Cuadernos del CIMBAGE Nº 9 (2007) 27-36

MODELOS BORROSOS DE OPTIMIZACIÓN PARA LA SELECCIÓN DE CARTERAS BASADOS EN INTERVALOS DE MEDIAS[1]

José D. Bermúdez*, José Vicente Segura***, Enriqueta Vercher**
*,**Departament d'Estadística i Investigació Operativa - Universitat de València
Avgda. Vicent Andrés Estellés s/n - 46100 - Burjassot - España
***Centro de Investigación Operativa - Universidad Miguel Hernández de Elche
Avda. Ferrocarril s/n - 03202 Elche - España
*bermudez@uv.es, ***jvsh@umh.es, **vercher@uv.es

Recibido 1 de febrero de 2007, aceptado 23 de abril de 2007

Resumen

Se presentan dos modelos borrosos de selección de carteras basados en la utilización de intervalos de medias para el cálculo del rendimiento y del riesgo de la cartera. Los rendimientos de los activos financieros se aproximan mediante números borrosos de tipo LR con funciones de referencia de la misma forma y se analiza la relación entre dos definiciones diferentes de intervalos de medias. Para números borrosos trapezoidales se realiza la comparación de los modelos propuestos, que permiten seleccionar una cartera mediante la resolución de un problema de optimización lineal.

Palabras clave: números borrosos, intervalos esperados, función de riesgo lateral, programación lineal.

---

[1] Presentado en XII Congreso Internacional de la Sociedad de Gestión y Economía Fuzzy (SIGEF). 26-28 de Octubre 2005, Bahía Blanca, Argentina.

OPTIMIZATION FUZZY MODELS FOR THE SELECTION OF PORTFOLIOS BASED ON MEDIA INTERVALS

José D. Bermúdez*, José Vicente Segura***, Enriqueta Vercher**
*,**Departament d'Estadística i Investigació Operativa - Universitat de València
Avgda. Vicent Andrés Estellés s/n - 46100 - Burjassot - España
***Centro de Investigación Operativa - Universidad Miguel Hernández de Elche
Avda. Ferrocarril s/n - 03202 Elche - España
*bermudez@uv.es, ***jvsh@umh.es, **vercher@uv.es

Received February 1st 2007, accepted April 23rd 2007

Abstract

Two portfolio fuzzy models of selection based on the use of media intervals are presented in order to calculate the profit and the portfolio's risk. The profits of the financial assets are approximated by fuzzy numbers of type LR with reference functions of the same form and the relation between two different definitions of media intervals is analyzed. For trapezoidal fuzzy numbers the comparison between the two models proposed is realized, which allows the selection of a portfolio by using the resolution of a lineal optimisation problem.

Keywords: Fuzzy numbers, Expected intervals, Lateral risk function, Lineal programation.

---

1. INTRODUCCIÓN

La teoría de conjuntos borrosos ha sido ampliamente utilizada para resolver problemas de gestión financiera, dado que permite describir y tratar con éxito los elementos inciertos e imprecisos presentes en un problema de decisión. De este modo, el conocimiento imperfecto de los rendimientos de los activos y la incertidumbre subyacente en la conducta de los mercados financieros pueden ser introducidos mediante cantidades borrosas y/o restricciones borrosas. El problema de selección de carteras trata de determinar una cartera satisfactoria atendiendo al deseo del inversor teniendo en cuenta el beneficio que se quiere asegurar como el riesgo que se está dispuesto a asumir para conseguirlo. Se supone que el inversor desea encontrar las proporciones óptimas del capital que ha de invertir en cada activo buscando un equilibrio entre la maximización del rendimiento y la minimización del riesgo de su inversión.

Algunos autores utilizan las distribuciones de posibilidad para modelizar la incertidumbre del rendimiento (Tanaka y Guo, 1999; Carlsson *et al.*, 2002), en tanto que otros autores estudian el problema utilizando una formulación borrosa (Watada, 1997; Ortí *et al.*, 2002; Leon *et al.*, 2002). En este caso la incertidumbre sobre el rendimiento de los activos se modeliza mediante números borrosos y se utilizan diferentes definiciones de la esperanza de estos números para evaluar el rendimiento y el riesgo esperados para una cartera dada.

