

REGULAR VINE CÓPULAS: UNA APLICACIÓN AL CÁLCULO DE VALOR AL RIESGO¹

Yennyfer FEO CEDIEL

Oficina de Planeamiento y Presupuesto- proyecto Uruguay Integra². Torre Ejecutiva, pisos 5, 6 y 7. Montevideo, Uruguay

feceyen@gmail.com

Resumen

Recibido: 08/2016

Aceptado: 11/2016

Palabras clave

Valor al riesgo (VaR).

Vine cópulas.

Distribución generalizada de Pareto.

La evidencia empírica demuestra que los rendimientos de los índices bursátiles en general, tienen una forma asimétrica y de colas pesadas, infringiendo el supuesto de normalidad requerido en metodologías tradicionales para el cálculo de valor al riesgo. En este trabajo se empleó una metodología para capturar de forma más precisa la distribución de las colas de los retornos de seis índices de mercados latinoamericanos, utilizando información diaria de los índices bursátiles de Argentina, Brasil, Chile, Colombia, México y Perú, comprendida entre noviembre del año 2010 y octubre del año 2015. Se eligieron como distribuciones marginales para la identificación de la estructura de dependencia entre los mercados por medio de metodología R-Vine cópula, unas funciones mixtas compuestas de núcleo gaussiano y colas de distribución Pareto generalizada sobre los residuales estandarizados de las series ARMA-GARCH, series que capturaron la dinámica de la distribución condicional de la volatilidad a lo largo del tiempo para cada retorno.

Finalmente se calculó el valor al riesgo (VaR) por el método de simulación, incorporando la estructura de dependencia modelada por las R-vine cópulas, para medir el riesgo de cada mercado y de un portafolio compuesto por estos seis países. Los resultados empíricos muestran que la dependencia condicional entre las volatilidades no asimétricas de los seis mercados son positivas, y la dependencia entre Brasil y México es la más fuerte. Los resultados del VaR también indican que el índice de Brasil tiene el mayor riesgo y que el valor al riesgo encontrado utilizando teoría de R-Vine cópulas es diferente al obtenido mediante metodología tradicional como lo es la simulación histórica.

Copyright: Facultad de Ciencias Económicas, Universidad de Buenos Aires.

ISSN: 2250-687X - ISSN (En línea): 2250-6861

¹ Artículo basado en resultados de mi tesis para obtener el título de Magister en Gestión Económica y Financiera de Riesgos en la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Buenos Aires. Agradezco a los profesores María José Bianco y Javier García Fronti por su tiempo y dedicación en la dirección de la tesis.

² Las opiniones vertidas por la autora en este trabajo son de su exclusiva responsabilidad.

REGULAR VINE COPULA: AN APPLICATION OF VALUE AT RISK

Yennyfer FEO Cediél

Oficina de Planeamiento y Presupuesto- proyecto Uruguay Integra. Torre Ejecutiva, pisos 5, 6 y 7. Montevideo, Uruguay

feceyen@gmail.com

Abstract

KEYWORDS

Value at risk.
Vine copula.
Generalized Pareto distribution (GPD).

Empirical evidence shows that the performance of stock indices generally have an asymmetric shape and heavy tails, breaking the normality assumption required in traditional methodologies for calculating value at risk. This study used a methodology to capture more precisely the tail distribution of the stock returns series of six Latin American markets, using daily data from November of 2010 to October of 2015 of Argentina, Brazil, Chile, Colombia, Mexico and Peru markets.

The process first extracts the filtered residuals from each return series with an ARMA-GARCH model, to capture the dynamics of the conditional distribution of volatility over time for each return. To create the residuals, this study constructed the sample marginal cumulative distribution function (CDF) of each asset using a Gaussian kernel estimate for the interior and a generalized Pareto distribution (GPD) estimate for the upper and lower tails. The R vine copula is used for the analysis of the dependence **structures between markets**.

Finally, we used simulation procedure to generate the dependent return series incorporating the dependency structure modeled by the R-vine copulations for calculating the Value-at-Risk (VaR) of the hypothetical global equity portfolio composed of these six countries. The empirical results show that the conditional dependence between nonasymmetric volatilities of the six markets are positive, and dependence between Brazil and Mexico is the strongest. VaR results also indicate that Brazil has the highest risk and the VaR found using R-Vine theory copulations is different from that obtained using traditional methodology as is the historical simulation.

Copyright: Facultad de Ciencias Económicas, Universidad de Buenos Aires.

ISSN: 2250-687X - ISSN (En línea): 2250-6861

INTRODUCCIÓN

En los métodos de medición de VaR tradicionales, la distribución conjunta de los retornos financieros suele modelarse suponiendo normalidad. Esto implica una estructura de dependencia predeterminada que cumple algunos supuestos como simetría, colas livianas y dependencia lineal de los retornos y puede medirse a través de la correlación como fue expuesto por Giacomini (2005). Sin embargo, la evidencia empírica demuestra que tales supuestos son pocos apropiados. Además, se necesita una herramienta más flexible para modelar la distribución marginal de los activos riesgosos, como insumo para obtener la distribución conjunta del portafolio. Se precisan también medidas de dependencia alternativas al coeficiente de correlación $\rho(X, Y)$ el cual es un indicador que permite medir solo la dependencia lineal que existe entre X e Y. Cuanto más próximo a 1 esté en valor absoluto, mayor es la relación lineal que vincula a las variables.

Además, el signo de este coeficiente brinda información sobre el “sentido” de la relación: si es positivo, X crece conforme crece Y, mientras que si es negativo, una y otra variable se mueven, de forma lineal, en sentido opuesto. El hecho de que $\rho(X, Y)$ valga 0 es representativo de ausencia de relación lineal entre X e Y, lo cual no quiere decir que no exista algún otro tipo de relación (no lineal). Sin embargo según Embrechts y Straumann (1999), el coeficiente de correlación de Pearson resulta inapropiado para medir relaciones de dependencia, teniendo en cuenta que:

- Es una medida de dependencia representada en un escalar.
- Detecta solamente dependencia lineal.
- Está definida cuando la varianza es finita.
- Presupone la existencia de normalidad entre las variables, denominando densidad conjunta normal a la relación de dependencia existente.
- La correlación no es invariante ante transformaciones estrictamente monótonas.
- Independencia siempre implica correlación cero.

Estas debilidades en la correlación se originan porque dicha medida no depende solamente de la función de densidad conjunta, sino también depende de las distribuciones marginales de los datos, que hacen que ésta sea una medida de dependencia poco adecuada para las series financieras, que se caracterizan por ser distribuciones de colas pesadas, donde las medias y varianzas pueden no ser finitas y cuya dependencia puede no ser estrictamente lineal.

Es aquí donde juegan un gran papel las funciones cópulas las cuales superan algunos de los inconvenientes mencionados anteriormente, tal como lo describen Beccerra y Melo (2008):

- Dado que la cópula extrae la estructura de dependencia de la función de distribución multivariada, ésta contiene mucha más información acerca de la dependencia entre variables aleatorias que la que puede contener un solo número.
- Tiene en cuenta todos los posibles casos de dependencia, ya que se encuentra definida por la transformación uniforme de las distribuciones marginales, independientemente de la distribución de probabilidad que tenga cada una. En esta premisa, no se hace necesario exigir distribuciones de probabilidad normales para las distribuciones marginales de las variables.
- Es invariante ante transformaciones monótonas crecientes, incluyendo las transformaciones afines positivas.
- Finalmente, ya que la cópula representa la estructura de dependencia, independientemente de las funciones de distribución marginales, ésta puede tratar con múltiples especificaciones de funciones de distribución, inclusive aquellas que no tienen definidos algunos de sus momentos.

Adicionalmente, existen las denominadas “medidas de correlación en el rango” como por ejemplo Tau de Kendall, la cual cuantifica relaciones no necesariamente lineales, sino que se utiliza directamente como función de evaluación del contraste de independencia.

Cabe destacar el tema sobre las colas pesadas de las distribuciones, se considera muy importante controlar y gestionar de la mejor manera posible los casos extremos que se presentan en las series de rendimientos financieros, puesto que éstos provienen de eventos no usuales y muestran como la información inesperada o sucesos anómalos pueden causar una suba o caída de los rendimientos, ocasionando una mayor variabilidad que pueda considerarse como impulso o en su defecto conducir a un cambio de nivel de toda la serie de rendimientos. Los casos extremos son en gran medida los responsables de los grandes movimientos y del incremento de la volatilidad y la incertidumbre en los mercados, haciendo que las colas de las distribuciones sean más pesadas. Una serie de rendimientos financieros que muestra comportamientos inusuales es de gran interés, ya que en la mayoría de los casos, estos eventos son lo que ocasionan las pérdidas y/o ganancias más significativas, amenazando la estabilidad del mercado financiero donde se cotiza y a su vez, puede tener una fuerte repercusión en el sistema financiero global de acuerdo al grado de dependencia entre ellos.

En la literatura no se han encontrado muchos artículos que utilicen medidas de tipo VaR o teoría de valor extremo (EVT por sus siglas en inglés) a través de cópulas R-vine para el caso específico de Latinoamérica. Entre los trabajos publicados, se puede citar a Loaiza, Gomes y Melo (2014) quienes implementaron una metodología regular vine cópula para evaluar el nivel de contagio entre los tipos de cambio de seis países de América Latina (Argentina, Brasil, Chile, Colombia, México y Perú), midiendo el contagio en términos de coeficientes de dependencia en las colas; Ozun y Cifter (2007) que emplearon cópulas con variación temporal para estimar el valor en riesgo de una cartera formada por índices de América Latina; Alonso y Arcos (2005) estimaron el VaR con diferentes métodos para siete países de Latinoamérica, utilizando las medias móviles ponderadas exponencialmente y variaciones de los modelos GARCH; y Canela y Pedreira (2005) estimaron el grado y la estructura de dependencia para los índices de varios países de Latinoamérica.

A diferencia de los trabajos citados, a continuación se propone una forma alternativa para calcular el riesgo de mercado y el desempeño de un portafolio compuesto por seis mercados latinoamericanos con datos comprendidos en el periodo nov-2010 a oct-2015, corrigiendo problemas de heterocedasticidad, análisis de volatilidad condicional e incorporando la dependencia entre los mercados accionarios del grupo de países seleccionados mediante metodología de cópulas R-Vine, que por su naturaleza empírica y no paramétrica, se ajustan a los datos resaltando la presencia de valores extremos que se presentan en las colas de las distribuciones marginales.

Este artículo está estructurado como se expone a continuación. En la segunda sección se presenta una breve descripción de la metodología y teorías empleadas en el análisis, recorriendo temas como: los modelos ARMA-GARCH, los Vine cópulas y el cálculo del VaR; en la tercera sección se presentan la descripción y el análisis de los datos utilizados, la modelización de la volatilidad para las seis series, la especificación de la R-vine obtenida y por último los cálculos del VaR para la simulación del portafolio bajo la estructura de dependencia estimada. En la última sección se exponen las conclusiones a las que se ha llegado.

1. METODOLOGÍA

La metodología usada en el análisis empírico consistió en tres etapas. En la primera se modelaron procesos ARMA-GARCH para corregir problemas de heterocedasticidad y análisis de volatilidad condicional. Para crear los residuos estandarizados de la componente GARCH, se utilizó la distribución generalizada de Pareto (GPD) para capturar las colas y distribución de Gauss en el interior. Las cópulas R-vine se utilizaron para el análisis de las estructuras de

dependencia entre los mercados en la segunda etapa. Por último, se utilizó el procedimiento de simulación para generar las series de retornos dependientes para cálculo de VaR de cada mercado.

2.1. Modelo ARMA-GARCH para las marginales.

Los estudios empíricos han fallado en apoyar la hipótesis de que los datos de retornos de índices de acciones siguen una distribución normal, ya que exhiben colas mucho más pesadas y presentan exceso de curtosis.

Para capturar las características de la distribución de los retornos de los índices que se utilizaron como marginales para modelar la distribución conjunta a través de cópulas, se implementó un modelo ARMA-GARCH como fue propuesto en McNeil (2005) y Sun (2006).

