Cuadernos del CIMBAGE Nº 18 (2016) 109-134

ACERCA DEL CRITERIO DE OPTIMIZACIÓN BASADO EN LA MAXIMIZACIÓN DE LA UTILIDAD ESPERADA

Alberto H. Landro, Mirta L. González
CIE – IADCOM
Facultad de Ciencias Económicas, Universidad de Buenos Aires,
Córdoba 2122, 2º Piso – CABA – C1120AAQ – Argentina
mirtagonzalezar@yahoo.com.ar, alandroar@yahoo.com.ar

Recibido 17 de marzo de 2015, aceptado 8 de agosto de 2015

Resumen

En este trabajo se analizan la validez y los alcances de la definición de esperanza matemática y las condiciones formales que debe satisfacer la función de utilidad a fin de garantizar la validez del criterio de optimización basado en la maximización de la utilidad esperada. En particular, se realiza un análisis crítico de las justificaciones de la aparente preferencia por la violación del axioma de independencia de Von Neumman–Morgenstern y una corrección a los postulados del teorema de Menger a partir de las funciones de preferencias suavizadas.

Palabras clave: utilidad esperada, probabilidad, paradoja San Petesburgo

ON THE CRITERION OF OPTIMIZATION BASED ON EXPECTED UTILITY MAXIMIZATION

Alberto H. Landro, Mirta L. Gonzalez
CIE – IADCOM
Facultad de Ciencias Económicas, Universidad de Buenos Aires,
Córdoba 2122, 2º Piso – CABA – C1120AAQ – Argentina
mirtagonzalezar@yahoo.com.ar, alandroar@yahoo.com.ar

Received March 17th 2015, accepted August 8th 2015

Abstract

The purpose of this paper is to analyze the validity and scope of the definition of expected value as well as the formal conditions that the utility function must satisfy to ensure the validity of the optimization criterion based on expected utility maximization.
In particular, it is performed a critical analysis of the reasons for the apparent preference for violation of the Von Neumann-Morgenstern's axiom and a correction to the postulates of Menger's theorem about smoothed preference functions.

Keywords: expected utility, probability, St. Petersburg paradox.

1. INTRODUCCIÓN

Como resumen de las influencias de Cardano y Pascal, Christian Huygens –asimilando el contenido de un contrato aleatorio a un juego e interpretando la equidad como la propiedad que garantiza iguales expectativas de ganar para todos los jugadores– introdujo el concepto de esperanza matemática, entendida como la apuesta que cada uno de ellos estaría dispuesto a arriesgar para acceder a un puesto en el juego y definida como la posible cantidad de ganar por cada jugador multiplicada por la probabilidad de ganarla.

Los planteos conocidos como la apuesta de Pascal y el quinto problema de Niklaus Bernoulli, en los que la esperanza matemática es infinita, dieron origen a aparentes paradojas relacionadas con esta definición. Según se vio, desde un punto de vista estrictamente probabilístico, se puede concluir que el hecho que la esperanza matemática sea infinita y que, en consecuencia, se deba integrar idealmente una suma infinita para participar en un juego no constituye ninguna paradoja. En realidad, las presuntas paradojas surgen de la interpretación operacional del juego, la cual implica una violación, en la práctica, de la condición fundamental de equidad provocada por la discrepancia entre la definición de Huygens y el considerado como comportamiento racional del jugador.

Para resolver esta diferencia entre la interpretación matemática de la expectativa y lo que indica el sentido común, los probabilistas clásicos intentaron numerosas soluciones, todas concebidas a partir de definiciones objetivistas de la probabilidad. Unas, centradas en la decisión del jugador, estuvieron dirigidas a la evaluación de una apuesta aceptable de acuerdo con la definición de esperanza matemática; otras, vinculadas con la estructura del juego, se basaron en reinterpretaciones de la distribución de probabilidades, consideraciones acerca de la duración del juego y redefiniciones de la función de pagos de acuerdo con los conceptos de función de utilidad y de esperanza moral introducidas por Gabriel Cramer y Daniel Bernoulli, y estuvieron dirigidas a justificar la finitud de la esperanza matemática del jugador.

La sustitución del principio de razón insuficiente por la ley de los grandes números como fundamento del concepto de valor esperado debida a Von Mises es continuada, en este trabajo, con el análisis de las soluciones propuestas en el siglo XX, dirigidas a especular acerca de la posibilidad de interpretar la esperanza matemática como una expresión cuantitativa neo–bernoulliana que involucra una definición neo–niklausiana de la probabilidad como grado de creencia (personal) o una teoría neo–daneliana del valor.

2. LA AXIOMÁTICA DE VON NEUMANN Y MORGENSTERN

Así como las soluciones neo–niklausianas están dirigidas al análisis de la interpretación de la noción de probabilidad a fin de justificar el comportamiento de los jugadores en las paradojas que genera la definición de esperanza matemática, las soluciones neo–danielianas están relacionadas con el establecimiento de las condiciones necesarias y suficientes para poder asegurar la validez del criterio de optimización para la determinación del orden de preferencias basado en la maximización de la esperanza moral.

A partir de este modelo de maximización de la esperanza moral, generalmente aceptado como representativo del comportamiento del jugador, Von Neumman; Morgenstern (1953), partiendo de la noción de "conjunto de indiferencia" como aquel formado por las combinaciones de utilidades posibles que no generan preferencias entre sí, definieron una función de utilidad cardinal que preserva el orden (lineal) de las preferencias, válida sólo bajo ciertas condiciones resumidas en el siguiente sistema axiomático, al que se puede considerar como el fundamento sobre el que se desarrolló la teoría neo-danelliana del valor:

Axioma 1: los conjuntos de indiferencia están estrictamente ordenados de acuerdo con una relación de preferencias que satisface las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Axioma 2: si existe una relación de preferencia entre las utilidades y_1 e y_2, entonces existe la misma preferencia entre las utilidades y_1p e y_2p.

Axioma 3 (de aditividad): si existe una preferencia entre y_1e y_2, entonces existe la misma preferencia entre la apuesta a integrar para participar en un juego cuyos resultados posibles son y_1 (con probabilidad p) e y (con probabilidad 1− p) y otra apuesta para participar en un juego cuyos resultados posibles son y_2 (con probabilidad p) e y (con probabilidad 1− p).

Axioma 4 (de independencia): si existe una preferencia entre y_2 y una apuesta (r_1) para participar en un juego cuyos resultados posibles son y_1 (con probabilidad p_1) e y (con probabilidad $1{-}p_1$), entonces existe la misma preferencia entre una apuesta r_2 para participar en un juego cuyos resultados posibles son y_2 (con probabilidad p_2) e y (con probabilidad $1{-}p_2$) y otra apuesta para participar en un juego (una lotería bi-etapa) cuyos resultados posibles son el billete de lotería (r_1) (con probabilidad p_2) o y (con probabilidad $1-p_2$)[1].

Los tres primeros axiomas implican, esencialmente, el supuesto de la existencia de una función de preferencias continua en las probabilidades. El último axioma, que es condición necesaria para lograr la no-condicionalidad de la probabilidad, está vinculado con los supuestos de monotonicidad y linealidad de la función de preferencias en un conjunto de distribuciones de probabilidades.

La condición de linealidad en las probabilidades determina una doble implicación entre el cumplimiento del axioma de independencia y el criterio de decisión basado en la maximización de la esperanza moral. En otros términos, la condición de linealidad implica que el axioma de independencia constituye una condición necesaria y suficiente para justificar el criterio de selección de las preferencias mediante la maximización de la utilidad esperada[2]. En la primera parte del Axioma 4 la comparación es entre $E_1^*(Y) = y_2$ y:

$$E_2^*(Y) = r_1 = y_1 p_1 + y_2(1 - p_1) = (y_1 - y_2)\, p_1 + y_2$$

En la segunda comparación es entre:

$$E_3^*(Y) = y_2 p_2 + y(1 - p_2) = (y_2 - y)\, p_2 + y$$

y

$$E_4^*(Y) = r p_2 + \mathrm{y}(1 - \mathrm{p}_2) = \big(y_1 p_1 + \mathrm{y}(1 - p_1)\big) p_2 + y(1 - p_2)$$
$$= (y_1 - y) p_1 p_2 + y$$

De modo que, si el jugador prefiriera $E^*{}_1(Y)$ a $E^*{}_2(Y)$ ($E^*{}_2(Y)$ a $E^*{}_1(Y)$), debería preferir $E^*{}_3(Y)$ a $E^*{}_4(Y)$ ($E^*{}_4(Y)$ a $E^*{}_3(Y)$). Es decir, si se verificara que $y_2 > y_1 p_1 + y(1 - p_1)$, entonces se debería verificar que $y_2 > y_1 p_1 + y_2(1 - p_1)(y_1 < y_2 < y)$.

