ARS 2018 The 4th Annual Research Seminar
Prosiding Annual Research Seminar 2018
Computer Science and ICT
ISBN : 978-979-587-813-1
Vol.4 No.1

Implementasi *Invers* Matriks Tergeneralisasi pada Sistem Persamaan Linier

Evi Yuliza
Jurusan Matematika
Universitas Sriwijaya
Palembang, Indonesia
evibc3@yahoo.com

Ali Amran
Jurusan Matematika
Universitas Sriwijaya
Palembang, Indonesia
aliamran42@yahoo.com

Triyani
Jurusan Matematika
Universitas Sriwijaya
Palembang, Indonesia
triyani700@gmail.com

Abstrak — **Invers matriks tergeneralisasi digunakan untuk menggeneralisasi invers suatu matriks $A_{m\times n}$ atau matriks singular. Penelitian ini bertujuan untuk memperoleh penyelesaian sistem persamaan linier dengan menggunakan invers matriks tergeneralisasi dan menerapkan invers matriks tergeneralisasi pada program linier. Misalkan matriks $A_{m\times n}$ atau matriks singular maka terdapat matriks X yang memenuhi $AXA = A$. Matriks X dinamakan invers matriks tergeneralisasi dari matriks A yang dinotasikan dengan A^g dan matriks X tidak tunggal. Dari pembahasan diperoleh suatu sistem persamaan linier konsisten apabila memenuhi $AXb = b$ dengan penyelesaian umum $x = A^g b + (I - A^g A)y$ dengan y vektor sebarang. Suatu sistem persamaan linier $Ax = b$ mempunyai penyelesaian tunggal jika dan hanya jika rank(A) = n. Jika rank(A) < n, maka sistem persamaan linier $Ax = b$ mempunyai banyak penyelesaian. Penerapan invers matriks tergeneralisasi dapat digunakan pada program linier sebagai teknik alternatif pemecahan model program linier.**

Kata Kunci :— ***invers matriks tergeneralisasi, rank, sistem persamaan linier, program linier***

I. INTRODUCTION

Matematika merupakan ilmu dasar yang mempunyai peranan penting dalam kehidupan manusia. Di dalam perkembangan ilmu pengetahuan dan matematika terdapat permasalahan yang dinotasikan dalam bentuk matriks, dengan tujuan untuk lebih memudahkan analisis dan penyelesaian masalah yang dihadapi. Dengan menggunakan matriks memudahkan untuk membuat analisa-analisa yang mencakup variabel-variabel dari suatu persoalan. Salah satunya terdapat pada sistem persamaan linier.

Suatu sistem persamaan linier terdiri atas dua atau lebih persamaan linier. Persamaan linier merupakan persamaan aljabar yang tiap sukunya mengandung konstanta atau perkalian konstanta dengan variabel tunggal. Persamaan linier tidak mengandung hasil kali atau akar dari variabel.

Suatu sistem persamaan linier dapat dinyatakan sebagai bentuk perkalian matriks $Ax = b$ dengan matriks A adalah matriks koefisien dari susunan persamaan linier, sedangkan x dan b adalah vektor kolom variabel dan konstanta [1]. Penyelesaian dari sistem persaman linier tersebut adalah $x = A^{-1}b$. Suatu matriks $A_{n\times n}$ dikatakan mempunyai invers apabila matriks tersebut nonsingular atau determinan dari matriks tersebut tidak nol, sedangkan matriks $A_{m\times n}$ dengan $m \neq n$ atau singular tidak mempunyai invers. Metode yang digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linier apabila matriks $A_{n\times n}$ adalah dengan eliminasi dan subtitusi. Sistem persamaan linier dapat terdiri dari m persamaan dan n variabel atau dapat terdiri dari n persamaan dan n variabel. Jika jumlah variabel dan jumlah persamaan dari sistem persamaan linier tersebut lebih dari tiga, maka metode yang biasa digunakan adalah eliminasi Gauss, eliminasi Gauss-Jordan, aturan Cramer atau menggunakan invers matriks koefisien.

