Dificultades de los profesores para integrar el uso de *Cabri* en clase de geometría. Experiencias de un curso de formación docente

Recibido: 09-08-2010 | Aceptado: 20-12-2010

Teachers' difficulties to integrate the use of Cabri in Geometry class. Experiences of a teacher education course

Martín Eduardo Acosta Gempeler*

Resumen: En este artículo presentamos algunos resultados de una ingeniería didáctica relacionada con el uso de *Cabri* en clase de geometría, realizada para estudiar las dificultades que tienen los profesores en formación para incorporar el *software* de geometría dinámica en sus clases. Utilizamos como marco teórico la *Teoría antropológica de lo didáctico*, de Yves Chevallard, desde la cual se concibe *Cabri* como un conjunto de objetos ostensivos informatizados, y se considera la formación como la construcción de una praxeología matemática, que incluye dichos ostensivos informatizados, y de una praxeología didáctica asociada. Los datos recogidos muestran las dificultades de los profesores en la construcción de la praxeología matemática.

Abstract: In this paper, the authors present some results of a didactic engineering related to the use of Cabri in geometry class. It was aimed at studying the difficulties in training teachers to incorporate the dynamic geometry software in their classes. The theoretical framework involves the anthropological theory of didactics by Yves Chevallard, from which Cabri is conceived as a set of computerized ostensive objects, and education is considered as the construction of a mathematical praxeology, that includes those ostensive computerized objects and an associated teaching praxeology. The data show the difficulties of teachers in the construction of mathematical praxeology.

Palabras clave: formación de profesores, geometría dinámica, praxeología matemática, objetos ostensivos informatizados.

Keywords: Teachers Education, Dynamic geometry, Mathematics Praxeology, computerized ostensive objects.

* Edumat-UIS, Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander, martin@matematicas.uis.edu.co

TEA Tecné, Episteme y Didaxis
No. 28 • Segundo semestre de 2010 • pp. 57-72

Introducción

La integración de las nuevas tecnologías en la enseñanza se ha convertido en un objetivo de política educativa en el mundo entero. Las investigaciones sobre el uso de las tecnologías por parte de los profesores muestran que esta integración es muy problemática. La mayoría de profesores que utilizan las tecnologías en su ejercicio profesional, lo hacen fuera de la clase (en preparación y evaluaciones), y quienes las utilizan en clase, tienden a restringir fuertemente la utilización por parte de los alumnos (Betrancourt, 2007). La enseñanza de las matemáticas no es una excepción. Por poner dos ejemplos, en Colombia, el Ministerio de Educación promovió durante cuatro años un proyecto de utilización de calculadoras que integran graficadores, álgebra computarizada y geometría dinámica. Al término de la experiencia, la mayoría de las prácticas llevadas a cabo por los profesores correspondían a un uso ostensivo de la tecnología con actividades fuertemente dirigidas (Acosta *et al*., 2004). En Gran Bretaña, Ruthven (2004), en un estudio realizado, muestra que la mayoría de los profesores usuarios de la geometría dinámica adoptan una estrategia ostensiva, en contra de las investigaciones en didáctica de las matemáticas que señalan esta estrategia como fuente de dificultades de aprendizaje (Vergnaud 1991).

Esta problemática nos llevó a plantear las siguientes preguntas:

- ¿Por qué los profesores de matemáticas tienen dificultades para utilizar Cabri en la enseñanza de la geometría?
- ¿Cuáles son los aspectos fundamentales que debe tener la formación de profesores en la utilización de Cabri para facilitar su integración con la enseñanza?

Para responder estas preguntas realizamos una ingeniería de formación de profesores para la utilización del *software* Cabri de geometría dinámica en la enseñanza de la geometría en el nivel de secundaria.

A continuación presentamos el marco teórico, una breve descripción de la ingeniería de formación y algunos de los resultados obtenidos en ese estudio.

Marco teórico: Teoría Antropológica de lo Didáctico

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) formulada por Chevallard hace parte de la didáctica de las matemáticas como "ciencia del estudio y de la ayuda al estudio de las preguntas matemáticas" (Chevallard, 1999).

La teoría antropológica de lo didáctico es una continuación y ampliación de la teoría de la transposición didáctica, que se caracteriza por la voluntad de sacar el análisis didáctico de los marcos tradicionales que circunscriben lo que es el saber matemático y lo que son el lugar y los componentes de la enseñanza de las matemáticas. Al asumir una posición de estudio antropológico, Chevallard rechaza toda forma de predeterminación de su objeto de estudio, y se propone organizar una mirada sin prejuicios: lo que podemos observar son prácticas en el seno de *instituciones*, constituidas por individuos que realizan una actividad común. El saber se caracteriza como la relación entre los individuos, en tanto sujetos de las instituciones, y algunos objetos reconocidos en la institución. Esta relación puede ser personal o institucional.

Las matemáticas como praxeología: tareas, técnicas, tecnologías, teorías

Las matemáticas sólo pueden describirse y comprenderse como una práctica humana, una "praxeología". Los componentes de una praxeología son los tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías.