Con respecto a este criterio de optimización basado en los momentos de primer orden, debe tenerse en cuenta que, en general, la utilidad esperada es una función de la sucesión completa de momentos de la distribución de probabilidades. De modo que si, por ejemplo, la función de utilidad es cuadrática, el cálculo de la utilidad esperada involucra la esperanza matemática y la varianza[3] y, por lo tanto, invalida la

[1] Si bien este axioma no figura en Von Neumann;Morgenstern (1953), se puede considerar como implícitamente contenido en su formulación preaxiomática (ver Malinvaud (1952)). Una mención previa de este axioma puede ser hallada en Marshak (1950), Manne (1952) y Samuelson (1952).

[2] Ver Luce; Raiffa (1957).

[3] Ver Markowitz (1959), Tobin (1958) (1965).

definición de la regla de selección de las preferencias basada exclusivamente en el valor esperado. En términos más generales Markowitz (1959) y Richter (1960) demostraron que si la función de utilidad está definida por un polinomio de grado k, entonces deben ser considerados los k primeros momentos naturales; y que si dos distribuciones difieren en todos esos k momentos, la definición del orden de preferencias requiere el conocimiento de las magnitudes y de los signos de las k derivadas de la función de utilidad (lo cual implica la consideración de un conjunto de restricciones sobre dicha función que produce inevitablemente una pérdida de generalidad en los resultados)[4].

3. LAS VIOLACIONES AL AXIOMA DE INDEPENDENCIA

3.1. La paradoja de Allais

El primer contraejemplo a la axiomática de Von Neumann-Morgenstern fue introducido por Maurice Allais (1953a)(1953b)(1979). La mal llamada paradoja de Allais constituye una prueba de que el cuarto axioma, en la práctica, tiende a ser violado sistemáticamente, generando un comportamiento de los jugadores frente al riesgo inconsistente con la linealidad de las preferencias en las probabilidades y la ya mencionada hipótesis de maximización de la utilidad esperada[5].

Allais propuso el siguiente problema: sean dos loterías de 100 números cada una. Una (L_1) en la que todos y cada uno de los números posee un premio de 100 millones; y otra (L_2) en la que 10 números poseen un premio de 500 millones, 89 poseen un premio de 100 millones y un número posee un premio igual a cero. Sean, por otra parte, otras dos loterías de 100 números cada una; una (L_3) en la que 11 números poseen un premio de 100 millones y cada uno de los 89 restantes poseen un premio igual a cero; y otra (L_4), en la que 10 números poseen un premio de 500 millones y cada uno de los 90 números restantes posee un premio igual a cero. ¿Cuál de las dos alternativas elegiría en el primer caso y cuál en el segundo caso?[6]

[4] Un ejemplo de la debilidad de los métodos que involucran comparaciones de valores esperados y varianzas exclusivamente para funciones de utilidad de grado $k > 2$ es la definición de la frontera eficiente de Markowitz.

[5] Reconocer que la llamada paradoja de Allais constituye una suerte de evidencia empírica de que el cuarto axioma tiende, en la práctica, a ser violado habitualmente implica reconocer que no genera un contraejemplo respecto del mismo, sino que representa un razonable sistema alternativo de preferencias.

[6] Ver Morrison (1967), Raiffa (1968).

De acuerdo con el axioma de independencia, si el jugador prefiriera L_1 a L_2, entonces debería preferir L_3 a L_4. No obstante, las personan a quienes se propuso el problema, en manifiesta contradicción con el comportamiento acorde con el criterio de optimización basado en la maximización de la esperanza moral, prefirieron mayoritariamente L_4a L_3[7].

3.2. La utilidad esperada subjetiva

Una justificación de esta aparente preferencia por la violación del axioma de independencia puede atribuirse a que este se basa en el supuesto que las ganancias o utilidades posibles existen sobre un conjunto de probabilidades clásicas (objetivas), que consideran que el mecanismo físico que genera la aleatoriedad incluye en forma simétrica todos los resultados posibles, son unívocamente identificadas e iguales para todos los jugadores.

A este respecto, Kahneman;Tversky (1979) propusieron: i) un sistema general de "*ponderaciones de decisión*", según el cual las asignaciones realizadas por el jugador son representadas como una función ($\pi(p_i)$)de la correspondiente probabilidad clásica de Von Neumann-Morgenstern[9]; y ii), un sistema de ponderaciones ($v(x_i)$)que representa el valor atribuido por el jugador a cada ganancia posible (x_i).

La función $\pi(\cdot)$, que es creciente con respecto a p (con $\pi(0) = 0 \; y \; \pi(1) = 1$), a pesar de su apariencia, no puede ser considerada una probabilidad subjetiva, en la medida que en general la suma de las ponderaciones asociadas a eventos complementarios resulta menor a la ponderación correspondiente a un evento cierto, $\pi(p) + \pi(1-p) < 1$, es decir no satisface la condición de coherencia. Este sistema de ponderaciones, conocido como de "*sub-certeza*", intenta representar la tendencia del jugador a subvaluar los resultados inciertos respecto de aquellos ciertos (una actitud que conduce al supuesto de aversión al riesgo en un sistema de preferencias que incluya ganancias ciertas y de propensión al riesgo en un sistema de preferencias que incluya pérdidas ciertas).

La combinación de ambos sistemas de ponderaciones ($\pi(P_I) \; Y \; v(x_i)$) dio origen a un modelo denominado de "*utilidad esperada subjetiva*"

---

[7] Debe tenerse en cuenta que el experimento de Allais no es un caso aislado. Resultados similares pueden ser hallados en las experiencias realizadas por Kahneman; Tversky (1979), Hagen (1979) y MacCrimmon; Larsson (1979).

[9] El reemplazo de las probabilidades clásicas por el sistema de "*ponderaciones de decisión*" se debe, en realidad a Edwards (1953)(1954a)(1954b)(1962).

dirigido a maximizar una "*esperanza moral subjetiva*" (EMOS), definida como $E^{**}\big(y(x)\big) = \sum y(x_i)\pi(p_i)$ [10]. A fin de simplificar el análisis y, de acuerdo con la notación de Kahneman-Tversky, $(y_1, p_1; y_2, p_2)$ un juego con dos posibles utilidades no-nulas, y_1 con probabilidad p_1 e y_2 con probabilidad p_2 (tales que $p_1 + p_2 < 1$) y un orden de preferencias de la forma y_1 con probabilidad p_1 e y_2 con probabilidad p_2 (tales que $p_1 + p_2 < 1$) y un orden de preferencias de la forma $y_1 \geq 0 \geq y_2$ ó $y_1 \leq 0 \leq y_2$, en el que se supone que las utilidades son conectadas, simétricas, transitivas y arquimedianas, y sea la siguiente axiomática:

Axioma 1 (de independencia): la condición $(y_1{}^*, p_1{}^*; y_2, p_2) \geq (y_1{}^*, p_1{}^*; y_2{}^*, p_2{}^*)$ es necesaria y suficiente para poder asegurar que $(y_1, p_1; y_2, p_2) \geq (y_1, p_1; y_2{}^*, p_2{}^*)$.

Axioma 2 (de cancelación): si se verifican los siguientes órdenes de preferencias: $(y_1, p_1; y_2{}^*, p_2{}^*) \geq (y_1{}^*, p_1{}^*; y_2, p_2)$ y $(y_1{}^*, p_1{}^*; y_2{}^{**}, p_2{}^{**}) \geq (y_1{}^{**}, p_1{}^{**}; y_2{}^*, p_2{}^*)$ entonces será $(y_1, p_1; y_2{}^{**}, p_2{}^{**}) \geq (y_1{}^{**}, p_1{}^{**}; y_2, p_2)$.