Adetunde et al [2] membahas penerapan invers matriks tergeneralisasi untuk mengestimasi kuadrat terkecil dari model linier. Indrayani [3] menganalisis eliminasi Gauss, dekomposisi Crout dan metode matriks invers dalam menyelesaikan sistem persamaan linier. Penelitian ini bertujuan untuk membandingkan efektifitas dari metode yang digunakan dalam menyelesaikan sistem persamaan linier dengan n persamaan dan n variabel. Berdasarkan hasil penelitian diperoleh metode eliminasi Gauss lebih efektif di bandingkan dekomposisi Crout dan metode matriks invers.

Konsep invers matriks tergeneralisasi digunakan untuk menggeneralisasi definisi invers matriks. Invers dari suatu matriks $A_{m\times n}$ dapat diselesaikan dengan invers matriks tergeneralisasi. Konsep matriks invers tergeneralisasi pertama kali diperkenalkan pada tahun 1903 oleh Ivar Fredholm. Pada tahun 1955 Penrose mendefinisikan matriks X dikatakan invers matriks tergeneralisasi jika memenuhi syarat $AXA = A$.

ISBN : 978-979-587-813-1
Vol.4 No.1

Kemudian Penrose juga menyebutkan bahwa penerapan invers matriks tergeneralisasi adalah untuk menyelesaikan sistem persamaan linier. Penelitian yang membahas eksistensi invers matriks tergeneralisasi dan cara-cara menentukan invers matriks tergeneralisasi telah banyak dilakukan, diantaranya Tasari [4] dan Bapat [5].

Arfiyanta [6] meneliti invers semu dalam sistem persamaan linier yang konsisten maupun tidak konsisten. Penelitian ini menyelidiki invers semu dari matriks $A_{m\times n}$ dan menerapkan invers semu dalam sistem persamaan linier. Matriks $A_{m\times n}$ dengan entri-entri matriksnya atas bilangan kompleks. Ikhwanudin [7] meneliti aplikasi invers matriks tergeneralisasi dan penerapannya pada Chipper Hill, yaitu salah satu chipper dalam bidang kriptografi. Penelitian ini memberikan gambaran bagaimana mencari invers sebarang matriks dengan entri bilangan matriks mengandung pesan rahasia yang sudah di terjemahkan dalam bentuk bilangan. Kemudian invers tersebut berguna sebagai kunci untuk mengetahui pesan aslinya.

Ben Israel [8] menyatakan suatu sistem persamaan linier $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ dengan A adalah matriks koefisien, $\boldsymbol{b}$ adalah sebuah vektor kolom konsanta dan $\boldsymbol{x}$ adalah vektor kolom variabel yang tidak diketahui mempunyai, penyelesaian tunggal apabila matriks A nonsingular atau det $(A) \neq 0$. Suatu sistem persamaan linier $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ yang mempunyai paling tidak satu penyelesaian disebut konsisten.

Berdasarkan hal tersebut, peneliti termotivasi untuk meneliti penerapan invers matriks tergeneralisasi pada penyelesaian sistem persamaan linier. Dalam pembahasan ini, dibatasi pada matriks $A_{m\times n}$ dengan entri-entrinya atas bilangan riil dan sistem persamaan linier yang konsisten maupun tidak konsisten. Selanjutnya, dibahas pula penerapan invers matriks tergeneralisasi pada program linier.

II. METODE PENELITIAN

Dalam penelitian ini, diberikan suatu sistem persamaan linier yang direpresentasikan ke dalam bentuk $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Sistem persamaan linier diselesaikan menggunakan invers matriks tergeneralisasi dari matriks A. Kemudian, menerapkan invers matriks tergeneralisasi pada program linier dan perhitungannya menggunakan software LINGO.