En una institución dada, los sujetos tienen tareas que realizar, trabajo que efectúan con ciertos procedimientos llamados *técnicas*. El conjunto "tareas-técnicas" constituye un bloque de saber-hacer. Para que una técnica pueda integrarse y sobrevivir en una institución dada, debe ser explicada y justificada. El discurso que acompaña la técnica para responder a esas necesidades se llama *tecnología* de la técnica. Pero las tecnologías a su vez deben ser explicadas y justificadas por medio de las *teorías*, que constituyen "tecnologías de las tecnologías". El conjunto "tecnologías-teorías" constituye el bloque del saber teórico. Aunque en las instituciones educativas se tiende a privilegiar el saber teórico y presentarlo como origen del saber-hacer, el enfoque antropológico sitúa el bloque tareas-técnicas como el lugar de génesis del saber.

Podemos concebir la (re)construcción del saber como un proceso que parte de la aceptación de una o de varias tareas problemáticas, es decir, de tareas para las que no se dispone de técnica apropiada. Los sujetos deben entonces producir y perfeccionar técnicas para resolver esas tareas. Es el desarrollo del saber-hacer. Pero al perfeccionar esas técnicas, los sujetos desarrollan un discurso explicativo y justificativo que constituye la tecnología de esas técnicas. Finalmente, la teoría es el resultado del trabajo de sistematización de diferentes tecnologías, articulándolas y explicando sus relaciones.

La teoría antropológica de lo didáctico considera dos praxeologías diferentes, pero indisociables: una praxeología matemática, y una praxeología didáctica. La praxeología matemática hace referencia a las tareas, técnicas, tecnologías y teorías relativas a la problemática matemática. La praxeología didáctica hace referencia a las tareas, técnicas, tecnologías y teorías relativas al trabajo del profesor, es decir a la puesta en escena y el desarrollo de la praxeología matemática que quiere proponer a sus alumnos.

Los objetos matemáticos: ostensivos-no ostensivos

Las praxeologías caracterizan entonces la actividad matemática en el seno de las instituciones. Pero esas tareas, técnicas, tecnologías y teorías se construyen alrededor de la manipulación de objetos matemáticos, que la Teoría Antropológica de lo Didáctico define utilizando dos categorías:

- Los *objetos ostensivos*: son objetos que tienen una materialidad que puede ser captada por los sentidos –escrituras, sonidos, gestos, etc.– y que pueden, por lo tanto, ser manipulados.

- Los *objetos no ostensivos*: no son materiales y por lo tanto no pueden percibirse directamente. Su existencia se deduce de la manipulación que hacen los sujetos de los objetos ostensivos; esa manipulación obedece a ciertas regularidades, permitiendo asumir que los sujetos utilizan reglas de control para realizar dichas manipulaciones; a estas reglas de control se las denomina *objetos no ostensivos*.

Esos dos tipos de objetos son a la vez solidarios e independientes. Solidarios, pues sólo se puede acceder a los objetos

TEA Tecné, Episteme y Didaxis
No. 28 • Segundo semestre de 2010 • pp. 57-72

no ostensivos por la manipulación de los objetos ostensivos, y sólo se puede manipular los objetos ostensivos por la activación de los no ostensivos. Independientes, puesto que no hay una regla intrínseca para determinar la relación entre ciertos ostensivos y ciertos no ostensivos. Esta asociación es arbitraria, y se produce en el curso de la acción en una institución.

Una técnica sólo puede describirse como manipulación de objetos ostensivos, regulada por no ostensivos. Por lo tanto, los objetos ostensivos y no ostensivos se vuelven indisociables de las tecnologías y de las teorías. A tal punto que toda modificación de los objetos ostensivos, por más pequeña que sea, implica una reconstitución de la praxeología entera.

Los ostensivos no son producto de una construcción institucional. Por eso no es suficiente con mostrarlos para que un sujeto pueda aprehenderlos:

> *ellos –los objetos ostensivos– son instrumentos de la actividad matemática, herramientas materiales sin las cuales no puede realizarse la acción. La función semiótica de los ostensivos, su capacidad de producir sentido, no puede separarse de su función instrumental, de su capacidad para integrarse en manipulaciones técnicas, tecnológicas, teóricas (Chevallard, 1999).*

Implicaciones para nuestra problemática

En el seno de toda institución que busca la difusión del saber matemático, pueden distinguirse dos praxeologías en interacción: una praxeología matemática, que la institución trata de hacer vivir, y una praxeología didáctica, por medio de la cual trata de lograr ese objetivo. La praxeología didáctica está subordinada a la praxeología matemática buscada. La utilización de Cabri en una praxeología didáctica debe justificarse, ante todo, por su rol en la praxeología matemática buscada. *La legitimidad didáctica de Cabri debe ser una consecuencia de su legitimidad matemática en la institución*. Nosotros pensamos que esta legitimidad matemática proviene de su pertinencia para la solución de problemas de construcción.

La integración de una herramienta informática como Cabri al proceso de enseñanza, supone la introducción de nuevos objetos ostensivos. Podemos comprender entonces las dificultades para incluirlos en una praxeología ya existente, pues implican nuevas tareas, nuevas técnicas y nuevas tecnologías. Mientras no haya un trabajo de reconstrucción praxeológica –es decir, una verdadera reconstrucción del saber– utilizando los nuevos ostensivos, no podrán ser incluidos en la actividad matemática con un rol que no sea marginal.

