PERBANDINGAN SOLUSI NUMERIK INTEGRAL LIPAT DUA PADA FUNGSI FUZZY DENGAN METODE ROMBERG DAN SIMULASI MONTE CARLO

Ermawati[i], Puji Rahayu[ii], , Faihatus Zuhairoh[iii]

[i] *Dosen Jurusan Matematika FST UIN Alauddin Makassar*
[ii] *Mahasiswa Jurusan Matematika FST UIN Alauddin Makassar*
[iii] *Dosen Jurusan Matematika YPUP*

ABSTRAK, Integrasi numerik merupakan metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persoalan integral yang sulit diselesaikan secara analitis. Penelitian ini membahas tentang perbandingan tingkat keakuratan antara metode Romberg dan Simulasi Monte Carlo pada penyelesaian integral lipat dua untuk fungsi fuzzy. Perbandingan tingkat keakuratannya ditinjau dari segi galat. Beberapa contoh fungsi integral lipat dua dengan fungsi fuzzy disimulasikan pada program Matlab dengan menggunakan metode Romberg dan Simulasi Monte Carlo untuk n=2 dan n=4. Hasil simulasi menunjukkan bahwa dengan menggunakan 4 angka penting, untuk n=4, nilai aljabar *fuzzy* yang dihasilkan dengan menggunakan metode Romberg sama dengan nilai eksaknya. Sedangkan pada metode Simulasi Monte Carlo untuk iterasi n = 10000 sekalipun galat yang dihasilkan tidak lebih kecil dari galat yang dihasilkan metode Romberg.

***Kata Kunci**: Integrasi numerik, Galat, metode Romberg, Simulasi Monte Carlo, fuzzy.*

1. PENDAHULUAN

Menghitung volume atau luasan dari suatu bidang dimensi $\boldsymbol{R}^2$ maupun $\boldsymbol{R}^3$, dalam matematika dapat digunakan Teknik intergral. Jika suatu fungsi yang akan cari nilai hasil integralnya bentuknya rumit, maka hal tersebut biasanya akan sangat sulir jika dilakukan proses integrase dengan menggunakan kaidah-kaidah kalkulus yang bersifat analitik. Solusi dari masalah tersebut, yakni model fungsi yang kompleks atau rumit, dapat dilakukan dengan bantuan komputer dengan metode metode pendekatan yang tepat untuk dapat menyelesaikan persamaan tersebut secara efisien dan tepat. Metode numerik merupakan teknik dimana masalah matematika diformulasikan sedemikian rupa sehingga dapat diselesaikan oleh pengoperasian matematika, dimana penggunaan metode ini menghasilkan solusi hampiran yang memang tidak persis sama dengan solusi yang sebenarnya (sejati). Akan tetapi tingkat keakuratannya dapat dilihat dari galat sekecil mungkin. Operasi hitungan dalam metode numerik umumnya dilakukan dengan iterasi sehingga jumlah hitungan yang dilakukan banyak dan berulang-ulang. Oleh karena itu diperlukan bantuan program aplikasi komputer untuk melaksanakan operasi hitungan tersebut.

Metode numerik yang digunakan untuk memecahkan persoalan integral disebut integrasi numerik. Integrasi numerik merupakan suatu metode yang digunakan untuk mendapatkan nilai-nilai hampiran dari beberapa integral tentu yang memerlukan penyelesaian numerik sebagai hampirannya.

Penyelesaian integrasi dengan metode numerik terdiri dari tiga kelompok berdasarkan proses penurunannya yaitu metode pias, metode Gauss dan metode Newton-Cotes. Metode pias seperti metode trapesium, segi empat dan titik tengah. Metode Gauss seperti Gauss Legendre 2 titik, 3 titik dampai n titik. Sedangkan metode Newton-Cotes seperti metode trapesium, metode Simpson dan metode Boole. Metode Romberg merupakan gabungan dari rumus trapesium rekursif dan Boole Rekursif yang didasarkan pada perluasan ekstrapolasi Richardson sehingga dapat memperoleh nilai integrasi yang semakin baik. Selain itu, terdapat pula sebuah metode yang menggunakan pembangkit bilangan acak yang disebut Simulasi Monte Carlo. Walaupun menggunakan bilangan acak, metode Simulasi Monte Carlo mempunyai akurasi yang cukup tinggi karena berdasarkan pada teori probabilitas dan statistik. Masalah yang akan di bahas dalam artikel ini berkaitan dengan perbedaan tingkat keakuratan antara metode Romberg dan metode Simulasi Monte Carlo pada penyelesaian integral lipat dua pada fungsi aljabar, yang dimaksudkan untuk menjelaskan perbandingan tingkat keakuratan penggunaan metode Romberg dan Simulasi Monte Carlo dalam menyelesaian integral lipat dua pada fungsi fuzzy.

