



УДК: 532.5

MSC 2010: 37J60, 37J35, 70E18, 70F25, 70H45

Как управлять шаром Чаплыгина при помощи роторов. II

А. В. Борисов, А. А. Килин, И. С. Мамаев

В предыдущей статье [2] исследовалось управление при помощи трех гироскопов движением динамически несимметричного уравновешенного шара на плоскости, при условии, что шар катится без проскальзывания в точке контакта. В настоящей работе исследуется вопрос об управляемости шара при наличии сил трения. Также исследуется вопрос о существовании и устойчивости особых бездиссипативных периодических решений свободного шара в присутствии сил трения.

Ключевые слова: неголономная связь, управление, сухое трение, вязкое трение, устойчивость, периодические решения

Получено 31 января 2013 года

После доработки 28 февраля 2013 года

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО «УдГУ» в рамках гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ НШ-2519.2012.1 «Динамические системы классической механики и проблемы управления», АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (1.1248.2011), АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (1.7734.2013). Работа А. А. Килина поддержана грантом Президента РФ поддержки молодых докторов наук МД-2324.2013.1 «Исследование неголономных мобильных систем с учетом различных моделей трения, регулярных и хаотических режимов и управления».

Борисов Алексей Владимирович

borisov@rcd.ru

Килин Александр Александрович

aka@rcd.ru

Мамаев Иван Сергеевич

mamaev@rcd.ru

Институт компьютерных исследований;

Лаборатория нелинейного анализа и конструирования новых средств передвижения

Удмуртский государственный университет

426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1

Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН

117334, Россия, г. Москва, ул. Бардина, д. 4

Институт математики и механики УрО РАН

620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, д. 16



Содержание

Введение	60
1. Уравнения движения и первые интегралы	60
2. Задача об управлении	62
3. Критические и бездиссипативные движения свободного шара	65
3.1. Критические периодические решения и их устойчивость	67
3.2. Инвариантное подмногообразие с нулевой скоростью точки контакта	70
Дискуссия	73

Введение

После публикации нашей первой работы [2] мы обнаружили несколько работ других авторов [4, 6–8], посвященные схожим проблемам. Прежде всего отметим работы [7, 8], в которых также решается задача об управлении неголономным шаром Чаплыгина при помощи роторов. Отметим, что авторы практически не обсуждают задачу об управлении тремя роторами (считая ее слишком простой), а сосредотачиваются на управлении при помощи двух роторов. Такая система более проста и имеет меньший вес (обсуждение инженерных вопросов приведено в заключительном разделе данной работы), но обладает дефицитом управляющих параметров. В этих работах показано, что не всякое кинематически возможное движение шара может быть динамически реализовано с помощью двух роторов. Для возможных движений в [7–10] приведены примеры управлений вдоль простейших траекторий, позволяющие переместиться последовательными шагами в любую заданную точку. Кроме того, обсуждается проблема оптимального управления, численно построены траектории минимальной длины, соединяющие заданные точки. Отметим, что используемые в [7, 8] формы уравнений отличны от приведенных в [2] и для сравнения результатов необходимы дополнительные пересчеты. Отметим также, что близкие вопросы и методы обсуждаются в работах [12, 13, 16, 19].

1. Уравнения движения и первые интегралы

Рассмотрим качение динамически несимметричного уравновешенного шара (центр масс совпадает с геометрическим центром) по плоскости (рис. 1). Будем предполагать, что в точке контакта P действует сила трения \mathbf{F} , которая в случае проскальзывания точки контакта направлена против ее скорости \mathbf{V}_P :

$$\mathbf{F} = -\lambda \mathbf{V}_P, \quad \lambda > 0. \quad (1.1)$$

Кроме того будем предполагать, что в теле закреплены три ротора с некопланарными осями вращения, которые приводятся в движение электромоторами.

Выберем неподвижную систему осей $Oe_x e_y e_z$ и свяжем подвижные оси $Se_1 e_2 e_3$ с главными осями инерции шара (см. рис. 1). Поворот одних осей относительно других будем параметризовать ортогональной матрицей $\mathbf{Q} \in SO(3)$, полагая, что по ее строкам стоят

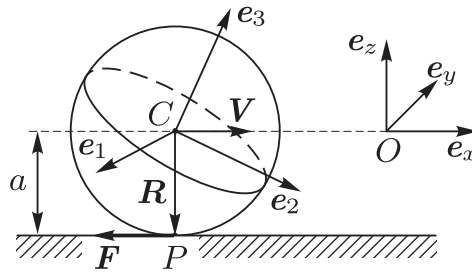


Рис. 1

координаты подвижных векторов e_1, e_2, e_3 в неподвижных осях e_x, e_y, e_z :

$$Q = \begin{pmatrix} e_{1x} & e_{1y} & e_{1z} \\ e_{2x} & e_{2y} & e_{2z} \\ e_{3x} & e_{3y} & e_{3z} \end{pmatrix}.$$

Координаты центра масс шара C относительно неподвижной системы координат обозначим $r_{||} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Таким образом, конфигурационное пространство системы $\mathbb{R}^2 \times SO(3)$, и пара $(r_{||}, Q)$ полностью характеризует положение и ориентацию шара.

Пусть V — скорость центра шара, а Ω — его угловая скорость; тогда уравнения движения, выражающие законы изменения импульса и углового момента системы, представляются в виде

$$m \dot{V} = F, \quad (\tilde{I}\Omega + K)' = R \times F, \tag{1.2}$$

где $R = -ae_z$ — вектор из центра масс в точку контакта, K — гироскопический момент роторов, \tilde{I} — тензор инерции шара относительно центра масс в неподвижных осях, он связан с главным тензором инерции $I = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ соотношением

$$\tilde{I} = Q^T I Q. \tag{1.3}$$

Для того чтобы скорость центра оставалась параллельной плоскости, то есть $V_z \equiv 0$, будем полагать, что в уравнениях (1.2) сила также удовлетворяет условию $F_z \equiv 0$.

Эти уравнения необходимо дополнить кинематическими соотношениями, описывающими вращение подвижных осей и движение центра масс, их можно представить в матричной и скалярной форме следующим образом:

$$\dot{Q} = Q\tilde{\Omega}, \quad \tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_z & -\Omega_y \\ -\Omega_z & 0 & \Omega_x \\ \Omega_y & -\Omega_x & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

$$\dot{x} = V_x, \quad \dot{y} = V_y.$$

При этом для произвольного трехмерного вектора a выполнено соотношение $\tilde{\Omega}a = a \times \Omega$. Несложно также показать, что эволюция тензора \tilde{I} описывается уравнением

$$\dot{\tilde{I}} = [\tilde{I}, \tilde{\Omega}], \tag{1.5}$$

где $[\cdot, \cdot]$ — матричный коммутатор.



Система уравнений (1.2), (1.4) допускает векторный интеграл — угловой момент относительно точки контакта:

$$\mathbf{M} = \tilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{K} + m\mathbf{V} \times \mathbf{R} = \text{const}. \quad (1.6)$$

Как мы покажем ниже, наличие этого интеграла существенно упрощает управление шаром при движении вдоль заданной траектории.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если помимо трения скольжения на шар действует трение верчения, то уравнения движения (1.2) лишь слегка изменяются:

$$m\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{F}, \quad (\tilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{K})' = \mathbf{R} \times \mathbf{F} + M^s \mathbf{e}_z,$$

где M^s — момент трения верчения.

