

LA MATEMÁTICA Y LO COTIDIANO

¿TAN SOLO PALABRAS?

Muchas palabras de uso cotidiano tienen, en matemática, un significado diferente, no siempre explícito para el estudiante. Mostramos ejemplos de dificultades que pueden presentarse en el aprendizaje de la matemática debidos, entre otros factores, a este hecho.

Mabel A. Rodríguez

En septiembre de 2018, desarrolló un Seminario - Taller titulado "Realidades, perspectivas y desafíos en la formación de Profesores de Matemática", en Lago Puelo, provincia de Chubut. En su paso por Bariloche, la Dra. M. Rodríguez visitó nuestra Universidad y dio una charla dirigida a docentes y estudiantes de matemática. En este marco, la invitamos a escribir para nuestra revista.

En las clases de matemática utilizamos términos específicos del campo disciplinar y presentamos significados precisos de ellos, para lo cual utilizamos lenguaje simbólico y natural. Nos preguntamos si corremos riesgos de que se traslade al aula un significado de algún término que se utiliza en la vida cotidiana. La respuesta dependerá del término. Por ejemplo, si el término matemático aludido fuera "homeomorfismo" o "polinomio"¹, seguramente esto no ocurra, pues no hay experiencias de uso de estas palabras en la vida cotidiana. En este caso, su significado se circunscribe a la matemática y así será aprendido. En cambio, cuando el término es y ha sido largamente usado en la cotidianidad, hay un alto riesgo de que el estudiante intente transferir y usar en matemática el significado que conoce, que le ha permitido tener éxito y comunicarse en sus experiencias previas, fuera del ámbito matemático. Si a esto le sumamos que algunas veces el significado puede no ser enseñado, estamos frente a una posible fuente de equivocaciones.

¹ Términos técnicos específicos de la disciplina cuyo significado no nos interesa en este artículo, pero que ilustran palabras que no tienen uso fuera de la matemática.

Palabras clave: conectores, imágenes mentales, negación de enunciados, significado de términos.

Mabel A. Rodríguez¹

Dra. de la Universidad de Buenos Aires, área:
Matemática.
mrodri@campus.ungs.edu.ar

¹Instituto del Desarrollo Humano, Universidad Nacional de General Sarmiento, Argentina.

Recibido: 03/03/2019. Aceptado: 17/05/2019.

Veamos algunos ejemplos. Consideremos el término "probar". Hemos usado esta palabra muchas veces en nuestro entorno. Podemos pensar en probar una máquina, poner a prueba el rendimiento físico de una persona, probar la inocencia de alguien, o probar una comida. ¡Y podríamos seguir! Ahora bien, ¿qué hay detrás de estas acepciones?

En el caso de la máquina, podríamos pensar en experimentar una vez y concluir que funciona o que entendimos cómo funciona. También puede darse el caso de proponer una experimentación extrema, es decir ponerla al límite de su rendimiento para ver cómo responde. Por otra parte, si nos referimos a poner a prueba el rendimiento físico de una persona, imaginamos que le hacemos hacer algún ejercicio una pequeña cantidad de veces y sacaríamos conclusiones. No lo pondríamos a prueba más, dado que justamente su rendimiento cambiaría, se agotaría. En el caso de probar la inocencia de alguien, estaríamos obligados a ofrecer una argumentación basada en leyes y evidencias, mientras que, si consideramos probar una comida, podríamos obtener distintas respuestas en distintos momentos. La misma comida podría resultar alguna vez a punto, otra vez cruda, otra salada, etc.

Sin pretender dar una definición de lo que se entiende en matemática por "probar", mencionamos algunos aspectos relevantes a considerar al momento de probar una afirmación o un resultado. Entre ellos referimos a que se requiere hacer uso de lenguaje matemático preciso y de razonamientos válidos, podrían aplicarse propiedades conocidas, hay que contemplar los grados de generalidad que conlleva la afirmación a probar, etc. ¿Qué ocurre si acepciones provenientes del uso cotidiano, de "probar" llegan a la matemática? Nos encontraríamos con estudiantes que considerarían que, si algo se cumple en un caso, es válido, está probado (máquina); que si algo vale

en un caso raro, es válido siempre (experimentación extrema de la máquina); si algo se probó algunas pocas veces y resultó válido, siempre lo será (asociado al rendimiento físico); que para probar algo se necesitan argumentos contundentes (probar la inocencia); o que algo probado en algunos casos no necesariamente vale siempre, podría cambiar (comida).