2. TINJAUAN PUSTAKA

Fungsi

Suatu fungsi f merupakan suatu aturan korespondensi yang menghubungkan setiap objek x dalam suatu himpunan pertama dengan suatu nilai tunggal $f(x)$ dari suatu himpunan kedua.

Secara garis besar fungsi dibedakan menjadi dua yaitu fungsi aljabar dan fungsi transenden. Fungsi aljabar adalah fungsi yang diperoleh dari sejumlah berhingga operasi aljabar seperti penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian, perpangkatan dan penarikan akar. Adapun yang termasuk fungsi aljabar adalah fungsi polynomial, fungsi rasional dan fungsi irasional.

Integral

Integral merupakan perhitungan kebalikan dari diferensial suatu fungsi (suatu fungsi asal yang diturunkan dapat kefungsi asalnya dengan cara integral). Integral terdiri dari integral taktentu (*indefinite*) dan integral tentu (*definite*).

Misalkan f suatu fungsi yang didefinisikan pada interval tertutup $[a, b]$. Jika ada, maka dikatakan f adalah terintegrasikan pada $[a, b]$.

Lebih lanjut $\int_a^b f(x)\,dx$, $\lim_{\|p\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$ disebut Integral tentu (integral Riemann) f dari a ke b, kemudian diberikan oleh

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|p\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$$

Dalam bidang teknik, integral sering muncul dalam bentuk integral ganda dua (lipat dua) atau integral ganda tiga (lipat tiga). Integral lipat dua didefinisikan sebagai berikut:

$$\iint_A f(x,y)dA = \int_a^b \left[\int_c^d (x,y)dy\right]dx$$
$$= \int_c^d \left[\int_a^b (x,y)dx\right]dy$$

IntegrasiNumerik

Integrasi numerik adalah suatu metode yang digunakan untuk mendapatkan nilai-nilai hampiran dari beberapa integral tentu yang memerlukan penyelesaian numeric sebagai hampirannya. Terdapat tiga pendekatan dalam menurunkan rumus integral numerik. Pendekatan pertama adalah berdasarkan tafsiran geometri integral tentu. Daerah integrasi dibagi atas sejumlah pias (*strip*) yang berbentuk segiempat. Luas daerah integrasi dihampiri dengan luas seluruh pias. Integrasi numerik yang diturunkan dengan pendekatan ini digolongkan kedalam metode pias. Kaidah integrasi numerik yang dapat diturunkan dengan metode pias adalah kaidah segiempat, kaidah trapezium dan kaidah titik tengah. Pendekatan kedua adalah berdasarkan interpolasi polinomial. Disini fungsi integran $f(x)$ dihampiri dengan polinomial interpolasi $p_n(x)$. Selanjutnya, integrasi dilakukan terhadap $p_n(x)$ karena polinom lebih mudah diintegralkan daripada mengintegralkan $f(x)$. Rumus integrasi numerik yang diturunkan dengan pendekatan ini digolongkan kedalam metode Newton-Cotes, yaitu metode umum untuk menurunkan rumus integrasi numerik. Adapun beberapa kaidah integrasi numerik yang diturunkan dari metode Newton-Cotes antara lain kaidah trapesium, kaidah Simpson $\frac{1}{3}$ dan kaidah Simpson $\frac{3}{8}$. Pendekatan ketiga sama sekali tidak menggunakan titik-titik diskrit sebagaimana pada kedua pendekatan di atas. Nilai integral diperoleh dengan mengevaluasi nilai fungsi pada sejumlah titik tertentu di dalam selang [-1,1], mengalikannya dengan suatu konstanta, kemudian menjumlahkan keseluruhan perhitungan. Pendekatan ketiga ini dinamakan Kuadratur Gauss.

Integrasi pada Fungsi Fuzzy

Secara umum suatu sistem persamaan linear dapat ditulis dalam bentuk perkalian matriks $Ax = y$, dengan A adalah matriks koefisien, x adalah vector kolom dari variabel-variabel yang tidak diketahui, dan y vektor kolom dari konstanta dengan setiap unsurnya merupakan bilangan riil. Tidak semua hal dapat diketahui secara tepat atau pasti nilainya, melainkan hanya perkiraan atau interval dari nilai tersebut. Untuk menyatakan ketidakpastian tersebut digunakan bilangan *fuzzy*.