Sea la secuencia de variables aleatorias i.i.d. $(u_t)_{t \geq 0}$ con media cero y varianza la unidad, se supone que el log-retorno es un proceso $(X_t)_{t \geq 0}$ que sigue el modelo $ARMA(p_1, q_1) - GARCH(p_2, q_2)$, el cual satisface:

$$X_t = \mu_t + \varepsilon_t \text{ con } \varepsilon_t = \sigma_t u_t \quad (1)$$

Donde la ecuación para el proceso para la media condicional se define como sigue:

$$\mu_t = \mu + \sum_{i=1}^{p_1} a_i X_{t-i} + \sum_{j=1}^{q_1} b_j \varepsilon_{t-j} \quad (2)$$

las innovaciones ε_t tienen definida una varianza condicional $Var(\varepsilon_t | \mathcal{F}_t)$ en la forma:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p_2} \alpha_i \sigma_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q_2} \beta_j \varepsilon_{t-j}^2 \quad (3)$$

Con $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i \geq 0$, $\beta_j \geq 0$, $\sum_{i=1}^{p_2} \alpha_i + \sum_{j=1}^{q_2} \beta_j < 1$ y u_t independiente de $(X_s)_{s \leq t}$. Se ajustaron modelos ARMA-GARCH vía máxima verosimilitud para cada serie marginal asumiendo que los residuales ajustados están dados por:

$$\hat{u}_t = \frac{X_t - \hat{\mu}_t}{\hat{\sigma}_t} = \frac{\hat{\varepsilon}_t}{\hat{\sigma}_t} \quad (4)$$

Obtenidos de la etapa anterior los residuos estandarizados, los cuales son i.i.d., se estimó la función de distribución acumulada empírica de cada índice con un núcleo de Gauss. Aunque las estimaciones del kernel no paramétricos son muy adecuadas para el interior de la distribución donde se encuentra la mayoría de los datos, tienden a funcionar mal cuando se aplica a las colas superior e inferior. Para estimar mejor las colas de la distribución, se aplicó la metodología EVT propuesta en Chan (2006), la cual consiste en determinar los umbrales superior e inferior de manera tal que cierto porcentaje de los residuos está reservado para cada cola. Luego de ajustar la cantidad en la que esos residuos extremos caen en cada cola, se asocia una distribución Pareto generalizada por máxima verosimilitud. Este enfoque se refiere a menudo como la distribución de superaciones o picos.

Dadas las realizaciones en cada cola, se optimizó la función de log-verosimilitud negativa para estimar los parámetros del índice de cada una (zeta) y la escala (beta) de la Pareto generalizada. Se crearon las funciones marginales de los residuos estandarizados de forma mixta encapsulando las estimaciones de la cola inferior con una Pareto generalizada paramétrica, el interior del núcleo suavizado por kernel no paramétrica de familia Gauss, y otra Pareto generalizada paramétrica de cola superior para construir una función de densidad acumulada semi-paramétrica compuesta para cada índice.

El objeto de distribución por tramos resultante permite la interpolación en el interior de la CDF y la extrapolación (evaluación de la función) en cada cola. La extrapolación es muy deseable, lo que permite la estimación de cuantiles fuera del registro histórico, y es de gran valor para las aplicaciones de gestión de riesgos.

Por otra parte, los objetos de cola de Pareto también proporcionan métodos para evaluar la función de densidad acumulada e inversa, para consultar las probabilidades acumuladas y cuantiles de los límites entre cada segmento de la distribución por tramos. Una vez seleccionado el mejor modelo para las marginales, se procedió con la modelación de dependencia multivariada a través de R-Vine cópula.

2.2. Vine cópulas

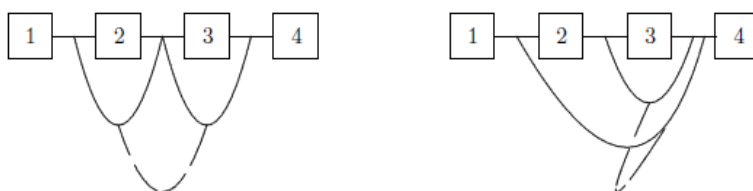
Las siguientes definiciones siguen de cerca las de Dissmann, Brechmann, Czado y Kurowicka (2012), para explicar brevemente el enfoque cópula-R Vine y algunos conceptos clave que son necesarios para comprender esta técnica.

Los vines son un modelo gráfico flexible para describir cópulas multivariantes usando una cascada de cópulas bivariadas, llamado par-cópulas. Su avance estadístico se debe a Aas, Czado, Frigessi y Bakken (2009), quienes describieron las técnicas de inferencia estadística para las dos clases de vine canónicos C-vines y D-vines. Estos pertenecen a una clase general de vines regulares, o R-vine que puede ser representado en un modelo gráfico teórico para determinar qué pares están incluidos en una descomposición de cópulas (par-cópulas). Por lo tanto una vine es una herramienta gráfica para las restricciones de etiquetado de distribuciones de mayor dimensión.

Un R-Vine es un caso especial en el que todas las restricciones son de dos dimensiones o condicionales en dos dimensiones. Los vines regulares generalizan árboles de Cantor. Combinado con cópulas, los R-vines han demostrado ser una herramienta flexible en el modelado de la dependencia de alta dimensión. Las cópulas son distribuciones multivariadas con marginales univariadas uniformes como se mencionó al comienzo de la sección, representando una distribución conjunta, ya que la unión de estas dos áreas (distribuciones marginales y cópulas) permite la separación de los problemas de estimar distribuciones univariadas de los problemas de la estimación de la dependencia.

La Figura 1³ proporciona un ejemplo de dos estructuras diferentes de vines para cuatro variables, con una vine regular en la izquierda y una vine no regular a la derecha.

Figura 1. Ejemplo vine regular y no regular para cuatro variables



Fuente: Allen, D, Ashraf, McAleer, M, Powell, R. y Singh, A. "Financial Dependence Analysis: applications of vine copulae".

Una vine V de n variables es un conjunto anidado de árboles conectados $V = \{T_1, \dots, T_n\}$ donde los tallos de árbol j son los nodos del árbol $j+1$, con $j = 1, 2, \dots, n-2$. Una vine regular en n variables es una vine en el que dos nodos en el árbol j están unidos por un tallo en el árbol de $j-1$ sólo si estos bordes comparten un nodo común, $j = 1, 2, \dots, n-2$.

³ Ejemplo gráfico obtenido de Allen, D, Ashraf, McAleer, M, Powell, R. y Singh, A. "Financial Dependence Analysis: applications of vine copulae". (2013).

2.2.1. Descomposición Par-Cópula

El método para construir Par-Cópulas (en adelante PCCs por sus siglas en inglés) fue propuesto en el trabajo de Joe (1996) y ampliado por Bedford y Cooke (2001, 2002). La definición PCC es la siguiente:

Una función de densidad $f(x_1, \dots, x_d)$ puede ser factorizada como:

$$f(x_1, \dots, x_d) = f(x_d)f(x_{d-1}|x_d) \dots f(x_1|x_2, \dots, x_d) \quad (5)$$

Cualquiera de las distribuciones marginales en el lado derecho de la ecuación (5) puede ser escrita como:

$$f(x_i|\mathbf{v}) = c_{x_i v_i | \mathbf{v}_{-i}}(F(x_i|\mathbf{v}_{-j}), F(v_i|\mathbf{v}_{-j})) F(x_i|\mathbf{v}_{-j}) \quad (6)$$

Donde $\mathbf{v} = \{x_{i+1}, \dots, x_d\}$ es el conjunto condicional de distribuciones marginales de x_i , la variable $v_i \in \mathbf{v}$ y \mathbf{v}_{-j} es el conjunto de variables en \mathbf{v} después de extraer v_i con $i=1, \dots, d-1$ y $c(u_1, u_2)$ es la cópula de densidad definida como $\frac{\partial c(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2}$.

Cuando $f(x_i|\mathbf{v})$ es iterativamente descompuesta, ésta se convierte en el producto bivariado de densidad de cópulas y funciones marginales de x_i , si estas marginales también son descompuestas de forma iterativa, $f(x_1, \dots, x_d)$ es el producto de densidad de cópulas bivariadas y sus marginales.

Hay diferentes PCCs, dependiendo de la selección de \mathbf{v}_j . Dos especiales PCCs de $f(x_1, \dots, x_d)$ son C-Vine y D-vine cuyas densidades son

C-Vine

$$f(x_1, \dots, x_d) = \prod_{k=1}^d f_k(x_k) \prod_{j=1}^{d-1} \prod_{i=1}^{d-j} c_{j, j+1 | 1, \dots, j-1}(F_{j | 1, \dots, j-1}(x_j | x_{1, \dots, j-1}), F_{j+i | 1, \dots, j-1}(x_{j+i} | x_{1, \dots, j-1})) \quad (8)$$

D-Vine

$$f(x_1, \dots, x_d) = \prod_{k=1}^d f_k(x_k) \prod_{j=1}^{d-1} \prod_{i=1}^{d-j} c_{j, i+j | i+1, \dots, i+j-1}(F_{j | i+1, \dots, i+j-1}(x_j | x_{i+1, \dots, i+j-1}), F_{j+i | i+1, \dots, j-1}(x_{j+i} | x_{i+1, \dots, i+j-1})) \quad (9)$$

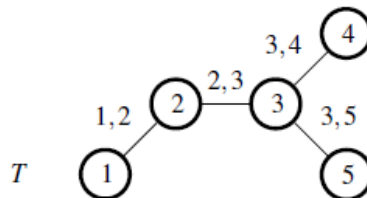
Estas estructuras Vine pueden ser más fácilmente entendidas por medio de gráficos, para ese propósito es necesario definir los siguientes conceptos.

2.2.2. Árbol

Si N es un conjunto de nodos y E es un conjunto de tallos, a continuación, un árbol es un grafo $T = (N, E)$ que está conectado y no tiene ciclos.

Un ejemplo de un árbol con cinco nodos se presenta en la Figura 2⁴:

Figura 2. Ejemplo de árbol: $N = \{1,2,3,4,5\}$, $E = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{3,5\}\}$



Fuente: R. Loaiza. Gomez. J. Melo L.F “Latin american exchange rate dependences: a regular vine copula approach”.

2.2.3. Regular vine

V es una R-vine de n elementos con $E(V) = E_1 \cup \dots \cup E_{n-1}$ que denota el conjunto de tallos de V si:

1. $V = \{T_1, \dots, T_n\}$
2. T_1 es un árbol conectado con los nodos $N_1 = \{1, \dots, n\}$, más tallos E_1 ; para $i=2, \dots, n-1$, T_i es un árbol con nodos $N_i = E_{i-1}$.
3. (proximidad) para $i = 2, \dots, n-1$, $\{a, b\} \in E_i$ con $a = \{a_1, a_2\}$ y $b = \{b_1, b_2\}$ debe ocurrir que $\#a \cap b = 1$ (donde $\#$ indica la cardinalidad de un conjunto).

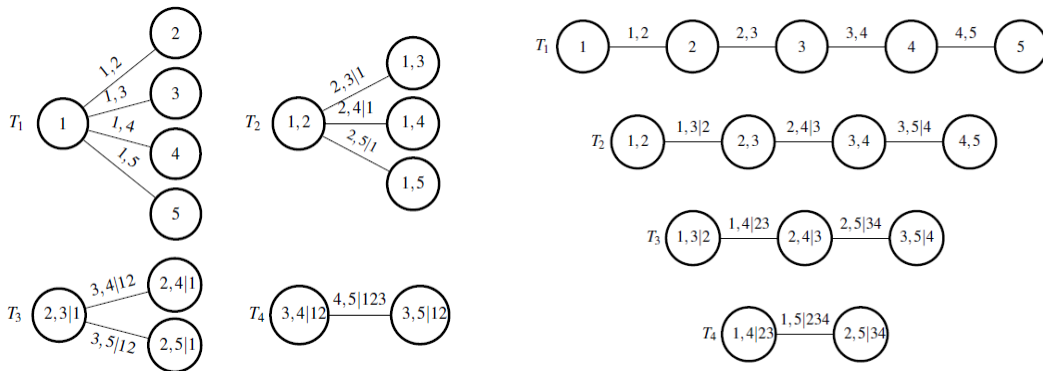
Un tallo de un árbol T_j es un par no ordenado de nodos de T_j o equivalentemente, una pareja no ordenada de tallos T_{j-1} . Por definición, el orden de un tallo en el árbol de T_j es $j-1$, con $j=1, \dots, n-1$. El grado de un nodo es determinado por el número de tallos unidos a ese nodo.

⁴ R. Loaiza. Gomez. J. Melo L.F “Latin american exchange rate dependences: a regular vine copula approach”, Borradores de Economía, N.o. 729, Banco de la República. (2012).

Una R-vine se llama canónica o C-vine, si cada árbol de T_i tiene un nodo único de grado $n - 1$ y por lo tanto, tiene el grado máximo. La R-vine se denomina D-vine si todos los nodos en T_1 tienen grados no superiores a 2.

En la figura 3² se presentan dos ejemplos de C-vine y D-vine con 5 variables:

Figura 3. A la izquierda ejemplo C-vine, derecha D-vine con cinco variables



Fuente: Allen. D, Ashraf, McAleer. M, Powell. R. y Singh. A. “Financial Dependence Analysis: applications of vine copulae”.

