi_H \end{cases} \quad (11)$$

cho

$$\begin{cases} \frac{dM_H}{dx} = -J(x)\rho\omega^2\phi_H \\ \frac{d\phi_H}{dx} = \frac{M_H}{GJ(x)} \\ \frac{dP_\omega}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial \omega} = 2J(x)\rho\omega^2\phi_M \end{cases} \quad (12)$$

Ở trạng thái các điểm đầu và cuối $x=0, x=L$ có:

$$\phi_H(0) = 0, \quad M_H(L) = 0 \quad (13a)$$

$$P(0) = P(L) + c = 0 \quad (13b)$$

So sánh hệ (3), (4) và (12), (13b) có thể kết luận về quan hệ giữa các biến trạng thái và biến liên hợp thông qua một hệ số tỉ lệ k :

$$\begin{cases} kM_H = M \\ k\phi_H = \phi \end{cases} \quad (14)$$

Và dấu của k có thể xác định được bằng cách lấy tích phân phương trình cuối trong (12) có tính tới (13b)

$$\int_0^L P_\omega dx = P_\omega(L) - P_\omega(0) = -c = \frac{2\rho\omega^2}{k} \int_0^L J(x)\phi^2 dx \quad (15)$$

Với kết quả (14), (15) nhận được, bài toán điều khiển tối ưu xác định luật điều khiển $J(x)$, ($0 \leq x \leq L$) thỏa mãn điều kiện (5) cho hệ động lực có các biến trạng thái M, ϕ, ω với điều kiện ở điểm đầu, cuối (4) để cực tiểu (6) có điều kiện cần tối ưu:

$$H = -k \left[\frac{M^2}{GJ(x)} + J(x)\rho\omega^2\phi^2 \right] = \max, \quad k = -\frac{2\rho\omega^2}{c} \int_0^L J(x)\phi^2 dx \quad (16)$$

Ta cũng lưu ý là trong các biểu thức chưa hề có nói đến đó là tần số riêng thứ mấy và tích phân hữu hạn trong (15) luôn dương. Điều đó có nghĩa là điều kiện cần tối ưu nhận được là cho tần số riêng bất kỳ. Mặt khác do dạng dao động riêng phụ thuộc vào một hằng số bất định ví dụ giá trị $M(0)$ hay $\phi(L)$ nên điều kiện (15) có thể sử dụng dưới dạng:

$$H = \text{sign}(c) \left[\frac{M^2}{GJ(x)} + J(x)\rho\omega^2\phi^2 \right] = \max, M(0) = 1. \quad (17)$$

4. THUẬT TOÁN

$J_1(x) = J_1 = \text{const}, J_2(x) = J_2 = \text{const}, c = 1$ (hoặc -1), chia L thành 19 đoạn với các nút $0, \dots, 20$.

Bước 1: Chọn $J(x) = J_1$. Giải hệ phương trình vi phân bằng phương pháp số:

$$\begin{cases} \frac{d\phi}{dx} = \frac{M}{GJ(x)} \\ \frac{dM}{dx} = -J(x)\rho\omega^2\phi \end{cases} \quad (18)$$

Với các điều kiện:

$$\phi(0) = 0, M(L) = 0, M(0) = 1 \quad (19)$$

Để có các giá trị tại các nút $\phi_i, M_i, (i = 0, \dots, n-1, n = 20)$ và ω :

Bước 2: Với các giá trị ϕ_i, M_i và ω thay vào:

$$H = \text{sign}(c) \left(\frac{M^2}{GJ(x)} + J(x)\rho\omega^2\phi^2 \right)$$

với các giá trị $J(x) = J_1 + j\Delta, (j = 0, \dots, 9)$ để xác định $J(x)$ ứng với $H = \max$.

Bước 3: Trở lại bước 1 với các giá trị $J(x)$ xác định được cho các nút. Điều kiện dừng chương trình khi ở hai bước lặp liên tục tần số thay đổi ít hơn độ chính xác chấp nhận $\Delta\omega \leq \varepsilon$.