Desde el punto de vista de la formación de profesores vemos la necesidad de:

- Presentar la formación, no como la apropiación de una herramienta accesoria del trabajo didáctico, sino como un verdadero trabajo matemático con ayuda de un nuevo dispositivo.
- Construir una praxeología de solución de problemas de construcción utilizando los ostensivos informatizados de Cabri, es decir, los dibujos estáticos y dinámicos.
- Separar dos momentos de formación: el momento de apropiación de Cabri como herramienta para hacer matemáticas, en el que los profesores sean puestos en situación de investigación matemática y desarrollen técnicas y tecnologías utilizando los nuevos ostensivos; y el

momento de apropiación de Cabri como herramienta para enseñar matemáticas, en el que organicen, a su vez, la génesis praxeológica para sus alumnos, es decir, para que sus alumnos hagan matemáticas utilizando Cabri.

Cabri y modelo didáctico

Podemos considerar Cabri como un dispositivo que utiliza ostensivos informatizados; es decir, ostensivos cuyo comportamiento no depende exclusivamente de la manipulación hecha por el sujeto, sino también de la programación del *software*. De esta manera, el control de esos objetos ostensivos es, en parte, inherente al sistema, y los objetos no ostensivos, que serán necesariamente asociados, deberán asumir ese control.

Como todo *software* de geometría dinámica, Cabri permite la manipulación directa de los objetos representados en la pantalla, conservando las relaciones geométricas que fueron declaradas en su construcción, y las relaciones geométricas que se deducen de ellas. El *arrastre* de los objetos en la pantalla se convierte entonces en una herramienta de verificación de propiedades de las figuras.

Podemos concebir a Cabri como un entorno informático de experimentación geométrica, pues permite llevar a cabo verdaderos experimentos para encontrar relaciones teóricas entre los objetos. La actividad de resolución de problemas de construcción en Cabri puede concebirse así como una 'tarea de construcción'.

En la tarea de construcción se propone un modelo de figura para ser reproducido (ver figura 1). Para poder reproducirlo, deben identificarse las propiedades geométricas que caracterizan esa figura. El usuario interactúa con el sistema, arrastrando los componentes de la figura y observando los fenómenos visuales en la pantalla. Si interpreta esos fenómenos visuales en términos de propiedades espacio-gráficas, es decir como formas globales ensambladas (una casa con un techo, por ejemplo), podrá producir una imagen igual al modelo, pero al arrastrar los elementos perderá su forma. Por el contrario, si interpreta los fenómenos visuales como propiedades geométricas que puede producir utilizando las herramientas del *software*, estas propiedades se mantendrán durante el arrastre.

Hipótesis sobre las dificultades que pueden experimentar los profesores

De acuerdo con el marco teórico expuesto, pudimos anticipar diferentes tipos de dificultades que tienen que ver con la construcción de las nuevas praxeologías relativas a los objetos ostensivos de Cabri:

1. Debidas a la asimilación de nuevos ostensivos y la creación de los objetos no ostensivos correspondientes. Formulamos la hipótesis de que los profesores son expertos en manipulación de ostensivos estáticos de representaciones de figuras geométricas; asimismo, los ostensivos dinámicos serán nuevos para ellos, y tendrán que construir los objetos no ostensivos que les sirvan para controlarlos.

2. Debidas a conflictos técnicos entre una praxeología de ostensivos estáticos y una praxeología de ostensivos dinámicos. Formulamos la hipótesis de que los profesores son expertos en procedimientos de construcción con regla, escuadra y compás, y por lo tanto ten-

TEΔ Tecné, Episteme y Didaxis
No. 28 • Segundo semestre de 2010 • pp. 57-72

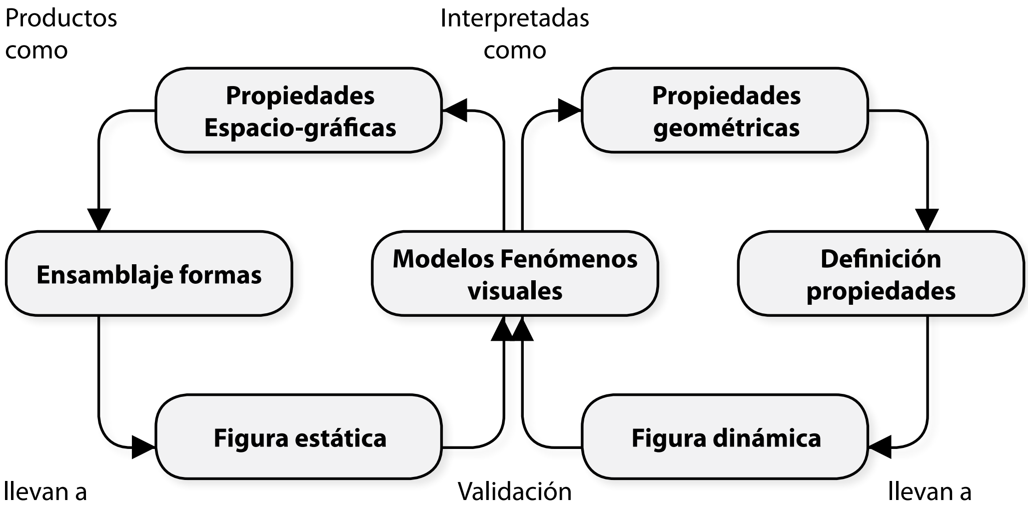


Figura 1: La tarea de construcción.

derán a utilizar estrategias que implican el ajuste perceptivo; estas estrategias se verán invalidadas por el arrastre, pero los profesores necesitarán tiempo y muchos episodios de invalidación para abandonar esas estrategias perceptivas. Las técnicas de validación también son diferentes en una praxeología de ostensivos estáticos y una praxeología de ostensivos dinámicos: en el primer caso, pueden despreciarse errores de precisión de una cierta magnitud, mientras que en el segundo, todo error visible a simple vista invalida la construcción.