2.2.4. Modelación de vines

Las estructuras Vines en general se desarrollan a partir de construcciones par-cópula, en las que $d(d-1)/2$ pares-cópulas (para este caso $d=6$) son dispuestos en $d-1$ árboles (en forma de gráficos acíclicos conectados con los nodos y tallos). Al comienzo del primer árbol de C-vine, el primer nodo raíz modela la dependencia con respecto a una variable en particular, usando cópulas bivariadas para cada par. Condicionados a esta variable, los pares dependientes con respecto a una segunda variable se modelan, dando raíz al segundo nodo. El árbol se expande por lo tanto de esta manera; el nodo raíz se elige para cada árbol y todas las dependencias de a pares con respecto a este nodo se modelan condicionándolas a los nodos raíz anteriores. De ello se deduce que los árboles C-vine tienen una estructura en estrella. Brechmann y Schepsmeier (2012) utilizaron la siguiente descomposición en su cuenta de las rutinas incorporadas en la librería CDVine y Vinecopula en el software libre R, que fue utilizado para el trabajo empírico en esta tesis. Como se muestra en Dissmann, Brechmann, Czado, y Kurowicka (2012), hay una densidad única para cada cópula-R Vine específica como sigue:

$$f_{1,\dots,d}(x) = \prod_{k=1}^d f_k(x_k) \prod_{i=1}^{d-1} \prod_{e \in E_i} C_{C_{e,a}, C_{e,b} | D_{e_i}}(F_{C_{e,a} | D_{e_i}}(x_{C_{e,a}} | x_{D_{e_i}}), F_{C_{e,b} | D_{e_i}}(x_{C_{e,b}} | x_{D_{e_i}})) \quad (10)$$

Donde f_k con $k = 1, \dots, d$ denota las densidades marginales y $C_{C_{e,a}, C_{e,b} | D_{e_i}}$ las densidades de las cópulas bivariadas. El producto exterior se ejecuta sobre los $d-1$ árboles con nodo raíz i , mientras que el producto interno se refiere al par de cópulas $d-i$ en cada árbol $i = 1, \dots, d-1$.

Algunos conceptos relevantes sobre cópulas-R vine se han discutido en las secciones anteriores. Sin embargo, como se indica en Morales-Napoles (2010) existen $\frac{d!}{2} 2^{\binom{d-2}{2}}$ estructuras R-Vine para un ejercicio d -dimensional. Como resultado de ello, es importante tener en cuenta un método que selecciona una estructura vine adecuada. Para el enfoque de esta tesis, se optó por la metodología propuesta en Dissmann, Brechmann, Czado y Kurowicka (2012) la cual consiste en un procedimiento secuencial para identificar y estimar una estructura-R Vine, el que se describe a continuación:

1. La estructura del árbol se selecciona mediante la maximización de la suma absoluta de los coeficientes de correlación empírica Kendall utilizando el algoritmo propuesto en Prim (1957).
2. Las familias par-cópulas asociadas con el árbol especificado en el paso anterior son elegidas por minimizar el AIC.
3. Los parámetros de las cópulas seleccionadas son estimados por el método de máxima verosimilitud.
4. Las observaciones transformadas que se utilizarán en el siguiente árbol se calculan mediante la ecuación $F_{C_{e,a} | D_{e_i}}(x_{C_{e,a}} | x_{D_{e_i}})$.
5. Las etapas 1 a 4 se repiten usando las observaciones transformadas para todos los árboles restantes de la R-vine.

Una vez que fue determinada la estructura R-vine que representa la dependencia de los datos bajo estudio, se generó una simulación y se procedió al cálculo del valor al riesgo para cada mercado.

2.3. Valor a riesgo (VaR)

La dependencia en el tiempo entre los rendimientos de los índices es de particular importancia en la gestión de riesgos, ya que la función de pérdidas y ganancias resultante está estrechamente

ligada a la de Valor a Riesgo (VaR) de una cartera del índice internacional. El VaR de una cartera es determinado por la distribución de incrementos de los factores de riesgo. Si $w = (w_1, \dots, w_d)^T \in \mathbb{R}^d$ denota una cartera de posiciones en d activos y $S = (s_{1,t}, \dots, s_{d,t})^T$ es un vector aleatorio no negativo que representa el precio del activo (índice) en el tiempo t , el valor V_t de la cartera w está dada por:

$$V_t = \sum_{j=1}^d w_j S_{j,t} \quad (11)$$

La variable aleatoria

$$L_t = (V_t - V_{t-1}) \quad (12)$$

Es llamada la función de ganancias y pérdidas. Esta expresa los cambios diarios en el valor del portafolio. Definiendo los log-retornos como $X_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)$ la función de ganancias y pérdidas se puede reescribir como:

$$L_t = \sum_{j=1}^d w_j S_{j,t-1} (e^{X_{j,t}} - 1) \quad (13)$$

Si la función de distribución de L_t es dada por $F_{L_t}(x) = P(L_t \leq x)$, entonces el VaR de un portafolio con estrategia w en el momento t y nivel α de significancia, es definido como el α -cuantil de la distribución de pérdidas o ganancias:

$$VaR_t(\alpha) = F_{L_t}^{-1}(\alpha) \quad (14)$$

3. APLICACIÓN EMPÍRICA

3.1. Datos

Se obtuvieron datos diarios desde noviembre de 2010 a octubre de 2015 del flujo de datos públicos de cada índice de mercado. En cuanto a la revisión de la literatura, se consideró un análisis de portafolio conformado por seis mercados atractivos de países latinoamericanos a saber, 1. Brasil (BOVESPA), 2. México (IPC México), 3. Chile (IPSA), 4. Colombia (COLCAP), 5. Argentina (MERVAL) y 6. Perú (S&P/BVL). Las series de retorno son generada por $r_{it} = \ln\left(\frac{P_{it}}{P_{it-1}}\right)$.

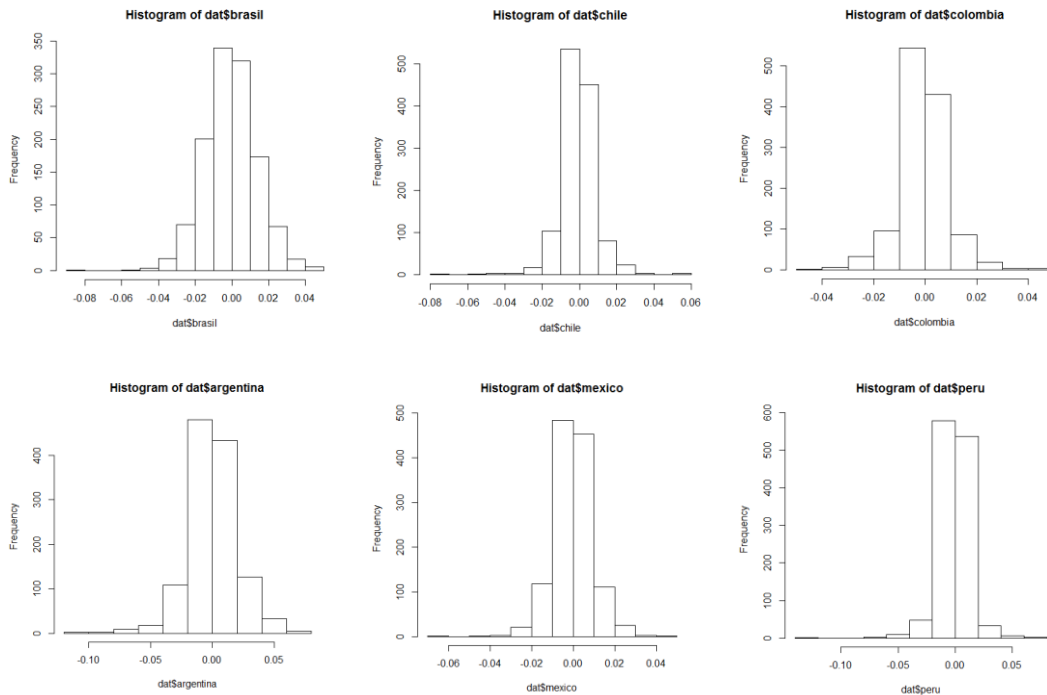
La tabla 1 y figura 4 representan los estadísticos descriptivos de los retornos diarios. Se observa que las series de rendimientos no siguen una distribución normal, ya que son asimétricas (los coeficientes de asimetría son negativos) y leptocúrticas, pues su coeficiente de curtosis es mayor al de una distribución normal (como se puede apreciar en la tabla 1), lo que implica unas colas más anchas que las de dicha distribución y que la respuesta de la volatilidad ante shocks de diferente signo sea asimétrica, este hecho es conocido en la literatura econométrica como efecto leverage. Además el estadístico Jarque Bera calculado para contrastar la normalidad, rechaza en todos los casos la hipótesis de normalidad.

Tabla1. Estadísticos descriptivos retornos diarios para los diferentes índices

	<i>BRASIL</i>	<i>CHILE</i>	<i>COLOMBIA</i>	<i>ARGENTINA</i>	<i>MEXICO</i>	<i>PERÚ</i>
Media	-0,00037889	-0,000334398	-0,00034259	0,00104436	0,00015906	-0,00057851
Error típico	0,00041223	0,00026161	0,00026313	0,00057084	0,00026335	0,00037385
Desviación estándar	0,01438069	0,00912641	0,00917939	0,01991399	0,00918694	0,01304187
Varianza de la muestra	0,0002068	8,32914E-05	8,4261E-05	0,00039657	8,44E-05	0,00017009
Curtosis	1,36598672	7,524083027	2,92183266	3,3542521	3,44132654	13,3148171
Coefficiente de asimetría	-0,06643357	-0,333125896	-0,17076271	-0,5251548	-0,28087447	-1,00233141
Rango	0,13405805	0,129684657	0,08705243	0,18069711	0,10229193	0,20207061
Mínimo	-0,08430565	-0,072362801	-0,04489786	-0,1135213	-0,06062028	-0,1329076
Máximo	0,0497524	0,057321857	0,04215457	0,06717581	0,04167164	0,06916301
Estadístico Jarque Bera	9,490418	75,98931	157,91560	355,8337	66,25012	285,5864
p-valor	0,00869	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Fuente: Elaboración propia.

Figura 4. Histograma de los log retornos

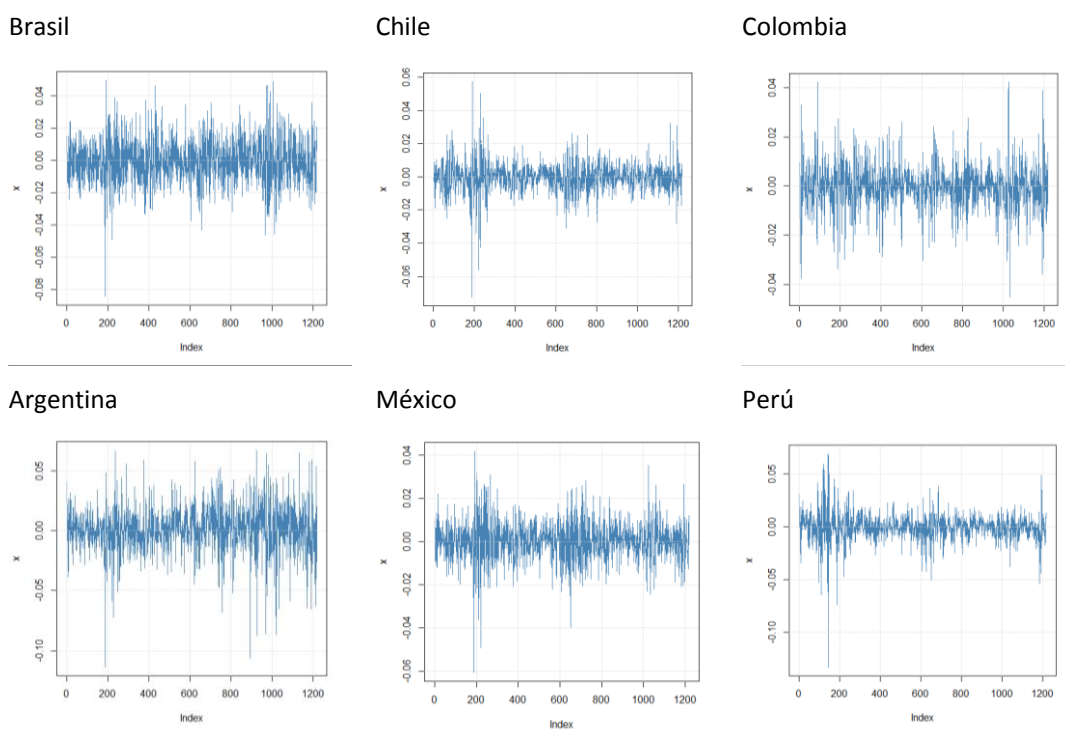


Fuente: Elaboración propia.