Miremos cómo esto se plasma en posibles respuestas erróneas de un estudiante que, simplemente transfiere a la matemática lo que ha pasado años de su vida comprendiendo, interpretando y utilizando adecuadamente. Imaginemos que se presenta al estudiante la siguiente consigna:

“Si tenemos dos números naturales pares cualesquiera, ¿es posible probar que su suma resulta un número par? Explicar.

Lo que esta consigna pretende es un razonamiento general, para lo que se requiere seleccionar notación simbólica específica, plasmar con ella los datos dados, manipular algebraicamente y comprender, en el contexto de la pregunta, lo que se obtiene. Sin embargo, podemos encontrar estudiantes que prueban con un caso, toman el 2 y el 4, los suman, obtienen un 6, que es par y concluyen que es cierto para todos los números pares como con la máquina. O bien toman varios ejemplos ($6 + 8 = 14$ verifica, $2 + 20 = 22$ verifica) y deducen que entonces vale siempre, como en el caso de la resistencia física. Podemos encontrar estudiantes que, bajo la lógica de argumentos del tipo “si vale para un caso raro, valdrá siempre”, propongan números como 1.284 y 11.798, los suman y como se obtiene un número par, concluyen que valdrá siempre.

Pasemos a un segundo ejemplo: la palabra “explicar”. En matemática, se “explica” para dejar de manifiesto que comprendió. Ahora bien, cotidianamente utilizamos este término, ¡entre otros! de los siguientes modos: para que alguien que no entiende algo, lo entienda; para mostrar cómo se usa algún aparato, por ejemplo, el celular (aquí el significado puede asociarse a enseñar o dar pasos o procedimientos); o para apoyar un razonamiento, con frases como “¿me explico?” asociada con “ser claro”. Notemos que, detrás de esto, advertimos una finalidad de la explicación que está depositada “en el otro”. Como por ejemplo cuando el docente explica algo: lo hace pues el otro desconoce algo o no lo entiende. Esto es lo usual para las clases de matemática, desde el rol docente. De este modo, en la enseñanza de la matemática, “explicar” tiene al menos dos significados diferentes: uno es el que le da el profesor cuando “él explica” y otro es el que él mismo da cuando espera que un estudiante explique una resolución de una actividad o un concepto. El primero de los significados alude a que se explica a quien no sabe, para que aprenda; se explica a quien no entendió algo, para que entienda; el que explica siempre es quien sabe; el

que explica podría mostrar pasos o procedimientos; y explicar bien obliga a ser claro.

Sin embargo, en matemática necesitamos más, y si pensamos en la formación de profesores, ¡con más razón! Necesitamos el otro significado de “explicar”: explicar como una herramienta para mostrar comprensión. Es decir, con una finalidad ubicada en quien explica y no en otro. Por ejemplo, un estudiante que explica, dirigiéndose a un par o a un experto (en lugar de dirigirse a alguien que no sabe), para mostrar lo que él ha entendido. Esta es una función de la explicación que resulta imprescindible de instalar en las clases. Más aún, si alguien desconoce algo, que otra persona “se lo explique”, no siempre es una buena forma para que el otro lo aprenda. Tendríamos que entrar en terrenos de la didáctica de la matemática, o bien invitar al lector a reflexionar cómo aprendió algo que hoy considere que domina. Seguramente la respuesta no sea: “lo aprendí y lo comprendí cuando el profesor me lo explicó”. Probablemente reconozca que alcanzó esa comprensión ante un tipo de tareas que no fue “tomar nota en la clase”, sino algo diferente y más exigente. Pero no vamos a seguir con esta disquisición, para no perder el foco de lo que nos condujo hasta aquí.

Presentamos un último ejemplo que entendemos que es rico. Pensemos ahora en los términos “todos”, “algún” y “un”.