3. Dificultades debidas a conflictos tecnológicos entre una praxeología de ostensivos estáticos y una praxeología de ostensivos dinámicos. El discurso tecnológico (de explicación y justificación) de la geometría euclidiana es un discurso estático, que trata diferentes casos, pero no tiene en cuenta el movimiento; por su parte, la geometría con Cabri incorpora el movimiento en la descripción y en la justificación, haciendo necesario o bien una traducción de los razonamientos basados en el movimiento a una descripción estática, o bien una nueva fundamentación, por ejemplo en la geometría del siglo XIX, que incluye el movimiento en su sintaxis.

Descripción de la ingeniería

Se trabajó con diez profesores de los grados sexto a noveno de cuatro colegios de Bogotá y uno de Zipaquirá. Los profesores tenían diversos niveles de formación, experiencia, y familiaridad con Cabri.

La ingeniería tuvo una duración de un año y se dividió en dos partes: una matemática, dedicada a la apropiación de la praxeología matemática de resolución de problemas de construcción con ayuda de Cabri; y una didáctica, dedicada a la apropiación de la praxeología didáctica para la enseñanza de la geometría con Cabri. Cada una se compuso de un curso presencial intensivo y un período de práctica con acompañamiento a distancia.

Durante el curso correspondiente a la parte matemática se trabajaron problemas de construcción, que buscaban desarrollar una praxeología matemática alrededor de los objetos ostensivos de Cabri. Se hizo énfasis en la validación/invalidación tanto de las hipótesis como de las construcciones propuestas por los profesores, utilizando el arrastre para invalidar las estrategias perceptivas, que interpretan los fenómenos visuales como espacio-gráficos y no como propiedades geométricas. Se registró en video el trabajo de un binomio para cada problema de la parte presencial y se recolectaron informes personales para cada problema de la parte a distancia.

Durante el curso presencial correspondiente a la didáctica, se trabajó con un grupo experimental de alumnos voluntarios[1], y cada profesor asumía por turnos el rol de profesor o de observador. En el período de práctica acompañada a distancia, cada profesor realizó uno o varios ciclos de diseño-experimentación-evaluación de actividades con sus propios alumnos, enviando informes semanales de su trabajo. Durante el período de práctica se recolectaron todos los informes enviados por los docentes, y se registró en video una clase de cada profesor.

Algunos resultados

A continuación presentamos algunos de los resultados encontrados, que permiten evidenciar las dificultades que tienen los profesores para asimilar la nueva praxeología matemática. No podemos exponer con suficiente detalle los resultados relativos a la praxeología didáctica, por lo que los dejamos para un futuro artículo.

1 De una institución diferente a los colegios donde trabajaban los profesores

Dificultad de control de los ostensivos dinámicos

Una de las diferencias del trabajo matemático con los ostensivos dinámicos como Cabri es precisamente su dinamismo, su capacidad de presentar fenómenos visuales de movimiento en la pantalla del computador o la calculadora. Los profesores de matemáticas son expertos en el control de ostensivos estáticos, pero los ostensivos dinámicos son totalmente nuevos para ellos, y deben construir los correspondientes no ostensivos con el fin de controlar el uso de dichos ostensivos. Uno de los fenómenos visuales dinámicos que más acaparan la atención de los nuevos usuarios es la dependencia: debido a que Cabri garantiza que las propiedades geométricas declaradas explícitamente –y aquellas que dependen de ellas– se mantienen durante el arrastre, el hecho de arrastrar un objeto hace que otros se desplacen con él. Por ejemplo, en el primer problema que se planteó a los profesores en formación, aparecían seis puntos en la pantalla de la calculadora sin una forma identificable a primera vista (Figura 2). Los profesores debían manipular la figura modelo para identificar sus características, y luego abrir un archivo nuevo para tratar de reproducir la figura modelo.

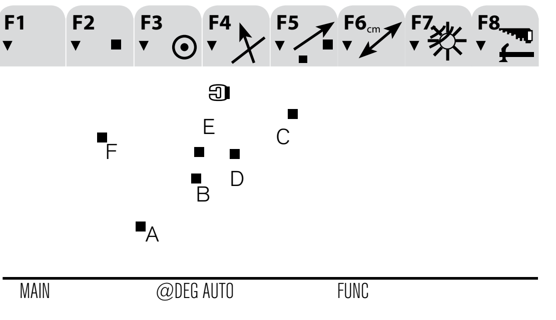


Figura 2: primera tarea de construcción

Esta figura no tiene formas reconocibles para bloquear la movilización de esquemas de reproducción o de técnicas geométricas familiares, como la construcción con regla y compás. Los sujetos deben centrarse en los fenómenos dinámicos que aparecen cuando arrastran los puntos. De esta manera, tienen que utilizar las trayectorias y las dependencias como elementos clave para interpretar y reproducir la figura.

Al contrario de lo que esperábamos, los profesores recurrieron a objetos no ostensivos no matemáticos para interpretar y reproducir los fenómenos de dependencia. Por ejemplo, uno de los integrantes del binomio filmado identificó los siguientes fenómenos: los puntos A, B y C están alineados (fenómeno estático); si se desplaza C, A se mueve también (fenómeno de dependencia, dinámico). Al tratar de reproducir estos fenómenos en el archivo nuevo, trazó una recta y colocó los tres puntos –A, B y C– sobre la recta, reproduciendo el fenómeno estático de alineación; luego utilizó la herramienta 'segmento' para reproducir el fenómeno de dependencia, trazando un segmento de C hasta A y ocultando la recta. En el siguiente extracto del protocolo, puede verse cómo L, uno de los profesores, utiliza la herramienta segmento, no en su sentido geométrico, sino como si fuera una varilla rígida que garantiza la dependencia del movimiento de los puntos.