В этом случае интегралами являются лишь две компоненты вектора момента (1.6):

$$M_x = \text{const}, \quad M_y = \text{const}.$$

В большинстве известных приложений (в частности, в задачах управления) вектор гиростатического момента роторов является заданной функцией времени в подвижных осях, жестко связанных с телом $C\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$; обозначим его $\mathbf{k}(t)$, тогда справедливы соотношения

$$\mathbf{K} = \mathbf{Q}^T \mathbf{k}(t), \quad \dot{\mathbf{K}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{K} + \mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{k}}(t).$$

Эволюция энергии шара описывается уравнением

$$E = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega}, \tilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\Omega}), \quad (1.7)$$

$$\dot{E} = (\mathbf{F}, \mathbf{V}_p) - (\boldsymbol{\Omega}, \dot{\mathbf{K}}) = (\mathbf{F}, \mathbf{V}_p) - (\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{Q}^T \dot{\mathbf{k}}),$$

где $\mathbf{V}_p = \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}$ — скорость точки контакта. Поскольку сила удовлетворяет соотношению (1.1), отсюда следует, что если $\mathbf{k} = \text{const}$, то $\dot{E} < 0$, то есть энергия строго уменьшается — диссипирует.

2. Задача об управлении

Рассмотрим задачу об управлении движением шара при помощи задания скоростей вращения роторов, что, как было показано в предыдущей работе, эквивалентно нахождению вектор-функции $\mathbf{k}(t)$, которую будем называть управлением. Пусть требуется подобрать управление таким образом, чтобы центр шара двигался по заданному закону $\mathbf{R}_c(t) = (x(t), y(t), 0)$, при этом очевидно заданными функциями являются также скорость центра масс $\mathbf{V}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), 0)$ и его ускорение $\dot{\mathbf{V}}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), 0)$.

Пользуясь спецификой системы (1.2), точнее тем, что \mathbf{K} не входит в первое уравнение и тем, что существует интеграл \mathbf{M} , в данном случае для нахождения управления можно воспользоваться следующим алгоритмом:

1. при помощи закона трения выражаем силу трения \mathbf{F} через скорости \mathbf{V} , $\boldsymbol{\Omega}$;
2. из первого уравнения системы (1.2) находим $\Omega_x(t)$, $\Omega_y(t)$ как заданные функции времени;
3. считая $\Omega_z(t)$ произвольной функцией времени, при помощи интеграла (1.6) находим управление $\mathbf{k}(t)$.

Произвол в выборе функции $\Omega_z(t)$ можно использовать для некоторой дополнительной ориентации шара либо в процессе движения, либо в конечной точке траектории.



Разберем соответствующие примеры.

1. Неголономное качение при $M \neq 0$. Прежде всего обобщим результат предыдущей работы для качения без проскальзывания на случай, когда момент относительно точки контакта не равен нулю. (Для сухого трения это соответствует условию, что сила \mathbf{F} лежит внутри конуса трения: $|\mathbf{F}| < \mu mg$.)

Условие качения без проскальзывания и момент представляются в форме

$$\mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R} = 0, \quad \mathbf{M} = \tilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\Omega} + m\mathbf{R} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}) + \mathbf{K} = \text{const.}$$

Из первого соотношения для заданной траектории получим

$$\Omega_x = -\frac{\dot{y}(t)}{a}, \quad \Omega_y = -\frac{\dot{x}(t)}{a}.$$

Компоненту $\Omega_z(t)$ будем полагать заданной функцией времени (в предыдущей работе она подбиралась таким образом, чтобы заданные траектории на плоскости и сфере совпадали), тогда получим

$$\mathbf{k}(t) = \mathbf{Q}(t)(\mathbf{M} - \tilde{\mathbf{I}}(t)\boldsymbol{\Omega}(t) - ma^2\mathbf{e}_z \times (\boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{e}_z)),$$

где $\mathbf{Q}(t)$, $\tilde{\mathbf{I}}(t)$ находятся путем решения уравнений (1.4), (1.5) с заданной $\boldsymbol{\Omega}(t)$.

Заметим, что если \mathbf{M} не параллелен оси \mathbf{e}_z , то при выключенных электродвигателях ($\mathbf{k} = 0$) центр шара не может находиться в покое.

2. Вязкое трение. В этом случае

$$\mathbf{F} = -\mu \mathbf{V}_p = -\mu(\mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}), \quad (2.1)$$

где μ — коэффициент трения, который является положительной постоянной. Из первого уравнения системы (1.2) находим

$$\Omega_x = -\frac{1}{a} \left(\dot{y}(t) + \frac{m}{\mu} \ddot{y}(t) \right), \quad \Omega_y = \frac{1}{a} \left(\dot{x}(t) + \frac{m}{\mu} \ddot{x}(t) \right).$$

Полагая $\Omega_z(t)$ некоторой заданной функцией времени и разрешая (1.6) относительно \mathbf{K} , находим

$$\mathbf{k}(t) = \mathbf{Q}(t) \left(\mathbf{M} - \tilde{\mathbf{I}}(t)\boldsymbol{\Omega}(t) + ma\mathbf{V}(t) \times \mathbf{e}_z \right),$$

где законы эволюции $\mathbf{Q}(t)$ и $\tilde{\mathbf{I}}(t)$ находятся из решения дифференциальных уравнений (1.3), (1.4). Эти соотношения позволяют явно получить управление шаром при движении вдоль заданной траектории.

3. Сухое трение. В этом случае при проскальзывании точки контакта

$$\mathbf{F} = -\mu mg \frac{\mathbf{V}_p}{|\mathbf{V}_p|} = -\mu mg \frac{\mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}|},$$

где μ — коэффициент трения — положительная константа. Подставляя данную силу трения в первое из уравнений системы (1.2), для компонент скорости \mathbf{V}_p получим систему

$$\begin{aligned} (\dot{x}^2(t) - \mu^2 g^2) V_{px}^2 + \dot{x}^2(t) V_{py}^2 &= 0, \\ \dot{y}^2(t) V_{px}^2 + (\dot{y}^2(t) - \mu^2 g^2) V_{py}^2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Эти уравнения в общем случае допускают лишь тривиальное решение

$$V_{px} = V_{py} = 0,$$

то есть скорость точки контакта в управляемом движении должна обращаться в нуль, и мы возвращаемся к исходной неголономной системе.

Нетривиальные решения система (2.2) допускает лишь при условии

$$\ddot{x}^2(t) + \ddot{y}^2(t) = \mu^2 g^2, \quad (2.3)$$

когда детерминант соответствующей матрицы равен нулю. При этом решение может быть представлено в одной из следующих двух форм:

$$V_{px}^2 = \lambda_1 \dot{x}^2(t), \quad V_{py}^2 = \lambda_1 (\ddot{x}^2(t) - \mu^2 g^2), \quad \lambda_1 > 0,$$

либо

$$V_{px}^2 = \lambda_2 (\ddot{y}^2(t) - \mu^2 g^2), \quad V_{py}^2 = \lambda_2 \dot{y}^2(t), \quad \lambda_2 > 0.$$

Вследствие условия (2.3) физические решения (то есть те, для которых квадраты компонент скорости положительны) существуют лишь при условии $\ddot{x}^2(t) = \mu^2 g^2$, $\dot{y}(t) = \text{const}$ либо $\ddot{y}^2(t) = \mu^2 g^2$, $\dot{x}(t) = \text{const}$. Это означает, что шар может двигаться по параболе или по прямой, но не по заданной траектории.

Таким образом, в случае сухого трения при проскальзывании точки контакта управление при помощи роторов вдоль заданной траектории невозможно.

4. Расчет управлений моторов. В предыдущей работе была допущена неточность в уравнениях, определяющих напряжение на управляющих электромоторах (см. [2], замечание на с. 262), так как не был учтен момент вращения оболочки. Приведем корректный вывод в обозначениях, используемых в настоящей работе.