Axioma 3: si existe un resultado y, con probabilidad p para el cual se verifica el orden de preferencias $(y_1, p_1; y_2, p_2) \geq (y, p) \geq (y_1, p_1; y_2{}^*, p_2{}^*)$, entonces existe un resultado y^{**} con probabilidad p^{**} tal que $(y_1, p_1; y_2{}^{**}, p_2{}^{**})$ es indiferente a (y, p).

Se demuestra[11] que estas condiciones son suficientes para poder asegurar que existe un único sistema de ponderaciones de decisión, $\pi(\cdot)$ y de ponderaciones $v(\cdot)$ que satisfacen la siguiente ecuación aditiva bilineal:

$$E^{**}(y_1, p_1; y_2, p_2) = \pi(p_1)v(y_1) + \pi(p_2)v(y_2)$$

Ahora bien, debido a que la evidencia empírica[12] indica que los jugadores tienden a experimentar una sistemática hipersensibilidad, que se traduce en una sobre-estimación de los eventos de baja probabilidad, las estimaciones de las funciones $\pi\,(p)$ tienden a ser cóncavas con respecto a p[13]. Esta circunstancia y la existencia de

---

[10] Los alcances de modelos previos de este tipo fueron analizados empíricamente por Fellner (1965) (quien empleó el concepto de "*ponderaciones de decisión*" para explicar la aversión al riesgo), Anderson; Shanteau (1970) y Van Dam (1975).

[11] Ver Debreu (1960), Krantz; Luce; Suppes; Tversky (1971).

[12] Basada en estudios empíricos sobre el comportamiento de un jugador en condiciones de incertidumbre que comenzaron con los experimentos de Preston; Baratta (1948), Griffith (1949), Edwards (1953)(1954a)(1954b), Sprowls (1953).

[13] Esta concavidad se verifica habitualmente para las ganancias y la convexidad para las pérdidas y, en general, es más empinada para las pérdidas que para las ganancias. La pendiente de las tangentes de la función $\pi(\cdot)$ en el intervalo (0,1) puede ser interpretada como una medida de la sensibilidad de las preferencias ante variaciones en la probabilidad.

aparentes discontinuidades de π (•) en los extremos del intervalo (0,1) generadas por la limitación natural en la selección de una ponderación de decisión extremadamente pequeña o de una ponderación muy próxima a la unidad, permiten concluir que el comportamiento de la función π (•) no resulta aceptable en los extremos del intervalo.

Además, el hecho que la no-linealidad de $\pi\,(p)$ no está caracterizada exclusivamente por la forma de la función de utilidad implica la imposibilidad de la aplicación de los principales resultados de la teoría de la utilidad esperada (como por ejemplo, la caracterización de la aversión al riesgo y la condición de monotonicidad). El único caso de vigencia del principio de maximización de la utilidad esperada será, obviamente, cuando π $(p) = p$.

Por otra parte, dados dos juegos de la forma $(y_1, p_1; y_2, p_2)$ y $(y_1, p_1^*; y_2, p_2^*)$, donde $p_1 + p_2 = p_1^* + p_2^* < 1$, en la medida que para cualquier jugador ambas alternativas sean indiferentes, se podría concluir que $\pi\,(p_1) + \pi\,(p_2) = \pi\,(p_1{}^*) + \pi\,(p_2^*)$, pero este resultado sería válido sólo en el caso en que π (•) fuera una función identidad. Una condición que constituye un contraejemplo a los postulados del modelo de la utilidad esperada subjetiva, debido a la combinación de las ponderaciones de las probabilidades de los juegos con utilidades iguales y a la imposibilidad de demostrar que $\pi\,(p_1 + p_2) = \pi\,(p_1) + \pi(p_2)$.

La imposibilidad del modelo EMOS de incorporar la propiedad de monotonicidad hará que cualquier jugador que intente maximizar $E^{**}(y(x))$ utilizando una función $\pi\,(p_i)$ no-lineal, necesariamente prefiera distribuciones estocásticamente dominadas. Sean, por ejemplo, dos juegos, $(y_1, p_1; y_2, p_2)$ y $(y_1, p_1^*; y_2, p_2^*)$ (donde $y_1 > y_2 > 0$, $p_1 > p_1^*$, $p_1 + p_2 = p_1^* + p_2^* < 1$), dado que:

$$E^{**}(y_1, p_1; y_2, p_2) = \pi(p_1)v(y_1) + \pi(p_2)v(y_2) > \pi(p_1^*)v(y_1) + \pi(p_2^*)v(y_2) = E(y_1, p_1^*; y_2, p_2^*)$$

o, lo que es lo mismo, que $\frac{\pi(p_1)-\pi(p_1^*)}{\pi(p_2^*-\pi(p_2))} > \frac{v(y_2)}{v(p_1)}$, de acuerdo con el criterio de maximización de la utilidad esperada, la alternativa $(y_1, p_1; y_2, p_2)$ será preferida a $(y_1, p_1^*; y_2, p_2^*)$. Pero, en la medida que y_2 se aproxime a y_1, $\pi(p_1) - \pi(p_1^*)$ se aproximará a $\pi(p_2^* - \pi(p_2))$ y, como $p_1 - p_1^* = -p_2^* - p_2$, se puede concluir nuevamente que la única forma de asegurar la validez de este criterio de optimización es suponiendo que $\pi(\cdot)$ es una función lineal de p.

Una forma alternativa de justificación de la violación del axioma de independencia de Von Neumman-Morgenstern, debida también a Kahneman–Tversky, se basa en los experimentos que permiten formular la siguiente regla empírica para el caso particular de los resultados posibles (denominada "efecto certeza" o "efecto coeficiente común" de acuerdo con la nomenclatura de MacCrimmon, Larson (1979)[14]): si una utilidad y_1, con probabilidad p_1, es equivalente a una utilidad y_2 con probabilidad p_1p_2, entonces la utilidad y_1, con probabilidad p_1p_3, no será preferida a la utilidad y_2, con probabilidad $p_1p_2p_3$ $(0 < p_1p_2p_3 \leq 1)$. Es decir, si $\pi(p_1)v(y_1) = \pi(p_1p_2)v(y_2)$, entonces $\pi(p_1)v(y_1) = \pi(p_1p_3)v(y_1) \leq \pi(p_1p_2p_3)v(y_2)$ y, por lo tanto $\frac{\pi(p_1p_2)}{\pi(p_1)} \leq \frac{\pi(p_1p_2p_3)}{\pi(p_1p_3)}$. En otros términos, contrariamente a lo postulado por el axioma de independencia, para un cociente de probabilidades dado, se verifica que el cociente de las correspondientes ponderaciones de decisión será más próximo a la unidad cuanto más se aproximen a cero las probabilidades son bajas. La condición necesaria y suficiente para que se verifique la condición, conocida como de subproporcionalidad, es que $\pi(\cdot)$ sea una función convexa del logaritmo de p. Se demuestra[15] que la subproprocionalidad asociada a la sobre–estimación de las probabilidades próximas a cero implica la ya mencionada sub–aditividad de $\pi(\cdot)$; es decir, que si $\pi(\cdot)$ es monótona y continua en el intervalo (0,1) y tal que $\pi(p_1) > p_1$ y se verifica la condición de subproporcionalidad, entonces $\pi(p_1p_2) > p_2\pi(p_1)$ (0 < p_2< 1).

3.3. La axiomática de Handa

En este ámbito del modelo de la utilidad esperada subjetiva, Handa (1977) propuso una axiomática alternativa a la de Kahneman–Tversky y una teoría asociada con el objetivo de intentar una justificación más adecuada a la violación axioma de independencia a partir de los resultados del experimento de Allais:

Axioma 1: dadas dos variables aleatorias unidimensionales Y_1 e Y_2, que representan sendos conjuntos de utilidades posibles, con dominios $\Omega(Y_1) = \{y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1n_1}\}$ y $\Omega(Y_2) = \{y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2n_2}\}$ y con asignaciones de probabilidades $\pi(p_{1i})(i = 1,2,..,n_1$ e $\pi(p_{2i})(i = 1,2,..,n_2$ respectivamente, las preferencias de un jugador son funciones de los valores $y_{1i}(i = 1,2,..,n_1$ e $y_{2i}(i = 1,2,..,n_2)$ y de sus respectivas asignaciones de probabilidades exclusivamente.