> L: "C no se mueve para nada, ¿cierto? Tengo que hacer que C haga mover los puntos A, F y D".
>
> L: "claro, porque cuando muevo C, A se mueve… entonces *tengo que hacer un segmento* para que cuando mueva C, A se mueva, y F se mueva sobre esta recta".
>
> L: "tengo que… cuando yo construyo un segmento de A hasta C, cuando muevo C, A se mueve. ¿No es cierto?"
>
> [Luego trata de validar esta hipótesis arrastrando C, y al ver que A no se mueve, vuelve a comenzar la construcción varias veces, hasta que finalmente descarta su hipótesis]

En este ejemplo puede verse cómo los profesores experimentan la necesidad de construir los objetos no ostensivos correspondientes a los ostensivos dinámicos de Cabri (en este caso el ostensivo segmento, y el ostensivo de movimiento dependiente) y cómo ese proceso de construcción conduce a asociar prácticas del mundo físico para la construcción de dichos objetos no ostensivos. Igualmente, puede apreciarse cómo las retroacciones[2] del *software* invalidan las asociaciones no pertinentes, obligando a construir objetos no ostensivos coherentes con los fenómenos dinámicos.

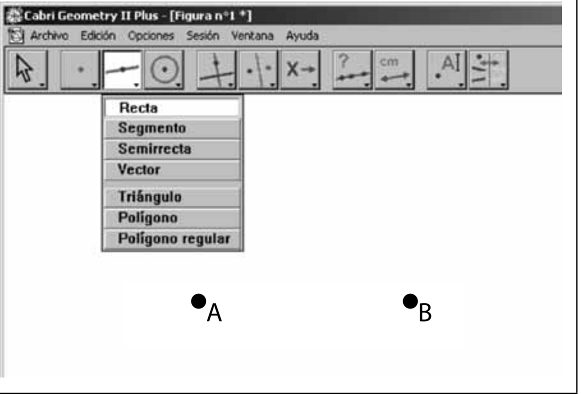
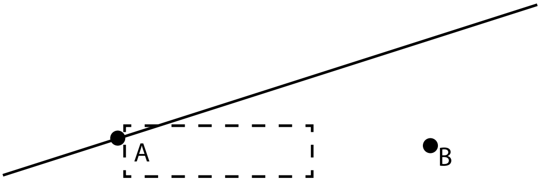
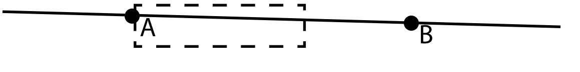
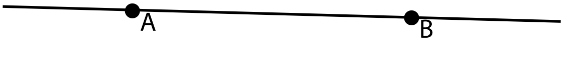
Invalidación de procedimientos (estáticos) de construcción correctos

Otra dificultad proviene de la invalidación dinámica de estrategias estáticas correctas. En efecto, las construcciones con regla, escuadra y compás están basadas en estrategias perceptivas de ajuste que son invalidadas con los ostensivos dinámicos.

Por ejemplo, para trazar la recta que pasa por dos puntos, la técnica con regla consiste en colocar la regla cerca de los dos puntos, lo que implica un control perceptivo de la precisión del dibujo. La siguiente tabla muestra esta técnica transpuesta en Cabri:

2 Llamamos retroacción a toda reacción del *software* a una acción del usuario.

Tabla 1: ajuste perceptivo y técnicas de construcción con regla y compás

Se selecciona la herramienta ‘Recta’.	
Se hace clic sobre el primer punto (A) Este queda seleccionado y, al arrastrar el cursor, aparece la recta).	
Se desplaza el cursor hasta ver que la recta pasa por el punto B (pero el cursor no señala el punto B).	
Se hace clic en esa posición, creando una recta que aparentemente pasa por B.	

TEA Tecné, Episteme y Didaxis
No. 28 • Segundo semestre de 2010 • pp. 57-72

Este procedimiento produce una recta que aparentemente pasa por los dos puntos, pero si se arrastra uno de los puntos, la recta no mantiene la propiedad de pasar por ambos.

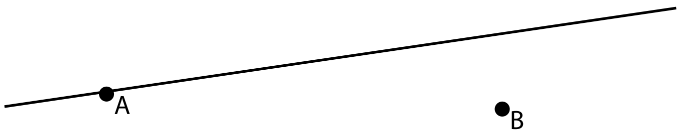
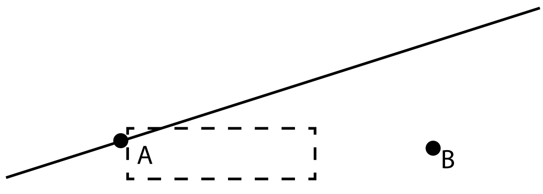
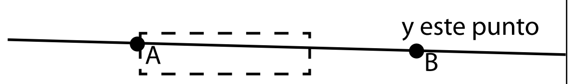
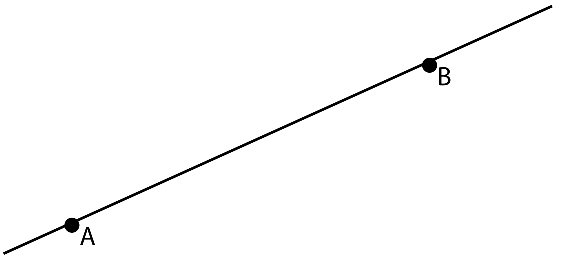