Кинетическая энергия системы «оболочка + роторы» согласно предыдущей работе [2] имеет вид

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{V}^2 + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Omega}, \tilde{\mathbf{I}} \boldsymbol{\Omega}) + i \sum_k \dot{\varphi}_k (\mathbf{N}_k, \boldsymbol{\Omega}) + \frac{1}{2} i \sum_k \dot{\varphi}_k^2, \quad (2.4)$$

где i , φ_k , \mathbf{N}_k — момент инерции, угол поворота и направляющий вектор оси вращения k -го ротора (роторы предполагаются одинаковыми). Согласно уравнениям Даламбера–Лагранжа второго рода момент M_k , развиваемый электродвигателем, записывается в виде

$$M_k = \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_k} \right) \dot{\varphi}_k.$$

Используя линейную аппроксимацию момента коллекторного электродвигателя постоянного тока [17] и учитывая соотношение $\dot{\mathbf{N}}_k = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{N}_k$, получим

$$i(\ddot{\varphi}_k + (\dot{\boldsymbol{\Omega}}, \mathbf{N}_k)) = c_u u_k(t) - c_v \dot{\varphi}_k.$$

Согласно [7], величины c_u , c_v выражаются через приведенные в паспорте электродвигателя пусковой M_s и номинальный M_r моменты, а также его номинальные угловую скорость ω_r и напряжение U_r по формулам

$$c_u = \frac{M_s}{U_r}, \quad c_v = \frac{M_s - M_r}{\omega_r}.$$

Воспользуемся определением гироскопического момента

$$\mathbf{K} = i \sum \dot{\varphi}_k \mathbf{N}_k = \mathbf{Q}^T \mathbf{k} = \mathbf{Q}^T \left(i \sum_k \dot{\varphi}_k \mathbf{n}_k \right),$$

где \mathbf{n}_k — постоянные направляющие векторы осей роторов в системе координат, связанной с телом. Для трех роторов обозначим постоянную матрицу компонент этих векторов $\mathbf{N} = \|\mathbf{n}_{kl}\|$; обращая вышеприведенные соотношения, получим

$$\mathbf{u}(t) = c_u^{-1} \mathbf{N}^{-1} \left(\dot{\mathbf{k}}(t) + \frac{c_v}{i} \mathbf{k}(t) \right) + i \mathbf{N} \mathbf{Q} \dot{\Omega}, \quad \mathbf{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t)).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что в предыдущей работе [2] при выводе кинетической энергии (2.4) неявно предполагалось, что как для оболочки, так и для роторов в отдельности центр масс совпадает с геометрическим центром шара. Выражение (2.4) остается справедливым и в более общем случае — когда лишь общий центр масс системы совпадает с геометрическим центром. Действительно, в общем случае кинетическая энергия оболочки и роторов имеет вид

$$T_0 = \frac{1}{2} m_0 \mathbf{V}^2 + \frac{1}{2} (\Omega, \tilde{\mathbf{I}}_0 \Omega) + m_0 (\mathbf{V} \times \Omega, \mathbf{R}_0),$$

$$T_k = \frac{1}{2} m_k \mathbf{V}^2 + \frac{1}{2} (\Omega + \dot{\varphi}_k \mathbf{N}_k, \tilde{\mathbf{I}}_k (\Omega + \dot{\varphi}_k \mathbf{N}_k)) + m_k (\mathbf{V} \times \Omega, \mathbf{R}_k),$$

где $m_0, m_k, \tilde{\mathbf{I}}_0, \tilde{\mathbf{I}}_k$ — массы и тензоры инерции относительно центра шара оболочки и роторов, $\mathbf{R}_0, \mathbf{R}_k$ — векторы из геометрического центра в центры масс оболочки и роторов. Складывая эти выражения и учитывая соотношения $m_0 \mathbf{R}_0 + \sum_k m_k \mathbf{R}_k = 0, \mathbf{I}_k \mathbf{N}_k = i \mathbf{N}_k$, получим (2.4), где обозначено $\tilde{\mathbf{I}} = \tilde{\mathbf{I}}_0 + \sum_k \tilde{\mathbf{I}}_k$.

3. Критические и бездиссипативные движения свободного шара

Изучим подробнее задачу о свободном (неуправляемом) движении шара при $\mathbf{K} = 0$. При этом, поскольку от координат центра масс уравнения движения (1.2), (1.4) не зависят, будем рассматривать лишь систему, описывающую эволюцию величин $\mathbf{V}, \Omega, \mathbf{Q}$,

$$m \dot{\mathbf{V}} = \mathbf{F}, \quad (\tilde{\mathbf{I}} \Omega) \dot{} = \mathbf{R} \times \mathbf{F}, \quad \dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} \tilde{\Omega},$$

$$\tilde{\mathbf{I}} = \mathbf{Q}^T \mathbf{I} \mathbf{Q}, \quad \tilde{\Omega} = \|\varepsilon_{ijk} \Omega_k\|,$$
(3.1)

которая обладает векторным интегралом момента (1.6)

$$\mathbf{M} = \tilde{\mathbf{I}} \Omega + m \mathbf{V} \times \mathbf{R}$$
(3.2)

и характеризуется диссипацией энергии (1.7)

$$\dot{E} = (\mathbf{F}, \mathbf{V}_p) \leq 0, \quad E = \frac{1}{2} m \mathbf{V}^2 + \frac{1}{2} (\Omega, \tilde{\mathbf{I}} \Omega).$$
(3.3)

Очевидно, что эта система допускает три простейших периодических решения (указанных Гэллопом [3]) — перманентные вращения вокруг главных осей инерции \mathbf{e}_k , которые

при этом направлены вертикально, то есть $e_k \parallel e_z$:

$$\begin{aligned} V = 0, \quad \Omega = (0, 0, \Omega_0), \quad \mathbf{Q}_k(t) = \mathbf{S}_k \mathbf{Q}_0(t), \quad k = 1, 2, 3, \\ \mathbf{Q}_0 = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_0 + \Omega_0 t) & -\sin(\varphi_0 + \Omega_0 t) & 0 \\ \sin(\varphi_0 + \Omega_0 t) & \cos(\varphi_0 + \Omega_0 t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где \mathbf{S}_k — матрицы перестановки главных осей. Для этих решений сила трения в точке контакта обращается в нуль, а интеграл момента направлен вертикально: $\mathbf{M} = I_k \Omega_0 e_z$.

Возникает естественный вопрос: *можно ли для системы (3.1) указать какие-либо особые (критические, бездиссипативные и т. п.) частные решения или в более общем случае инвариантные подмногообразия, отличные от (3.4)?*

Для решения поставленной задачи прежде всего заметим, что поскольку в случае проскальзывания точки контакта сила трения $\mathbf{F} \neq 0$, то согласно (3.3) энергия E уменьшается для всех движений, за исключением тех, для которых $\mathbf{V}_p = 0$. Поэтому если движение начинается при условии $\mathbf{V}_p \neq 0$, то, вследствие ограниченности E снизу, энергия стремится к некоторому пределу E_* :

$$E(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} E_* \geq \min E(\mathbf{V}, \Omega, \mathbf{Q}).$$

Таким образом, мы видим:

- если система (3.1) допускает особые инвариантные подмногообразия, то они принадлежат лишь некоторым предельным уровням функции энергии;
- для всякого такого инвариантного многообразия на фиксированном уровне энергии $E(\mathbf{x}) = E_*$, которое обозначим $\mathcal{M}_{E_*}^i$, очевидно выполнено условие, что если $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{M}_{E_*}^i$, то $\dot{E}(\mathbf{x}_0) = 0$.

Пользуясь указанными свойствами, для решения поставленной задачи в данном случае можно предложить два подхода.

1. На фиксированных поверхностях уровня интеграла момента (3.2) найти множество критических точек интеграла энергии, то есть $\mathcal{M}_c = \left\{ \mathbf{x} \mid \frac{\partial E|_{M=\text{const}}}{\partial x_i} = 0 \right\}$, при этом вследствие соотношения $\dot{E}(\mathbf{x}) = \sum_i \frac{\partial E}{\partial x_i} \dot{x}_i$ для них заведомо $\dot{E}|_{\mathcal{M}_c} = 0$.