Axioma 2 (de ordenamiento completo): sean tres variables aleatorias, $\{Y_1, \Omega(Y_1), \pi(p_1)\}, \{Y_2, \Omega(Y_2), \pi(p_2)\}$ y $\{Y_3, \Omega(Y_3), \pi(p_3)\}$, donde $\Omega(Y_j) =$

[14] Un caso particular de este efecto es la paradoja de Bergen (ver Hagen, 1979).
[15] Kahneman; Tversky (1979).

$\{y_{j1}, y_{j2}, \ldots, y_{jn_j}\}$ y $\pi(p_{ji})(i = 1,2, .., n_j, j = 1,2,3)$. Entonces: i) se verificará que $\{Y_1\}$ no es preferida a $\{Y_2\}$ o $\{Y_2\}$ no es preferida a $\{Y_1\}$ y ii) si $\{Y_1\}$ no es preferida a $\{Y_2\}$ e $\{Y_2\}$ no es preferida a $\{Y_3\}$, se verificará que $\{Y_1\}$ no es preferida a $\{Y_3\}$.

Axioma 3 (de continuidad): si $\{Y_1, \Omega(Y_1), \pi(p_1)\}$ no es preferida a $\{Y_2, \Omega(Y_2), \pi(p_2)\}$ e $\{Y_2, \Omega(Y_2), \pi(p_2)\}$ no es preferida a $\{Y_3, \Omega(Y_3), \pi(p_3)\}$, entonces existe un único valor 0 < c < 1 para el cual $\{Y_2, \Omega(Y_2), \pi(p_2)\}$ es indiferente a $\{cY_1, \Omega(cY_1), \pi(p_1)\} + \{(1-c)Y_3, \Omega((1-c)Y_3), \pi(p_3)\}$

Axioma 4 (de independencia): si cada valor de la variable aleatoria unidimensional $\{Y, \Omega(Y) = \{y_1, y_2, \ldots, y_n,\ \pi(p_1)(i = 1, 2, \ldots, n)\}$ es indiferente para un jugador para cada valor de la variable $\{Y^*, \Omega(Y^*) = \{{y_1}^*, {y_2}^*, \ldots, {y_n}^*,\ \pi({p_1}^*)(i = 1, 2, \ldots, n)\}\}$, entonces la variable aleatoria $\{Y, \Omega(Y), \pi(p)\}$ es indiferente respecto de la variable $\{Z = \sum_i y_i^*, \Omega(Z), 1\}$.

Axioma 5: la condición necesaria y suficiente para que la variable $\{Z_1 = cY_1, \Omega(Z_1), \pi(p_1)\}$ no sea preferida a $\{Z_2 = cY_2, \Omega(Z_2), \pi(p_2)\}(c > 0)$ es que $\{Y_1, \Omega(Y_1), \pi(p_1)\}$ no sea preferida a $\{Y_2, \Omega(Y_2), \pi(p_2)\}$, siempre que los niveles de utilidad esperada sean de una magnitud tal que no puedan alterar la situación del jugador.

Obsérvese que, contrariamente al Axioma 2 de Von Neumman–Morgenstern, en el que la continuidad es en las distribuciones de probabilidades, en el Axioma 3 de Handa la condición de continuidad es en las utilidades.

El Axioma 4 se funda en los principios: i) que cualquier combinación de resultados y probabilidades es indiferente con respecto a una cantidad cierta y que esta cantidad es independiente de las cantidades ciertas que resultan indiferentes con respecto a los otros resultados y ii) que la cantidad cierta generada por la agregación de las cantidades ciertas que resultan indiferentes con respecto a la combinación de resultados y probabilidades es indiferente con respecto a la utilidad esperada total.

De acuerdo a la nomenclatura de Handa el axioma de independencia de Von Neumann–Morgestern puede ser expresado de la siguiente forma: dadas dos variables aleatorias Y_1 y Y, ambas con dominio $\Omega(Y_1) = \Omega(Y) = \{y_1, y_2, .., y_n\}$ y funciones de probabilidades $\{p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1n}\}$ y $\{p_1, p_2, \ldots p_n\}$, respectivamente, la condición que $\{Y_1, \Omega(Y_1), p(Y_1)\}$ no sea preferida a $\{Y, \Omega(Y), p(Y)\}$ es necesaria y suficiente para poder asegurar que la varialbe que representa los resultados de una lotería "bi–etapa"

$\{Y_1, \Omega(Y_1), c\, p(Y_1); Y_2, \Omega(Y_2), (1-c)\, p(Y_2)\}$ no es preferida a la variable $\{Y, \Omega(Y), c\, p(Y); Y_2, \Omega(Y_2), (1-c)\, p(Y_2)\}$ (0 < c < 1)[16].

Al considerar Y_2 como un vector nulo y tomando en cuenta sólo las utilidades esperadas que incluyan un resultado no-nulo, este axioma asume la siguiente forma: que $\{Y_1, \Omega(Y_1), \pi(p(Y_1))\}$ no sea preferida a $\{Y, \Omega(Y), \pi(p(Y))\}$ es condición necesaria y suficiente para poder asegurar que $\{Y_1, \Omega(Y_1), p^*\pi(p(Y_1))\}$ no es preferida a $\{Y, \Omega(Y), p^*\, \pi(p(Y))\}$. Lo que permite concluir que la diferencia entre las axiomáticas de Von Neumann–Morgenstern y de Handa no radica en la condición de independencia, sino entre esta versión del Axioma 4 de Von Neumann–Morgenstern y el Axioma 5 de Handa.

Como se mencionó más arriba, de acuerdo con el Axioma 5, la utilidad esperada del resultado $y(x_i)$ puede ser expresada como $y(x_i)\pi(p_i)$, lineal en $y(x_i)$. Por su parte, como se vio en la sección 3.1, en el Axioma 4 de Von Neumann–Morgenstern, esta utilidad esperada puede ser expresada como $g[y(x_i)]]\pi(p_i)$, lineal respecto de las ponderaciones de decisión $\pi(p_i)$. Esta circunstancia permite concluir que: i) dado el supuesto de linealidad de las preferencias en las utilidades, la axiomática de Handa parece ser más apropiada para explicar el comportamiento de los jugadores en los casos en que las utilidades esperadas involucren probabilidades marcadamente diferentes y, en consecuencia, parece lograr una justificación consistente de los resultados del experimento de Allais, respecto de la violación del Axioma 4 de Von Neumann–Morgenstern y ii) la condición de linealidad que supone este sistema axiomático permite demostrar que la función de preferencias del jugador se rige por la maximización de la esperanza moral $E^*(Y) = \sum_i y(x_i)\pi(p_i)$ y que esta solución es única[17].

3.4. La dominancia estocástica

De las consideraciones expresadas en las secciones precedentes se puede concluir que la cuestión fundamental inherente a la controversia entre la axiomática de Von Neumman–Morgenstern y el planteo de Allais se refiere a la cuestión de la preservación del orden de preferencias entre un evento cierto y uno incierto cuando ambos se

---

[16] Esta puede ser interpretada como una variable que, con una probabilidad p^*, proporciona los resultados posibles $\{y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1n}\}$ con probabilidades $\{p_{11}, p_{12}, p_{1n}\}$ $(\sum_i p_{1i} = 1)$ y, con una probabilidad $(1-p^*)$, proporciona los resultados $\{y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2n}\}$ con probabilidades $\{p_{21}, p_{22}, p_{2n}\}$ $(\sum_i p_{2i} = 1)$ o, alternativamente como una variables simple con dominio $\{y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1n}, y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2n}\}$ y función de probabilidades $\{p^*p_{11}, p^*p_{12}, \dots, p^*p_{1n}, (1-p^*)p_{21}, (1-p^*)p_{22}, \dots, (1-p^*)p_{2n},\}$ $(\sum_i p^*p_{1i} + \sum_i (1-p^*)p_{2i} = 1)$.

[17] Ver Handa (1977).

transforman en inciertos. Un problema que Friedman-Savage (1948) transformaron en la cuestión de la preservación del orden de preferencias entre sendos pares de eventos ciertos e inciertos[18].

De acuerdo con el planteo de Friedman–Savage, si el jugador asigna a los posibles resultados (y_1 e y_2) las probabilidades $p_1 < p_2$, según el axioma 4 de Von Neumann – Morgenstern, debería ser:

$$E_2^*(Y) = y_1(1 - p_2) + y_2 p_2 > (1 - p_1)y_1 + y_2 p_1 = E_1^*(Y)$$

lo que permite concluir que, dados dos juegos con iguales ganancias, el jugador preferirá aquel al cual le haya asignado la mayor probabilidad de ganar.