Secara umum bilangan *fuzzy* terdiri dari dua bentuk, yaitu bilangan *fuzzy* trapesium (*trapezoidal fuzzy number*) dan bilangan *fuzzy* segitiga (*triangular fuzzy number*). Bilangan *fuzzy* segitiga dinyatakan dengan $\tilde{x} = (a, b, c)$ dengan *a* indeks *fuzzy* kiri, *b* disebut pusat (*center*) dan *c* indeks *fuzzy* kanan.

Secara umum, sistem persamaan linear *fuzzy* memiliki bentuk sebagai berikut:

$$A\tilde{x} = \tilde{y}$$

Dengan A matriks nonsingular, $\tilde{x} = (x_n)$, $\tilde{y} = (\tilde{y}_n)$ merupakan vektor fuzzy.

Definisi 2.2:

Bilangan fuzzy segitiga (triangular fuzzy number) $\tilde{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ dengan a indeks fuzzy kiri, b pusat (center) dan c indeks fuzzy kanan. Bilangan fuzzy segitiga $\tilde{\boldsymbol{x}}$ dalam bentuk standar dengan fungsi keanggotaannya dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\boldsymbol{\mu_{\tilde{x}}(x) = \mu_{\tilde{x}}(x; a, b, c)} = \begin{cases} \dfrac{(\boldsymbol{x-a})}{(\boldsymbol{b-a})}, & \boldsymbol{a \le x < b} \\ \dfrac{(\boldsymbol{c-x})}{(\boldsymbol{c-b})}, & \boldsymbol{b \le x < c} \\ \boldsymbol{0}, & \boldsymbol{x \le a \; dan \; x \ge c} \end{cases}$$

Definisi 2.3:

Bilangan fuzzy $\tilde{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$ dalam bentuk parameter direpresentasikan dengan $\left(\underline{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{r}), \overline{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{r})\right)$, yang memenuhi:

$\underline{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{r})$ adalah fungsi kontinu kiri, dan tak turun terbatas pada $[\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}]$

1. $\overline{u}(r)$ adalah fungsi kontinu kiri, dan tak naik terbatas pada [0,1]
2. $\underline{u}(r) \le \overline{u}(r), 0 \le r \le 1$

Definisi integral tentu dari fungsi *fuzzy* menggunakan konsep integral Riemann. [1]

Definisi 2.4: (Definisi Integral Fuzzy)

"Diberikan f : [a,b] → $\boldsymbol{E^1}$. Untuk masing-masing partisi $\boldsymbol{P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}}$ dalam selang [a,b] dan untuk elemen $\boldsymbol{\varepsilon_i : t_{i-1} \le \varepsilon_i \le t_i,\ 1 \le i \le n}$, diberikan

$$\boldsymbol{R_p = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)(t_i - t_{i-1})}$$

Jika fungsi *fuzzy* $f(t)$ kontinu dalam matriks *D* maka integral tentu nya adalah

$$\underline{\left(\int_a^b f(t;r)\mathrm{dt}\right)} = \int_a^b \underline{f}(t;r)\mathrm{dt}$$

$$\overline{\left(\int_a^b f(t;r)\,\mathrm{dt}\right)} = \int_a^b \overline{f}(t;r)\,\mathrm{dt}$$

- Rumus trapesium

$Q_{1.1}\left(\underline{f};r\right) = \frac{h_1}{2}\left[\underline{f}(x_0;r) + \underline{f}(x_n;r)\right]$ atau

$Q_{1.1}\left(\overline{f};r\right) = \frac{h_1}{2}\left[\overline{f}(x_0;r) + \overline{f}(x_n;r)\right]$

- Ekstrapolasi Richardson

$$Q_{k.1}\left(\underline{f};r\right) = \frac{1}{2}\left[Q_{k-1,1}\left(\underline{f};r\right) + h_{k-1}\sum_{j=1}^{2^{k-2}} \underline{f}(x_0 + (2j-1)h_k)\right]$$

Atau

$$Q_{k.1}\left(\overline{f};r\right) = \frac{1}{2}\left[Q_{k-1,1}\left(\overline{f};r\right) + h_{k-1}\sum_{j=1}^{2^{k-2}} \overline{f}(x_0 + (2j-1)h_k)\right]$$