Usualmente nos encontramos utilizando estos términos, en nuestra vida cotidiana, de muchas formas, como las siguientes: a todos mis compañeros les fue mal en el examen (con esta frase queremos significar que a la mayoría le fue mal); el mago pide que pase una persona del público (aquí, ese “una” es “cualquiera”); en esta sala, hay una persona daltónica (en esta afirmación el “una”, puede entenderse como exactamente una, ni más, ni menos); o ¿hay alguna/ una persona que sea daltónica? (esta pregunta referirá a si existe al menos una).

Detrás de estos usos nos encontramos con que “todos” podría significar la mayoría, mientras que “un/ una” podría referirse a uno cualquiera, a más de uno, o a exactamente uno. Y, seguramente a esta altura ya el lector podrá estar sumando un listado con otros ejemplos que podrían tener connotaciones diferentes. Pues bien, “para todo” en la matemática refiere siempre a la totalidad de los elementos de un conjunto, no a la mayoría (del mismo modo si decimos que “cualquier elemento” de un cierto conjunto cumple una condición dada). Por su parte, “algún” en matemática significa “al menos un elemento” y no interesa si es único o no. En las clases de matemática, esto nos genera problemas, pues en el ideario de los estudiantes “todos” no necesariamente puede ser entendido como debería ser, con el significado de “para todo”; “cualquiera” puede significar uno o alguno, y nos

encontramos con estudiantes que ante frases como “cualquiera de los números pares es...” eligen uno, a su gusto, perdiendo la generalidad que conlleva el término; o “alguno” puede significar “cualquiera” o que “existe exactamente uno”, o “al menos uno”. Entonces, en frases como “algún número par es...” la frase no es entendida como “existe al menos un número par que cumple...”; o, también, “uno” puede significar “exactamente uno”, “alguno” o “al menos uno”. Y podríamos seguir...

Si volviéramos al ejemplo de la suma de números pares, con esta complejidad que se agrega, vemos que un estudiante podría entender el “sumar dos números pares cualesquiera” como que tiene libertad para elegir dos números fijos, y no asociar esto con la necesidad de justificar la afirmación para todas las elecciones posibles de dos números naturales pares y no para un par de números arbitrariamente elegidos.

Esta irrupción de lo cotidiano en la matemática genera problemas de simbolización, confusión entre los términos formales “existe” y “para todo”, omisión de los cuantificadores cuando escriben simbólicamente, cambio de significado de términos, pruebas universales realizadas con ejemplos, entre otros.

De este modo, se puede anticipar que los estudiantes podrían cometer errores vinculados a lo mencionado frente al quehacer matemático. Suele no ser evidente para ellos, y a veces tampoco para el docente, la incidencia, en el trabajo en matemática, de los significados que los términos tienen en la cotidianidad.

Seguimos ahora analizando cómo algunas representaciones que tenemos en nuestra mente, afectan nuestro desenvolvimiento ante tareas matemáticas.

Lo que tenemos en mente al mencionar ciertas palabras

En el campo de la Educación Matemática, se ha estudiado la conformación de distinto tipo de representaciones mentales en los sujetos que están aprendiendo matemática. En primer lugar, se reconoce que, cuando el objeto matemático que se está aprendiendo tiene una denominación que utiliza un término o frase de uso cotidiano, el estudiante ya asocia “algo” a ese término basado en su experiencia anterior. Como decíamos antes, esto no ocurre cuando la palabra que denomina al objeto es desconocida para el estudiante. Pero si, por ejemplo, mencionamos la palabra “función” o “límite” (ver Glosario), y tanto un lector como un estudiante desconocen el significado preciso de ellos en matemática, sin dudas tienen un conocimiento asociado a ellos por haber usado los términos en su vida cotidiana. Esas ideas previas a