En términos generales, sean i) una variable aleatoria unidimensional y que representa el conjunto de utilidades posibles, con dominio $\Omega(Y) = \{y_1, y_2, .., y_n\}$, tal que sus valores observan el siguiente orden $y_i > y_j, si\ i > j$ y ii) dos distribuciones de probabilidades sobre dichos resultados, p_{1i} y p_{2i} , tales que $p_{1i} > p_{2i} (i = 1,2, \dots, k - 1)$, $p_{1k} > p_{2k}\ y\ p_{2i} = p_{1i} (i = k + 1, k + 2, \dots, n; i \neq j)$, de modo que $F_2(y_{k-1}) = \sum_{i=1}^{k-1} p_{2i} < \sum_{i=1}^{k-1} p_{1i} = F_1(y_{k-1})$ y $\sum_{i=k+1}^{n} p_{1i} = \sum_{i=k+1}^{n} p_{2i}$ y, en consecuencia, que $F_2(y_h) \leq F_1(y_h) (h = 1,2, .., n)$. Se dice entonces que la distribución $\{p_{1i}\}$ es estocásticamente dominante de primer orden respecto de $\{p_{2i}\}$ y se demuestra que dichas distribuciones permiten definir un orden de preferencias basado en las esperanzas morales, $E_2^*(Y) = \sum_{i=1}^{n} y_i p_{2i} > \sum_{i=1}^{n} y_i\, p_{1i} = E_1^*(\mathrm{Y})$, no importa la forma de la función de utilidad.

Con un razonamiento similar al utilizado en la de primer orden, se demuestra que la condición necesaria y suficiente para poder asegurar la dominancia estocástica de segundo orden es que el área bajo una función de distribución sea mayor o igual que el área bajo una función de distribución alternativa. Es decir, que la condición necesaria y suficiente para poder asegurar que la distribución $\{p_{1i}\}$ es estocásticamente dominante de segundo orden respecto de $\{p_{2i}\}$ es que $\sum_{i=1}^{k} F_2(y_i) \Delta y_i \leq \sum_{i=1}^{k} F_1(y_i) \Delta y_i$ (para todo k < n), donde $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i > 0$ e y_n es el último valor posible del dominio $\Omega(Y)$.

De la misma forma, dada una función de utilidad $y(x)$, continua y con primera derivada continua y positiva en el intervalo $[x_1; x_n]$, dos funciones de densidad $\phi_1[g(y)]$ y $\phi_2[g(y)]$ sobre un intervalo finito $\Omega(Y)$ y las correspondientes funciones de distribución $G_1(y)$ y $G_2(y)$, se

---

[18] En este texto se utilizará la denominación "*evento cierto*" -introducida por Kolmogorov (1933)- a pesar de entender que encierra una evidente contradicción en el sentido que esta expresión no satisface la propiedad esencial de eventualidad.

demuestra que, si $\phi_1[g(y)]$ es estocásticamente dominante de primer orden respecto de $\phi_2[g(y)]$, entonces $\phi_2[g(y)]$ será débilmente preferida a $\phi_1[g(y)]$. Es decir, si se verifica que $G_2(y) \leq G_1(y)$ (para todo $x \in \Omega(X)$), entonces será $E_2^*(Y) \geq E_1^*(Y)$. De la misma forma, se demuestra que la condición $G_2(y) < G_1(y)$ (para al menos un valor de y) es necesaria y suficiente para poder asegurar que $\phi_2[g(y)]$ será estrictamente preferida a $\phi_1[g(y)]$ y, por lo tanto que $E_2^*(Y) > E_1^*(Y)$. Viceversa, si $\phi_2[g(y)]$ es preferida a $\phi_1[g(y)]$ para toda función de utilidad, entonces $\phi_2[g(y)]$ es estocásticamente dominante de primer orden respecto de $\phi_2[g(y)]$ y, en consecuencia $E_2^*(Y) > E_1^*(Y)$. La condición necesaria y suficiente para la preferencia estricta es que las distribuciones $\phi_1[g(y)]\; y\; \phi_2[g(y)]$ no sean idénticas.

Dado que las variables $y^s(s = 1,3,5 \ldots ; y \in \Omega(X))$ son funciones monótonas, se puede concluir en forma inmediata que, si $\phi_1[g(y)]$ es estocásticamente dominante de primer orden respecto de $\phi_2[g(y)]$, entonces todos los momentos naturales de orden impar de la distribución $\phi_2[g(y)]$ son mayores o iguales que los respectivos momentos de $\phi_1[g(y)]$. En particular, si el dominio $\Omega(Y)$ incluye solamente valores no–negativos, entonces todos los momentos naturales de $\phi_2[g(y)]$ serán mayores que los correspondientes momentos de $\phi_1[g(y)]$. Por el contrario, la condición de dominancia de segundo orden no impone ninguna restricción sobre las magnitudes relativas de los momentos de orden superior.

Asimismo, si se considera una función con utilidad marginal no–creciente, más precisamente una función de utilidad con derivada de primer orden continua y positiva y derivada de segundo orden continua y no–positiva en un intervalo $[y_1, y_n]$ (es decir, una función representativa de una aversión débil al riesgo), se demuestra que la condición necesaria y suficiente para poder asegurar que $\phi_2[g(y)]$ será, al menos, tan preferida como $\phi_1[g(y)]$, es decir que $E_2^*(Y) > E_1^*(Y)$, es que $\int_{y_1}^{y} G_2(u)du \leq \int_{y_1}^{y} G_1(u)du$ (para todo $y \in \Omega(Y)$); viceversa, se puede asegurar que una distribución es estocáticamente dominada de segundo orden con respecto a una alternativa cuando genera una esperanza moral mayor para todas las funciones de utilidad que suponen utilidad marginal no–creciente[19].

[19] El concepto de dominancia estocástica fue introducido en el ámbito del análisis de riesgo por Hadar; Russell (1969), Hanoch; Levy (1969) y Rothschild;Stiglitz (1970). Inmediatamente después, fundamentalmente por obra de Atkinson (1970), Sen (1997) y Shorrocks (1983), se extendió al estudio de la distribución del ingreso y a su relación con los índices de desigualdad de Gini, Theil y Atkinson. Para un tratamiento estadístico de la dominancia estocástica, ver McFadden (1974), Anderson (1996), Davidson; Duclos (2000), Barret; Donald (2003)(2004), Linton;Maasoumi; Wang (2003), Crawford (2005).

En general, la condición necesaria y suficiente para poder asegurar que $\phi_1[g(y)]$ es estocásticamente dominante de orden j respecto a $\phi_2[g(y)]$ es que:

$$I_j[G_2(y)] = \int_{y_1}^{y} \int_{y_1}^{v_1} \dots \int_{y_1}^{v_{j-1}} G_2(u)du\,dv_1 \dots dv_{j-1} \leq I_j[G_1(y)]$$
$$= \int_{y_1}^{y} \int_{y_1}^{v_1} \dots \int_{y_1}^{v_{j-1}} G_1(u)du\,dv_1 \dots dv_{j-1}\ (j = 2,3, \dots)$$

Dado que las clases de funciones de utilidad están anidadas, se puede asegurar, en general, que la dominancia de un orden implica la dominancia de los órdenes sucesivos.

De acuerdo con estos resultados es de esperar que, como se mencionó en la sección. 3.2, todo jugador cuya estrategia de decisión se base en la maximización de la EMOS prefiera una distribución de probabilidades estocásticamente dominada y, viceversa, dado que las preferencias no son lineales en las ponderaciones de decisión $\pi(p)$ y que, en consecuencia, la EMOS no satisface la condición de monotonicidad, se puede concluir que cualquier maximización individual de la EMOS generará necesariamente una preferencia por distribuciones dominadas[20].

Los resultados precedentes permiten concluir, entonces, que en el ámbito de la teoría de la dominancia estocástica, la paradoja de Allais puede ser justificada si se considera que, en general, el jugador, para la evaluación de la preferencia entre L_1 y L_2 utiliza una función de utilidad más adversa al riesgo que la que utiliza para evaluar la preferencia entre L_4 y L_3. Teniendo en cuenta que L_1 y L_2 son, respectivamente, estocásticamente dominantes respecto a L_4 y L_3, se puede concluir que la violación del axioma de independencia se justifica por la tendencia de los individuos a evaluar la preferencia del par de ganancias posibles estocásticamente dominante de acuerdo con una función de utilidad más adversa al riesgo que la utilizada para evaluar la preferencia del par dominado.