2. INTERVALO ESPERADO DE UNA CARTERA BORROSA

Si denotamos por $\tilde{R}_j = \left(a_{lj}, a_{uj}, c_j, d_j\right)_{LR}$ el número borroso LR que aproxima el rendimiento de cada uno de los activos, asumiendo que todas las funciones de referencia tienen la misma forma, siendo L=R para j =1,..., n, la siguiente combinación lineal expresa el rendimiento borroso de la cartera $P(x) = \{x_1, ..., x_n\}$:

$$\widetilde{P} = \sum_{j=1}^{n} \widetilde{R}_j x_j = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{lj} x_j, \sum_{j=1}^{n} a_{uj} x_j, \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \sum_{j=1}^{n} d_j x_j \right)_{LR} = (P_l(x), P_u(x), C(x), D(x))_{LR}$$

donde $x_j \in \Re^+$ representa la proporción del activo j en la composición de la cartera.

Dubois y Prade (1987) introducen el concepto de intervalo esperado de un número borroso utilizando los α-cortes de la función de pertenencia, mientras que Carlsson y Fullér (2001) dan otra definición para distribuciones de posibilidad también basada en dichos α-cortes.

En este trabajo se utilizarán estas dos definiciones de media de un número borroso para aproximar los rendimientos y riesgos de una cartera de valores.

Se supone que $\widetilde{R}_j$ es un número borroso trapezoidal que representa el rendimiento del activo *j* en la cartera *P(x).* Se denota por $E(\widetilde{P})$ el rendimiento medio de la cartera según Dubois y Prade (1987) y por $M(\widetilde{P})$ aquel rendimiento que se obtiene con la definición de Carlsson y Fullér (2001). Se comprueba que:

$$E(\widetilde{P})=\left[\sum_{j=1}^{n}a_{lj}x_j-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}c_jx_j,\sum_{j=1}^{n}a_{uj}x_j+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}d_jx_j\right]=\left[P_l(x)-\frac{1}{2}C(x),P_u(x)+\frac{1}{2}D(x)\right], \text{ y}$$

$$M(\widetilde{P})=\left[\sum_{j=1}^{n}a_{lj}x_j-\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{n}c_jx_j,\sum_{j=1}^{n}a_{uj}x_j+\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{n}d_jx_j\right]=\left[P_l(x)-\frac{1}{3}C(x),P_u(x)+\frac{1}{3}D(x)\right]$$

Con respecto a las relaciones entre las anteriores definiciones de rendimiento esperado se verá que para una cartera dada *P(x)* estos valores pueden ser considerados medidas más o menos optimistas del rendimiento medio en función de la magnitud de las amplitudes derecha e izquierda del número LR que representa la cartera borrosa.

Proposición 1. *Sea* $\widetilde{P}=\left(P_l(x),P_u(x),C(x),D(x)\right)_{LR}$ *el rendimiento borroso de una cartera* $P(x)$*, siendo* $\widetilde{R}_j$ *un número trapezoidal para todo j. Entonces:*

a) si $C(x)\geq D(x)$*, se tiene que* $E(\widetilde{P})\leq_{mw} M(\widetilde{P})$ *,*

b) en otro caso, $M(\widetilde{P})\prec E(\widetilde{P})$ *con un grado de aceptabilidad menor o igual que 1/5.*

La definición de la relación de orden $\leq_{mw}$ para intervalos aparece en Ishibuchi y Tanaka (1990) y la relación $\prec$ ha sido introducida por Sengupta y Pal (2000) para los casos en que la anterior no puede ser aplicada. Véase con un ejemplo que ha sido introducido por Carlsson *et al.* (2002).