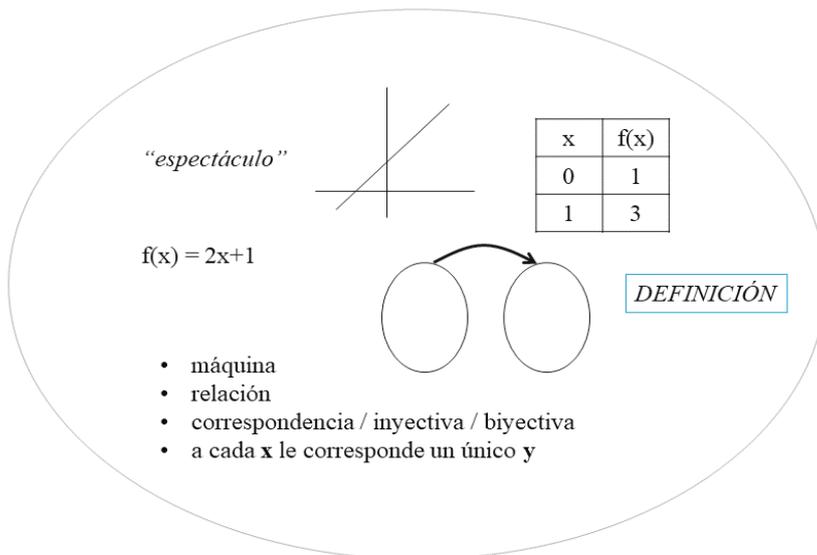
la enseñanza, juegan un rol importante pues muchas veces persisten luego de la misma y operan, y suelen operar provocando errores, al tener que enfrentar actividades matemáticas.

Hemos hecho indagaciones con personas no expertas en matemática y, por ejemplo, respecto de “función”, reconocen que asocian el término con espectáculos o escenarios, es decir con funciones teatrales o musicales. La palabra “límite”, por su parte, se vincula con establecer restricciones de horarios o de velocidades, entendiéndolo que no se pueden sobrepasar, o también se relaciona con la frontera de un país, entre otras posibles asociaciones. Quien enseña un concepto que admite este tipo de imágenes mentales, sabe que sus estudiantes las tienen construidas y que operarán aun con posterioridad a la enseñanza del concepto. Ahora bien, ¿qué suma la enseñanza, y de qué modo, de acuerdo a las elecciones docentes? Lo que el profesor elija para enseñar el concepto irá provocando que sus estudiantes generen más imágenes, representaciones, asocien palabras, frases, metáforas, simbología, etc. Ese grupo de imágenes asociadas a un concepto es personal, depende de cada individuo y de su experiencia de aprendizaje. Por supuesto que entre todo esto, estará la definición del objeto, matemáticamente correcta, con su notación y simbología presentada por el docente. Lo que la Educación Matemática nos aporta es sobre el modo en el que un sujeto actúa cuando está enfrentado a una pregunta. En este caso, suele ocurrir que no apele en primera instancia a las definiciones involucradas, sino que “se ilumina” en su cabeza el grupo de representaciones que ha construido asociadas al concepto, apela a alguna de ellas y responde. Como esas representaciones pueden ser completas, incompletas, correctas o incorrectas, tales respuestas podrán ser correctas o no desde el punto de vista matemático. Lo que el docente tendría que promover, es una articulación entre la definición del objeto, que es parte de esas representaciones y todas las otras. A su vez, cuanto más rica sea la experiencia transitada por quien aprende, tanto sobre el uso de símbolos, expresiones verbales, ejemplos numéricos, etc., más rica será su imagen mental y más posibilidades tendrá de hacer un uso adecuado de ella.

Veamos unos ejemplos. Sobre el concepto de “función”, podríamos encontrarnos con imágenes mentales como las ilustradas en la Figura 1. Se observará por un lado la definición y por otro el “espectáculo” que es previo a la enseñanza. Se observan tablas de valores, fórmulas, la metáfora de la máquina², diagramas, propiedades, etc. Esto,

² Esta metáfora refiere a concebir las funciones como máquinas que transforman datos (o productos) que le son ingresados, produciendo un resultado (el producto procesado). Ejemplos de esto pueden ser: una máquina que pica carne, se le introducen pedazos de carne y devuelve carne picada. En términos matemáticos, el dato ingresado es la variable independiente, la máquina es la regla de correspondencia y el resultado la imagen del valor ingresado (variable dependiente).

Figura 1. Una imagen mental posible del concepto de función.



siempre y cuando la enseñanza haya considerado esas alternativas. Si el estudiante solo trabajó con fórmulas, no construiría la misma imagen, sino una en la que predominarían las fórmulas y lo que traiga de su experiencia anterior. Y, por completar un ejemplo sobre funciones, hay estudiantes que consideran que las funciones son sólo fórmulas o expresiones simbólicas y no reconocen que la función debe indicar el conjunto de elementos que se transformarán y el conjunto al que pertenecen los transformados.