La serie de rendimientos de los índices se mueve en torno a un nivel constante igual a cero, que es bastante estable para toda la muestra. Sin embargo, la varianza de los rendimientos no se mantiene constante sino que va cambiando a lo largo del tiempo, como se puede apreciar en la figura 5, observándose periodos en los que la volatilidad es menor (que coinciden con momentos en los que los rendimientos de los índices no sufren grandes cambios) y periodos en los que la volatilidad es mayor (que coinciden con los tramos en los que la variación de los rendimientos respecto de su media es mayor). Este comportamiento en los rendimientos de los índices es lo que se conoce como agrupamiento de la volatilidad.

En las series de rendimientos existen datos que en periodos de relativa calma toman valores muy grandes, positivos o negativos. Estos son datos atípicos que coinciden con algún acontecimiento puntual que ha afectado al comportamiento de las bolsas.

Figura 5. Series de los log retornos diarios



Fuente: Elaboración propia.

En el apéndice A figuras A1 hasta A6 evidencian que en la función de autocorrelación simple (acf) y parcial (pacf) para cada serie existe una nula correlación entre los rendimientos de la serie, pero sin embargo sí existe correlación entre los rendimientos al cuadrado. Esta correlación suele ser casi siempre positiva, con valores que no son muy grandes pero estadísticamente significativos y que decrecen de forma lenta hacia cero. Esto es debido al agrupamiento que se produce en la volatilidad (lo que indica la presencia de heterocedasticidad condicionada en las series de rendimientos y la necesidad de modelizar el comportamiento de la varianza condicional). Este comportamiento de la series de rendimientos bursátiles muestra la existencia de persistencia de la volatilidad.

Por lo tanto, se puede concluir diciendo que las series de rendimientos analizadas presentan las características que autores como Bollerslev, Engle y Nelson(1994) entre otros, establecen como típicas de las series financieras: son asimétricas y leptocúrticas; ausencia o escasa correlación en las series de rendimientos, varianza cambiante a lo largo del tiempo, alternancia de periodos de poca volatilidad seguidos de otros de alta volatilidad (agrupamiento de la volatilidad); existe correlación en los cuadrados de los rendimientos de la serie y éstas decrecen de forma lenta hacia cero (persistencia de la volatilidad).

3.2. Modelamiento de la volatilidad

Las características que fueron evidentes en el apartado anterior de los rendimientos de los índices bursátiles, dan paso a estimar los modelos ARMA-GARCH. En el apéndice B se pueden verificar las salidas de los modelos para cada serie, donde según las pruebas básicas para seleccionarlos dieron adecuados un modelo ARMA(1,1)-GARCH(1,1) para el índice de Brasil; para el de Chile un ARMA(2,1)-GARCH(1,1), para el de Colombia ARMA(3,2)-GARCH(1,1), el de Argentina mejor ajustó ARMA(2,1)-GARCH(1,1), un ARMA(2,2)-GARCH(1,1) para el índice de México y finalmente un AR(1)-GARCH(1,1) para el de Perú. La Tabla 2 muestra los parámetros estimados para media y varianza por método de máxima verosimilitud de las ecuaciones ARMA-GARCH presentadas en la sección dos de metodología. Se aprecia que todos los parámetros son significativos, lo que indica que los rendimientos de los índices bursátiles se ven afectados por el comportamiento de la volatilidad en el período anterior. Además, con esta estimación se ha recogido de forma adecuada la dependencia de los cuadrados, ya que las funciones de autocorrelación simple y parcial (apéndice gráficos inferiores A1-A6) tienen prácticamente todos sus valores en torno a cero, lo que implica que el agrupamiento de la volatilidad ya no es tan acentuado para rezagos más altos que un periodo. Vale destacar que el índice de Colombia es el que tiene coeficientes más altos en la componente autoregresiva tanto para el retorno en sí, como para su volatilidad. Mientras que la de menor valor (α_1) es la componente autoregresiva para la volatilidad del mercado brasilero

Tabla 2. Parámetros estimados para los modelos ARMA-GARCH

		<i>BRASIL</i>	<i>CHILE</i>	<i>COLOMBIA</i>	<i>ARGENTINA</i>	<i>MEXICO</i>	<i>PERÚ</i>
	μ	-0,0003556	0,0000031	-0,0001877	0,0002548	0,0005308	-0,0002017
AR	a1	-0,6541000	0,7870000	0,9966000	0,8596000	-0,4274000	0,1915000
	a2		-0,1711000	-1,0000000	-0,0750000	-0,4920000	
	a3			0,1069000			
MA	b1	0,6617000	-0,5940000	-0,8919000	-0,7779000	0,4894000	
	b2			0,9257000		0,5342000	
GARCH	α_0	0,0000063	0,0000021	0,0000062	0,0000183	0,0000017	0,0000025
	α_1	0,0644100	0,1082000	0,1221000	0,0948500	0,0725700	0,0819000
	β_1	0,9050000	0,8650000	0,8024000	0,8623000	0,9067000	0,9021000

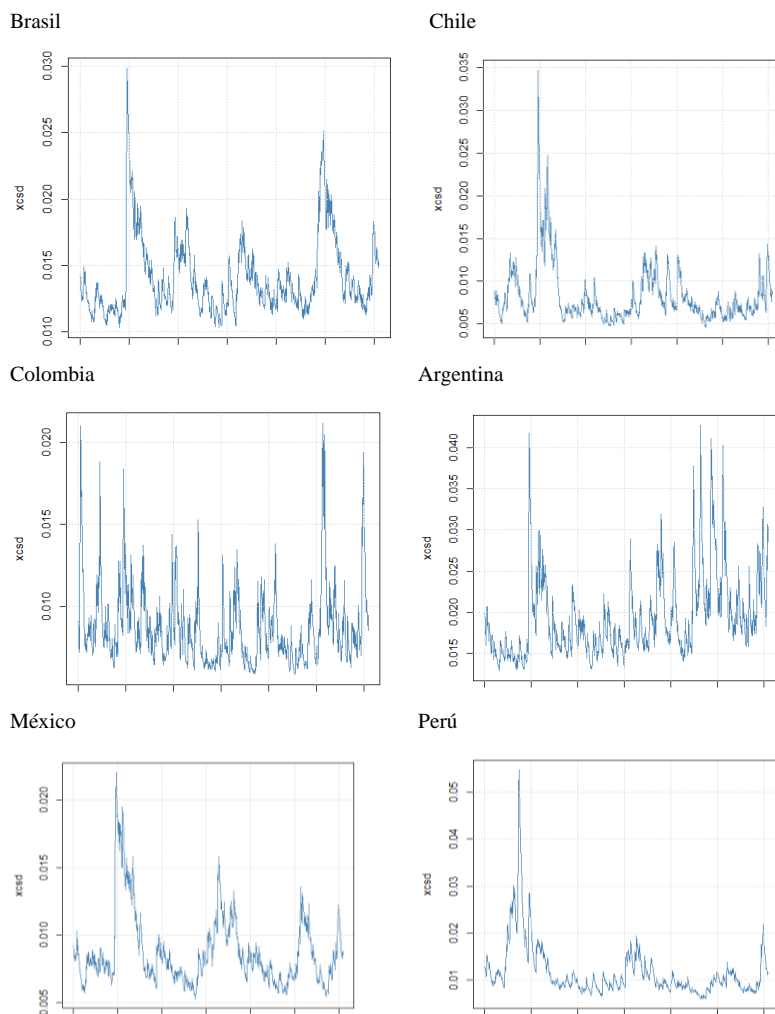
Fuente: Elaboración propia.

La figura 6 presenta la volatilidad condicional para cada retorno dentro el periodo de observación que se calcula por la ecuación de σ_t^2 en la sección de ARMA-GARCH, se observa que los seis mercados fueron muy volátiles durante mediados del 2011 y 2012. En el caso de

los mercados de Brasil, Colombia y Argentina se observa la crisis sufrida por la industria petrolera en 2014 y son los de mayor heterocedasticidad comparados con los otros tres índices.

Por otro lado, los residuales estandarizados pese a que pasan la prueba de independencia en el tiempo, no cumplen la normalidad como se puede observar en los estadísticos de prueba en las salidas del apéndice B y en los QQ plots de los residuales de la figura 7, por lo tanto se estimaron los parámetros de la Pareto generalizada para las colas de la distribución por cada serie de residuos estandarizados para cada índice y así se obtuvo el cálculo de la CDF empírica de cada serie con un núcleo de Gauss y colas Pareto generalizada.

Figura 6. Estimación de volatilidad condicionada para los seis retornos en el periodo nov-2011 a oct-2015

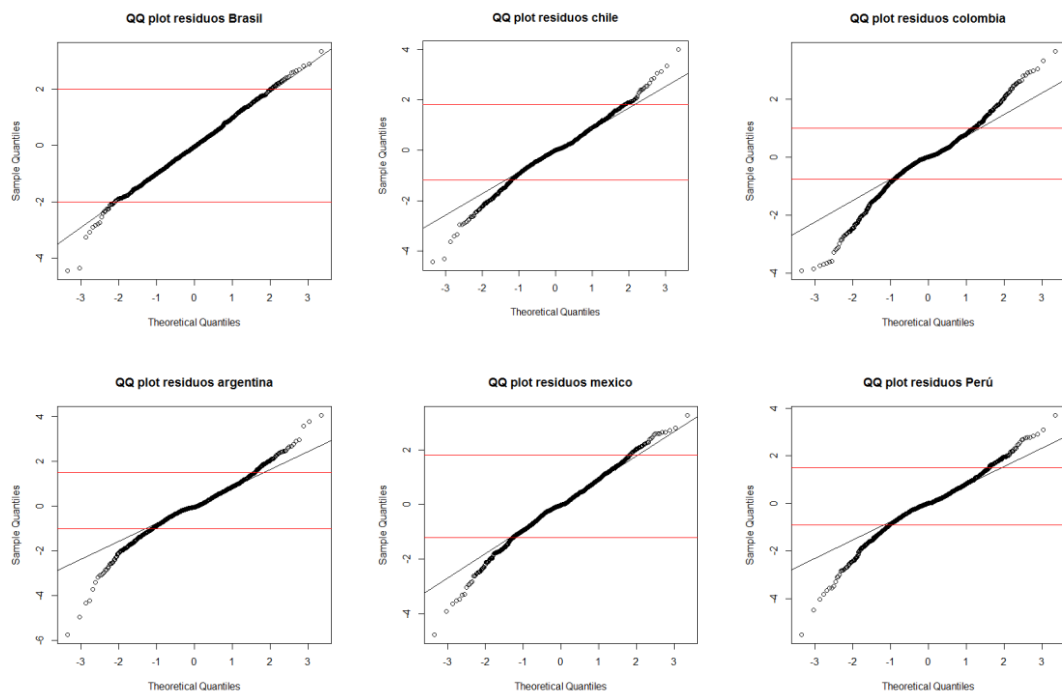


Fuente: Elaboración propia.

En los QQ plots se evidencia la importancia de tener en cuenta las colas de la distribución, ya que el índice de Brasil es el único que podría asimilarse a una normal; si se trabajara sobre dicho supuesto, el mismo se estaría infringiendo y pasando por alto los casos extremos.

Dadas las superaciones en cada cola, se optimizó la función de log-verosimilitud negativa para estimar los parámetros de la GPD cuyos resultados se exponen en el apéndice C.

Figura 7. QQ plots para residuales estandarizados y umbrales de estimación para colas PG



Fuente: Elaboración propia.