5. VÍ DỤ SỐ

Trong bài báo chọn ví dụ trục ngầm - tự do chịu xoắn có tổng chiều dài $L = 1,9$ m, chia thành 19 đoạn (số nút $n = 20$), mỗi đoạn trục dài bằng nhau và bằng $0,1$ m, $G = 0,769E11$ Pa, $\rho = 8000$ kg/m³.

Các trường hợp được khảo sát bao gồm:

- Trường hợp 1 (TH1): đường kính các đoạn trục $d_i = 0,2$ m ($i = 1 \div 20$).

- Trường hợp 2 (TH2): $d_i \in [0,1; 0,2]$ m, hàm mục tiêu $H_1 = \max$. Hàm mục tiêu (17) sẽ là:

$$H = - \left(\frac{M^2}{GJ(x)} + J(x)\rho\omega_1^2\phi^2 \right) = \max.$$

- Trường hợp 3 (TH3): $d_i \in [0,1; 0,2]$ m, hàm mục tiêu $H_2 = \max$. Hàm mục tiêu (17) sẽ là:

$$H = - \left(\frac{M^2}{GJ(x)} + J(x)\rho\omega_2^2\phi^2 \right) = \max.$$

- Trường hợp 4 (TH4): $d_i \in [0,1; 0,2]$ m, hàm mục tiêu $H_1 = \min$. Hàm mục tiêu (17) sẽ là:

$$H = \left(\frac{M^2}{GJ(x)} + J(x)\rho\omega_1^2\phi^2 \right) = \max .$$

- Trường hợp 5 (TH5): $d_i \in [0,1; 0,2]$ m, hàm mục tiêu $J_2 = \min$. Hàm mục tiêu (17) sẽ là:

$$H = \left(\frac{M^2}{GJ(x)} + J(x)\rho\omega_2^2\phi^2 \right) = \max .$$

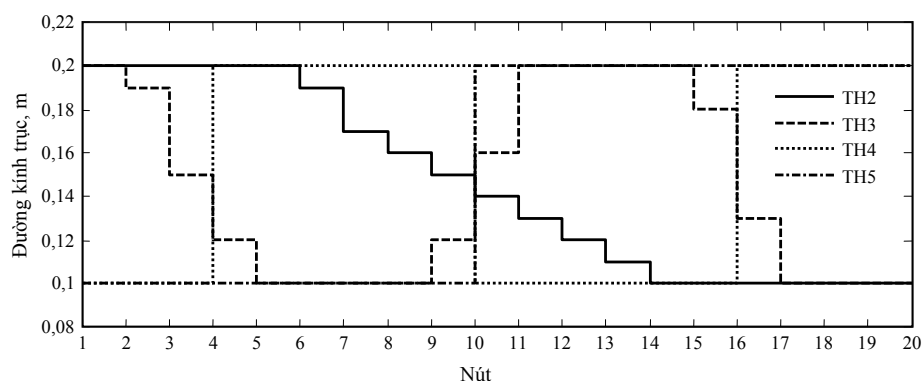
Các kết quả được đưa ra trong phần này bao gồm các giá trị và sự thay đổi của tần số riêng thứ nhất ω_1 , tần số riêng thứ hai ω_2 , hiệu số giữa các tần số riêng $\omega_2 - \omega_1$, tổng thể tích trục V (bảng 1 và 2), cấu hình tối ưu và dạng riêng của trục (hình 1-3).

Bảng 1. Kết quả tính toán tần số riêng và thể tích trục.