В общем случае множество критических точек — это изолированные точки экстремума функции E , но во многих системах (и в частности, в данном случае) оно может вырождаться и приводить к нетривиальным *критическим инвариантным подмногообразиям*. Достоинство этого подхода состоит в том, что его можно применять для произвольного закона трения; с другой стороны может оказаться, что не все инвариантные подмногообразия лежат на критических

уровнях E , либо не все множество критических точек является инвариантным относительно потока. Кроме того, если дополнительные первые интегралы не известны, то не все критические подмногообразия можно найти. Так, например, Гэллоп в работе [3] приводит лишь один дополнительный интеграл — вертикальную компоненту вектора момента \mathbf{M} , при этом, минимизируя энергию (3.3) при условии $M_z = \text{const}$, он указал лишь решения (3.4), которые, как будет показано ниже, не исчерпывают всех возможных критических решений.

2. *Внутри подмногообразия в фазовом пространстве, для которого скорость точки контакта равна нулю, выделить максимальные инвариантные подмногообразия путем последовательного дифференцирования соотношения $\mathbf{V}_p = 0$ в силу системы (3.1).*

Достоинство такого подхода заключается в том, что он позволяет в принципе найти все возможные инвариантные подмногообразия. С другой стороны, при этом необходимо знать зависимость \mathbf{F} от фазовых переменных, то есть закон трения; в зависимости от закона трения инвариантные подмногообразия существенно различаются (так, например, для сухого трения инвариантное подмногообразие включает в себя траектории качения без проскальзывания, когда сила \mathbf{F} лежит внутри конуса трения). Некоторая модификация этого метода для случая вязкого трения (точнее, процедурой усреднения) использована в работе [18].

ЗАМЕЧАНИЕ. Для случая вязкого трения предел E_* не может быть достигнут за конечное время (вследствие аналитичности правых частей уравнений движения [15]). Для случая сухого трения, как правило, скорость точки контакта может обратиться в нуль через конечный промежуток времени; если при этом сила трения удовлетворяет условию $|\mathbf{F}| < \mu mg$ (то есть реакция лежит внутри конуса трения), то шар будет катиться без проскальзывания до тех пор, пока это условие не нарушится.

3.1. Критические периодические решения и их устойчивость

Поскольку при движении момент относительно точки контакта (3.2) сохраняется, прежде всего ограничим систему на пятимерное интегральное подмногообразие $\mathcal{M}_{M^0} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{M}(\mathbf{x}) = M^0\}$. На нем будем искать множество критических точек для соответствующего ограничения функции энергии $E|_{\mathcal{M}_{M^0}}$:

$$\mathcal{M}_{M^0}^c = \{\mathbf{x} \mid dE|_{\mathcal{M}_{M^0}}(\mathbf{x}) = 0\}. \quad (3.5)$$

Предложение 2. *На каждом интегральном многообразии \mathcal{M}_{M^0} в фазовом пространстве множество критических точек энергии $\mathcal{M}_{M^0}^c$ представляет собой три пары окружностей, задаваемых соотношениями*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}^{(i)} &= \left(\frac{M_x^0}{I_i + D}, \frac{M_y^0}{I_i + D}, \frac{M_z^0}{I_i} \right), \quad \mathbf{V}^{(i)} = \mathbf{R} \times \boldsymbol{\Omega}^{(i)}, \quad \mathbf{n}^{(i)} = \frac{\boldsymbol{\Omega}^{(i)}}{|\boldsymbol{\Omega}^{(i)}|}, \quad i = 1, 2, 3, \\ \mathbf{e}_{i\pm} &= \pm \mathbf{n}^{(i)}, \quad \mathbf{e}_{j\pm} = ((n_x^{(i)})^2 + (n_y^{(i)})^2)^{-1/2} \left(\pm \cos \alpha_{i\pm} \mathbf{n}^{(i)} \times \mathbf{e}_z - \sin \alpha_{i\pm} \mathbf{n}^{(i)} \times (\mathbf{n}^{(i)} \times \mathbf{e}_z) \right), \\ \mathbf{e}_{k\pm} &= ((n_x^{(i)})^2 + (n_y^{(i)})^2)^{-1/2} \left(\pm \sin \alpha_{i\pm} \mathbf{n}^{(i)} \times \mathbf{e}_z + \cos \alpha_{i\pm} \mathbf{n}^{(i)} \times (\mathbf{n}^{(i)} \times \mathbf{e}_z) \right), \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $\alpha_{i\pm} \in [0, 2\pi)$ — углы, параметризующие каждую из окружностей, номера i, j, k соответствуют циклической перестановке чисел.

Доказательство. Параметризуем матрицу ориентации шара \mathbf{Q} углами Эйлера:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \cos \theta \sin \psi \sin \varphi & \cos \varphi \sin \psi + \cos \theta \cos \psi \sin \varphi & \sin \varphi \sin \theta \\ -\sin \varphi \cos \psi - \cos \theta \sin \psi \cos \varphi & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \theta \cos \psi \cos \varphi & \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \psi & -\sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$



где θ — угол нутации, φ — угол собственного вращения, ψ — угол прецессии. Причем, как было сказано выше, по строкам стоят векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, для которых $\tilde{\mathbf{I}}\mathbf{e}_i = I_i\mathbf{e}_i$. Будем искать критическое многообразие (3.5) при помощи неопределенных множителей. В данном случае это приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial \mathbf{V}} - \sum \lambda_s \frac{\partial M_s}{\partial \mathbf{V}} = m\mathbf{V} - m\mathbf{R} \times \boldsymbol{\lambda} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial \boldsymbol{\Omega}} - \sum \lambda_s \frac{\partial M_s}{\partial \boldsymbol{\Omega}} = \tilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\Omega} - \tilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\lambda}, \\ \frac{\partial E}{\partial \theta} - \sum \lambda_s \frac{\partial M_s}{\partial \theta} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega}, \tilde{\mathbf{I}}'_\theta \boldsymbol{\Omega}) - (\boldsymbol{\lambda}, \tilde{\mathbf{I}}'_\theta \boldsymbol{\Omega}) = 0, \quad \dots, \\ M_x = M_x^0, \quad M_y = M_y^0, \quad M_z = M_z^0, \end{aligned}$$

где $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z)$ — неопределенные множители, соответствующие компонентам векторного интеграла (1.6), а многоточие обозначает уравнения, соответствующие дифференцированию по углам φ, ψ .

Из первых двух (векторных) уравнений получаем

$$\mathbf{V} = \mathbf{R} \times \boldsymbol{\lambda}, \quad \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\lambda}. \quad (3.8)$$

Подставляя в оставшиеся уравнения, получим

$$(\boldsymbol{\lambda}, \tilde{\mathbf{I}}'_\theta \boldsymbol{\lambda}) = (\boldsymbol{\lambda}, \tilde{\mathbf{I}}'_\varphi \boldsymbol{\lambda}) = (\boldsymbol{\lambda}, \tilde{\mathbf{I}}'_\psi \boldsymbol{\lambda}) = 0. \quad (3.9)$$

Чтобы решить эти уравнения, воспользуемся следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{I}}'_\theta \mathbf{e}_1 = (I_1 - I_3) \sin \varphi \mathbf{e}_3, \quad \tilde{\mathbf{I}}'_\theta \mathbf{e}_2 = (I_2 - I_3) \cos \varphi \mathbf{e}_3, \quad \tilde{\mathbf{I}}'_\theta \mathbf{e}_3 = (I_1 - I_3) \sin \varphi \mathbf{e}_1 + (I_2 - I_3) \cos \varphi \mathbf{e}_2, \\ \tilde{\mathbf{I}}'_\varphi \mathbf{e}_1 = (I_1 - I_2) \mathbf{e}_2, \quad \tilde{\mathbf{I}}'_\varphi \mathbf{e}_2 = (I_1 - I_2) \mathbf{e}_1, \quad \tilde{\mathbf{I}}'_\varphi \mathbf{e}_3 = 0, \\ \tilde{\mathbf{I}}'_\psi \mathbf{e}_1 = (I_1 - I_2) \cos \theta \mathbf{e}_2 - (I_1 - I_3) \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_3, \quad \tilde{\mathbf{I}}'_\psi \mathbf{e}_2 = (I_1 - I_2) \cos \theta \mathbf{e}_1 + (I_2 - I_3) \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_3, \\ \tilde{\mathbf{I}}'_\psi \mathbf{e}_3 = (I_1 - I_3) \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_1 + (I_2 - I_3) \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_2. \end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что существует три решения уравнений (3.9)

$$\boldsymbol{\lambda}^{(i)} = \mu \mathbf{e}_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