Respecto de “límite”, podríamos encontrarnos con representaciones mentales del tipo de la Figura 2, con notaciones, gráficos de curvas a las que les falta un punto (presenta un “agujero”), letras griegas sueltas que usualmente se utilizan en la definición formal del concepto (épsilon, delta), propiedades enunciadas parcialmente, en forma verbal, etc.

Del mismo modo, es usual encontrarnos con estudiantes que consideran que el resultado de un límite “no se puede alcanzar” o “no se puede superar”, alineado con las ideas previas a la enseñanza del límite como “barrera infranqueable”. Completamos esta sección resaltando que la discusión precedente no se vincula, necesariamente, con la complejidad del concepto puesto en juego. Podría darse con un concepto tan sencillo como el de rectángulo y, aun así, traer aparejadas las mismas dificultades a las que hacemos mención. Observemos que, si el término fuese rectángulo, es posible nuestra imagen mental sea únicamente algo como muestra la Figura 3. Y muy probablemente no formen parte de ella, el cuadrado, ni en palabras ni con su imagen, ni rectángulos en otras posiciones, es decir no tenemos construida una imagen como la Figura 4. Por lo que, ante la pregunta

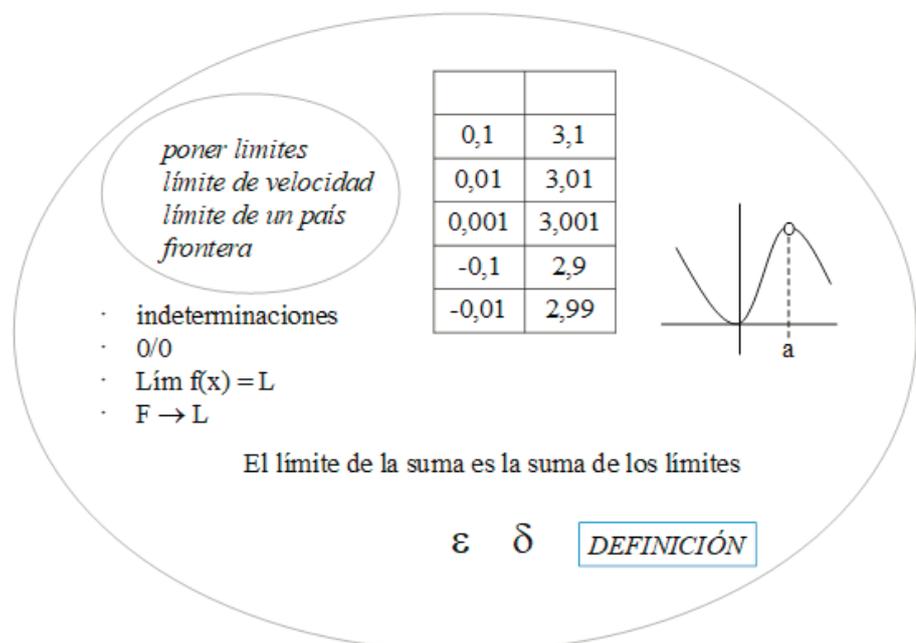


Figura 2. Una imagen mental posible del concepto de límite.

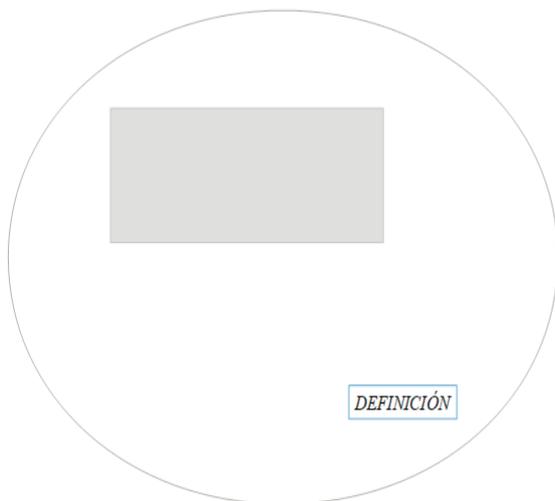


Figura 3. Imagen mental usual del concepto de rectángulo.