Ejemplo. Se consideran los siguientes rendimientos para tres activos, que se aproximan mediante los siguientes números borrosos trapezoidales: $\widetilde{R}_1=\left(-10.5, 70, 4, 100\right)$, $\widetilde{R}_2=\left(-8.1, 35, 4.4, 54\right)$ y

$\widetilde{R}_3 = (-5, 28, 11, 85)$. Se han determinado cuatro carteras, $P_i(x)$, i=1,...,4, siendo $P_1(x)$ la que alcanza el máximo valor de la función de utilidad definida en Carlsson *et al.* (2002). En la Tabla 1 se incluye la composición de las cuatro carteras y los intervalos de medias calculados para cada una de las definiciones consideradas anteriormente. Se denota por $m(E)$ y por $m(M)$el punto medio de los intervalos de la media de las carteras construidos mediante las expresiones $E(\widetilde{P})$ y $M(\widetilde{P})$, respectivamente.

	$P_1(x)$	$P_2(x)$	$P_3(x)$	$P_4(x)$
x_1 x_2 x_3	0.124 0.373 0.503	0.163 0.837 0	0.103 0 0.897	0 0 1
$m(E)$ $E(P_i)$	31.4 $[-10.67,73.47]$	30.4 $[-10.66,71.45]$	32.44 $[-10.71,75.60]$	30.00 $[-10.50,70.50]$
$m(M)$ $M(P_i)$	25.76 $[-9.40,60.92]$	25.63 $[-9.94,61.20]$	26.09 $[-8.99,61.17]$	23.83 $[-8.67,56.33]$

Tabla 1. Descripción de las carteras factibles borrosas y de sus rendimientos borrosos

Puede comprobarse que la relación de orden $\leq_{mw}$ no puede ser aplicada para comparar los intervalos $E(P_i)$, aunque se verifica la siguiente ordenación: $E(\widetilde{P}_4) \prec E(\widetilde{P}_2) \prec E(\widetilde{P}_1) \prec E(\widetilde{P}_3)$. Por otra parte, se comprueba que $M(\widetilde{P}_1) \leq_{LR} M(\widetilde{P}_3)$, $M(\widetilde{P}_2) \leq_{mw} M(\widetilde{P}_1)$, $M(\widetilde{P}_2) \leq_{mw} M(\widetilde{P}_3)$ y $M(\widetilde{P}_4) \prec M(\widetilde{P}_3)$. Luego, para ambas definiciones, la solución que maximiza el rendimiento medio es la cartera $P_3(x)$, que no es la cartera con la máxima utilidad según Carlsson *et al.* (2002).

3. MODELOS DE RIESGO LATERAL BORROSO

El problema principal de modelizar el riesgo utilizando la varianza asociada al rendimiento medio de una cartera dada es que no hace distinción entre ganancias y pérdidas. Es decir, no diferencia rendimientos por encima o por debajo del rendimiento medio. Se han propuesto otras medidas del riesgo de una cartera que involucran el uso de la semi-varianza o de diferentes momentos de orden parcial. Aquí se ha introducido (León *et al.*, 2004) una medida borrosa de la semi-desviación media absoluta para activos con rendimientos trapezoidales, cuando se utilizan los intervalos de medias de Dubois y Prade (1987). Si se extiende esta misma medida para la otra definición de intervalo de medias se llega al siguiente resultado, según se utilice cada una de las definiciones de intervalo medio:

$$w(\widetilde{P}) = E\left(\max\left\{0, E(\widetilde{P}) - \widetilde{P}\right\}\right) = \left[0, P_u(x) - P_l(x) + \frac{C(x)+D(x)}{2}\right], \text{ y}$$

$$\overline{w}(\widetilde{P}) = M\left(\max\{0, M(\widetilde{P}) - \widetilde{P}\}\right) = \left[0, P_u(x) - P_l(x) + \frac{C(x)+D(x)}{3}\right], \text{ respectivamente.}$$

Nótese que la amplitud de estos dos intervalos es directamente proporcional a la amplitud del núcleo y de la dispersión del rendimiento de la cartera borrosa. Además, esta amplitud coincide con la amplitud de los respectivos intervalos medios, $E(\widetilde{P})$ y $M(\widetilde{P})$, lo que refuerza la idea de que esta representación recoge toda la imprecisión que subyace en el problema.