где μ — некоторый скаляр. Следовательно, $\boldsymbol{\lambda}^{(i)}$ — собственный вектор тензора инерции, направленный вдоль одной из главных осей: $\tilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\lambda}^{(i)} = I_i\boldsymbol{\lambda}^{(i)}$. Пользуясь этим и соотношениями (3.8), на заданном уровне интеграла момента $\mathbf{M} = \mathbf{M}^0$ находим

$$\lambda_x^{(i)} = \frac{M_x^0}{I_i + D}, \quad \lambda_y^{(i)} = \frac{M_y^0}{I_i + D}, \quad \lambda_z^{(i)} = \frac{M_z^0}{I_i}, \quad D = ma^2. \quad (3.10)$$

Соотношения (3.8) и (3.10) полностью определяют угловую и линейную скорости шара $\boldsymbol{\Omega}^{(i)}$, $\mathbf{V}^{(i)} = \mathbf{R} \times \boldsymbol{\Omega}^{(i)}$, а также два возможных направления соответствующей главной оси \mathbf{e}_i ($\mathbf{e}_i \uparrow \boldsymbol{\Omega}^{(i)}$ либо $\mathbf{e}_i \downarrow \boldsymbol{\Omega}^{(i)}$), в то время как угол поворота вокруг нее остается произвольным, то есть критический уровень функции энергии E на интегральном подмногообразии $\mathbf{M} = \mathbf{M}^0$ является вырожденным. Комбинируя (3.8) и (3.10) и выражая матрицу поворота вокруг заданной оси, получаем (3.6).

Таким образом, на каждом уровне интегралов $\mathbf{M} = \mathbf{M}^0$ критическое многообразие представляет собой три пары различных окружностей, параметризуемых углом поворота вокруг соответствующей главной оси \mathbf{e}_i . ■

Подставляя соотношения (3.6) в уравнения движения (3.1), для множества критических точек находим

$$m \dot{\mathbf{V}}^{(i)} = 0, \quad (\tilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\Omega}^{(i)})' = I_i \dot{\boldsymbol{\Omega}}^{(i)} = 0, \quad \dot{\mathbf{Q}}_\pm^{(i)} = \mathbf{Q}_\pm^{(i)} \tilde{\boldsymbol{\Omega}}^{(i)} \neq 0.$$

Следовательно, данные критические уровни представляют собой периодические траектории системы, для которых сила трения $\mathbf{F} = 0$, а тело катится вдоль прямой линии так, что при этом одна из главных осей сохраняет постоянный угол с вертикалью (см. рис. 2). Эти решения назовем, по аналогии со случаем интегрируемых систем [10], *критическими периодическими решениями*.

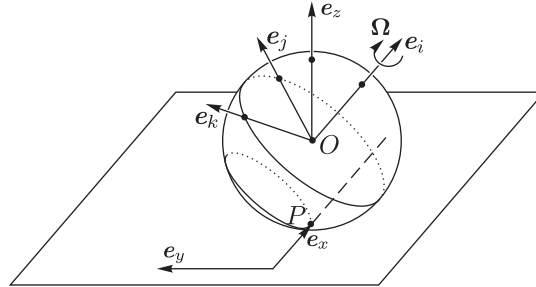


Рис. 2. Качение шара по прямой в случае $\omega \parallel e_i$.

Зависимость критических значений энергии от величины момента дается соотношением

$$E^{(i)} = \frac{1}{2} \left(\frac{M_x^2 + M_y^2}{I_i + D} + \frac{M_z^2}{I_i} \right). \quad (3.11)$$

Поскольку заменой времени $dt \rightarrow \mu dt$, $\mu = \text{const}$, можно всегда сделать $M^2 = 1$, то в качестве переменных удобно выбрать величины (см. [1, 2])

$$\frac{2ED}{M^2} = h \in [0, \infty), \quad \frac{M_z}{\sqrt{M^2}} = g \in [-1, 1];$$

тогда на плоскости этих величин соотношение (3.11) задает три бифуркационные кривые:

$$\sigma_i: h = b_i + \frac{b_i^2}{1 - b_i} g^2, \quad b_i = \frac{D}{I_i + D}, i = 1, 2, 3.$$

На рисунке 3 изображены эти кривые при условии $I_1 > I_2 > I_3$; они совпадают с соответствующими бифуркационными кривыми в задаче о качении без проскальзывания шара Чаплыгина [1].

Поскольку энергия (3.3) ограничена снизу, наименьшее из критических значений (3.11), которое отвечает вращению вокруг наибольшей оси, определяет абсолютный минимум энергии на поверхности \mathcal{M}_M , $M = \text{const}$. Ему соответствует нижняя из бифуркационных кривых σ_1 на рисунке 3, а область возможных значений g, h располагается сверху от нее (обозначена серым цветом). Проекции траекторий на плоскость этих переменных представляют собой вертикальные прямые.

Как известно [1], в случае качения шара Чаплыгина без проскальзывания область возможных значений величин g, h ограничена сверху кривой σ_3 (отвечающей вращению вокруг наименьшей оси). Следовательно, для всех значений (g, h) выше кривой σ_3 движение шара без проскальзывания невозможно, то есть $\mathbf{V}_p \neq 0$.

Предложение 3. Для всякой поверхности уровня \mathcal{M}_M , где $\mathbf{M} \nparallel e_z$, периодическое решение (3.5), отвечающее вращению вокруг наибольшей оси ($I_i = I_{\max}$), является траекторно устойчивым.

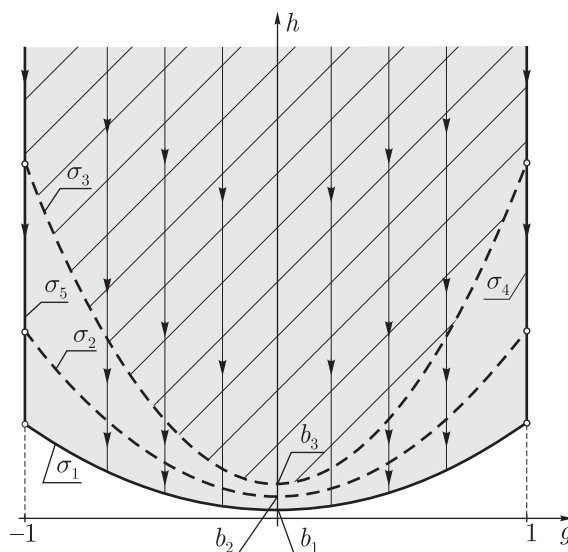


Рис. 3. Бифуркационные кривые, область возможных движений (обозначена серым цветом) и проекции траекторий системы на плоскости переменных g, h (при этом $I_1 > I_2 > I_3$). В заштрихованной области движение без проскальзывания невозможно.

Доказательство. Во-первых, как было сказано выше, энергия шара (3.3) всюду диссипирует или остается постоянной:

$$\dot{E} \leq 0.$$

Во-вторых, на указанных решениях E принимает абсолютный минимум на \mathcal{M}_M и, вследствие того, что энергия — аналитическая функция, она не является константой в окрестности этих решений. Следовательно, E — функция Ляпунова данных решений на \mathcal{M}_M и, по теореме Ляпунова, эти решения устойчивы относительно возмущений, принадлежащих \mathcal{M}_M .