Dengan *k* = 2, 3, … , *n*

Rumus Romberg

[1] T. Allahviranloo, *Romberg Integration For Fuzzy Function*, Applied Math. And Computation 168 (2005) 866-876 (Iran : Isamic Azad University, 2005)

$$Q_{k.j}\left(\underline{f};r\right) = Q_{k.j-1}\left(\underline{f};r\right) + \frac{Q_{k.j-1}\left(\underline{f};r\right) - Q_{k-1.j-1}\left(\underline{f};r\right)}{4^{j-1}-1}$$

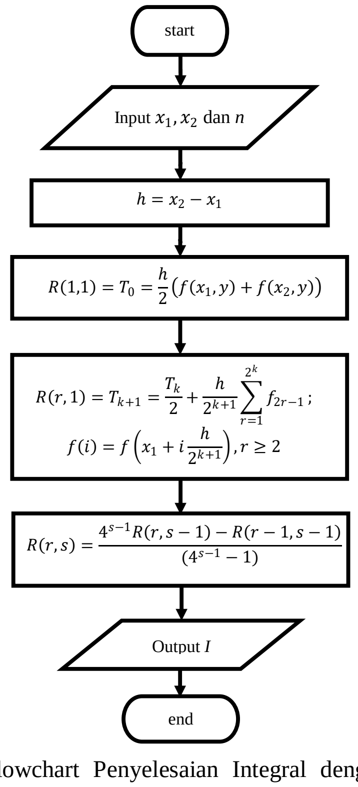
atau

$$Q_{k.j}(\overline{f};r) = Q_{k.j-1}(\overline{f};r) + \frac{Q_{k.j-1}(\overline{f};r) - Q_{k-1.j-1}(\overline{f};r)}{4^{j-1}-1}$$

Dengan $k = 2, 3, \ldots, n$

Metode Romberg

Metode Romberg merupakan metode integrasi yang didasarkan pada perluasan ekstrapolasi Richardson yang dihasilkan dari aturan trapesium rekursif. Kelemahan dari metode ini adalah harus menggunakan jumlah interval yang besar guna mencapai akurasi yang diharapkan. Salah satu cara untuk meningkatkan akurasi adalah dengan membagi dua interval secara terus menerus sampai nilai integral yang dihitung dengan 2^k dan 2^{k+1} konvergen pada suatu nilai. Proses penyelesaian integral dengan menggunakan metode Romberg dapat dilihat pada flow chart seperti pada gambar 1 berikut:



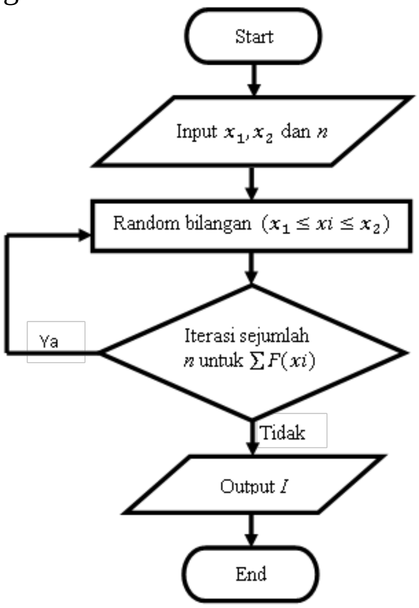
Gambar 1 Flowchart Penyelesaian Integral dengan Metode Romberg

Simulasi Monte Carlo

Metode simulasi Monte Carlo merupakan salah satu metode integrasi numerik dengan cara memasukkan sejumlah N nilai fungsi *x* secara random dengan *x* berada dalam interval integral, menurunkan secara acak nilai variabel tidak pasti secara berulang-ulang dalam simulasi model. Rumusan integrasi numerik dengan metode simulasi Monte Carlo adalah sebagai berikut:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(xi)$$

Dengan x_i adalah bilangan random yang dibangkitkan dengan harga $a \leq xi \leq b$ dan n adalah jumlah masukkan (pengulangan) banyak data yang diinginkan. Proses penyelesaian integral dengan menggunakan simulasi Monte Carlo dapat dilihat pada flow chart seperti pada gambar 2 berikut:



Gambar 2 Flow Chart Penyelesaian Integal dengan Simulasi Monte Carlo

Galat

Galat atau biasa disebut *error* dalam metode numerik adalah selisih antara yang ditimbulkan antara nilai sebenanrnya dengan nilai yang dihasilkan dengan metode numerik. Galat dibedakan menjadi tiga yaitu:

1. Galat Mutlak

Kesalahan mutlak dari suatu angka, pengukuran, atau perhitungan adalah perbedaan numerik nilai sesungguhnya terhadap nilai pendekatan yang

diberikan, atau yang diperoleh dari hasil perhitungan atau pengukuran.
Kesalahan (Error) = nilai Eksak – Nilai perkiraan
Jika a^* adalah hampiran dari nilai eksak a maka galat mutlak dari a adalah $E = |a - a^*|$ yang berarti hampiran = nilai eksak – galat

2. Galat Relatif

$$e = \frac{E}{A} = \frac{a - a^*}{a} = \frac{Galat}{Nilai\ Eksak}$$

3. Persentase Galat

Persentase galat adalah 100 kali galat relatif

$$\xi a = e^* 100\%$$

3. METODOLOGI

Prosedur Analisis

Adapun prosedur penelitian yang digunakan penulis untuk mencapai tujuan penelitian adalah sebagai berikut:

1. Memberikan contoh soal integral lipat dua dengan fungsi aljabar rasional untuk diselesaikan secara analitik,
2. Menyelesaikan contoh soal menggunakan metode Romberg dan Simulasi Monte Carlo secara numeric dengan iterasi *n* = 2 dan *n* = 4,
3. Menghitung galat dari masing-masing metode dan membandingkan hasilnya,
4. Mensimulasikan beberapa fungsi aljabar rasional dan irrasional pada program Matlab dengan menggunakan metode Romberg dan Simulasi Monte Carlo sesuai dengan *flowchart* pada BAB II,
5. Membandingkan hasil simulasi untuk *n* = 2 dan *n* = 4. Kemudian menganalisis galat mutlak dari kedua metode untuk mendapatkan metode yang paling akurat.

4. PEMBAHASAN

Diberikan contoh soal integral *fuzzy* sebagai berikut:

$$\int_0^2 \tilde{k}x^4 dx, \quad \tilde{k} = (r, 2 - r)$$

solusi eksak dari contoh di atas adalah $\frac{32}{5}(r, 2 - r)$

Penyelesaian secara Numerik

Metode Romberg:

Untuk n = 4

$$h_1 = 2.\ Q_{1.1}\left(\underline{f}; r\right) = \frac{h_1}{2}\left[\underline{f}(x_0; r) + \underline{f}(x_1; r)\right]$$
$$= \frac{2}{2}\left[\underline{f}(0; r) + \underline{f}(2; r)\right]$$
$$= 1\left[\underline{f}(0) + \underline{f}(2)\right]$$
$$= 16\, r$$

$$h_2 = 1.\ Q_{2.1}\left(\underline{f}; r\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left[Q_{1.1}\left(\underline{f}; r\right) + h_1\underline{f}(x_0 + h_2)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[16\, r + 2\underline{f}(0 + 1)\right]$$

$$Q_{2.1}\left(\underline{f}; r\right) = \frac{1}{2}[16\, r + 2\, r] = 9\, r$$

$$h_3 = \frac{1}{2}.\ Q_{3.1}\left(\underline{f}; r\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left[Q_{2.1}\left(\underline{f}; r\right) + h_2\left[\underline{f}(x_0 + h_3) + \underline{f}(x_0 + 3h_3)\right]\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[9\, r + 1\left[\underline{f}\left(0 + \frac{1}{2}\right) + \underline{f}\left(0 + \frac{3}{2}\right)\right]\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[9\, r + \frac{1}{32}r + \frac{81}{32}r\right]$$
$$= 7.0625\, r$$

$$h_4 = \frac{1}{4}.\ Q_{4.1}\left(\underline{f}; r\right)$$
$$= \frac{1}{2}[Q_{3.1}\left(\underline{f}; r\right) + h_3[\underline{f}(x_0 + h_4) + \underline{f}(x_0 + 3h_4) + \underline{f}(x_0 + 5h_4) + \underline{f}(x_0 + 7h_4)]]$$
$$= 3.5312\, r + 0.0010\, r + 0.0791\, r + 0.6104\, r + 2.3447\, r$$
$$= 6.5664\, r$$

$$Q_{2.2}\left(\underline{f}; r\right) = Q_{2.1}\left(\underline{f}; r\right) + \frac{Q_{2.1}\left(\underline{f}; r\right) - Q_{1.1}\left(\underline{f}; r\right)}{4 - 1}$$
$$= 9\, r + \frac{9\, r - 12\, r}{3}$$
$$= 9\, r - 2.3333\, r$$
$$= 6.6667\, r$$