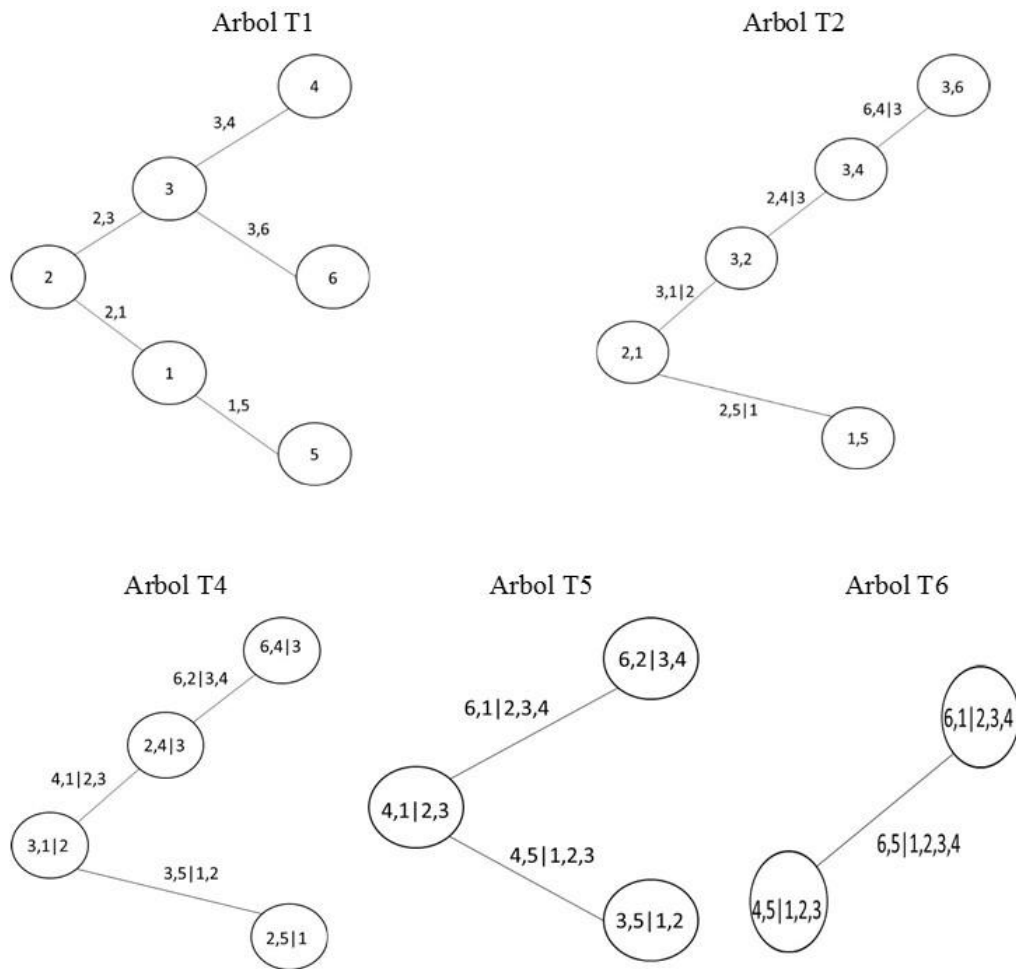
Ajustadas las distribuciones empíricas de los residuales estandarizados, se procedió a transformarlos en variables uniformes (0,1) basado en el proceso empírico para introducir esta información como marginales en el ajuste de las R-vine cópulas.

3.3. Especificación de la cópula Vine regular

Para modelar la estructura de dependencia entre los mercados se usó la metodología expuesta en el marco teórico, la estructura de cópula R-vine que se ajustó a los datos se muestra en la Figura 8. Se consideraron las siguientes familias para ajustar las par-cópulas: Gaussiana, t, Clayton, Gumbel, Frank, Joe, Clayton-Gumbel, Joe-Gumbel, Joe-Clayton, Joe-Frank, survival

Clayton, Survival Gumbel, Survival Joe, Survival Clayton-Gumbel, Survival Joe-Gumbel, Survival Joe-Clayton, Survival Joe-Frank, Clayton rotada 90 y 270 grados, Gumbel rotada 90 y 270 grados, Joe rotada 90 y 270 grados, Clayton-Gumbel rotada 90 y 270 grados, Joe-Gumbel rotada 90 y 270 grados, Joe-Clayton rotada 90 y 270 grados y Joe-Frank rotada 90 y 270 grados.

Figura 8. R-vine estimada. Los números indican el índice de los 6 mercados como sigue: 1=BR, 2=MX, 3=CH, 4=COL, 5=ARG, 6=PER



Fuente: Elaboración propia.

La tabla 3 muestra las estructuras de dependencia entre los mercados. Se seleccionó la mejor familia de cópula ajustada por el criterio de información (AIC) y metodología expuesta con anterioridad. El resultado muestra que las familias que más se ajustaron fueron t-student, Frank, gaussiana y Joe-Frank rotada 180 grados, familias que se caracterizan por dar importancia a los eventos de las colas (excepto la gaussiana). A partir de esta información, se

utilizaron los parámetros de la par-cópula para aproximar la correlación de Tau de Kendall. Este coeficiente tiene un espectro entre $-1 \leq \tau \leq 1$ y se interpreta de igual forma que el coeficiente de correlación de Pearson. Si los mercados son totalmente independientes, entonces el coeficiente toma valor cercano a cero. Los resultados muestran que la más alta dependencia está dada entre México y Brasil con una tau kendall de 0.35, seguido de la dependencia entre los mercados de Brasil y Argentina (0,31). Por el lado de las dependencias condicionadas la más alta fue para la obtenida conjuntamente por los mercados de Brasil y Chile, condicionados al índice de México, seguidos de la función conjunta entre el índice de México y Colombia, condicionado al de Chile. En general la mayor relación de dependencia en los árboles apuntaba a tener a los índices de Brasil y México como nodos raíz iniciales.

Tabla 3. Parámetros estimados para la cópula R-vine de seis dimensiones.

1=BR, 2=MX, 3=CH, 4=COL, 5=ARG, 6=PER

Familia	Marginal	Parámetro 1	Parámetro 2	Tau Kendall
t-student	C1,5	0,46233	17,36444	0,30597
t-student	C2,1	0,52986	11,42136	0,35551
t-student	C2,3	0,44889	14,28195	0,29636
t-student	C3,4	0,37168	10,66709	0,24244
t-student	C3,6	0,33595	8,01010	0,21812
Frank	C2,5 1	1,60241	-	0,17366
Gaussiana	C1,3 2	0,29707	-	0,19202
Frank	C2,4 3	1,61535	-	0,17500
Joe-Frank rotada 180	C4,6 3	2,35158	0,59061	0,14903
Gaussiana	C3,5 1,2	0,11447	-	0,07304
Gaussiana	C1,4 2,3	0,17160	-	0,10979
Frank	C2,6 3,4	1,30630	-	0,14274
Frank	C4,5 1,2,3	0,52938	-	0,05866
Gaussiana	C1,6 2,3,4	0,19004	-	0,12173
Frank	C5,6 1,2,3,4	1,12470	-	0,12342

Fuente: Elaboración propia.

3.4. Cálculo VaR para los datos simulados

Dados los parámetros de las cópulas empleadas en la regular vine de la tabla 3, se utilizó el algoritmo presentado en Aas(2009) en el paquete Vine Copula del lenguaje R para generar 10.000 variables aleatorias uniformes dependientes con la estructura de árbol expuesto en la figura 8. Después de generar los datos simulados se transformaron las series uniformes en los rendimientos de cada mercado con la función inversa de la distribución mixta de colas Pareto

generalizadas y núcleo gaussiano cuyos parámetros estimados se observa en el apéndice C, luego se calculó con los retornos diarios simulados la medida de riesgo VaR, la cual se utiliza para medir la pérdida máxima posible del valor de mercado en un período de un día. La tabla 4 expone el valor en riesgo de los seis mercados latinoamericanos para diferentes $\alpha\%$.

Tabla 4. Estimación de VaR para cada mercado teniendo presente dependencia simulada por R-vine cópula

α	<i>BRASIL</i>	<i>MEXICO</i>	<i>COLOMBIA</i>	<i>ARGENTINA</i>	<i>CHILE</i>	<i>PERÚ</i>
1%	0,09048	0,07269	0,01624	0,04148	0,05659	0,03201
2%	0,08039	0,06316	0,01438	0,03609	0,04969	0,02751
3%	0,07413	0,05812	0,01311	0,03293	0,04517	0,02498
4%	0,06907	0,05420	0,01221	0,03040	0,04235	0,02344
5%	0,06420	0,05045	0,01144	0,02876	0,03992	0,02211
6%	0,06104	0,04755	0,01080	0,02708	0,03767	0,02085
7%	0,05764	0,04477	0,01024	0,02560	0,03570	0,01972
8%	0,05463	0,04248	0,00969	0,02437	0,03402	0,01890
9%	0,05204	0,04061	0,00922	0,02321	0,03265	0,01802
10%	0,04991	0,03890	0,00884	0,02222	0,03109	0,01727

Fuente: Elaboración propia.

Como se puede observar en la tabla anterior, el mercado brasilero en los diez casos es el que tiene el más alto valor en riesgo basado en la comparación con los restantes cinco países latinoamericanos bajo estudio, oscilando el VaR para los diferentes $\alpha\%$ de significancia entre 0.0499 y 0.09048, lo que implica que supongamos al 95% de confianza la pérdida diaria de dicho mercado no excederá el 6.42%. El país que le sigue es México que para un 95% de confianza la pérdida diaria no superará el 5%. Por otro lado el país con menos valor en riesgo resultó Colombia que bajo la misma confianza, su pérdida diaria estaría estimada en 1.14%

Con las 10.000 simulaciones también se calculó el VaR del portafolio asumiendo que se tiene igual ponderación en activos de cada mercado (ver tabla 5).

Tabla 5. VaR portafolio con igual ponderación entre mercados

α	PORTAFOLIO
1%	0,03853
2%	0,03415
3%	0,03110
4%	0,02895
5%	0,02712
6%	0,02550
7%	0,02412
8%	0,02278
9%	0,02156
10%	0,02048

Fuente: Elaboración propia.

Al 5% de significancia, el VaR del portafolio de igual ponderación para cada mercado es de 0.02712, es decir que la pérdida diaria máxima al 95% de un portafolio con estas características no superará el 2.712%

Se realizó adicionalmente el cálculo de VaR por simulación histórica para poder comparar con los datos obtenidos en la metodología presentada en esta tesis la cual involucra el análisis de la estructura de dependencia no lineal entre los seis mercados mediante las R-vine cópulas. Se observa en la tabla 6 que para el caso de los retornos del índice de Brasil hay una subestimación del riesgo en todos los niveles de significancia por simulación histórica, por ejemplo en el caso de un $\alpha=5\%$, el VaR estimado es de 5,43%, mientras que el obtenido bajo la metodología propuesta con R-vine cópulas es de 6,42% (ver tabla 4). Muy similar pasa con el VaR para los índices de México y Perú que la simulación histórica arroja VaR menores comparados a los estimados por la metodología analizada para todos los $\alpha\%$. El caso contrario pasa en el VaR de Colombia, que para todos los niveles de significancia tenidos en cuenta la simulación histórica sobreestima el valor comparado a los obtenidos empleando estructura de dependencia multivariada, por ejemplo al nivel de significancia del 1% el VaR por simulación histórica es de 2,5%, mientras que por el método estudiado da 1.6%. En el caso de los índices de Argentina y Chile son muy parecidos los VaR obtenidos por ambos caminos, aunque para el caso del Argentino hay un leve cambio en el $\alpha=5\%$, para alfas menores el VaR obtenido por simulación histórica es menor que el otro, y para significancias mayores al 5% se invierte. En el caso del VaR del índice chile, dichos cambios ocurren al $\alpha=2\%$.

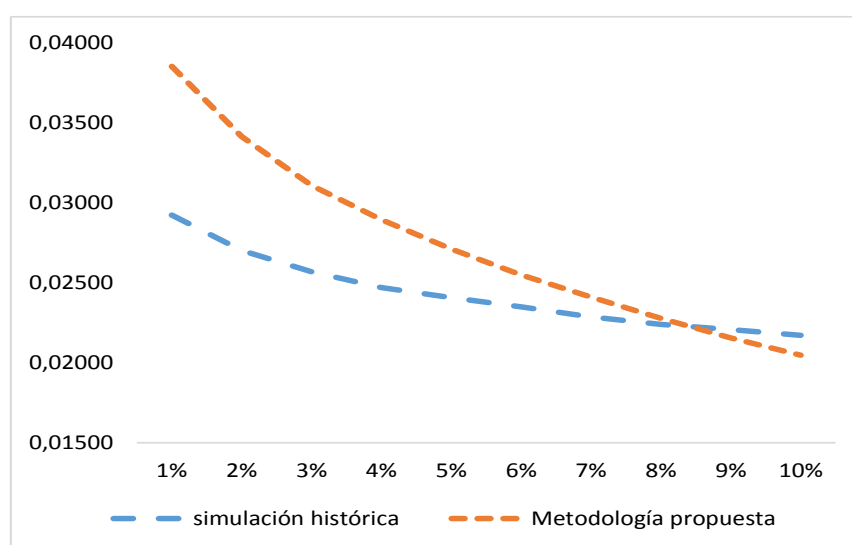
Tabla 6. Estimación de VaR para cada mercado por simulación histórica

α	BRASIL	MEXICO	COLOMBIA	ARGENTINA	CHILE	PERÚ
1%	0,07470	0,05698	0,02501	0,06296	0,05351	0,03076
2%	0,06576	0,05042	0,01987	0,04625	0,04798	0,02388
3%	0,06141	0,04684	0,01685	0,03827	0,04519	0,02036
4%	0,05825	0,04458	0,01488	0,03313	0,04326	0,01842
5%	0,05611	0,04300	0,01340	0,02928	0,04199	0,01629
6%	0,05435	0,04172	0,01234	0,02674	0,04097	0,01492
7%	0,05300	0,04077	0,01135	0,02457	0,04000	0,01374
8%	0,05185	0,03996	0,01057	0,02296	0,03929	0,01271
9%	0,05084	0,03936	0,00991	0,02134	0,03856	0,01191
10%	0,04976	0,03865	0,00929	0,01994	0,03811	0,01127

Fuente: Elaboración propia.