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

Suatu matriks $A_{n\times n}$ *n*onsingular mempunyai invers tunggal yakni A^{-1} yang memenuhi $A\,A^{-1} = A^{-1}A = I$. Apabila A^{-1} disubstitusi ke persamaan (1) peroleh $X = A^{-1}$. Ini menunjukkan bahwa matriks $A_{n\times n}$ mempunyai invers matriks tergeneralisasi. Jika matriks $A_{n\times n}$ singular dan matriks $A_{m\times n}$, maka invers matriks A tersebut dapat digeneralisasi dengan invers matriks tergeneralisasi yang memenuhi

$$AXA = A \tag{1}$$

Matriks $A_{m\times n}$ dengan $m < n$, direduksi kebentuk diagonalnya dengan menggunakan

$$P_{m\times m}A_{m\times n}Q_{n\times n} = \begin{bmatrix} B_{r\times r} & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} = \Delta_{m\times n} \tag{2}$$

Apabila matriks X adalah matriks berukuran $n \times m$, maka menurut

$$X = Q\Delta^{-}P \tag{3}$$

matriks X adalah invers matriks tergeneralisasi dari matriks A.

Suatu sistem persamaan linier dapat dinyatakan dalam bentuk $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Jika matriks $A_{n\times n}$ nonsingular dan rank$(A) = n$ maka penyelesaian sistem persamaan linier dapat dinyakan dengan $\boldsymbol{x} = X\boldsymbol{b}$ dengan X adalah invers matriks tergeneralisasi dari matriks A. Penyelesaian umum dari sistem persamaan linier $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ untuk matriks $A_{m\times n}$ dan rank$(A) < m$ adalah $\boldsymbol{x} = A^g\boldsymbol{b} + (I - A^gA)\,\boldsymbol{y}$ untuk sebarang vektor $\boldsymbol{y}$. Karena sistem persamaan linier $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ adalah konsisten, maka paling tidak terdapat vektor $\boldsymbol{y} = 0$.

Berikut ini penyelesaian program linier menggunakan invers matriks tergeneralisasi.

Contoh 1:

Maksimumkan $z = 8x_1 + 6x_2$

dengan kendala:

$4\,x_1 + 2x_2 \le 6$
$2x_1 + 4x_2 \le 48$
$x_1, x_2 \ge 0$

Program linier tersebut diubah kebentuk standar dengan menambahkan variabel slack pada kendala menjadi:
Maksimumkan $z = 8x_1 + 6x_2 + 0s_1 + 0s_2$
dengan kendala:

$$4\,x_1 + 2x_2 + s_1 = 60$$
$$2x_1 + 4x_2 + s_2 = 48$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2 \ge 0$$

Kendala tersebut dapat disusun menjadi bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 48 \end{bmatrix}$$

sehingga matriks $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Langkah awal, menentukan matriks P yang diperoleh dengan operasi baris elementer, yakni:

ISBN : **978-979-587-813-1**
Vol.4 No.1

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \frac{1}{4}B_1$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] - 2B_1 + B_2$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Rank(A) $= 2$ dan diperoleh matriks $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$.

Selanjutnya menentukan matriks Q dengan operasi kolom elementer, yakni:

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 3 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] -\frac{1}{2}K_1 + K_2$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 3 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] -\frac{1}{4}K_1 + K_3$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \frac{1}{6}K_2 + K_3$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] -\frac{1}{3}K_2 + K_4$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Diperoleh matriks $Q = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Setelah matriks P dan matriks Q diperoleh, matriks A direduksi ke bentuk diagonal pada Persamaan (2) menghasilkan

$\Delta = PAQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Setelah mendefinisikan Δ, kemudian menentukan

$$\text{matriks } \Delta^{-} = \begin{bmatrix} B_r^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} \qquad (4)$$

didapat $\Delta^{-} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Selanjutnya, menentukan matriks X menurut Persamaan

$$X = Q\Delta^{-}P \qquad (5)$$

Di peroleh,

$$X = Q\Delta^{-}P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Langkah akhir, mengecek apakah matriks X memenuhi Persamaan (1). Dari hasil perhitungan diperoleh bahwa matriks X memenuhi $AXA = A$. Jadi, invers matriks

ISBN : **978-979-587-813-1**
Vol.4 No.1

tergeneralisasi dari matriks $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ adalah

$$A^g = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Setelah matriks X diperoleh, mengecek apakah sistem persamaan linier memenuhi Persamaan

$$AXb = b \qquad (6)$$

Dari hasil perhitungan diperoleh, $AA^g b = b$ sehingga sistem persamaan linier konsisten.