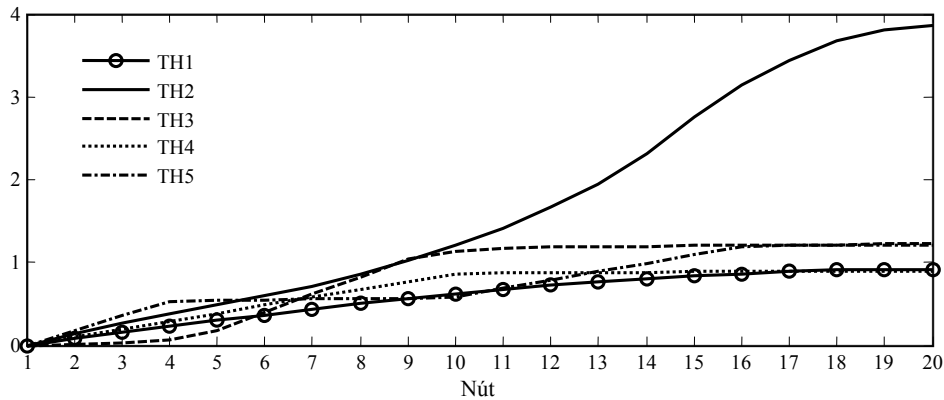
| Trường hợp | ω_1 (rad/s) | ω_2 (rad/s) | $\omega_2 - \omega_1$ (rad/s) | V (m ³) |
|------------|--------------------|--------------------|-------------------------------|-----------------------|
| TH1 | 2564 | 7709 | 5145 | 0.0597 |
| TH2 | 4809 | 7450 | 2641 | 0.0343 |
| TH3 | 1390 | 13432 | 12042 | 0.0340 |
| TH4 | 801 | 9361 | 8560 | 0.0385 |
| TH5 | 1112 | 2429 | 1317 | 0.0385 |

Bảng 2. Sự thay đổi của tần số riêng và thể tích trục, %.

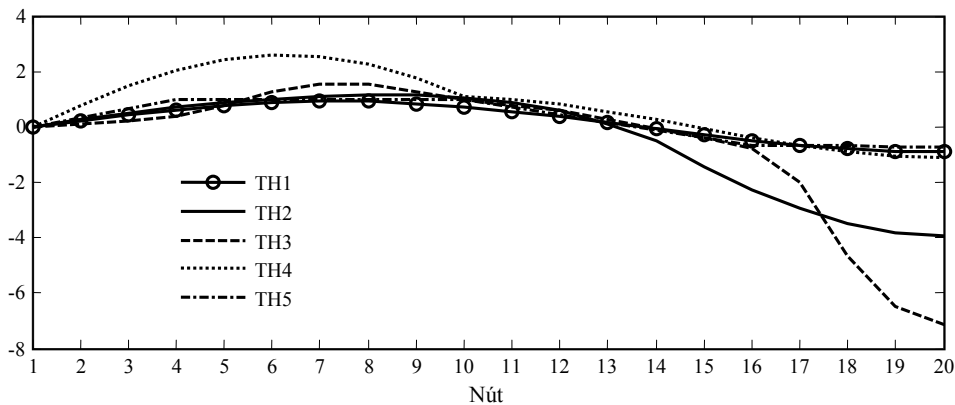
| Trường hợp so sánh | ω_1 | ω_2 | $\omega_2 - \omega_1$ | V |
|--------------------|------------|------------|-----------------------|--------|
| TH2 so với TH1 | + 88% | - 3.6% | - 49% | - 43% |
| TH3 so với TH1 | - 46% | + 74% | + 134% | - 43% |
| TH3 so với TH2 | - 71% | + 80% | + 356% | - 0.9% |
| TH4 so với TH1 | - 69% | + 21% | + 66% | - 36% |
| TH5 so với TH1 | - 57% | - 68% | - 74% | - 36% |
| TH5 so với TH4 | + 39% | - 74% | - 85% | 0% |



Hình 1. Cấu hình tối ưu của trục.



Hình 2. Dạng riêng thứ nhất của trục.



Hình 3. Dạng riêng thứ hai của trục.

Từ bảng 1 và bảng 2, có thể thấy với TH2 ($\omega_1 = \max$), ω_1 tăng 88 %, V giảm 43 %, nhưng hiệu số $\omega_2 - \omega_1$ (thể hiện sự phân tách giữa các tần số) lại giảm 49 % so với TH1.

Trong cả 4 trường hợp tối ưu, tổng thể tích V đều giảm từ 36 đến 43 %.

Nếu cần ưu tiên sự phân tách giữa các tần số, TH3 ($\omega_2 = \max$) có tỉ lệ tăng cao nhất (tăng 134%) và độ phân tách cao nhất (12042 rad/s).