Figura 3: invalidación por arrastre

Para que el sistema tenga una representación interna de la recta que pasa por dos puntos, es decir una figura dinámica que conserve esta propiedad durante el arrastre, es necesario seleccionar explícitamente los dos puntos, como se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 2: eliminación del ajuste perceptivo en Cabri

Se selecciona la herramienta 'Recta', se hace clic sobre el punto A (aparece la recta).	
Se lleva el cursor sobre el punto B (aparece el mensaje "y este punto").	
Se hace clic sobre el punto B, creando una recta que pasa, efectivamente, por A y por B.	

Al arrastrar B, la recta sigue pasando por los dos puntos.	

En el caso del segundo problema del curso inicial de formación, la figura modelo estaba formada por un cuadrado y dos triángulos, como puede verse en la figura 4. Los profesores debían manipular la figura modelo para identificar sus propiedades geométricas y luego debían intentar reproducirla en un archivo nuevo.

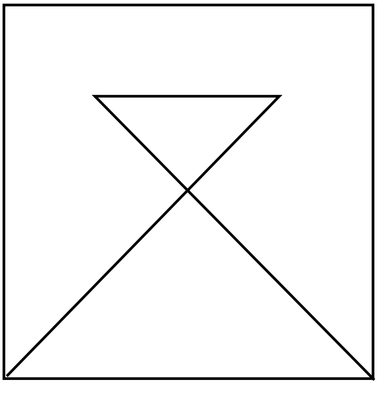
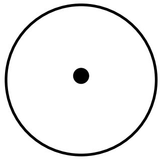
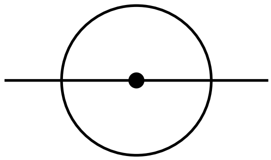
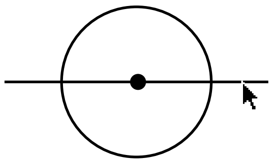
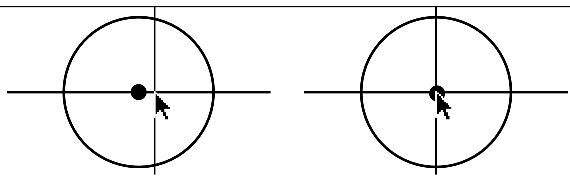
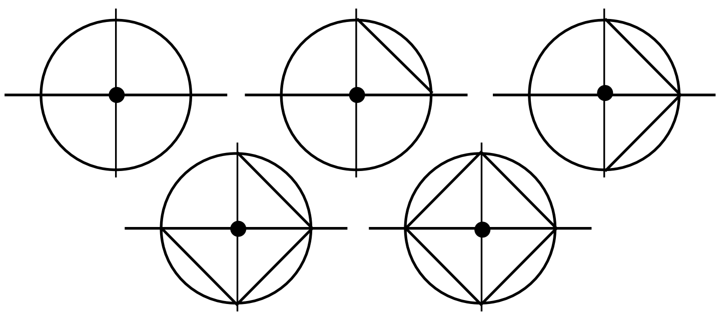
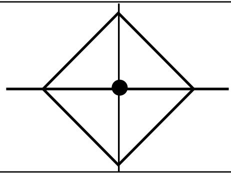
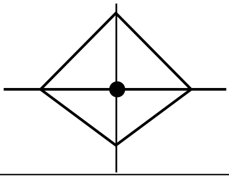


Figura 4: segunda tarea de construcción.

En el video realizado, Ana utilizó una técnica estática correcta para construir el cuadrado, pero como usaba el ajuste perceptivo, al realizar el arrastre fue invalidada. En la siguiente tabla mostramos el proceso de construcción de Ana.

TEA Tecné, Episteme y Didaxis
No. 28 • Segundo semestre de 2010 • pp. 57-72

Tabla 3: Estrategia de Ana

Traza un círculo.	
Selecciona la herramienta 'Recta', hace clic sobre un punto del círculo y arrastra el cursor haciendo aparecer una recta horizontal que aparentemente pasa por el centro, *pero no hace clic sobre el centro*.	
Selecciona la herramienta 'Recta perpendicular', hace clic sobre la recta trazada.	
Lleva el cursor hasta el centro y hace clic sobre el centro.	
Selecciona la herramienta 'Segmento' y traza los segmentos que forman el polígono.	
Oculta el círculo.	
Arrastra el punto sobre el círculo, perdiendo la forma de cuadrado.	

Con este ejemplo vemos la complejidad de la tarea de asimilación de los nuevos ostensivos en la praxeología matemática de construcción. No solamente los profesores deben asimilar nuevos fenómenos visuales y crear nuevos objetos no ostensivos para interpretarlos y controlarlos, sino que deben cuestionar técnicas correctas (cuando se usan ostensivos estáticos), para adaptarlas a las características de los ostensivos dinámicos.