Selanjutnya menentukan nilai x_1, x_2, s_3 dan s_4 dengan menggunakan Persamaan

$$x = A^g b + (I - A^g A)y \qquad (7)$$

dengan y vektor sebarang.

Ambil vektor $y = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ sehingga $x = \begin{bmatrix} \frac{23}{2} \\ 6 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Diperoleh , nilai $x_1 = \frac{23}{2}$, $x_2 = 6$, $s_1 = 2$ dan $s_2 = 1$

Matriks $A_{2\times 4}$ mempunyai invers matriks tergeneralisasi dengan rank(A) = 2. Diperoleh solusi optimal $x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$, yakni $x_1 = \frac{23}{2}$, $x_2 = 6$, $s_1 = 2$ dan $s_2 = 1$. Nilai x_1, x_2, s_1, s_2 memenuhi kedua persamaan pada fungsi kendala. Apabila diambil vektor $y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ diperoleh penyelesaian $x_1 = 12$ dan $x_2 = 6$, $s_1 = 0$ dan $s_2 = 0$.

Selanjutnya, proses perhitungan penyelesaian program linier diselesaikan dengan menggunakan program LINGO.

Input:

```
max 8x1+6x2
subject to
    4x1+2x2<=60
    2x1+4x2<=48
end
```

Output:

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      0

     OBJECTIVE FUNCTION VALUE

     1)      132.0000

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
     X1        12.000000          0.000000
     X2         6.000000          0.000000


     ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
      2)        0.000000         1.666667
      3)        0.000000         0.666667

 NO. ITERATIONS=      0
```

Contoh 2:

Minimumkan $z = 2x_1 + 3x_2$

dengan kendala:

$2x_1 + 3x_2 \geq 15$

$x_1 + 2x_2 \geq 8$

$x_1, x_2 \geq 0$

Program linier tersebut diubah ke bentuk standar dengan mengurangkan variabael surplus dan menambahkan variabel slack pada kedua persamaan menjadi:

Minimumkan $z = 2x_1 + 3x_2 + 0s_1 + 0s_2$

dengan kendala:

$$2x_1 + 3x_2 - s_1 + s_3 = 21$$
$$x_1 + 2x_2 - s_2 + s_4 = 12$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$$

Kendala tersebut dapat disusun menjadi bentuk matriks sebagai berikut

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 12 \end{bmatrix}$$

sehingga matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Langkah awal, menentukan matriks P yang diperoleh dengan operasi baris elementer, yakni:

$$\left[\begin{array}{cccccc|cccccc} 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \frac{1}{2}B_1$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|cccccc} 2 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$-B_1 + B_2$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|cccccc} 2 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Rank(A) = 2 dan diperoleh matriks $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$.

Selanjutnya menentukan matriks Q dengan operasi kolom elementer.

ISBN : 978-979-587-813-1
Vol.4 No.1

Diperoleh matriks $Q = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -2 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Setelah matriks P dan matriks Q diperoleh, direduksi ke bentuk diagonal pada Persamaan (2) menghasilkan

$$\Delta = PAQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriks Δ tidak memenuhi Persamaan (2), maka dilakukan operasi kolom elementer pada matriks Δ sehingga didapat matriks

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Setelah mendefinisikan Δ, kemudian menentukan

$$\text{matriks } \Delta^{-} = \begin{bmatrix} B_r^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} \quad (8)$$

Dari hasil perhitungan, diperoleh $\Delta^{-} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Selanjutnya, menentukan matriks X menurut Persamaan (3), diperoleh

$$X = Q\Delta^{-}P = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Langkah akhir, mengecek apakah matriks X memenuhi Persamaan (1). Dari hasil perhitungan diperoleh, $AXA = A$.

Jadi, invers matriks tergeneralisasi dari matriks $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

adalah $A^g = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Setelah matriks X diperoleh, mengecek apakah sistem persamaan linier memenuhi Persamaan (6). Dari hasil perhitungan diperoleh $AA^g\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$ sehingga sistem persamaan linier konsisten artinya sistem mempunyai paling tidak satu penyelesaian.

Selanjutnya menentukan nilai x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 dan s_4 dengan menggunakan Persamaan (7) dengan $\boldsymbol{y}$ vektor sebarang.

Dari hasil perhitungan diperoleh

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 6 + 2y_3 - 3y_4 - 2y_5 + 3y_6 \\ 1 - y_3 + 2y_4 + y_5 - 2y_6 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{bmatrix}$$

Ambil vektor $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ sehingga diperoleh , nilai $x_1 = 10$, $x_2 = 0$, $s_1 = 8$, $s_2 = 3$, $s_3 = 3$ dan $s_4 = 1$

Matriks $A_{2\times 4}$ mempunyai invers matriks tergeneralisasi dengan rank(A) = 2. Diperoleh solusi optimal $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$, yakni $x_1 = 10$, $x_2 = 0$, $s_1 = 8$, $s_2 = 3$, $s_3 = 3$ dan $s_4 = 1$. Nilai $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4$ memenuhi kedua persamaan pada fungsi kendala. Apabila diambil vektor $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ diperoleh penyelesaian $x_1 = 6$ dan $x_2 = 1$, $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$ dan $s_4 = 0$.

Selanjutnya, proses perhitungan penyelesaian program linier diselesaikan dengan menggunakan program LINGO.

Input:

```
    min 2x1+3x2
    subject to
2x1+3x2>=15
x1+2x2>=8
end
```

Output:

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      0

     OBJECTIVE FUNCTION VALUE

     1)      15.00000

 VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
     X1         6.000000          0.000000
     X2         1.000000          0.000000

      ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
      2)        0.000000         -1.000000
      3)        0.000000          0.000000

 NO. ITERATIONS=     0
```

I. Conclusion

Invers matriks dari suatu matriks $A_{m\times n}$ dan matriks $A_{n\times n}$ singular dinamakan invers matriks tergeneralisasi apabila memenuhi $AXA = A$, yang dinotasikan $X = A^g$. Suatu sistem persamaan linier $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ dapat konsisten maupun tidak konsisten. Invers matriks tergeneralisasi dapat dimanfaatkan untuk mencari solusi dari suatu sistem persamaan linier konsisten apabila memenuhi $AX\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$ dengan penyelesaian umum $\boldsymbol{x} = A^g\boldsymbol{b} + (I - A^gA)\mathbf{y}$ dengan $\mathbf{y}$ vektor sebarang. Suatu sistem persamaan linier $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ mempunyai penyelesaian tunggal jika dan hanya jika rank(A) = n. Jika rank(A) < n, maka sistem persamaan linier $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ mempunyai banyak penyelesaian. Penerapan invers matriks tergeneralisasi dapat digunakan pada program linier sebagai teknik alternatif pemecahan model program linier untuk kasus maksimum maupun minimum.

Referensi

[1] K. Hoffman and R. Kunze, *Linear Algebra*, Second edi. 1971.

[2] I. . Adetunde, N. Oladejo, and D. Pio, “Application Of Generalized Inverse Of A Matirx To Models Not Of Full Rank,” *Development*, vol. 134, no. 4, pp. 635–646, 2007.

[3] Ii. Indrayani, “Invers, Matriks Menyelesaikan, Dalam Persamaan, Sistem Serta, Linier Dalam, Aplikasinya Ekonomi, Bidang,” p. 9992, 2017.

[4] Tasari, “Matriks invers tergeneralisir,” *Pros. Semin. Nas. Mat.*, pp. 111–119, 2011.

[5] R. B. Bapat, “Existence of Generalized Inverse : Ten Proofs and Some Remarks,” no. December, pp. 19–28, 2001.

[6] O. Arfiyanta, “Invers Semu (PSEUDO INVERS) Dalam Sistem Persamaan Linier,” *Skripsi*, pp. 55–60, 2013.

[7] I. Achmad, “An Application Of Generalized Inverse Matrices on The Hill Cipher,” *Skripsi*, pp. 1–122, 2007.

[8] V. K. Rohatgi, A. Ben-Israel, and T. N. E. Greville, “Generalized Inverses: Theory and Applications,” *Int. Stat. Rev. / Rev. Int. Stat.*, vol. 44, no. 2, p. 301, 1976.