$$Q_{3.2}\left(\underline{f};r\right) = Q_{3.1}\left(\underline{f};r\right) + \frac{Q_{3.1}\left(\underline{f};r\right) - Q_{2.1}\left(\underline{f};r\right)}{4-1}$$

$$= 7.0625\,r + \frac{7.0625\,r - 9\,r}{3}$$

$$= 6.4167\,r$$

$$Q_{4.2}\left(\underline{f};r\right) = Q_{4.1}\left(\underline{f};r\right) + \frac{Q_{4.1}\left(\underline{f};r\right) - Q_{3.1}\left(\underline{f};r\right)}{4-1}$$

$$= 6.5664\,r + \frac{6.5664\ r - 7.0625\,r}{3}$$

$$= 6.4010\,r$$

$$Q_{3.3}\left(\underline{f};r\right) = Q_{3.2}\left(\underline{f};r\right) + \frac{Q_{3.2}\left(\underline{f};r\right) - Q_{2.2}\left(\underline{f};r\right)}{16-1}$$

$$= 6.4167\,r + \frac{6.4167\,r - 6.6667\,r}{15}$$

$$= 6.4000\,r$$

$$Q_{4.3}\left(\underline{f};r\right) = Q_{4.2}\left(\underline{f};r\right) + \frac{Q_{4.2}\left(\underline{f};r\right) - Q_{3.2}\left(\underline{f};r\right)}{16-1}$$

$$= 6.4010\,r + \frac{6.4010\,r - 6.4167\,r}{15}$$

$$= 6.4000\,r$$

$$Q_{4.4}\left(\underline{f};r\right) = Q_{4.3}\left(\underline{f};r\right) + \frac{Q_{4.3}\left(\underline{f};r\right) - Q_{3.3}\left(\underline{f};r\right)}{64-1}$$

$$Q_{4.4}\left(\underline{f};r\right) = 6.4000\,r + \frac{6.4000\,r - 6.4000\,r}{63}$$

$$= 6.4000\,r$$

Dan

$$h_1 = 2.\ Q_{1.1}(\overline{f};r) = \frac{h_1}{2}\left[\overline{f}(x_0;r) + \overline{f}(x_1;r)\right]$$

$$= \frac{2}{2}\left[\overline{f}(0;r) + \overline{f}(2;r)\right]$$

$$= 1\left[\overline{f}(0) + \overline{f}(2)\right]$$

$$= 16\ (2-r)$$

$$h_2 = 1.\ Q_{2.1}(\overline{f};r) = \frac{1}{2}\left[Q_{1.1}(\overline{f};r) + h_1\overline{f}(x_0+h_2)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[16\ (2-r) + 2\overline{f}(0+1)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[16\ (2-r) + 2\ (2-r)\right]$$

$$= 9\ (2-r)$$

$$h_3 = \frac{1}{2}.\ Q_{3.1}(\overline{f};r) = \frac{1}{2}\left[Q_{2.1}(\overline{f};r) + h_2\left[\overline{f}(x_0+h_3) + \overline{f}(x_0+3h_3)\right]\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[9\ (2-r) + 1\left[\overline{f}\left(0+\frac{1}{2}\right) + \underline{f}\left(0+\frac{3}{2}\right)\right]\right]$$

$$Q_{3.1}(\overline{f};r) = \frac{1}{2}\left[9\ (2-r) + \frac{1}{32}(2-r) + \frac{81}{32}(2-r)\right]$$

$$= \frac{226}{32}\ (2-r)$$

$$= 7.0625\ (2-r)$$

$$h_4 = \frac{1}{4}.\ Q_{4.1}(\overline{f};r) = \frac{1}{2}[Q_{3.1}(\overline{f};r) + h_3[\overline{f}(x_0+h_4) + \overline{f}(x_0+3h_4) + \overline{f}(x_0+5h_4) + \overline{f}(x_0+7h_4)]]$$

$$= \frac{1}{2}\left[7.0625\ (2-r) + \frac{1}{2}\left[\overline{f}\left(\frac{1}{4}\right) + \overline{f}\left(\frac{3}{4}\right) + \overline{f}\left(\frac{5}{4}\right) + \overline{f}\left(\frac{7}{4}\right)\right]\right]$$

$$= 6.5664\ (2-r)$$

$$Q_{2.2}(\overline{f};r) = Q_{2.1}(\overline{f};r) + \frac{Q_{2.1}(\overline{f};r) - Q_{1.1}(\overline{f};r)}{4-1}$$

$$= 9\ (2-r) + \frac{9\ (2-r) - 12\ (2-r)}{3}$$

$$= 6.6667\ (2-r)$$

$$Q_{3.2}(\overline{f};r) = Q_{3.1}(\overline{f};r) + \frac{Q_{3.1}(\overline{f};r) - Q_{2.1}(\overline{f};r)}{4-1}$$

$$= 7.0625\ (2-r) + \frac{7.0625\ (2-r) - 9\ (2-r)}{3}$$

$$= 6.4167\ (2-r)$$

$$Q_{4.2}(\overline{f};r) = Q_{4.1}(\overline{f};r) + \frac{Q_{4.1}\left(\overline{f};r\right) - Q_{3.1}(\overline{f};r)}{4-1}$$