Para el portafolio, el VaR obtenido por la simulación histórica subestima el valor comparado al obtenido por la metodología para todos los niveles de significancia, como se puede observar en la figura 9.

Figura 9. Comparación VaR para el portafolio por ambos métodos.



Fuente: Elaboración propia.

Las diferencias en estas estimaciones resaltan la importancia de tener en cuenta la dependencia no lineal de los mercados, este adicional da un cambio en la toma de decisiones con respecto al riesgo que se puede correr, con la metodología tradicional se estarían suponiendo los mercados menos riesgosos de lo que son en realidad, llevando a decisiones no tan acordes con las dinámicas que están presentando la volatilidad de los mercados y dejando a un lado la información de las colas. También dichas diferencias refleja debilidad en la metodología de

valoración del riesgo tradicional por simulación histórica al no incorporar la dependencia multivariada entre los retornos de los seis mercados en el tiempo.

2. CONCLUSIONES

La realidad de los índices de mercado bajo estudio es que al presentar altas curtosis, insesgamiento y por ende colas gruesas (figuras 5 a 7), la probabilidad de eventos extremos es mucho mayor que la sugerida por la distribución normal y, por lo tanto, se hace necesario utilizar una metodología que incorpore dentro de la medición del riesgo la materialización de dichos eventos. La estimación de la probabilidad de eventos extremos es un punto crítico en la gestión del riesgo de los portafolios de inversión, hay que hacer un intento de modelar su ocurrencia, especialmente su aparición conjunta, puesto que el comportamiento de un factor de riesgo puede estar influenciado por comportamientos de otros factores de riesgo. Por lo tanto las técnicas que modelan la dependencia entre éstos, constituyen una fuente valiosa de información.

Es importante tener en cuenta que una medida escalar de la dependencia como lo es el coeficiente de correlación simple, no tiene en cuenta la dependencia no lineal entre eventos extremos y más aún cuando nos interesa el riesgo de éstos; solamente logra capturar asociaciones de tipo lineal, que no mide de manera apropiada las relaciones empíricas que se presentan en el mercado financiero, sobrestimando (o subestimando) el grado de relación real. Es por esto que la teoría de cópulas permite describir de manera adecuada la estructura de dependencia entre activos financieros, independiente de la distribución de probabilidad seguida por cada uno de ellos. De esta manera, el concepto de dependencia desarrollado por las funciones de cópulas es más general que el concepto de correlación lineal, sobre el cual se basan las metodologías tradicionales de VaR, al permitir capturar relaciones no lineales entre activos financieros.

En el trabajo se revisó la dependencia entre seis índices de mercado latinoamericano para el periodo comprendido entre noviembre de 2010 a octubre de 2015, con el objetivo de estudiar su valor en riesgo en la gestión de carteras. Se propuso la utilización de cópulas R-vine para modelar la dependencia con enfoque multivariado de los datos con énfasis en aquellos de alta frecuencia, eligiendo como marginales una función mixta de núcleo gaussiano y colas Pareto generalizada sobre los residuales estandarizados de las series ARMA-GARCH que capturan la dinámica de la distribución condicional de la volatilidad a lo largo del tiempo y evidencian el efecto apalancamiento ya que los retornos de los índices presentan dependencia positiva (los tau de Kendall todos son positivos tabla 3).

Se aplicaron 31 familias de cópulas para modelar las quince par-cópulas de cada función condicional y las que mejor se ajustaron fueron t-student para las cópulas bivariadas del primer árbol y para el resto de distribuciones que ya implican una función condicional, se obtuvieron las familias Frank, gaussiana y Joe-Frank rotada 180 grados, familias que se caracterizan por dar importancia a los eventos de las colas (excepto la gaussiana). La estructura de árbol de la cópula R-vine seleccionada es la expuesta en la figura 8, la cual fue estimada empleando el algoritmo y procedimiento secuencial propuesto por Dissmann, Brechmann, Czado y Kurowicka (2012). Los resultados muestran que la más alta dependencia está dada entre México y Brasil con una tau kendall de 0.35, seguido de la dependencia entre los mercados de Brasil y Argentina (0,31). Por el lado de las dependencias condicionadas la más alta fue para la obtenida conjuntamente por los mercados de Brasil y Chile, condicionados al índice de México, seguidos de la función conjunta entre el índice de México y Colombia, condicionado al de Chile. En general la dependencia entre los mercados es positiva y la mayor relación de dependencia en los árboles apuntaba a tener a los índices de Brasil y México como nodos raíz iniciales.

Se realizó la estimación del valor en riesgo (VaR) con niveles de confianza del 95% al 99% ($\alpha\%$ del 1% al 10%) para cada retorno de los seis mercados y para un portafolio conformado por dichos índices cada uno con igual participación (16.6%). Los resultados sugieren que el mercado brasilero tiene el riesgo más alto para todos los niveles de confianza, por ejemplo para un 90% de confianza el valor máximo que se estaría dispuesto a perder es de 4.99%, para México 3.89% y Chile 3.10%, mientras que el de Colombia que es el menor de los seis es de 0.08%. Para una confianza de 99% la máxima pérdida para el mercado argentino sería de 4.15%, para el peruano de 3.20% y el más riesgoso sigue siendo Brasil con un 9.05% de VaR. En el caso del portafolio con contribución de igual ponderación para los seis mercados, para un nivel de confianza del 95% se espera una máxima pérdida de 2.7% y para un 99% el VaR es de 3.8%.

Se realizó adicionalmente el cálculo de VaR por simulación histórica para poder comparar con los datos obtenidos en la metodología presentada en esta tesis la cual involucra el análisis de la estructura de dependencia no lineal entre los seis mercados mediante las R-vine cópulas. Se obtuvo que para el caso de los retornos del índice de Brasil, México y Perú hay una subestimación del riesgo en todos los niveles de significancia por simulación histórica. El caso contrario pasa en el VaR de Colombia, que para todos los niveles de significancia la simulación histórica sobreestima el valor comparado a los obtenidos empleando estructura de dependencia multivariada. En el caso de los índices de Argentina y Chile son muy parecidos los VaR obtenidos por ambos caminos, aunque para el caso del Argentino hay un leve cambio

en el $\alpha=5\%$, para alfas menores el VaR obtenido por simulación histórica es menor que el otro, y para significancias mayores al 5% se invierte, en el caso del VaR del índice chile, dichos cambios ocurren al $\alpha=2\%$.

En conclusión se observó que las pérdidas inesperadas obtenidas de manera tradicional son menores con respecto a las valoraciones a través de la metodología de cópulas financieras, muy probablemente porque las valoraciones tradicionales están subestimando las pérdidas. Las diferencias en estas estimaciones resaltan la importancia de tener en cuenta la dependencia no lineal de los mercados y el empleo de estas técnicas que incorporan las R-Vine cópulas para valorar el riesgo. También se mostró con la evidencia empírica aquí presentada, que cuando se valora el riesgo a través de las R-Vine cópulas, se obtienen beneficios significativos que pueden conducir a una estimación adecuada. Así que una buena especificación del modelo incluyendo la dependencia entre los mercados y teniendo en cuenta los valores extremos, puede llevar a obtener resultados óptimos, realistas y satisfactorios, permitiendo elaborar una mejor estrategia de cobertura comparado a la metodología tradicional.

Finalmente, los códigos utilizados a lo largo del texto se hicieron en el programa de libre distribución R bajo las librerías CDVine, VineCoupula, gPdttest y fGarch (disponibles en www.cran.r-project.org).

BIBLIOGRAFÍA

- Aas, K., Czado, C., Frigessi, A., Bakken, H. (2009) “Pair-copula constructions of multiple dependence, Insurance”. *Mathematics and Economics* 44(2) 182-198.
- Allen. D, Ashraf, McAleer. M, Powell. R. y Singh. A (2013). “Financial Dependence Analysis: applications of vine copulae”.
- Alonso, J. y Arcos, M (2005). “Valor en Riesgo: Evaluación del Desempeño de Diferentes Metodologías para 7 Países Latinoamericanos”. Fondo de Investigaciones de la Universidad Icesi. Cali, Colombia.
- Ayusuk. A., Sriboonchitta. S. (2014). “Risk analysis in Asian emerging markets using canonical vine copula and extreme value theory”. *Thai Journal of mathematics*. 59-72.
- Becerra, O. y Melo, L. F., (2008), “Medidas de riesgo financiero usando cópulas: teoría y aplicaciones”, Borradores de Economía, N.o. 489, Banco de la República.

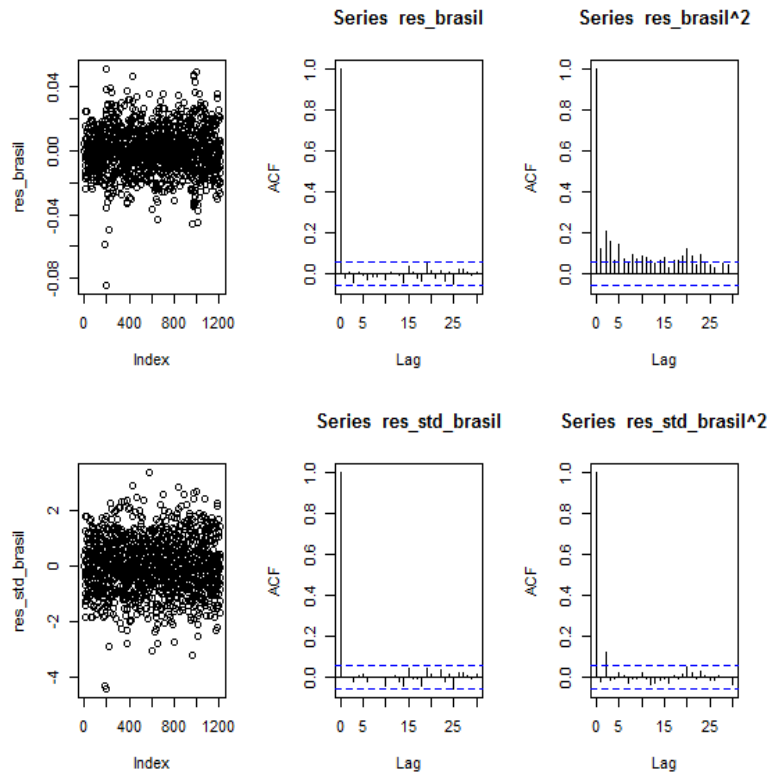
- Brechmann, E. C., Schepsmeier, U. (2013). “Modeling dependence with C-and_D-vine copulas: The R package CDVine”. *Journal of Statistics software*. Volume 52, Issue 3.
- Breymann, W., Dias, A. y Embrechts, P. (2003). “Dependence structures for multivariate high-frequency data in finance”. *Quantitative Finance* 3, 1-14.
- Bollerslev, T., Engle R.F. y Nelson D.B. (1994). “ARCH models”. *Handbook of Econometrics*, Vol. IV. En R.F Engle y D.L. McFadden (eds.), pp.2959-3038.
- Bundi, D. (2004). “Copulas in Finance”. African Institute for Mathematical Sciences. Cadiz Financial Strategists.
- Canela, M. y Pedreira, E. (2005). “Modelling Dependence in Latin American Markets Using Copula Functions”. Working Paper, disponible en:
http://wwwtest.aup.edu/lacea2005/system/step2_php/papers/pedreira_eped.pdf.
- Chan, K.F., Gray, P. (2006). “Using extreme value theory to measure value at risk for daily electricity spot Price”. *International Journal of forecasting*.
- Dissmann, J., Brechmann, E.C., Czado, C, y Kurowicka, D. (2012). “Selecting and estimating regular vine copulae and application to financial returns,” *ArXiv e-prints*.
- Embrechts, P., Lindskog, F. y McNeil, A. (2003). “Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management. *Handbook of Heavy tailed Distributions in Finance*”. (Edited by S. T. Rachev), Elsevier 329-384.
- Embrechts, P., McNeil, A. y Straumann, D. (2002). “Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls. *Risk Management: Value at Risk and Beyond* (Edited by M. Dempster)”. Cambridge University Press 176-223.
- Embrechts, P.; McNeil, A.; y Straumann, D., (1999), “Correlation: Pitfalls and Alternatives”, Discussion Paper, ETH Zurich.
- Frey, R. y McNeil, A. (2003). “Dependent Defaults in Models of Portfolio Credit Risk”. *J. Risk* 6/1, 59-92.