Los modelos borrosos que se proponen para seleccionar la cartera óptima tienen como objetivo minimizar el riesgo borroso en tanto que se garantiza un nivel de rendimiento esperado, sujeto a condiciones de no negatividad y de diversificación dadas por el inversor. En cuanto al procedimiento para determinar una representación escalar de los intervalos que modelizan el rendimiento y el riesgo medios, se ha seguido la propuesta dada en Leon *et al.* (2004): minimizar el límite superior del intervalo que modeliza el riesgo y elegir el punto medio del intervalo esperado como su representante rígido en la restricción del valor esperado. En consecuencia, se ha de resolver el problema lineal siguiente para la esperanza definida en Carlsson y Fullér (2001):

$$\begin{aligned}
(P_2)\ \text{Min} \quad & \sum_{j=1}^{n}\left(a_{uj} - a_{lj} + \frac{1}{3}(c_j + d_j)\right)x_j \\
\text{s.a.} \quad & \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2}(a_{uj} + a_{lj}) + \frac{1}{6}(d_j - c_j)\right)x_j \geq \rho \\
& \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \\
& l_j \leq x_j \leq u_j, \quad j = 1,\ldots,n
\end{aligned}$$

donde ρ es el mínimo rendimiento esperado requerido por el inversor o un problema lineal similar que sería el correspondiente a la esperanza de intervalos definida según Dubois y Prade (1987).

Con los datos del rendimiento de los activos del ejemplo anterior, se calculan las soluciones de los problemas de optimización anteriores para determinar la composición de las carteras asociadas a diferentes conjuntos de especificaciones de diversificación y rendimiento esperado.

Las Tablas 2-5 muestran los diferentes resultados obtenidos al resolver, bajo las mismas condiciones de diversificación y rendimiento esperado, los problemas de optimización lineal (P_1) o (P_2). En las tablas aparecen destacados en negrita el rendimiento medio y el riesgo lateral de cada solución. Cada columna representa una propuesta de composición de cartera, que puede ser coincidente para diferentes condiciones de diversificación.

rho cota sup	30 0.4	30 0.5	30 0.6	30 0.8	30 1
x_1	0.2	0.07	0.06	0.03	0
x_2	0.4	0.43	0.34	0.17	0
x_3	0.4	0.50	0.60	0.80	1
$m(E)$	33.09	30	30	30	30
$P_1(x^*)$	87.82	81.13	81.102	81.05	81
$m(M)$	27.37	24.56	24.417	24.125	23.83
$P_2(x^*)$	74.06	67.70	67.156	66.078	65

Tabla 2. Composición de carteras óptimas mediante la resolución de (P_1) para ρ=30 y diferentes cotas superiores, u_j

Hay que señalar que también se incluyen en las tablas citadas los valores que para dichas carteras borrosas devuelven las otras medidas de rendimiento y riesgo asociadas a la solución óptima, para comparar el comportamiento de todas las soluciones obtenidas.

Por otra parte, interesa destacar el hecho de que las carteras obtenidas resolviendo el problema (P_2) son más arriesgadas que las proporcionadas por la solución del problema (P_1) bajo las mismas condiciones, i.e. para alcanzar el rendimiento esperado se asume un mayor riesgo, según se aprecia en las Tablas 2 y 3.

ρ cota sup.	30 0,4	30 0,5	30 0,6	30 0,8	30 1
x_1	0,31	0,30	0,29	0,28	0,28
x_2	0,29	0,20	0,11	0,00	0,00
x_3	0,40	0,50	0,60	0,72	0,72
$m(E)$	36,14	36,31	36,48	36,68	36,68
$P_1\left(x^*\right)$	94,41	94,75	95,09	95,49	95,49
$m(M)$	30	30	30	30	30
$P_2\left(x^*\right)$	79,82	79,60	79,38	79,12	79,12

Tabla 3. Composición de carteras óptimas mediante la resolución de (P_2) para ρ=30 y diferentes cotas superiores, u_j