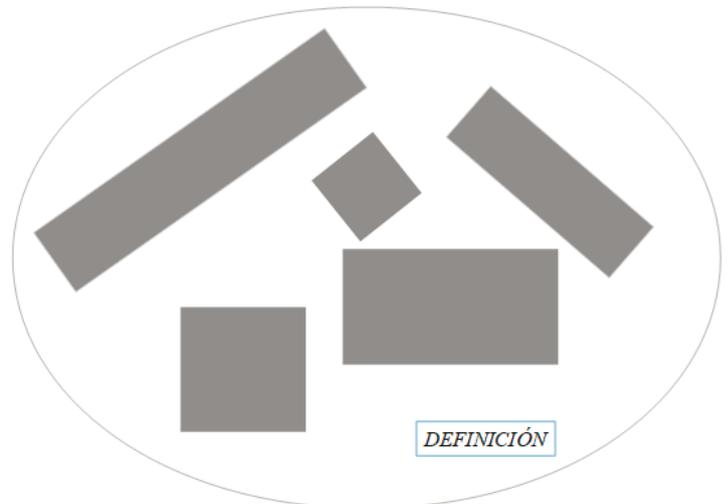


Figura 4. Imagen mental muy poco usual del concepto de rectángulo.

“¿es cierto que un cuadrado es un rectángulo?”, mayoritariamente los estudiantes apelarán a la imagen prototípica, y única que tienen construida (ver Figura 3), reconocerán que el cuadrado no encaja con el prototipo y responderán que no, sin que esto signifique que no saben la definición.

Pasemos a la última sección de este trabajo para pensar cómo los conectores como el “y”, el “o”, el “entonces” y la “negación” de oraciones usadas en la vida cotidiana, inciden en el aprendizaje de la matemática.

Conectores y negaciones: un problema lógico

Empecemos analizando cómo nos manejamos usualmente con las negaciones y conectores (ver Glosario). Si una madre le dice a su hijo “Si te portás bien, te llevo al cine”, pensemos ¿cómo se entendería el uso de esta oración y de su negación en la cotidianidad? Seguramente el niño entienda que si no se porta bien, no lo llevará al cine, que si no lo llevó al cine es porque no se portó bien, y que no podría darse que se porte bien y no lo lleven al cine. La madre no cumpliría con su promesa si el niño se porta bien y ella no lo lleva al cine. Si, en cambio le dijera “Vas a la escuela o no podrás salir”, ¿cómo se entendería esto y cómo sería el caso en el que la madre no cumpliera con su promesa? El niño entendería que, si va a la escuela, podrá salir; que, si no va a la escuela, no podrá salir y que no va a ocurrir que no vaya a la escuela y pueda salir. La madre no cumpliría con su promesa, si acaso el niño no va a la escuela y ella lo deja salir.

En lo anterior se ve la sobreinterpretación de las frases. Por ejemplo, en el primer caso, no está dicho

qué ocurre si el niño no se porta bien. Por lo que la primera interpretación no es correcta. Lo hubiera sido en caso de haber expresado “únicamente si te portás bien, te llevo al cine”, lo que en matemática se traduciría con condiciones necesarias y suficientes, y el conector usual, en esta ciencia, es un “si y solo si”.

¿Qué nos llega a la matemática? Estas interpretaciones que se dan para las expresiones cotidianas suelen transferirse a la matemática haciendo que se obtengan resultados falsos. Como venimos mencionando, la comprensión, la precisión en la simbología y en la argumentación son cuestiones clave para la producción matemática. Si la interpretación se cambia a causa de considerar significados de la cotidianidad, se llegará a resultados erróneos y esto ocurre en clases de matemática.

Notamos aquí la importancia de reparar en los conectores que se utilizan en las oraciones. No es lo mismo decir “Vas a la escuela o no podrás salir” que decir “solo si vas a la escuela, podrás salir” o incluso “si vas a la escuela, podrás salir”. Las estructuras de estas oraciones, en caso de llevarlas al campo matemático, requieren atención a los conectores. En el primer caso, el conector es el “o” y la negación de esa frase es “no vas a la escuela y podrás salir”. En el segundo caso estamos frente a un “si y solo si”, como cuantificador, y la negación sería: “solo si no vas a la escuela, no podrás salir”. Finalmente, la última oración presenta una implicación y su negación es “vas a la escuela y no podrás salir”.