Кроме того, поскольку указанные решения также аналитически зависят от величины интеграла M , они остаются устойчивы и по отношению к его малым возмущениям. ■

Заметим, что в случае сухого трения (то есть $|\mathbf{F}| = \mu mg$ при $\mathbf{V}_p \neq 0$ и $|\mathbf{F}| \leq \mu mg$ при $\mathbf{V}_p = 0$) устойчивость этих решений, как правило, не может быть асимптотической, так как в их окрестности скорость точки контакта может обратиться в нуль за конечное время, после чего шар будет катиться без проскальзывания, как в задаче о шаре Чаплыгина [5, 21]. В то же время при условии вязкого трения (то есть $\mathbf{F} = -\mu \mathbf{v}$) устойчивость будет асимптотической; чтобы показать это, рассмотрим данный случай подробнее.

3.2. Инвариантное подмногообразие с нулевой скоростью точки контакта

Покажем, что для случая вязкого трения второй метод поиска инвариантных многообразий, указанный выше (с. 67), приводит к тому же результату, что и первый.

Предложение 4. Если в системе (1.2) в случае нулевой скорости точки контакта $\mathbf{V}_p = 0$ сила трения обращается в нуль, $\mathbf{F} = 0$, то на каждом фиксированном уровне первых интегралов $M = M^0$ максимальное инвариантное подмногообразие, для которого $\mathbf{V}_p = 0$ совпадает с критическим $\mathcal{M}_{M^0}^c$, определяемым соотношениями (3.5).

Доказательство. Продифференцируем условие $\mathbf{V}_p = \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R} = 0$ в силу системы (1.2) при условии, что $\mathbf{F} = 0$, получаем

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{R} = \tilde{\Gamma}^{-1}(\tilde{\Gamma}\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega}) \times \mathbf{R} = 0, \quad \mathbf{R} = -a\mathbf{e}_z.$$

Отсюда заключаем, что для переменных Ω, \mathbf{Q} инвариантное подмногообразие может быть задано одним из следующих соотношений:

$$\tilde{\mathbf{I}}\Omega \times \Omega = 0 \quad \text{либо} \quad \tilde{\mathbf{I}}\Omega \times \Omega = \mu \tilde{\mathbf{I}}e_z.$$

Первое соотношение эквивалентно тому, что Ω — собственный вектор тензора $\tilde{\mathbf{I}}$, то есть $\Omega = \mu e_i, i = 1, 2, 3$, и мы согласно доказательству предыдущего предложения при каждом фиксированном уровне интеграла $M = M^0$ получаем инвариантное подмногообразие $M_{M^0}^c$.

Предположим, что выполнено второе соотношение с $\mu \neq 0$; домножая его скалярно на Ω и $\tilde{\mathbf{I}}\Omega$, получим

$$(\tilde{\mathbf{I}}\Omega, e_z) = (M, e_z) = 0, \quad (\tilde{\mathbf{I}}^2\Omega, e_z) = (\tilde{\mathbf{I}}M, e_z) = 0.$$

Первое из этих уравнений очевидно задает инвариантное соотношение, то есть $(M, e_z)' \equiv 0$. Покажем, что второе уравнение не является инвариантным соотношением. Поскольку $M \perp e_z$, выберем неподвижные оси так, что $M = M^0 e_x$, при этом

$$(\tilde{\mathbf{I}}M, e_z) = M^0 \tilde{I}_{13} = 0.$$

С другой стороны, пользуясь уравнением (1.5), получим

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathbf{I}}M, e_z)' &= (\tilde{\mathbf{I}}(M \times \Omega) - (\tilde{\mathbf{I}}M) \times \Omega, e_z) = \\ &= (\det \tilde{\mathbf{I}})^{-1} \tilde{I}_{12} (\tilde{I}_{11} \tilde{I}_{33} + \tilde{I}_{22} \tilde{I}_{33} - \tilde{I}_{33}^2 - 2\tilde{I}_{23}^2) = (\det \tilde{\mathbf{I}})^{-1} \tilde{I}_{12} \Phi(\tilde{\mathbf{I}}). \end{aligned}$$

Условие $\tilde{I}_{12} = 0$ совместно с уравнением $\tilde{I}_{13} = 0$ означает, что M и вместе с ним Ω являются собственными векторами тензора $\tilde{\mathbf{I}}$, что, как было сказано выше, определяет подмногообразие $M_{M^0}^c$. Следовательно, необходимо рассмотреть случай $\tilde{I}_{12} \neq 0$ и показать, что при условии $\tilde{I}_{13} = 0$ функция $\Phi(\tilde{\mathbf{I}})$ отделена от нуля. Для этого воспользуемся определением $\tilde{\mathbf{I}} = \mathbf{Q}^T \mathbf{I} \mathbf{Q}$, где $\mathbf{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ — главный тензор инерции, и параметризуем \mathbf{Q} углами Эйлера (3.7).

Из уравнения $\tilde{I}_{13} = 0$ находим

$$\text{tg } \psi = \frac{(I_1 - I_2) \sin \varphi \cos \varphi}{\cos \theta (I_1 \sin^2 \varphi + I_2 \cos^2 \varphi - I_3)}.$$

Пользуясь этим, находим

$$\begin{aligned} \Phi_0(\theta, \varphi) = \Phi(\tilde{\mathbf{I}})|_{\tilde{I}_{13}=0} &= -\sin^2 \theta \sin^2 \varphi I_1^2 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi I_2^2 - \cos^2 \theta I_3^2 + \\ &+ \sin^2 \theta I_1 I_2 + (1 - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi) I_2 I_3 + (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \varphi) I_1 I_3. \end{aligned}$$

Поскольку это ограниченная функция, ее максимальное и минимальное значения определяются ее значениями в критических точках. Несложно показать, что в критических точках $\Phi_0(\theta, \varphi)$ принимает одно из возможных трех значений:

$$I_1(I_2 + I_3 - I_1), \quad I_2(I_3 + I_1 - I_2), \quad I_3(I_1 + I_2 - I_3).$$

Для реальных тел (шаров), вследствие неравенства треугольника $I_i + I_j > I_k$, все три значения положительны, поэтому функция $\Phi_0(\theta, \varphi) > 0$. ■

На основании этого предложения заключаем, что в окрестности найденных выше периодических решений (3.6) в случае вязкого трения выполнено строгое неравенство

$$\dot{E} < 0.$$

По теореме Ляпунова получаем

Предложение 5. В случае вязкого трения периодические решения (3.6), отвечающие вращению вокруг наибольшей оси (то есть $I_i = I_{\max}$), асимптотически устойчивы.



ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что нами доказана устойчивость абсолютного движения шара, то есть при качении шар стремится сохранить положение оси вращения в абсолютном пространстве, а уход с исходной траектории на плоскости может быть не более чем линейным по времени.

Для вращений вокруг средней и наибольшей осей справедливо следующее

Предложение 6. В случае вязкого трения периодические решения (3.6), отвечающие вращению вокруг средней и наименьшей осей инерции, неустойчивы.