---

[20] "*Los jugadores, cuando apuestan, prefieren algunas probabilidades a otras (...) Las preferencias no pueden ser explicadas mediante la hipótesis de la utilidad esperada*" (Edwards (1962, p. 110)). Ver Preston; Baratta (1948), Griffith (1949), Sprowls (1953), Nogee;Lieberman (1960).

4. EL RETORNO AL MODELO DE LA UTILIDAD ESPERADA

4.1. Las preferencias suavizadas

A partir de la evidencia, Friedman-Savage (1948) concluyeron que existe una preferencia generalizada de los jugadores a participar en juegos no–equitativos. A fin de explicar esta tendencia de los individuos, más allá de la asimilación de la utilidad marginal decreciente (creciente) a la preferencia por la certeza (riesgo), propusieron una función de utilidad compatible tanto con la aversión como con la propensión al riesgo, que se caracteriza por ser: i) localmente cóncava (y, por lo tanto, representativa de una actitud local de aversión al riesgo) para resultados de bajo nivel[21]; ii) aproximadamente lineal (y, por lo tanto, representativa de una actitud local de neutralidad frente al riesgo) en el punto de inflexión; y iii) localmente convexa (y, por lo tanto, representativa de una actitud de propensión al riesgo) para resultados de alto nivel. Una función de utilidad sugiere una tendencia del jugador a preferir distribuciones de probabilidades con asimetría positiva e incrementos del riesgo en la "cola" superior de la distribución (ver Markowitz (1952))[22].

Ahora bien, de acuerdo al teorema de Menger (1934) analizado en la parte I y la demostración de Arrow (1974a)(1974b), una función de utilidad no–acotada inevitablemente violará los axiomas de completitud o de continuidad de la teoría de la utilidad esperada, generando un problema de incompatibilidad entre la función de utilidad y el supuesto de comportamiento racional del jugador. Esta aparente incompatibilidad queda resuelta a partir de la definición de una orden de preferencias mediante la utilización de funciones suavizadas.

Sea $\Phi[0, M]$ el conjunto de todas las funciones de distribución de probabilidades $F_n(\cdot)$ en el intervalo [0, M], supóngase que el orden de preferencias de los jugadores sea completo, transitivo y admita una representación mediante un funcional $g(\cdot)$ sobre $\Phi[0, M]$, se demuestra que la condición necesaria y suficiente para que se verifique que $F_n(y) \rightarrow F(y)$ en todo punto de continuidad de $F_n(\cdot)$ y, por lo tanto, para poder asegurar la continuidad de las preferencias es que, para toda

[21] Esta concavidad de la función de utilidad, que implica una actitud de aversión al riesgo, es una consecuencia de la desigualdad de Jensen según la cual, dada una variable aleatoria Y y una función estrictamente cóncava $g(Y)$, se verifica que $E[g(Y)] \leq g[E(y)]$.

[22] Esta preferencia, que prevalece entre los jugadores con aversión al riesgo, es un corolario de la generalización de la definición de probabilidad de Buffon (1777) (ver Hirshleifer (1970), Tsaing (1972)).

función continua $g(\cdot)$ en [0,M], $\int_{[0,M]} g(y)dF_n(y) \to \int_{[0,M]} g(y)dF(y)$. Una condición que permite asegurar que la esperanza moral $\int_{[0,M]} f(y)dF(y)$ es continua para toda función de utilidad $f(y)$ continua en [0,M] y que la condición de diferenciabilidad (es decir, de suavidad) implica que el funcional de preferencias, $g(\cdot)$ es diferenciable en el sentido de Fréchet en el espacio $\Phi[0, M]$ con respecto a la norma $\| \lambda(F^* - F) \| \equiv |\lambda| d(F, F^*)$[23]

Ahora bien, a partir del hecho de que las funciones diferenciables en el sentido de Fréchet son "localmente lineales" y que, para funcionales de preferencias sobre distribuciones de probabilidades, la condición de linealidad es equivalente a la de maximización de la utilidad esperada, se puede concluir que toda función de preferencias diferenciable en el sentido de Fréchet puede ser interpretada como localmente maximizadora de la utilidad esperada. Se demuestra[24] además que, si todas las funciones de utilidad satisfacen la condición de ser localmente cóncavas, entonces las funciones de preferencia pueden ser consideradas representativas de la aversión al riesgo y, de acuerdo con los postulados del teorema de Machina (1982) basado en la extensión de Diamond;Stiglitz (1974) del teorema de Arrow–Prat, se demuestra que la adopción de funciones de preferencias suaves es condición necesaria y suficiente para poder comparar la aversión al riesgo a partir de las utilidades esperadas.

Se puede concluir entonces que, aún si el axioma de independencia, y por lo tanto, la hipótesis de utilidad esperada no pudieran ser considerados empíricamente válidos, sus resultados serían aceptables si se demostrara que la función de preferencias es "suave". Es decir, se demuestra que, si el jugador actúa de acuerdo con una función de preferencias "suave", la teoría de la utilidad esperada resulta robusta respecto de las violaciones del Axioma 4 de von Neumann–Morgenstern. Lo que permite concluir que el comportamiento racional del jugador, contrariamente a los postulados del teorema de Menger, también es consistente con las funciones de utilidad de Friedman–Savage convexas en su parte terminal y no-acotadas.

4.2. El término de Arrow Prat

Una forma alternativa de caracterizar actitudes de aversión al riesgo y, por lo tanto, de representar localmente la forma típica de la función de utilidad es mediante la utilización del *"coeficiente de aversión absoluta*

---

[23] Ver Rudin (1973), Luenberger (1969).
[24] Ver Machina (1982).

a riesgo" o la *"medida de Arrow–Prat"*[25] $AP(y,F) = -\frac{y_{xx}(x,F)}{y_x(x,F)}$ (para toda distribución $F(\cdot) \in \Phi[0,M]$). De modo que, cuanto mayor sea el coeficiente $AP(y,F)$ para un jugador, mayor será su intento de reducir su exposición al riesgo.

La hipótesis referida a la tendencia de los jugadores a preferir pequeños incrementos del riesgo en la "cola" superior de la distribución (en el sentido comentado en la sección precedente) genera las siguientes implicaciones: i) dada una distribución $F(y) \in \Phi[0,M]$ entonces $AP(y,F)$ es una función no–decreciente de $y \in [0,M]$ y ii) dadas las distribuciones $F(y)$ y $F^*(y)$ ambas $\in [0,M]$ y tales que $F^*(y)$ sea estocásticamente dominante respecto de $F(y)$ entonces $AP(y,F^*) \geq AP(y,F)$ (en otros términos, que un ordenamiento parcial de las distribuciones $F(\cdot)$ en $\Phi[0,M]$ a partir de la relación de dominancia estocástica, implica que $AP(y,F)$ es no–decreciente respecto a $F(\cdot)$).

Por otra parte, dado que el comportamiento racional del jugador de acuerdo con la función de utilidad de Friedman–Savage supone un dominio no–acotado de posibles ganancias, es posible definir un funcional de preferencias sobre un intervalo $\Phi[0,\infty)$ de todas las funciones de probabilidades $F(\cdot)$ en el dominio $\Omega = \{y \in R_1; x \geq 0\}$, de la forma $g(F) = E\left(\frac{y}{1+y}\right) - (0,1)e^{-E(e^y)}e^y$ y una función de coeficientes de Arrow–Prat de la forma

$$AP(y,F) = -1 + \frac{3+y}{(1+y)[1+(0,1)(1+y)^2 e^{[y-E(e^y)]}]}$$

Lo que demuestra que, para toda distribución $F(\cdot), AP(y,F) > 0$ para los valores bajos de y, estrictamente decreciente en y y eventualmente negativa a medida que y crece. De modo que se puede concluir que la función de preferencias, $g(\cdot)$ satisface la primera de las dos implicaciones que figuran más arriba y posee funciones de utilidad que localmente coinciden con la función de la Figura 1. Asimismo, comportamientos estocásticamente dominantes en $F(\cdot)$ generarán medidas $AP(y,F)$ no–decrecientes, lo que permite concluir que $g(\cdot)$ también satisface la segunda implicación.