Imaginen la complejidad que se suma cuando las afirmaciones en lugar de ser “el niño va a la escuela” o “el niño sale” son proposiciones matemáticas, cargadas de connotación específica, cuantificadores,

etc.! Comprender la estructura lógica, la forma de negar, el significado parcial y total son sin dudas tareas complejas que el docente debe enseñar intencionalmente, y no dejarlo librado a que el estudiante lo adquiera como pueda.

A modo de cierre

Este tipo de mirada nos permite alertarnos, tanto a quienes nos dedicamos a la matemática como a quienes no lo hacen y, eventualmente, hacen algún uso de ella. Explicitar el uso preciso en matemática de términos cotidianos es clave, aunque también sabemos que, muchas veces, solo “decirlo” no será suficiente. Tendremos, como docentes, que ofrecer a los estudiantes diversidad de oportunidades para que se ponga en juego el significado que queremos que construyan, en matemática, contrastándolo con los significados usuales que han manejado y seguirán haciéndolo fuera del ámbito matemático.

Las explicaciones para mostrar comprensión son necesarias en cualquier campo de conocimiento, no quedando asociadas únicamente a un rol docente. Insistimos aquí en que “explicar para que otro comprenda”, suele no ser un recurso potente para lograr en el otro el aprendizaje o la comprensión. El cuidado de la redacción, tanto simbólica como en lengua natural, y el uso adecuado de conectores amerita intencionalidad en las clases. El cambio que debe realizarse del uso habitual de los términos a los requerimientos que se dan en matemática no es natural, y debe ser intencional desde la intervención del docente.

Por último, y recuperando lo presentado referido a las imágenes mentales que tenemos construidas, cabe señalar que el uso de nuevas tecnologías (calculadoras, graficadores y computadoras, entre otras), sin dudas estará incidiendo en las representaciones mentales

que un estudiante construya alrededor de un concepto. Este es un campo de estudio relativamente reciente y que, en breve nos ofrecerá posibilidades de interpretar adecuadamente algunas respuestas de los estudiantes que hoy, muchas veces, nos resultan inesperadas e incomprensibles, y entender desde qué lógica han sido producidas.

Glosario

Cuantificadores universales y existenciales:

los cuantificadores universales aluden a que la totalidad de elementos de un conjunto tienen un cierto atributo, mientras que los existenciales, aluden a que sólo algunos de esos elementos presentan el atributo.

Demostración por el contra-recíproco: es un caso particular de la demostración por el absurdo en la que la afirmación matemática que es falsa es “la conjunción de la hipótesis y su negación”.

Doble implicación: es un operador que opera sobre dos valores de verdad, de dos proposiciones, devolviendo el valor verdadero cuando ambas proposiciones tienen el mismo valor de verdad y falso en otro caso.

Función: es una correspondencia que le asigna a cada uno de los elementos de un conjunto A, un único elemento de un conjunto B.

Límite: describe el comportamiento de una función en los alrededores de un punto considerado.

Negaciones: la negación de una proposición es otra afirmación que cambia el valor de verdad de la primera, y le asigna un sentido contrario al original.

Resumen

En este trabajo mostramos relaciones entre la vida cotidiana y el aprendizaje de la matemática. Explicamos algunos errores que cometen estudiantes, que provienen de utilizar en matemática términos específicos de este campo, con los significados que ellos tienen en la cotidianidad. Mostramos asociaciones entre un término y sus representaciones mentales y ofrecemos explicaciones a algunas respuestas no adecuadas de los estudiantes. Finalmente, mencionamos la relación del uso de negaciones y conectores en matemática y en la cotidianidad para señalar importantes efectos en el aprendizaje. Presentamos algunas reflexiones para quien aprende o enseña matemática.

Lecturas sugeridas

Pochulu, M. y Rodríguez, M. (comps). (2012). Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos. Buenos Aires, Ediciones UNGS y EDUVIM. (Capítulo 5).

Turégano, P. (2006). Una interpretación de la formación de conceptos y su aplicación en el aula. Ensayos, (21), 25-48. (Disponible en internet)