Giá trị thay đổi của ω_1 có thể từ 801 đến 4809 (rad/s), còn ω_2 có thể từ 2429 đến 13432 (rad/s).

TH5 ($\omega_2 = \min$) so với TH4 ($\omega_1 = \min$) có cùng tổng thể tích V , tuy nhiên có sự khác biệt lớn về trị số của ω_1 , ω_2 cũng như hiệu số $\omega_2 - \omega_1$.

TH2 ($\omega_1 = \max$), TH3 ($\omega_2 = \max$), TH4 ($\omega_1 = \min$) có cùng sự thay đổi: khi ω_1 tăng thì ω_2 giảm và ngược lại (khi so với TH1).

Từ hình 1, hình 2 và hình 3 có thể thấy, cấu hình tối ưu có quan hệ tương đối với dạng dao động. Để tăng tần số riêng thì phải tăng biên độ dạng riêng tại những vị trí dạng riêng đạt cực trị cùng với việc giảm tiết diện trục tại những vị trí tương ứng. Để giảm tần số riêng sẽ phải làm ngược lại.

Từ nhận xét này, có thể thiết kế sơ bộ trục theo các mục tiêu về tần số mà chưa cần sử dụng thuật toán tối ưu.

6. KẾT LUẬN

Bài báo đã đề cập đến việc thiết kế cấu hình tối ưu của trục chịu xoắn với những trường hợp hàm mục tiêu khác nhau của các tần số riêng thứ nhất và thứ hai. Các kết quả trên có thể được ứng dụng để tách xa tần số dao động tự do và tần số dao động cưỡng bức trong một số điều kiện hạn chế nhất định cho trục chịu xoắn. Việc sử dụng một nguyên lý điều khiển tối ưu – nguyên lý cực đại Pontryagin – chứng tỏ có thể điều khiển được giá trị giới hạn của dải tần số dao động tự do của trục chịu xoắn cũng như có thể mở rộng cho các đối tượng kết cấu khác.

Lời cảm ơn. Nghiên cứu này được tài trợ bởi Quỹ phát triển khoa học và công nghệ Quốc gia (NAFOSTED) trong đề tài mã số 107.02-2012.03.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Grinev V. B. và Filippov A. P. - Tối ưu hóa các phần tử kết cấu về cơ sở của các đặc trưng cơ học, Nhà xuất bản Naukova Dumka, Kiev (1975) (tiếng Nga).
2. Grinev V. B. - Hình dạng tối ưu của thanh có trọng lượng nhỏ nhất với tần số cho trước, Tạp chí Cơ học ứng dụng Kiev **11** (1975) 13-19 (tiếng Nga).
3. Trần Đức Trung và Vũ Thế Bình - Khảo sát ảnh hưởng của khối lượng tập trung đến cấu hình tối ưu trong bài toán dao động dọc của thanh, Tạp chí Khoa học Kỹ thuật **9** (1977) 19-25.
4. Trần Đức Trung và Nguyễn Dũng - Thanh tối ưu, Tạp chí Khoa học Kỹ thuật **10** (1978) 28-31.
5. Tran Duc Trung và Nguyen Dung - Bài toán thanh có độ cứng tối ưu, Tạp chí Cơ học kết cấu và tính toán công trình Moscva **6** (1979) 72-74 (tiếng Nga).
6. Tran Duc Trung và Nguyen Dung - Một số bài toán tối ưu thanh, Tạp chí Cơ học ứng dụng Kiev **7** (1979) 95-100 (tiếng Nga).
7. Szymczak C. - Optimal Design of Thin Walled I Beams for Extreme Natural Frequency of Torsional Vibrations, Journal of Sound and Vibration **86** (1983) 235-241.
8. Szymczak C. - Optimal Design of Thin Walled I Beams for a Given Natural Frequency of Torsional Vibrations, Journal of Sound and Vibration **97** (1984) 137-144.
9. Atanackovic T. M. and Simic Srboljub S. - On the optimal shape of a Pflüger column, Eur. J. Mech. A/Solids **18** (1999) 903-913.
10. Glavardanov V. B. and Atanackovic T. M. - Optimal shape of a twisted and compressed rod, European Journal of Mechanics A/Solids **20** (2001) 795-809.
11. Atanackovic T. M. - Optimal shape of a rotating rod, J. Appl. Mech. (Trans. ASME) **68** (2001) 860 – 864.
12. Atanackovic T. M. and Braun D. J. - The strongest rotating rod, International Journal of Non-Linear Mechanics **40** (2005) 747 – 754.
13. Atanackovic T. M. and Novakovic B. N. - Optimal shape of an elastic column on elastic foundation, European Journal of Mechanics A/Solids **25** (2006) 154-165.
14. Atanackovic T. M. - Optimal shape of a strongest inverted column, Journal of Computational and Applied Mathematics **203** (2007) 209-218.