- Giacomini, E. (2005). “Risk management with copulae”. Center for Applied statistics and econometrics. Humboldt-Universität zu Berlin, 8-46.
- Goorbergh, R. Genest, C. y Werker, M. (2005). “Bivariate Option Pricing Using Dynamic Copula Models”. Insurance, Math. Econ 37, 101-114.
- Hamerle, A. y Rosch, D. (2005). “Misspecified Copulas in Credit Risk Models. How Good is Gaussian?”. J. Risk 8, 35-47.
- Loaiza. R., Gomez. J. Melo L.F (2012) “Latin american exchange rate dependences: a regular vine copula approach”, Borradores de Economía, N.o. 729, Banco de la República.
- Loaiza. R., Gomez. J. Melo L.F (2014) “Exchange rates contagion in Latin American”, Borradores de Economía, N.o. 842, Banco de la República.
- McNeil, A., Frey, R. and Embrechts, P. (2005), “Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques, and Tools”. Princeton Series in Finance.
- Nelsen, R. B. (1999); “An Introduction to Copulas. Springer”. New York.
- Ozun, Alper y Cifter, Atilla, (2007). “Portfolio Value-at-Risk with Time-Varying Copula: Evidence from the Americas”. MPRA Paper 2711, University Library of Munich, Germany.
- Sun, W., Rachev, S., Fabozzi, F. and Petko, S. (2006). “Unconditional copula-based simulation of tail dependence for co-movement of international equity markets”. Working paper.
- Vaz de Melo, B. y Martins de Souza, R. (2004). “Measuring Financial Risks with Copulas”. International Review of Financial Analysis 13, 27-45.
- Zhang, D. (2014). “Vine copulas and applications to European union sovereign debt analysis”. International review of financial analysis.

ANEXOS

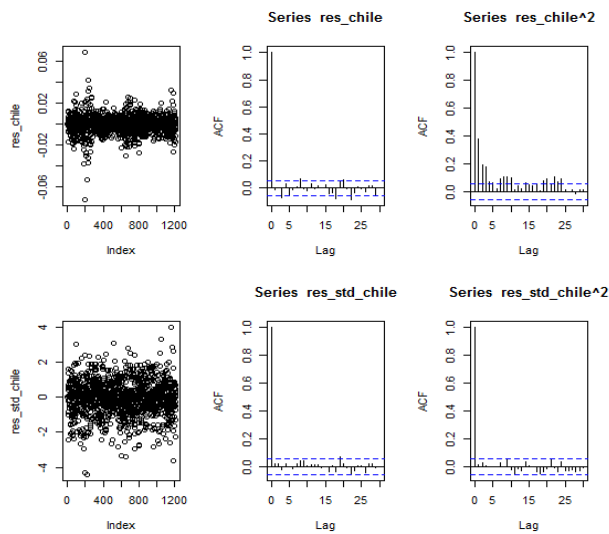
APENDICE A

Figura A1. Autocorrelogramas simples y parciales para los residuales y residuales² índice Brasil



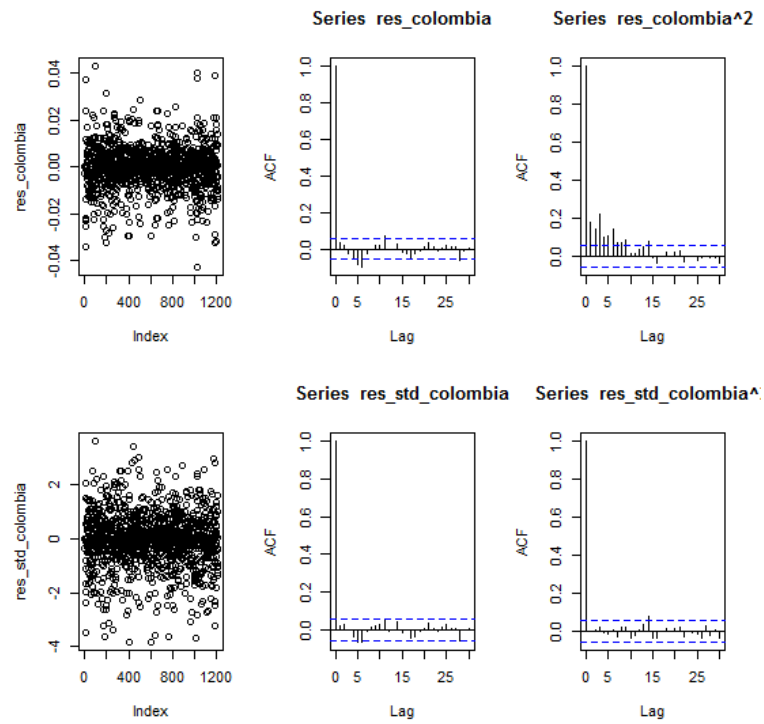
Fuente: Elaboración propia.

Figura A2. Autocorrelogramas simples y parciales para los residuales y residuales² índice Chile



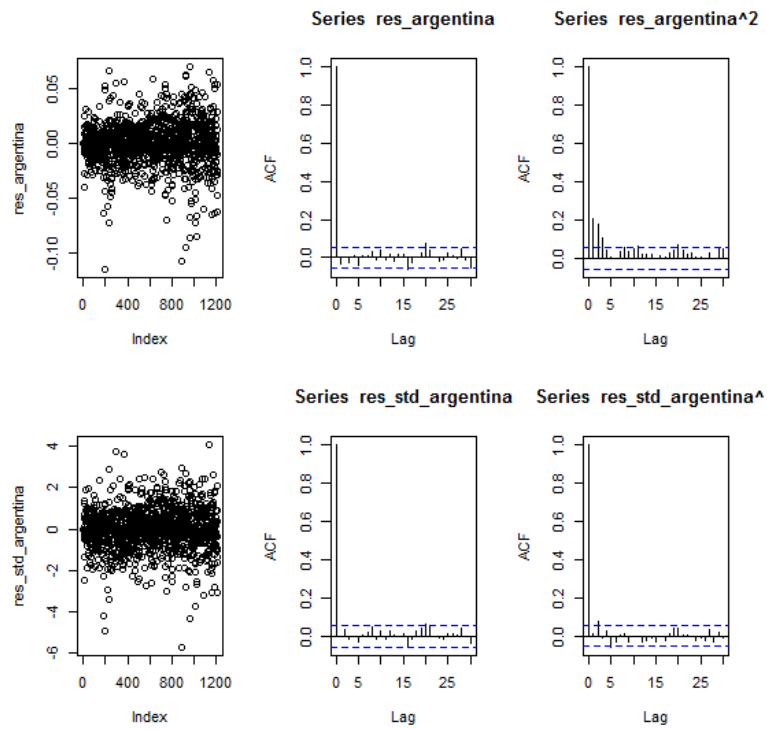
Fuente: Elaboración propia.

Figura A3. Autocorrelogramas simples y parciales para los residuales y residuales² índice Colombia



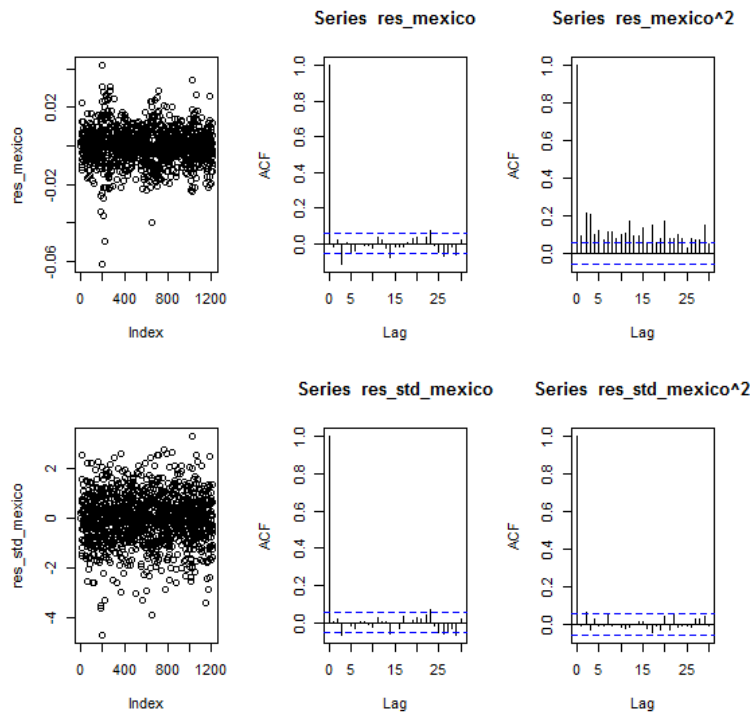
Fuente: Elaboración propia.

Figura A4. Autocorrelogramas simples y parciales para los residuales y residuales² índice Argentina



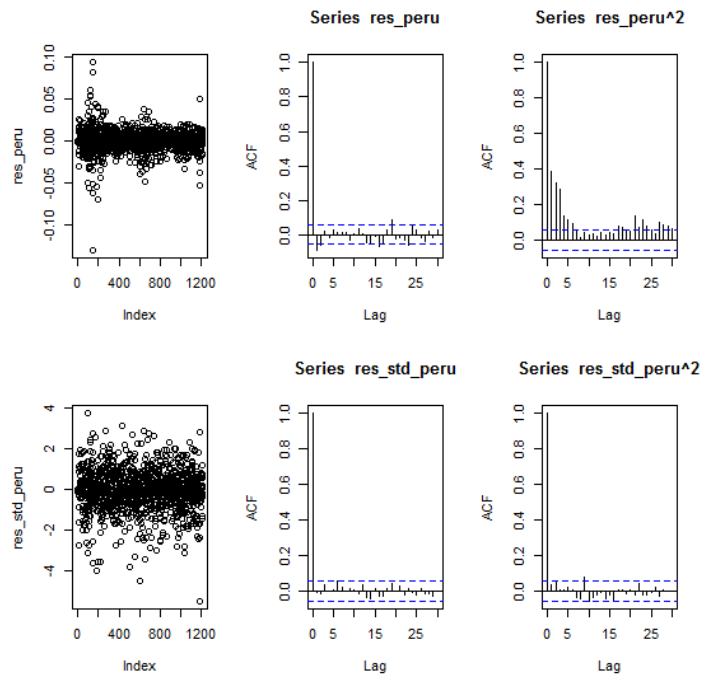
Fuente: Elaboración propia.

Figura A5. Autocorrelogramas simples y parciales para los residuales y residuales² índice México



Fuente: Elaboración propia.

Figura A6. Autocorrelogramas simples y parciales para los residuales y residuales² índice Perú



Fuente: Elaboración propia.