Доказательство. Запишем уравнения (3.1) с учетом (2.1) в переменных \mathbf{V} , $\mathbf{L} = \tilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\Omega}$, ψ , θ , φ

$$m\dot{\mathbf{V}} = -\mu(\mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}), \quad \dot{\mathbf{L}} = -\mu\mathbf{R} \times (\mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}),$$

$$\dot{\psi} = \Omega_3 - \operatorname{ctg} \theta (\Omega_1 \sin \psi - \Omega_2 \cos \psi), \quad \dot{\theta} = \Omega_1 \cos \psi + \Omega_2 \sin \psi, \quad \dot{\varphi} = \frac{1}{\sin \theta} (\Omega_1 \sin \psi - \Omega_2 \cos \psi), \quad (3.12)$$

где $\boldsymbol{\Omega} = \tilde{\mathbf{I}}^{-1}\mathbf{L}$, а $\tilde{\mathbf{I}}$ выражается через углы Эйлера с помощью соотношения (1.3). Ограничим систему (3.12) на совместный уровень интегралов момента $\mathbf{M} = \operatorname{const}$, исключив из нее с помощью (3.2) переменные V_1 , V_2 и L_3 . В результате получим систему пяти дифференциальных уравнений

$$\dot{L}_1 = \frac{\mu}{m}(M_1 - L_1 - ma^2\Omega_1), \quad \dot{L}_2 = \frac{\mu}{m}(M_2 - L_2 - ma^2\Omega_2),$$

$$\dot{\psi} = \Omega_3 - \operatorname{ctg} \theta (\Omega_1 \sin \psi - \Omega_2 \cos \psi), \quad \dot{\theta} = \Omega_1 \cos \psi + \Omega_2 \sin \psi, \quad \dot{\varphi} = \frac{1}{\sin \theta} (\Omega_1 \sin \psi - \Omega_2 \cos \psi), \quad (3.13)$$

в которую значения интегралов M_1 , M_2 и $L_3 = M_3$ входят в качестве параметров. Без потери общности положим значение интеграла M_2 равным нулю: это можно сделать с помощью выбора осей неподвижной системы координат так, чтобы выполнялось $\mathbf{M} \perp \mathbf{e}_y$.

Для системы (3.13) периодические решения (3.6) удобно представить в виде вращений вокруг оси \mathbf{e}_3 . При этом разным решениям будут соответствовать следующие перестановки моментов инерции: вращение вокруг большей оси инерции $I_1 < I_2 < I_3$, вокруг средней оси $I_2 < I_3 < I_1$, вокруг меньшей оси $I_3 < I_1 < I_2$. С учетом равенств $M_2 = 0$ и $M_3 = L_3^0$ данные периодические решения примут вид

$$L_1 = L_1^0 = \frac{1}{1 + a_3} M_1, \quad L_2 = L_2^0 = 0,$$

$$\psi = \psi_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \theta = \theta_0 = \arctan \frac{L_1^0}{L_3^0}, \quad \varphi = \Omega_0 t, \quad \Omega_0 = \frac{\sqrt{(L_1^0)^2 + (L_2^0)^2}}{I_3}, \quad (3.14)$$

где введены обозначения $a_i = \frac{D}{I_i}$. Величину энергии для этих бездиссипативных движений обозначим $E_0 = \frac{1}{2I_3} ((1 + a_3)(L_1^0)^2 + (L_3^0)^2)$.

Для доказательства неустойчивости решения (3.14) воспользуемся теоремой Ляпунова о неустойчивости [14]. В качестве соответствующей функции Ляпунова выберем разность $F_L = E - E_0$ (3.3). Как было доказано выше, ее производная всюду вне решений (3.14) является знакоопределенной функцией $\dot{F}_L < 0$. Покажем, что при этом сама функция F_L в окрестности (3.14) для вращений вокруг средней и наименьшей осей является знакопеременной. Для это рассмотрим разложение F_L в ряд вблизи решения (3.14) до второго порядка:

$$F_L = \frac{1}{2D} (\mathbf{z}, \mathbf{B}(\varphi)\mathbf{z}) + \dots, \quad (3.15)$$

где $\mathbf{z} = (L_1 - L_1^0, L_2, \psi - \psi_0, \theta - \theta_0)$, а $\mathbf{B}(\varphi)$ — симметричная 4×4 матрица с элементами, периодически зависящими от φ .

Для определения знаков собственных значений $\mathbf{B}(\varphi)$ воспользуемся следующим утверждением [11].



Теорема Якоби. Если все главные миноры $\Delta_1 \dots \Delta_n$ симметричной матрицы \mathbf{B} отличны от нуля, то число положительных собственных чисел матрицы \mathbf{B} равно числу сохраненных знаков, а число отрицательных собственных чисел — числу перемен знаков в ряду $1, \Delta_1, \dots, \Delta_n$.

Главные миноры матрицы $\mathbf{B}(\varphi)$ можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{1}{(L_1^0)^2 + (L_3^0)^2} \left((1 + a_3)(L_1^0)^2 + (a_1 \sin^2 \varphi + a_2 \cos^2 \varphi + 1)(L_3^0)^2 \right), \\ \Delta_2 &= \frac{1}{(L_1^0)^2 + (L_3^0)^2} \left((a_1 \cos^2 \varphi + a_2 \sin^2 \varphi + 1)(L_1^0)^2 + (1 + a_1)(1 + a_2)(L_3^0)^2 \right), \\ \Delta_3 &= \frac{(1 + a_3)(L_1^0)^2}{(L_1^0)^2 + (L_3^0)^2} \left((1 + a_3)((a_1 - a_3) \cos^2 \varphi + (a_2 - a_3) \sin^2 \varphi)(L_1^0)^2 + \right. \\ &\quad \left. + ((a_1 - a_3)(1 + a_2) \cos^2 \varphi + (a_2 - a_3)(1 + a_1) \sin^2 \varphi)(L_3^0)^2 \right), \\ \Delta_4 &= (L_1^0)^2 \left((L_1^0)^2 + (L_3^0)^2 \right) (1 + a_3)^2 (a_1 - a_3)(a_2 - a_3). \end{aligned} \tag{3.16}$$

Рассмотрим далее отдельно два случая.

1. Вращение вокруг наименьшей оси инерции ($a_3 > a_1, a_3 > a_2$).

В этом случае при всех значениях констант L_1^0, L_3^0 и углов φ выполняются следующие неравенства для миноров (3.16):

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 < 0, \quad \Delta_4 > 0.$$

Отсюда следует, что два собственных числа матрицы $\mathbf{B}(\varphi)$ положительны и два отрицательны. Таким образом, в окрестности решения (3.14) энергия является знакопеременной функцией и, по теореме Ляпунова о неустойчивости, вращения вокруг наименьшей оси инерции являются неустойчивыми.

2. Вращение вокруг средней оси инерции ($a_1 < a_3 < a_2$ или $a_2 < a_3 < a_1$).

В этом случае для главных миноров выполнены неравенства

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_4 < 0,$$

а Δ_3 в зависимости от значения φ может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Тем не менее, количество перемен знаков не меняется, поэтому при всех значениях φ три собственных числа $\mathbf{B}(\varphi)$ положительны и только одно отрицательно. Таким образом, по теореме Ляпунова, вращения вокруг средней оси инерции также являются неустойчивыми. ■

Дискуссия

В заключение обсудим некоторые открытые проблемы в задаче об управлении сферическим роботом с роторами, описанным в данной работе (в частности, проблемы практической реализации предложенных алгоритмов). С целью проверки результатов данной и предыдущей работы в лаборатории нелинейного анализа и конструирования новых средств передвижения был создан экспериментальный образец шара с управлением роторами (см. схему и фото на рис. 4).

Соответствующее демонстрационное видео можно посмотреть по адресу <http://lab.ics.org.ru/videomaterialy/19-12-2012/eksperimentalnyy-obrazec-sfericheskogo-robot-a-s-rotorami/>.