$= 6.5664\ (2-r) - 0.1654\ (2-r)$
$= 6.4010\ (2-r)$

$$Q_{3.3}(\overline{f};r) = Q_{3.2}(\overline{f};r) + \frac{Q_{3.2}(\overline{f};r) - Q_{2.2}(\overline{f};r)}{16-1}$$

$= 6.4167(2-r) - 0.0167\ (2-r)$
$= 6.4000(2-r)$

$$Q_{4.3}(\overline{f};r) = Q_{4.2}(\overline{f};r) + \frac{Q_{4.2}(\overline{f};r) - Q_{3.2}(\overline{f};r)}{16-1}$$

$$= 6.4010(2-r) + \frac{6.4010\ (2-r) - 6.4167\ (2-r)}{15}$$

$= 6.4010\ (2-r) - 0.0010\ (2-r)$
$= 6.4000(2-r)$

$$Q_{4.4}(\overline{f};r) = Q_{4.3}(\overline{f};r) + \frac{Q_{4.3}(\overline{f};r) - Q_{3.3}(\overline{f};r)}{64-1}$$

$= 6.4000\ (2-r) - 0\ (2-r)$
$= 6.4000\ (2-r)$

Jika disajikan dalam bentuk tabel akan terlihat hasilnya sebagai berikut:

Tabel 4.11 Hasil integrasi Romberg dengan fungsi *fuzzy*

R(r,s)	1	2	3	4
1	16.0000 (r,2-r)			
2	9.0000 (r,2-r)	6.6667 (r,2-r)		
3	7.0625 (r,2-r)	6.4167 (r,2-r)	6.4000 (r,2-r)	
4	6.5664 (r,2-r)	6.4010 (r,2-r)	6.4000 (r,2-r)	6.4000 (r,2-r)

Simulasi Monte Carlo

a. Fungsi integran yang didefinisikan $\tilde{k}x^4, \quad \tilde{k} = (r, 2-r)$
b. Batas bawah daerah integrasi $y_1 = 0$. batas atas daerah integrasi $y_2 = 2$
c. Untuk iterasi n = 4
   1. Membangkitkan 4 buah data (x_i) dari 0 sampai 1 pada Matlab
      Misalkan
      $x_i = 1.3575\ 1.5155\ 1.4863\ 0.7845$
   2. Mensubstitusikan masing-masing nilai x_i pada fungsi integran:

$x_1 = \tilde{k}(1.3575)^4 = 3.3959\ (r, 2-r)$
$x_2 = \tilde{k}(1.5155)^4 = 5.2750\ (r, 2-r)$
$x_3 = \tilde{k}(1.4863)^4 = 4.8801\ (r, 2-r)$
$x_4 = \tilde{k}(0.7845\ )^4 = 0.3788\ (r, 2-r)$

3. Menjumlahkan nilai x_i :

$$\sum_{i=0}^{4} x_i = 3.3959\ (r, 2-r) + 5.2750\ \ (r, 2-r) + 4.8801\ (r, 2-r) + 0.3788\ (r, 2-r)$$

$= 13.9298\ (r, 2-r)$

4. Menghitung nilai integrasi I :

$$I = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n} x_i$$

$$= \frac{2-0}{4}\ x\ 13.9298\ (r, 2-r)$$

$= 6.9649\ (r, 2-r)$

Perhitungan Galat

Metode Romberg

Berdasarkan perhitungan yang telah dilakukan diperoleh galat mutlak dari metode Romberg untuk n = 4 yaitu sebagai berikut:

$\varepsilon_R = |I - I'|$
$\varepsilon_R = |6.4000(r, 2-r) - 6.4000(r, 2-r)|$
$= 0$

Metode Simulasi Monte Carlo

Berdasarkan perhitungan yang telah dilakukan diperoleh galat mutlak dari metode Simulasi Monte Carlo ntuk n = 4 yaitu sebagai berikut:

$\varepsilon_{MC} = |I - I'|$
$\varepsilon_{MC} = |6.4000(r, 2-r) - 6.9649(r, 2-r)|$
$= 0.5649(r, 2-r)$

5. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah dilakukan dapat disimpulkan bahwa pada penyelesaian integral, baik integral lipat dua dengan fungsi aljabar yang berbentuk rasional dan irrasional, metode Romberg jauh lebih akurat dibandingkan dengan metode Simulasi Monte Carlo. Hal ini dibuktikan dengan nilai galat mutlak yang dihasilkan metode Romberg jauh lebih kecil dibandingkan dengan metode Simulasi Monte Carlo.