[25] Ver Pratt (1964), Arrow (1965).

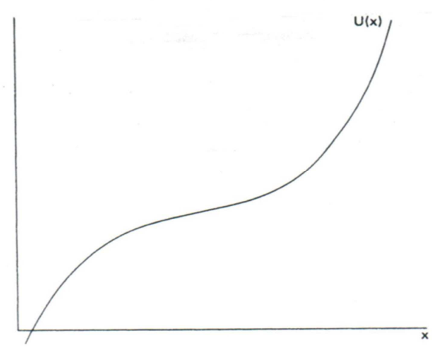

Figura 1

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se han analizado la validez y los alcances de las definiciones de esperanza matemática y de esperanza moral, y las condiciones formales que debe satisfacer la función de utilidad a fin de garantizar la vigencia del criterio de optimización basado en la maximización de la utilidad esperada para definir, en condiciones de incertidumbre, el orden de preferencias entre posibles alternativas económicas.

Un análisis cronológico detallado de las distintas propuestas metodológicas permitió concluir:

1. Que, dada una función de utilidad definida por un polinomio de grado k, la definición del orden de preferencias requiere el conocimiento de sus k primeras derivadas, lo cual implica la consiguiente debilidad de los método que involucran exclusivamente comparaciones de valores esperados y varianzas, como en la definición de la frontera eficiente de Markowitz, para funciones de utilidad de grado $k > 2$.

2. Que la justificación de la violación del axioma de independencia de Von Neumann–Morgenstern planteada por Kahneman–Tversky, basada en ponderaciones de decisión definidas como funciones cóncavas de las probabilidades clásicas que no satisfacen la condición de monotonicidad, no permite aplicar la teoría de la utilidad esperada.

3. Que, dado el supuesto de linealidad de las preferencias en las probabilidades, la axiomática de Handa parece ser más apropiada que la de Von Neumann–Morgenstern para explicar el comportamiento de los jugadores en los casos en que las utilidades esperadas involucran

probabilidades marcadamente diferentes y, en consecuencia, parece lograr una justificación más consistente de los resultados del experimento de Allais, respecto de la violación del Axioma 4 de independencia.

4. Que, contrariamente a los postulados del teorema de Menger y de la demostración de Arrow, según los cuales una función de utilidad no acotada inevitablemente viola los axiomas de completitud o de continuidad de la teoría de la utilidad esperada, la definición de una orden de preferencias mediante funciones suavizadas permite resolver el problema de la incompatibilidad entre la función de utilidad de Friedman–Savage y el supuesto comportamiento racional del jugador.

5. Que, si el jugador actúa de acuerdo con una función de preferencias "suave", la teoría de la utilidad esperada resulta robusta respecto de las violaciones del Axioma 4 de Von Neumann–Morgenstern.

BIBLIOGRAFÍA

Allais, M. (1953a). "Fondements d'une théorie positive des choix comportant un risque". *Econométrie, Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique.* Vol. 45, pp. 257-332.

Allais, M. (1953b). "Le comportement de l'homme rationnel devant le risque, critique des postulats et axiomes de l'école americaine". *Econometrica.* Vol. 21 pp. 503-546.

Allais, M. (1988). "An outline of my main contributions to economic sciences". Nobel Lecture, www.nobelprize.org.

Allais, M.; Hagen, O. (1979). *Expected utility hypotheses and the Allais paradox*. Reidel, Dordretch.

Anderson, G. (1996). "Nonparametric tests of stochastic dominance in income distributions", *Econometrica*. Vol. 64 pp. 1183-1193.

Anderson, N.H.; Shanteau, J.C. (1970). "Information, integration and risky decision making". *Journal of Experimental Psychology.* Vol. 84, pp. 441-451.

Arrow, K.J. (1965). "*Aspects of the theory of risk bearing*". Saatio, Helsinki.

Arrow, K.J. (1974a). "*Essays in the theory of risk bearing*". North-Holland.

Arrow, K.J. (1974b). "The use of unbounded utility functions in expected-utility maximization: Response". *Quarterly Journal of Economics.* Vol. 88, pp. 136-138.

Arrow, K.J.; Karlin, S.; Suppes, P. (1960). *Mathematical methods in social sciences.* Stanford University Press, California.

Atkinson, A.B. (1970). "On the measurement of inequality", *Journal of Economic Theory.* Vol. 2, pp. 244-263.

Barret, G.; Donald, S. (2003). "Consistent tests for stochastic dominance", *Econometrica.* Vol. 73, pp. 71-104.

Barret, G.; Donald, S. (2004). "Consistent nonparametric tests for Lorenz dominance", *Econometric Society Australasian Meeting.*

Borel, E. (1939). *Valeur pratique et philosophie des probabilités.* Gauthier-Villars, Paris.

Borel, E. (1949a). "Le paradoxe de Saint Pétersbourg". *Comptes Rendus des Scéances de l'Académie des Sceinces.* Vol. 229, pp. 404-405.

Borel, E. (1949b). "Sur une propriété singulière de la limite d'une espérance mathématique". *Comptes Rendus des Scéances de l'Académie des Sicences.* Vol. 229, pp. 429-431.

Borel, E. (1949c). "Sur une martingale mineure". *Comptes Rendus des Scéances de l'Académie des Sceinces.* Vol. 229 pp. 1181-1183.

Borel, E. (1950). *Probabilité et certitude.* PUF, Paris.

Buffon, G.L. (1777). "Essai d'arithmétique morale". *Histoire naturelle générale et particuliére, servant de suite à l'stoire naturelle de l'homme.* Imprenta Real, Huelva.

Crawford, I. (2005). "A nonparametric test for stochastic dominance in multivariate distributions", *Discussion Papers in Economics.* Vol. 1205, University of Surrey.

Davidson, R.; Duclos, J.-I. (2000). "Statistical inference for stochastic dominance and for the measurement of poverty and inequality", *Econometrica.* Vol. 68, pp. 1435-1464.

Debreu, G. (1960). "Topological methods in cardinal utility theory". En *Mathematical methods in social sciences.* Stanford University Press, California.

Diamond, P.; Stiglitz, J.E. (1974). "Increases in risk and in risk aversion". *Journal of Economic Theory.* Vol. 8, pp. 337 360.

Edwards, W. (1953). “Experiments on economic decision-making in gambling situations”, *Econometrica.* Vol. 21, pp. 349 350.

Edwards, W. (1954a). “The reliability of probability preferences”. *American Journal of Psychology*. Vol. 67, pp. 68-95.

Edwards, W. (1955). “The prediction of decisions among bets*”. Journal of Experimental Psychology*. Vol. 50, pp. 201-214.

Edwards, W. (1961). “Behavioral decision theory”. En Fransworth, P.; McNeman, O.; McNeman, Q. (eds.)(1961). *Annual Review of Psychology*. Palo Alto, California.

Edwards, W. (1962). “Subjective probabilities inferred from decisions”. *Psychological Review*. Vol. 69, pp. 109-135.

Farnsworth, P.; McNemar, O.; McNemar, Q. (eds.)(1961). *Annual Review of Psychology*. Palo Alto, California.

Fellner, W. (1965). *Probability and profit: A study of economic behavior along Bayesian lines*. Irwin, Ontario.

Fishburn, P. (1978). “On Handas’s ‘New theory of cardinal utility and the maximization of expected return’”. *Journal of Political Economy*. Vol. 86, pp. 321-324.

Fomby, J.; Seo, A. (eds.)(1974). *Essays in the economics of uncertainty. In honour of Joseph Hadar*. Springer, New York.

Frank, Ph.; Schlick, M. (eds.)(1928). *Schriften zur wissenschaftlichen Weltauffassung*. Springer, New York.

Friedman, M.; Savage, L.J. (1948): “The utility analysis of choices involving risk”. *Journal of Political Economy*. Vol. 56 pp. 279-304.

Griffith, R.M. (1949). “Odds adjustment by american horserace bettors”. *American Journal of Psychology*. Vol. 62, pp. 290 - 294.

Hadar, J.; Russell, W.R. (1969). “Rules for ordering uncertain prospects”, *American Economic Review*. Vol. 59, pp. 23-34.

Hagen, O. (1979). “Towards a positive theory of preferences under risk”. En Allais, M.; Hagen, O. (eds.)(1979). *Expected utility hypotheses and the Allais paradox*. Reidel, Dordretch.