ρ	35	35	35	35	35
cota sup.	0,4	0,5	0,6	0,8	1
x_1	0,27	0,25	0,24	0,21	0,21
x_2	0,33	0,25	0,16	0,00	0,00
x_3	0,40	0,50	0,60	0,79	0,79
$m(E)$	35	35	35	35	35
$P_1\left(x^*\right)$	91,94	91,92	91,89	91,84	91,84
$m(M)$	29,01	28,87	28,72	28,44	28,44
$P_2\left(x^*\right)$	77,66	77,12	76,53	75,56	75,56

Tabla 4. Composición de carteras óptimas mediante la resolución de (P_1) para ρ=35 y diferentes cotas superiores, u_j

Además, se ha comprobado que el modelo asociado al problema (P_2) genera, con más facilidad, instancias infactibles del problema de selección. De este modo, no se tendría ninguna propuesta para el inversor, tal como se aprecia en la Tabla 5, cuando se introduce un mayor grado de exigencia por parte del inversor, para ρ = 35.

ρ	35	35	35	35	35
cota sup.	0,4	0,5	0,6	0,8	1
x_1	Instancia infactible	Instancia infactible	0,51	0,51	0,51
x_2			0,00	0,00	0,00
x_3			0,49	0,49	0,49
$m(E)$			42,10	42,10	42,10
$P_1\left(x^*\right)$			107,23	107,23	107,23
$m(M)$			35	35	35
$P_2\left(x^*\right)$			90,56	90,56	90,56

Tabla 5. Composición de carteras óptimas mediante la resolución de (P_2) para ρ = 35 y diferentes cotas superiores, u_j

4. CONCLUSIONES

La metodología borrosa permite incorporar la incertidumbre en los datos y establecer diferentes estimaciones del rendimiento y riesgo esperados. Si se aproxima la incertidumbre de los rendimientos mediante números borrosos trapezoidales, se puede evaluar la semi-desviación media absoluta con diferentes definiciones de intervalos de medias. Los problemas de optimización borrosa que aparecen pueden ser, aproximadamente, resueltos utilizando la programación lineal.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por las ayudas GV04B-090 y GRUPOS05/078 de la Generalitat Valenciana y TIN2005-08404-C04-04 del Ministerio de Educación y Ciencia de España.

BIBLIOGRAFÍA

Carlsson, C.; Fullér, R. (2001). “On possibilistic mean value and variance of fuzzy numbers”. *Fuzzy Sets and Systems* Vol. 122, pp. 315-326.

Carlsson, C.; Fullér, R.; Majlender, P. (2002). “A possibilistic approach to selecting portfolios with highest utility score”. *Fuzzy Sets and Systems* Vol. 131, pp. 13-21.

Dubois, D.; Prade, H. (1987). “The mean value of a fuzzy number”. *Fuzzy Sets and Systems* Vol. 24, pp. 279-300.

Ishibuchi, H.; Tanaka, H. (1990). "Multiobjective programming in optimization of the interval objective function". *European Journal of Operational Research* Vol. 48, pp. 219-225.

León, T.; Liern, V.; Marco, P.; Segura, J.V.; Vercher, E. (2004). "A downside risk approach for the portfolio selection problem with fuzzy returns". *Fuzzy Economic Review* Vol. 9, pp. 61-77.

León, T.; Liern, V.; Vercher, E. (2002). "Viability of infeasible portfolio selection problems: A fuzzy approach". *European Journal of Operational Research* Vol. 139, pp. 178.189.

Ortí, F.J.; Sáez, J.; Terceño, A. (2002). "On the treatment of uncertainty in portfolio selection". *Fuzzy Economic Review* Vol. 7, pp. 59-80.

Sengupta, A.; Pal, T.K. (2000). "On comparing interval numbers". *European Journal of Operational Research* Vol. 127, pp. 28-43.

Tanaka, T.; Guo, P. (1999). "Possibilistic data analysis and its application to portfolio selection problems". *Fuzzy Economic Review* Vol. 2, pp. 2-23

Watada, J. (1997). "Fuzzy portfolio selection and its applications to decision making". *Tatra Mountains Math. Publ.* Vol. 13, pp. 219-248.