Результаты проведенных экспериментов показывают, что на движение шара и управление им существенное влияние оказывает трение качения. Если учесть все силы трения, то уравнения движения шара с роторами могут быть представлены в форме

$$m \dot{\mathbf{V}} = \mathbf{F}, \quad (\tilde{\mathbf{I}}\boldsymbol{\Omega} + \mathbf{K})' = \mathbf{R} \times \mathbf{F} + \mathbf{M}^r + \mathbf{M}^s,$$

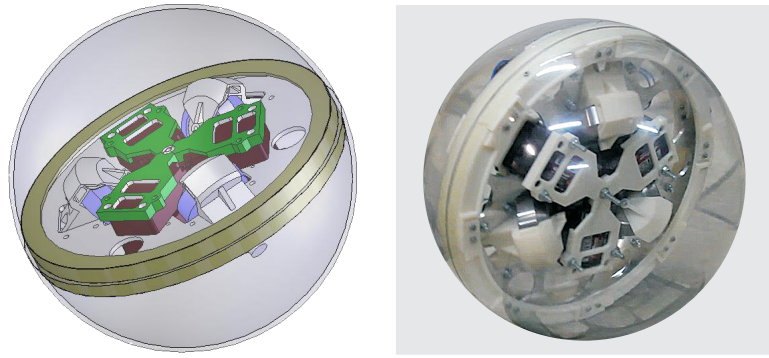


Рис. 4

где $M^r = -\lambda^r \Omega_{||}$ — момент трения качения, который параллелен опорной плоскости и направлен противоположно проекции угловой скорости на эту плоскость [20], M^f — вертикально направленный момент трения верчения.

В случае *сухого трения* имеем

$$M^r = -\mu^r mg \frac{\Omega_{||}}{|\Omega_{||}|}, \quad M^s = -\mu^s mg \frac{\Omega_z}{|\Omega_z|} e_z,$$

для *вязкого трения* —

$$M^r = -\mu^r \Omega_{||}, \quad M^s = -\mu^s \Omega_z e_z,$$

где μ^r, μ^s — соответствующие коэффициенты трения качения и трения верчения (положительные величины).

Эта система не допускает интеграл момента относительно точки контакта (и других первых интегралов), поэтому решение задачи управления для нее существенно усложняется. Задача до сих пор не решена и требует дополнительного изучения.

Укажем также ряд технических проблем, которые требуют решения при практической реализации управления сферическим роботом:

1. измерение моментов инерции реального сферического робота;
2. точная балансировка шара (то есть достижение совпадения центра масс и геометрического центра сферы);
3. определение коэффициентов трения (как показывают эксперименты, поведение шара на разных типах поверхностей сильно различается).

Кроме того, для достижения достаточно быстрого хорошо управляемого движения сферического робота требуется, чтобы момент инерции каждого ротора составлял значительную часть общего момента инерции шара, что в случае трех роторов оказывается технически реализовать достаточно сложно. В силу названных причин нам представляется, что использование ротора в качестве основного движителя является неэффективным. В то же время использование роторов для совершения маневров выглядит вполне перспективным.

Авторы выражают благодарность М. М. Свинину, А. В. Болсинову за ценные обсуждения и комментарии.

Список литературы

- [1] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. Generalized Chaplygin's transformation and explicit integration of a system with a spherical support // Regul. Chaotic Dyn., 2012, vol. 17, no. 2, pp. 170–190.
- [2] Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Как управлять шаром Чаплыгина при помощи роторов // Нелинейная динамика, 2012, т. 8, № 2, с. 289–307. (См. также: Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. How to control Chaplygin's sphere using rotors // Regul. Chaotic Dyn., 2012, vol. 17, nos. 3–4, pp. 258–272.)
- [3] Gallop E. G. On the rise of a spinning top // Proc. Cambridge Philos. Soc., 1904, vol. 19, no. 3, pp. 356–373.
- [4] Ishikawa M., Kitayoshi R., Sugie T. Volvot: A spherical mobile robot with eccentric twin rotors // Proc. of the IEEE Internat. Conf. on Robotics and Biomimetics (Phuket, Thailand, Dec. 7–11, 2011), pp. 1462–1467.
- [5] Kilin A. A. The dynamics of Chaplygin ball: The qualitative and computer analysis // Regul. Chaotic Dyn., 2001, vol. 6, no. 3, pp. 291–306.
- [6] Otani T., Urakubo T., Maekawa S., Tamaki H., Tada Y. Position and attitude control of a spherical rolling robot equipped with a gyro // Proc. of the 9th IEEE Internat. Workshop on Advanced Motion Control, 2006, pp. 416–421.
- [7] Svinin M., Morinaga A., Yamamoto M. On the dynamic model and motion planning for a class of spherical rolling robots // Proc. of the IEEE Internat. Conf. on Robotics and Automation (ICRA, 14–18 May, 2012), pp. 3226–3231.
- [8] Svinin M., Morinaga A., Yamamoto M. An analysis of the motion planning problem for a spherical rolling robot driven by internal rotors // Proc. IEEE/RSJ Internat. Conf. on Intelligent Robots and Systems, 2012, pp. 414–419.
- [9] Svinin M., Morinaga A., Yamamoto M. On the dynamic model and motion planning for a spherical rolling robot actuated by orthogonal internal rotors // Regul. Chaotic Dyn., 2013, vol. 18, nos. 1–2, pp. 126–143.
- [10] Болсинов А. В., Борисов А. В., Мамаев И. С. Топология и устойчивость интегрируемых систем // УМН, 2010, т. 65, № 2(392), с. 71–132.
- [11] Гантмахер Ф. Г. Теория матриц. Москва: Наука, 1967. 576 с.
- [12] Карепетян А. В. Устойчивость стационарных движений. Москва: Эдиториал УРСС, 1998. 166 с.
- [13] Карепетян А. В. Глобальный качественный анализ динамики китайского волчка (тип-топ) // МТТ, 2008, № 3, с. 33–41.
- [14] Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. Москва: Наука, 1966. 532 с.
- [15] Маркеев А. П. Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. 2-е изд., испр. и доп. Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2011. 463 с.
- [16] Маркеев А. П. Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. Москва: Наука, 1992. 335 с.
- [17] Мартыненко Ю. Г. Управление движением мобильных колесных роботов // Фундамент. и прикл. матем., 2005, т. 11, № 8, с. 29–80.
- [18] Мощук Н. К. О движении шара Чаплыгина на горизонтальной плоскости // ПММ, 1983, т. 47, № 6, с. 916–921.
- [19] Мощук Н. К. О движении тяжелого твердого тела на горизонтальной плоскости с вязким трением // ПММ, 1985, т. 49, № 1, с. 66–71.
- [20] Пэнлеве П. Лекции о трении. Москва: Гостехиздат, 1954. 316 с.
- [21] Чаплыгин С. А. О катании шара по горизонтальной плоскости // Матем. сб., 1903, т. 24, с. 139–168. (См. также: Чаплыгин С. А. Собр. соч.: Т. 1. Москва–Ленинград: ОГИЗ, 1948. С. 76–101.)



How to control the Chaplygin ball using rotors. II

Alexey V. Borisov¹, Alexander A. Kilin², Ivan S. Mamaev³

^{1,2}Institute of Computer Science;

Laboratory of nonlinear analysis and the design of new types of vehicles

Udmurt State University

Universitetskaya 1, Izhevsk, 426034 Russia

A. A. Blagonravov Mechanical Engineering Research Institute of RAS

Bardina str. 4, Moscow, 117334, Russia

Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of RAS

S. Kovalevskaja str. 16, Ekaterinburg, 620990, Russia

¹borisov@rcd.ru, ²aka@rcd.ru, ³mamaev@rcd.ru

In our earlier paper [2] we examined the problem of control of a balanced dynamically nonsymmetric sphere with rotors with no-slip condition at the point of contact. In this paper we investigate the controllability of a ball in the presence of friction. We also study the problem of the existence and stability of singular dissipation-free periodic solutions for a free ball in the presence of friction forces. The issues of constructive realization of the proposed algorithms are discussed.

MSC 2010: 37J60, 37J35, 70E18, 70F25, 70H45

Keywords: non-holonomic constraint, control, dry friction, viscous friction, stability, periodic solutions

Received January 31, 2013, accepted February 28, 2013

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2013, vol. 9, no. 1, pp. 59–76 (Russian)