15. Jelicic Z. D. and Atanackovic T. M. - Optimal shape of a vertical rotating column, *International Journal of Non-Linear Mechanics* **42** (2007) 172 – 179.
16. Braun D. J. - On the optimal shape of compressed rotating rod with shear and extensibility, *International Journal of Non-Linear Mechanics* **43** (2008) 131-139.
17. Atanackovic T. M., Jakovljevic B. B. and Petkovic M. R. - On the optimal shape of a column with partial elastic foundation, *European Journal of Mechanics A/Solids* **29** (2010) 283-289.
18. Glavardanov V.B., Spasic D.T. and Atanackovic T.M. - Stability and optimal shape of Pflüger micro/nano beam, *International Journal of Solids and Structures* **49** (2012) 2559–2567.
19. Trần Đức Trung và Bùi Hải Lê - Thiết kế tối ưu trục chịu dao động xoắn, Tuyển tập công trình Hội nghị Cơ học toàn quốc Kỷ niệm 30 năm Viện Cơ học và 30 năm Tạp chí Cơ học, Hà Nội, ngày 8-9/4/2009, tr. 396-404.
20. Tran Duc Trung and Bui Hai Le - Optimal control for eigenfrequencies of a torsional shaft system including TMD effect, *Tạp chí Khoa học và Công nghệ* **47** (2009) 37-47.
21. Duc-Trung Tran and Hai-Le Bui - Optimal design of beams in free bending vibration, *International Conference on Engineering Mechanics and Automation (ICEMA 2010)* Hanoi, July 1-2, 2010, pp. 260-267.
22. Tran Duc Trung, Bui Hai Le and Cao Quoc Huong - Analyzing and optimizing of a Pfluger column, *Tạp chí Khoa học và Công nghệ* **48** (2010) 1-12.
23. Minh-Quy Le, Duc-Trung Tran and Hai-Le Bui - Optimal Design of a Torsional Shaft System Using Pontryagin's Maximum Principle, *Meccanica* **47** (2012) 1197–1207.
24. Geering H. P. - *Optimal control with engineering applications*, Springer, Berlin, 2007.
25. Lebedev L. P. and Cloud M. J. - *The calculus of variations and functional analysis with optimal control and applications in mechanics*, World Scientific, Singapore, 2003.

ABSTRACT

APPLICATION OF PONTRYAGIN'S MAXIMUM PRINCIPLE ON OPTIMIZING EIGEN FREQUENCIES OF A TORSIONAL SHAFT

Tran Duc Trung, Bui Hai Le*, Tran Minh Thuy

*School of Mechanical Engineering, Hanoi University of Science and Technology,
No 1 - Dai Co Viet Road, Hanoi*

*Email: le.buihai@mail.hust.edu.vn

In this paper, problem of optimizing eigen frequencies of a torsional shaft using Pontryagin's maximum principle, an optimal control one, is presented. Where, control variables are diameters of elements, objective function contains the shaft's eigen frequencies. Results of the paper allow determining sign of ratio coefficient of optimal condition, the shaft's optimal configurations and eigen values.

Keywords: eigen frequency, Pontryagin's maximum principle, torsional shaft; optimization.