Hahn, F.H.; Brechling, F.P.R. (eds.)(1965). *The theory of interest rates*. Oxford University Press, California.

Handa, J. (1977). “Risk, probabilities, and a new theory of cardinal utility”. *Journal of Political Economy*. Vol. 85, pp. 97-122.

Hanoch, G.; Levy, H. (1969). "The efficiency analysis of choices involving risk", *Review of Economic Studies*. Vol. 36, pp. 335-346.

Heidelberger, M. (1990). "Fechner's indeterminism: From freedom to laws of chance". En Krüger, Daston, Heidelberger (eds.) *The probabilistic revolution*. MIT Press, Massachusetts.

Hirshleifer, J. (1970). *Investment, interest and capital*. Prentice-Hall, New Jersey.

Kahneman, D.; Tversky, A. (1979). "Prospect theory: Ananlysis of decision under risk". *Econometrica*. Vol. 47, pp. 263-291.

Keynes, J.M. (1921): *A treatise on probability*. MacMillan, London.

Kolmogorov, A.N. (1933). *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Springer, New York.

Krantz, D.H.; Luce, D.R.; Suppes, P.; Tversky, A. (1971). *Foundations of measurement*. Academic Press, Cambridge.

Krüger, L.; Daston, L.; Heidelberger, M. (eds.) (1990). *The probabilistic revolution*. MIT Press, Massachusetts.

Landro, A.H.; González, M.L. (2014). "Acerca de la interpretación económica de los conceptos de esperanza matemática y esperanza moral y sus contraejemplos. Parte I: Las soluciones clásicas". Presentado para su publicación al IADCOM.

Linton, O.; Maasoumi, E.; Wang, Y.-J. (2003). "Testing for stochastic dominance under general sampling schemes", LSE STICERD, Research Paper nº EM/2003/466.

Luce, R-; Bush, R.; Galanter, E (eds.)(1965). *Handbook of mathematical psychology*. Wiley, New Jersey.

Luce, R-; Raiffa, H. (1957). "*Games and decisions*". Wiley, New Jersey.

Luce, R-; Suppes, P. (1965). "Preference, utility and subjective probability". En Luce, R-; Bush, R.; Galanter, E (eds.)(1965). *Handbook of mathematical psychology*. Wiley, New Jersey.

Luenberger, D.G. (1969). *Optimization by vector space methods*. Wiley, New Jersey.

MacCrimmon, K.R.; Larsson, S. (1979). "Utility theory: Axioms versus paradoxes". En Allais, M.; Hagen, O. (eds.)(1979). *Expected utility hypotheses and the Allais paradox*. Reidel, Dordretch.

Machina, M.J. (1982). "Expected utility analysis wthout the independence axiom". *Econometrica*. Vol. 50, pp. 277-323.

Malinvaud, E. (1952). “Note on von Neuman-Morgenstern’s strong independence axiom”. *Econometrica*. Vol. 20, pp. 679.

Manne, A.S. (1952). “The story independence assumption-gasoline blends and probability mixtures”, *Econometrica.* Vol. 20, pp. 665- 669.

Markowitz, H. (1952). “The utility of wealth”. *Journal of Political Economy*. Vol. 60, pp. 151-158.

Markowitz, H. (1959). *Portfolio selection*. Wiley, New Jersey.

Marschak, J. (1950). “Rational behavior. Uncertain prospects and measurable utility”. *Econometrica*. Vol. 18, pp. 604-615.

McFadden, D. (1974). “Testing for stochastic dominance”. En Fomby; Seo. *Essays in the economics of uncertainty. In honour of Joseph Hadar*. Springer, New York.

Menger, K. (1934): “Das Unsicherheitsmoment in der Ertlehre”. Zeitschrift fur Nationalökonomie, vol. 4 pp. 459-485. Traducción al inglés en Shubik, M. (ed.)(1967). *Essays in mathematical economics in honor of Oskar Morgenstern*. Princeton University Press, Princeton.

Morrison, D.G. (1967): “On the consistency of preferences in Allais paradox”. *Behavioral Science*. Vol. 12, pp. 373-383.

Nogee, P.; Lieberman, B. (1960): “The auction value of certain risky situation”. *Journal of Psychology*. Vol. 49, pp. 167-179.

Pratt, J.W. (1964): “Risk aversion in the small and the large”. *Econometrica*. Vol. 32, pp.122-136.

Preston, M.G.; Baratta, P. (1948). “An experimental study of the auction-value of an uncertain outcome”. *American Journal of Psychology*. Vol. 61, pp. 183-193.

Quirk, J.P.; Saposnik, R. (1962). “Admissibility and measurable utility function”. *Review of Economic Studies*. Vol. 29, pp. 140-146.

Raiffa, H. (1968). “*Decision analysis: Introductory lectures on choice under uncertainty*”. Addison-Wesley, Boston.

Reichenbach, H. (1935). “*Wahrscheinlichkeitslehre*”. Sithoff. Traducción al inglés, University of California Press, 1935.

Reichenbach, H. (1937). “Les fondaments logiques du calcul de probabilités”. *Annales de l’Institut Henri Poincaré.* Vol. 7, pp. 314-320.

Richter, M.K. (1960). “Cardinal utility, portfolio selection and taxation”. *Review of Economic Studies*. Vol. 27, pp. 152-166.

Rothschild, M.; Stiglitz, J.E. (1970): “Increasing risk: I.- A definition”. *Journal of Economic Theory*. Vol. 2, pp. 225-243.

Rudin, W. (1973). “*Functional analysis*”. McGraw-Hill, Pennsylvania.

Samuelson, P.A. (1952). “Utility, preference and probability”. *Collected scientific papers of Paul A. Samuelson*. MIT Press, Massachusetts.

Savage, L.J. (1972). *The foundations of statistics*. Dover, New York.

Sen, A. (1997). *On economic inequality*. Oxford University Press, California.

Shorrocks, A. (1983). “Ranking income distributions”, *Economica*. Vol. 50, pp. 1-17.

Shubik, M. (ed.)(1967). *Essays in mathematical economics in honor of Oskar Morgenstern*. Princeton University Press, Princeton.

Sprowls, R.C. (1953). “Psychological-mathematical probability in relationships of lottery gambles”. *American Journal of Psychology*. Vol. 66, pp. 126-130.

Stigler, G.; Boulding, K. (eds.)(1952). *Readings in price theory*. Irwin, Ontario.

Stiglitz, J.E. (Ed.)(1966). *Collected scientific papers of Paul A. Samuelson*. MIT Press, Massachusetts.

Tobin, J. (1958). “Liquidity preference as behavior toward risk”. *Review of Economic Studies*. Vol. 25, pp. 65-86.

Tobin, J. (1965). “The theory of portfolio selection”. En Hahn, F.H.; Brechling, E.P.R. (eds.)(1965). *The theory of interest rates*. Oxford University Press, California.

Tsaing, S.C. (1972). “The rationale of the mean-standard deviation analysis, skewness preference and demand of money”, *American Economic Review*. Vol. 62, pp. 354-371.

Tversky, A. (1975). “A critique of expected utility theory: Descriptive and normative considerations”, Erkennis. Vol. 9, pp. 163-173.

Van Dam, C. (1975). “Another look at inconsistency in financial decision-making”. *Seminar on Recent Research in Finance and Monetary Economics*.

Von Mises, R.E. (1919a). “Fundamentalsatze der Wahrscheinlichkeitsrechnung”. Mathematischen Zeitschrift. Vol. 4, pp. 43-65.

Von Mises, R.E. (1919b). "Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung". Mathematischen Zeitschrift. Vol. 5, pp. 52-99.

Von Mises, R.E. (1919c). "Über die Grundbegriffe der Kollektivmasslehre". Jahresberichte der Deutschen Mathematiker, Vol. 21, pp. 9-20.

Von Mises, R.E. (1921). "Über die gegenwärtige Krise der Mechanik". Zeitschrift fürt angewandte Mathematik und Mechanik, Vol. 1, pp. 425-431.

Von Mises, R.E. (1928). "Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit". En Frank, Ph.; Schlick, M. (eds.)(1928). *Schriften zur wissenschaftlichen Weltauffassung*. Springer, New York.

Von Neumann, J.; Morgenstern, O. (1953). *Theory of games and economic behavior*. Wiley, New Jersey.