.

6. DAFTAR PUSTAKA

Ammar, Muhammad. *Solusi Penyelesaian Integral Lipat Dua dengan Menggunakan Metode Romber*. Makassar: UIN Alauddin. 2009.

Ardi, Pujiyanta. *Komputasi Numerik dengan Matlab.* Yogyakarta: Graha Ilmu. 2007

Arhami, Muhammad dkk. *Pemrograman MATLAB*. Yogyakarta: ANDI, 2012.

Away, Gunaidi Abdia. *the Shorcut of Matlab Programming*. Bandung: Informatika Bandung, 2006.

Elhasany, Zain. *Contoh Daftar Pustaka Makalah Dan Skripsi*, Artikel Ilmiah Lengkap, diakses dari http://www.scribd.com/doc/92181730/METODE-NUMERIK#scribd, pada tanggal 11 Oktober 2015 pukul 21.11

Ermawati, Rahayu Puji, Zuhairo F. *Perbandingan Solusi Numerik Integral Lipat Dua Pada Fungsi Aljabar Dengan Metode Romberg Dan Simulasi Monte Carlo.* Jurnal MSA Vol. 5. No. 1. Makassar: UIN Alauddin Makassar.

Haryono, Nugroho agus. *Perhitungan Integral Lipat Menggunakan Metode Monte Carlo*. Jurnal Informatika vol. 5 no. 2. Yogyakarta: Universitas Kristen Duta Wacana. 2009.

Hernadi, Julan. *Matematika Numerik Dengan* Implementasi *MATLAB*. Yogyakarta: ANDI. 2012.

Ilham, Muhammad. *Modul 3 Integrasi Numerik*. Bandung: Institut Teknologi Bandung. 2014.

Kosasih, Buyung. *Komputasi Numerik Teori dan Aplikasinya.*Yogyakarta: ANDI. 2006.

Munir, Rinaldi. *Metode Numerik Revisi Kedua*. Bandung: Informatika Bandung. 2008.

Rahayu Puji, *Perbandingan Solusi Numerik Metode Romberg Dan Simulasi Monte Carlo Pada Penyelesaian Integral*. Skripsi. UIN Alauddin Makassar. 2016

Sahid, *Pengantar Komputasi Numerik dengan MATLAB*. Yogyakarta: ANDI. 2005.

Sangadji, *Metode Numerik.* Yogyakarta: Graha Ilmu. 2008.

Setiawan, Agus. *Pengantar Metode Numerik*. Yogyakarta: ANDI. 2006.

Supangat, Andi. *Matematika untuk Ekonomi dan Bisnis*. Jakarta: Prenada Media Grup. 2006.

Apendiks

Tabel 1. Perbandingan galat metode Romberg dan Simulasi Monte Carlo pada Simulasi integral dengan fungsi *fuzzy* berbentuk $\tilde{k}x^m$

No.	Fungsi	Nilai Eksak	Metode Romberg		Simulasi Monte Carlo	
			n = 2	n = 4	n = 2	n = 4
1	$\int_0^2 (r, 2-r)x^4 dx$	$6.4000(r, 2-r)$	$6.6667(r, 2-r)$	$6.4000(r, 2-r)$	$8.0629(r, 2-r)$	$14.4799(r, 2-r)$
2	$\int_0^1 (r-1, 1-r)x^2 dx$	$\frac{1}{3}(r-1,1-r)$	$0.3333(r-1,1-r)$	$0.3333(r-1,1-r)$	$0.0800(r-1,1-r)$	$0.4507(r-1,1-r)$
3	$\int_{-1}^{-2} (r-1, 1-r)x^2 dx$	$\frac{3}{2}(r-1,1-r)$	$-2.3333(r-1,1-r)$	$-2.3333(r-1,1-r)$	$-8.4377(r-1,1-r)$	$-7.9362(r-1,1-r)$