Validación estática vs. validación dinámica

Además de las técnicas de construcción con ostensivos estáticos, el ajuste perceptivo también interviene en las técnicas de validación, que son incorrectas al utilizar los ostensivos dinámicos. En efecto, debido a la alta probabilidad de realizar dibujos imperfectos al utilizar herramientas como la regla y el compás, es normal despreciar los errores de dibujo, perceptibles pero pequeños. En cambio, al utilizar ostensivos dinámicos, cualquier error perceptible, por pequeño que sea, constituye una invalidación de la construcción. Así que los profesores deben abandonar la técnica de validación perceptiva, legítima para ostensivos estáticos, y adoptar una nueva para los ostensivos dinámicos.

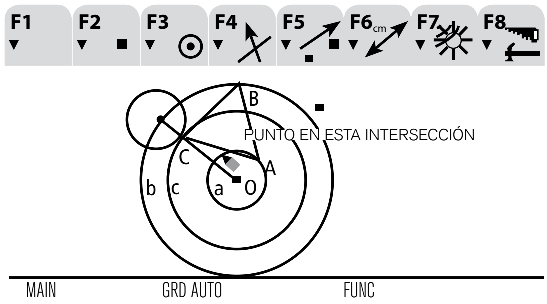
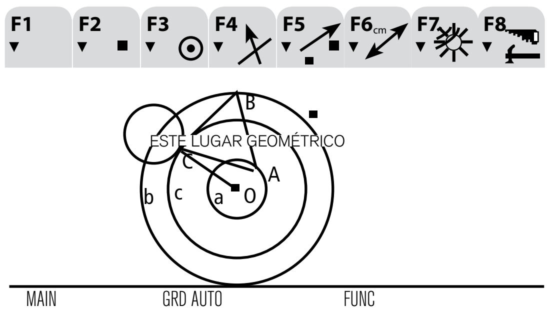
En el caso de Ana, pudimos observar la persistencia de la técnica de validación estática (que tiende a ignorar los errores pequeños en el dibujo) y el olvido sistemático de la validación por arrastre. Por ejemplo, en uno de los problemas del período de práctica a distancia de la parte matemática, los profesores debían utilizar la técnica de lugar geométrico para resolver el siguiente problema: dados tres círculos concéntricos, construir un triángulo equilátero que tenga sus vértices sobre cada uno de los círculos. Esto implicaba colocar dos puntos sobre dos de los círculos, construir un triángulo equilátero usando esos dos vértices, y observar el lugar geométrico (un círculo) del tercer vértice al arrastrar uno de los dos primeros puntos sobre el círculo. Como la solución se obtiene en la intersección de ese lugar geométrico con el tercer círculo, los profesores debían poder construir ese lugar geométrico como círculo, es decir determinar su centro y su radio. Una de las sugerencias del tutor fue utilizar una transformación para construir ese círculo a partir de uno de los círculos dados. Ana entregó el informe (Ver Tabla 4).

En el informe de Ana puede verse cómo utilizó una estrategia de ajuste perceptivo para realizar la construcción del círculo correspondiente al lugar geométrico: "arrastré el triángulo equilátero hasta que el vértice C quedó sobre la circunferencia "c" (el punto C no está realmente sobre la circunferencia c, sino que se ve sobre ella) y "tracé un vector de O hasta la circunferencia "b" pasando por el punto C" (nuevamente, el vector no pasa realmente por el punto C, sino que en el dibujo se ve). Después de crear la circunferencia imagen de la circunferencia "a" por ese vector ajustado, construyó el lugar geométrico de C cuando A se mueve sobre la circunferencia "a", y a pesar de que en la imagen se ven dos circunferencias diferentes, ella asume que las dos se superponen totalmente: "encontré una circunferencia que se superponía a la que había construido por traslación".

Ana fue el único de los profesores en formación que no abandonó nunca esta estrategia de ajuste perceptivo en la construcción y en la validación, a pesar de la invalidación de la misma por medio del arrastre. En cambio, los demás profesores mostraron una evolución de estas técnicas, pues señalaron explícitamente cuando interpretaron dibujos estáticos, y trataron de aplicar la validación por arrastre antes

TEA Tecné, Episteme y Didaxis
No. 28 • Segundo semestre de 2010 • pp. 57-72

Tabla 4: validación estática incorrecta

	Arrastré el triángulo equilátero hasta que el vértice C quedó sobre la circunferencia “c”. Tracé un vector de O hasta la circunferencia “b” pasando por el punto C. Trasladé la circunferencia “a” en la dirección del vector.
	4. Busqué el lugar geométrico de C respecto de A y encontré una circunferencia que se superponía a la que había construido por traslación.

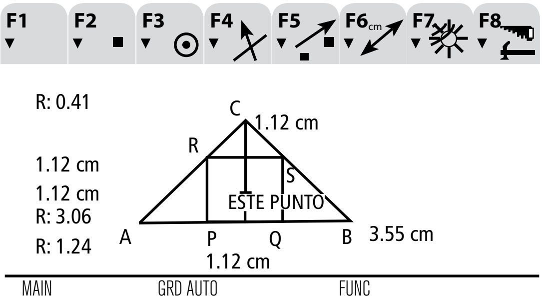
de concluir sobre las propiedades de los objetos. Por ejemplo, en otro problema, se pedía construir un cuadrado de manera que sus vértices estuvieran sobre los lados de un triángulo cualquiera dado; veamos cómo Elsa exploró una figura que no es solución, pero que podía ajustar hasta encontrar la solución, con el fin de buscar relaciones geométricas que le permitieran solucionar el problema (Ver Tabla 5).