APENDICE B

Figura B. Estadísticos y estimaciones de la serie ARMA-GARCH

<pre> Title: GARCH Modelling Call: garchFit(formula = ~arma(1, 1) + garch(1, 1), data = dat\$brasil) Mean and Variance Equation: data ~ arma(1, 1) + garch(1, 1) [data = dat\$brasil] Coefficient(s): mu ar1 ma1 omega alpha1 beta1 -3,5561e-04 -6,5408e-01 6,6168e-01 6,2966e-06 6,4413e-02 9,0500e-01 Std. Errors: based on Hessian Error Analysis: Estimate Std. Error t value Pr(> t) mu -3,556e-04 6,285e-04 -0,566 0,5715 ar1 -6,541e-01 3,248e-01 -2,014 0,0440 * ma1 6,617e-01 3,304e-01 2,002 0,0452 * omega 6,297e-06 2,461e-06 2,559 0,0105 * alpha1 6,441e-02 1,420e-02 4,535 5,76e-06 *** beta1 9,050e-01 2,154e-02 42,009 < 2e-16 *** --- Signif. codes: 0 '***' 0,001 '**' 0,01 '*' 0,05 '.' 0,1 ' ' 1 Log Likelihood: 3485,462 normalized: 2,863978 Standardised Residuals Tests: Statistic p-Value Jarque-Bera Test R Chi^2 9,490418 0,008693245 Shapiro-Wilk Test R W 0,9967298 0,01210913 Ljung-Box Test R Q(10) 3,277784 0,974113 Ljung-Box Test R Q(15) 8,612728 0,896881 Ljung-Box Test R Q(20) 13,48385 0,8557107 Ljung-Box Test R^2 Q(10) 21,00354 0,0210689 Ljung-Box Test R^2 Q(15) 23,71451 0,07010289 Ljung-Box Test R^2 Q(20) 28,63308 0,09523946 LM Arch Test R TR^2 23,32514 0,02508908 Information Criterion Statistics: AIC BIC SIC HQIC -5,718096 -5,692932 -5,718145 -5,708624 </pre>	<pre> Title: GARCH Modelling Call: garchFit(formula = ~arma(2, 1) + garch(1, 1), data = dat\$chile) Mean and Variance Equation: data ~ arma(2, 1) + garch(1, 1) [data = dat\$chile] Coefficient(s): mu ar1 ar2 ma1 3,1135e-06 7,8696e-01 -1,7109e-01 -5,9399e-01 omega alpha1 beta1 2,0636e-06 1,0817e-01 8,6505e-01 Std. Errors: based on Hessian Error Analysis: Estimate Std. Error t value Pr(> t) mu 3,113e-06 8,195e-05 0,038 0,96969 ar1 7,870e-01 1,886e-01 4,173 3,01e-05 *** ar2 -1,711e-01 3,867e-02 -4,424 9,69e-06 *** ma1 -5,940e-01 1,892e-01 -3,140 0,00169 ** omega 2,064e-06 6,335e-07 3,258 0,00112 ** alpha1 1,082e-01 1,755e-02 6,165 7,04e-10 *** beta1 8,650e-01 2,153e-02 40,176 < 2e-16 *** --- Signif. codes: 0 '***' 0,001 '**' 0,01 '*' 0,05 '.' 0,1 ' ' 1 Log Likelihood: 4184,183 normalized: 3,438113 Standardised Residuals Tests: Statistic p-Value Jarque-Bera Test R Chi^2 75,98931 0 Shapiro-Wilk Test R W 0,9876272 1,237701e-08 Ljung-Box Test R Q(10) 8,000594 0,6287877 Ljung-Box Test R Q(15) 9,068919 0,8738064 Ljung-Box Test R Q(20) 20,0155 0,4569605 Ljung-Box Test R^2 Q(10) 5,937629 0,8204759 Ljung-Box Test R^2 Q(15) 12,27502 0,6581045 Ljung-Box Test R^2 Q(20) 18,6736 0,5431244 LM Arch Test R TR^2 10,19532 0,5988298 Information Criterion Statistics: AIC BIC SIC HQIC -6,864722 -6,835364 -6,864788 -6,853671 </pre>
<pre> Call: garchFit(formula = ~arma(3, 2) + garch(1, 1), data = dat\$colombia) Mean and Variance Equation: data ~ arma(3, 2) + garch(1, 1) [data = dat\$colombia] Coefficient(s): mu ar1 ar2 ar3 ma1 ma2 omega alpha1 beta1 -1.8772e-04 9.9661e-01 -1.0000e+00 1.0691e-01 -8.9192e-01 9.2572e-01 6.1864e-06 1.2208e-01 8.0242e-01 Std. Errors: based on Hessian Error Analysis: Estimate Std. Error t value Pr(> t) mu -1.877e-04 2.373e-04 -0,791 0,42893 ar1 9.966e-01 6.037e-02 16,509 < 2e-16 *** ar2 -1.000e+00 1.070e-01 -9,345 < 2e-16 *** ar3 1.069e-01 3.956e-02 2,702 0,00689 ** ma1 -8.919e-01 5.564e-02 -16,029 < 2e-16 *** ma2 9.257e-01 8.059e-02 11,487 < 2e-16 *** omega 6.186e-06 2.000e-06 3,094 0,00198 ** alpha1 1.221e-01 2.260e-02 5,401 6,61e-08 *** beta1 8.024e-01 4.048e-02 19,822 < 2e-16 *** --- Signif. codes: 0 '***' 0,001 '**' 0,01 '*' 0,05 '.' 0,1 ' ' 1 Log Likelihood: 4075,441 normalized: 3,34876 Standardised Residuals Tests: Statistic p-Value Jarque-Bera Test R Chi^2 157,9156 0 Shapiro-Wilk Test R W 0,9696556 2,764929e-15 Ljung-Box Test R Q(10) 11,20715 0,3416088 Ljung-Box Test R Q(15) 18,67452 0,2288637 Ljung-Box Test R Q(20) 21,48694 0,3689865 Ljung-Box Test R^2 Q(10) 5,549039 0,8516226 Ljung-Box Test R^2 Q(15) 17,58688 0,2850065 Ljung-Box Test R^2 Q(20) 18,98061 0,5230869 LM Arch Test R TR^2 5,359724 0,9448728 Information Criterion Statistics: AIC BIC SIC HQIC -6,682730 -6,644984 -6,682839 -6,668522 </pre>	<pre> Title: GARCH Modelling Call: garchFit(formula = ~arma(2, 1) + garch(1, 1), data = dat\$argentina) Mean and Variance Equation: data ~ arma(2, 1) + garch(1, 1) [data = dat\$argentina] Coefficient(s): mu ar1 ar2 ma1 2,5481e-04 8,5959e-01 -7,4997e-02 -7,7790e-01 omega alpha1 beta1 1,8336e-05 9,4854e-02 8,6225e-01 Std. Errors: based on Hessian Error Analysis: Estimate Std. Error t value Pr(> t) mu 2,548e-04 3,014e-04 0,845 0,397854 ar1 8,596e-01 2,551e-01 3,369 0,000754 *** ar2 -7,500e-02 3,417e-02 -2,195 0,028164 * ma1 -7,779e-01 2,524e-01 -3,082 0,002057 ** omega 1,834e-05 9,261e-06 1,980 0,047706 * alpha1 9,485e-02 2,512e-02 3,776 0,000159 *** beta1 8,623e-01 4,408e-02 19,560 < 2e-16 *** --- Signif. codes: 0 '***' 0,001 '**' 0,01 '*' 0,05 '.' 0,1 ' ' 1 Log Likelihood: 3106,2 normalized: 2,552342 Standardised Residuals Tests: Statistic p-Value Jarque-Bera Test R Chi^2 355,8337 0 Shapiro-Wilk Test R W 0,9717134 1,094998e-14 Ljung-Box Test R Q(10) 7,428978 0,6844204 Ljung-Box Test R Q(15) 8,951464 0,8800415 Ljung-Box Test R Q(20) 21,32002 0,3785166 Ljung-Box Test R^2 Q(10) 15,78492 0,1059569 Ljung-Box Test R^2 Q(15) 18,93236 0,2168153 Ljung-Box Test R^2 Q(20) 23,63318 0,258783 LM Arch Test R TR^2 17,13694 0,1445182 Information Criterion Statistics: AIC BIC SIC HQIC -5,093180 -5,063822 -5,093246 -5,082129 </pre>

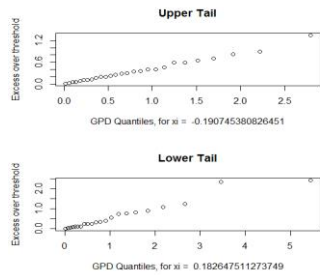
<pre> Title: GARCH Modelling Call: garchFit(formula = ~arma(2, 2) + garch(1, 1), data = dat\$mexico) Mean and Variance Equation: data ~ arma(2, 2) + garch(1, 1) [data = dat\$mexico] Coefficient(s): mu ar1 ar2 ma1 5.3082e-04 -4.2737e-01 -4.9205e-01 4.8938e-01 ma2 omega alpha1 beta1 5.3424e-01 1.7005e-06 7.2565e-02 9.0666e-01 Std. Errors: based on Hessian Error Analysis: Estimate Std. Error t value Pr(> t) mu 5.308e-04 4.748e-04 1.118 0.26356 ar1 -4.274e-01 4.446e-01 -0.961 0.33645 ar2 -4.920e-01 2.286e-01 -2.153 0.03133 * ma1 4.894e-01 4.388e-01 1.115 0.26473 ma2 5.342e-01 2.221e-01 2.406 0.01615 ** omega 1.701e-06 5.843e-07 2.911 0.00361 ** alpha1 7.257e-02 1.308e-02 5.547 2.91e-08 *** beta1 9.067e-01 1.649e-02 54.999 < 2e-16 *** --- Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1 Log Likelihood: 4087.756 normalized: 3.358879 Standardised Residuals Tests: Statistic p-Value Jarque-Bera Test R Chi^2 66.25012 4.107825e-15 Shapiro-Wilk Test R W 0.9892562 8.820357e-08 Ljung-Box Test R Q(10) 4.658476 0.9127945 Ljung-Box Test R Q(15) 10.07285 0.8151325 Ljung-Box Test R Q(20) 13.62462 0.8490075 Ljung-Box Test R^2 Q(10) 12.39497 0.2594919 Ljung-Box Test R^2 Q(15) 13.53238 0.5612485 Ljung-Box Test R^2 Q(20) 19.72288 0.4753806 LM Arch Test R TR^2 13.11063 0.3610511 Information Criterion Statistics: AIC BIC SIC HQIC -6.704611 -6.671059 -6.704697 -6.691981 </pre>	<pre> Title: GARCH Modelling Call: garchFit(formula = ~arma(1, 0) + garch(1, 1), data = dat\$peru) Mean and Variance Equation: data ~ arma(1, 0) + garch(1, 1) [data = dat\$peru] Coefficient(s): mu ar1 omega alpha1 beta1 -2.0166e-04 1.9149e-01 2.4678e-06 8.1903e-02 9.0210e-01 Std. Errors: based on Hessian Error Analysis: Estimate Std. Error t value Pr(> t) mu -2.017e-04 2.800e-04 -0.718 0.4727 ar1 1.915e-01 3.096e-02 6.186 6.17e-10 *** omega 2.468e-06 1.122e-06 2.200 0.0278 * alpha1 8.190e-02 1.989e-02 4.118 3.82e-05 *** beta1 9.021e-01 2.487e-02 36.272 < 2e-16 *** --- Signif. codes: 0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1 Log Likelihood: 3781.855 normalized: 3.107522 Standardised Residuals Tests: Statistic p-Value Jarque-Bera Test R Chi^2 285.5864 0 Shapiro-Wilk Test R W 0.9703226 4.28842e-15 Ljung-Box Test R Q(10) 8.548206 0.575448 Ljung-Box Test R Q(15) 14.13395 0.5153955 Ljung-Box Test R Q(20) 18.80126 0.5347764 Ljung-Box Test R^2 Q(10) 20.33418 0.02624574 Ljung-Box Test R^2 Q(15) 25.3837 0.04502174 Ljung-Box Test R^2 Q(20) 28.77842 0.09221487 LM Arch Test R TR^2 23.32282 0.02510699 Information Criterion Statistics: AIC BIC SIC HQIC -6.206828 -6.185858 -6.206861 -6.198934 </pre>
--	--

Fuente: Elaboración propia.

APENDICE C

Figura C. Estimación parámetros paretos generalizadas para cada serie de residuos estandarizados

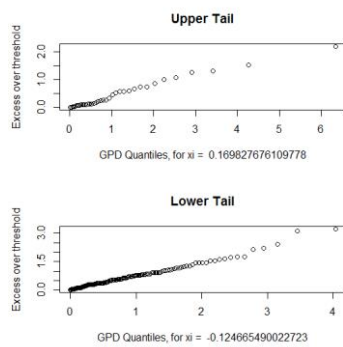
Brasil



```

Estimación parámetros
> brasil_cola$upper.par.est
  lambda      xi
0.4332946 -0.1907454
> brasil_cola$lower.par.est
  lambda      xi
0.4953194 0.1826475
    
```

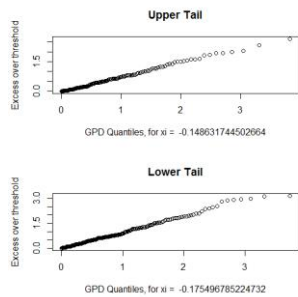
Chile



```

> chile_cola$upper.par.est
  lambda      xi
0.3824515 0.1698277
> chile_cola$lower.par.est
  lambda      xi
0.7545827 -0.1246655
    
```

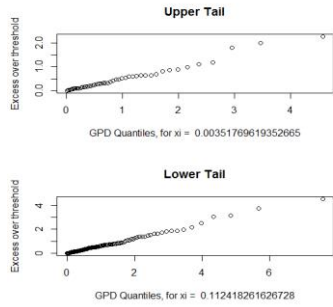
Colombia



```

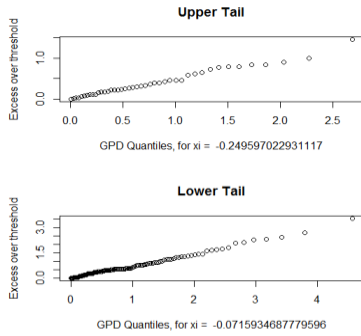
> colombia_cola$upper.par.est
  lambda      xi
0.7111091 -0.1486317
> colombia_cola$lower.par.est
  lambda      xi
0.9482319 -0.1754968
    
```

Argentina



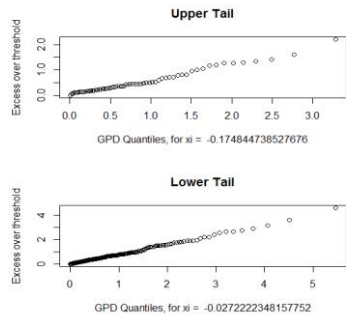
```
> argentina_cola$upper.par.est
lambda      xi
0.493714859 0.003517696
> argentina_cola$lower.par.est
lambda      xi
0.6109463  0.1124183
```

México



```
> mexico_cola$upper.par.est
lambda      xi
0.4920975 -0.2495970
> mexico_cola$lower.par.est
lambda      xi
0.71621534 -0.07159347
```

Perú



```
> peru_cola$upper.par.est
lambda      xi
0.6122616 -0.1748447
> peru_cola$lower.par.est
lambda      xi
0.78860852 -0.02722223
```

Fuente: Elaboración propia.