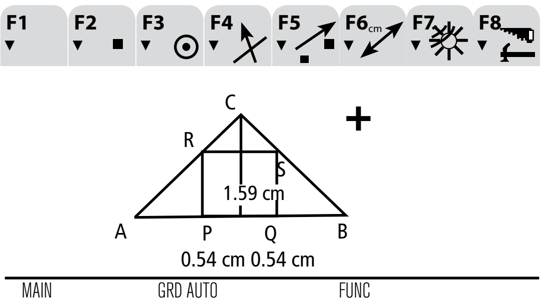
Primero informó que buscó una relación entre el área del cuadrado y el área del triángulo “cuando el punto S se intercepta con el lado CB” y señaló que el resultado obtenido no era un valor exacto: “aproximadamente entre 0.41 y 0.46”. Luego observó el desplazamiento del punto S al arrastrar el punto P sobre el lado AB, pero tomó precauciones de lenguaje para informar su observación: “en ese momento”, “parece que”, expresiones que indican que está consciente de que esas observaciones no son propiedades de la figura, sino relaciones aparentes.

Conclusiones

Los promotores del uso de la informática en la educación con frecuencia justifican los resultados deficientes en la práctica invocando la resistencia de los profesores hacia

Tabla 5: Reconocimiento del dinamismo de la figura

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Calculé el área del cuadrado y el triángulo.

Encuentre el cociente entre el área del cuadrado y el triángulo, cuando el punto S se intercepta con el lado CB, aproximadamente entre 0.41 y 0.46.</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>En este momento del arrastre obtuve 0.54 comprobando lo anterior.

Al realizar el arrastre del punto P, parece que el punto S se desplaza en la línea recta, por lo que determiné la trasa del punto S cuando desplazo el punto P, para comprobar esta observación.</td>
</tr>
</table>

los procesos de innovación, en especial al uso de los computadores. Gracias a nuestro trabajo podemos comprender mejor de donde provienen esas “resistencias” de los profesores de matemáticas para utilizar Cabri en la enseñanza de la geometría. No son resistencias únicamente psicológicas, casi instintivas; tienen razones para resistirse a utilizar los nuevos ostensivos, pues esa utilización implica una desconstrucción de sus prácticas matemáticas y didácticas. En efecto, los nuevos ostensivos dinámicos de Cabri implican el desarrollo de nuevas praxeologías matemáticas y didácticas, que entran en conflicto con las praxeologías habituales de los profesores, praxeologías basadas en ostensivos estáticos.

Existe un conflicto de praxeologías matemáticas: una praxeología estática y una praxeología dinámica. Primero que todo, por el hecho del dinamismo de los

TEA Tecné, Episteme y Didaxis
No. 28 • Segundo semestre de 2010 • pp. 57-72

objetos ostensivos de Cabri, los profesores deben construir nuevos objetos no ostensivos que les sirvan para controlar la manipulación de los ostensivos dinámicos. Aunque podría pensarse que esta construcción se hace de manera natural y fácilmente, en realidad esta construcción demanda un esfuerzo consciente y sostenido para evitar una simple yuxtaposición de no ostensivos estáticos. En segundo lugar, la praxeología estática se caracteriza por el uso del ajuste perceptivo, tanto en las construcciones como en las validaciones. La praxeología dinámica, por su parte, excluye el ajuste perceptivo como estrategia de construcción o de validación. En este caso no se trata solamente de asimilar nuevos objetos, sino de abandonar estrategias que han sido validadas en la práctica, y por lo tanto requiere una atención especial, trabajando situaciones en las que se invalidan dichas estrategias válidas para la praxeología estática, y se reflexione sobre esta invalidación.

Esto significa que los programas de formación de profesores deben tener en cuenta de manera explícita este conflicto de praxeologías y diseñar actividades que lo hagan explícito para los profesores, enfatizando en la invalidación de las técnicas y estrategias antiguas. Este trabajo de apropiación de los ostensivos dinámicos puede lograrse por medio de un trabajo intensivo de utilización de los mismos en la solución de problemas de geometría, de manera que las invalidaciones ofrecidas por los mismos objetos contribuyan al abandono de las estrategias erróneas. Sólo de esta manera Cabri puede convertirse en un instrumento matemático y articularse en la práctica con otros instrumentos.

Bibliografía

Acosta, *et al*. (2004). Pensamiento geométrico y tecnologías computacionales. *Serie Documentos*, Ministerio de Educación Nacional, República de Colombia.

Betrancourt, M. (2007). Pour des usages des TIC au service de l'apprentissage. TICE: l'usage en travaux, en la serie *Les dossiers de l'ingénierie éducative*, Scéren-CNDP.

Bosch, M. y Gascon, J. (2002). *Organiser l'etude, 2. Théories et Empiries*. Actes de la 11 Ecole d'été de didactique des Mathématiques. La pensée Sauvage.

Chevallard, Y. y Bosch, M. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. En *Recherches en didactique des mathématiques*, Vol. 19, n° 1, pp. 77-124.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascon, J. (1997). Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje. *Cuadernos de Educación* No. 22. Barcelona: Horsori Editorial.

Ruthven, K., Henessy S. y Deaney, R. (2004). *Incorporating dynamic geometry systems into secondary mathematics education: didactical perspectives and practices of teachers*. Ponencia presentada en la conferencia anual de la British Educational Research Association. Manchester, septiembre de 2004.

Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherche en didactique des mathématiques,* Vol. 10 No. 23, pp. 133-170.