

УДК 533.6.011.8:532.525.2

## Исследование неустойчивости Тейлора-Гертлера в струях с помощью кинетического подхода

Ровенская О. И.<sup>1,\*</sup>, Аристов В. В.<sup>1</sup>,  
Фархутдинов Т. И.<sup>2</sup>

\*[olga\\_rovenskaya@mail.ru](mailto:olga_rovenskaya@mail.ru)

<sup>1</sup>Федеральный исследовательский центр «Информатика  
и управление» РАН, Москва, Россия

<sup>2</sup>Московский физико-технический институт, Москва, Россия

---

С помощью прямого метода решения S-модельного кинетического уравнения Больцмана численно исследуются течения в сверхзвуковых нерасчетных струях. Алгоритм решения основан на явно-неявной схеме и для повышения эффективности распараллелен с помощью MPI (Message Passing Interface). Расчеты выполнены на суперкомпьютере MVS-100K. Изучается влияние геометрии отверстия и степени разреженности газа на механизм возникновения неустойчивости Тейлора-Гертлера. Показано, что для течений при больших числах Кнудсена (малых числах Рейнольдса) неустойчивость не возникает. При переходе к закритическим режимам (малые числа Кнудсена) в поле течения возникает система продольных вихрей, соответствующая неустойчивости Тейлора-Гертлера, что согласуется с теоретическим и опытным данными. Кроме того, при наличии дополнительного возмущающего фактора – шероховатости по периметру отверстия, обнаружена потеря поперечной симметрии струи вниз по потоку.

**Ключевые слова:** сверхзвуковые нерасчетные струи, кинетическое уравнение, неустойчивость Тейлора-Гертлера

---

### Введение

В последние годы математическое моделирование сверхзвуковых течений сжимаемого газа вызывает большой интерес и с точки зрения возможных приложений, и в теоретическом плане, поскольку различные явления особенно в закритическом режиме еще недостаточно изучены. Кроме того, ранее теоретически обоснованное утверждение о сложном характере неустойчивости в струйных сверхзвуковых нерасчетных течениях, где благодаря вогнутым линиям тока возможно образование системы вихрей Тейлора-Гертлера, было подтверждено во многих экспериментах. Например, в [1-9] обнаружены и исследованы системы таких парных продольных вихрей в сверхзвуковых струях при различных

условиях: в широком диапазоне числа Маха, коэффициента нерасчетности, а также с учетом возмущающих факторов в соплах.

Рассмотрение подобных течений в различных режимах на основе кинетического подхода является сравнительно новым. Использование кинетической теории обусловлено различными причинами. Здесь важно продемонстрировать особенности явлений при переходе от режима газа в разреженном состоянии к сплошнородному. Сложный характер перехода, различные проявления неустойчивости и возможность появления затем турбулентности заставляют привлекать аппарат кинетических уравнений, которые позволяют адекватно (хотя и с большими затратами компьютерных вычислительных ресурсов) описывать такие режимы. Более того, можно надеяться, что кинетический подход позволит (хотя это требует еще тщательной и всесторонней проверки) моделировать те черты турбулентных течений, которые не удастся подробно описать на основе сплошнородных уравнений. В особенности это относится к сверхзвуковым течениям сжимаемого газа. Цель настоящей работы описать средствами кинетической теории газов переход в нерасчетной сверхзвуковой свободной струе от докритических к закритическим режимам, выявляя по возможности ожидаемый характер тейлор-гёртлеровской неустойчивости и сравнить (по крайней мере качественно) численные решения с экспериментом и расчетами других авторов.

Следует заметить, что кинетические подходы, основанные на прямом методе [10] решения уравнения Больцмана и/или некоторых его упрощенных модификаций [11], успешно применяются для изучения различных видов неустойчивости [12-16]. Вследствие того что рассматриваемая проблема имеет принципиальный трехмерный характер, а также численной сложности прямого решения уравнения Больцмана в настоящей работе используется  $S$ -модельное уравнение [11], которое обеспечивает правильное число Прандтля и тем самым позволяет получить реалистичную картину течения. В дальнейшем, для исследования наиболее интересных с физической точки зрения результатов, предполагается привлечь полное уравнение Больцмана. Рассматривается простой одноатомный однокомпонентный газ. Отметим важные черты прямого решения кинетического уравнения: здесь удается за реальное время счета получить решения в широком диапазоне числа Кнудсена, что необходимо при исследовании потери устойчивости течений для перехода через критический режим. Это связано, в частности с использованием явно-неявных (по правой части) разностных схем, что обеспечивает устойчивость схем в условиях жесткости разностной системы при малых числах Кнудсена. Это позволяет использовать величины шагов по времени, которые несильно меняются в зависимости от характера разреженности течения. Можно заметить, что известные схемы прямого статистического моделирования испытывают определенные трудности при исследовании течений для слабо разреженного газа.

Первые попытки моделировать неустойчивость в струйных течениях с помощью прямого метода решения кинетического уравнения Больцмана были сделаны в [15, 16]. Однако из-за ограниченности машинных ресурсов в работах [15, 16] рассматривалась

только четверть поперечного сечения струи. В представленной работе с использованием современных суперкомпьютеров изучается полное сечение струи, что позволяет надеяться описать подробную картину тейлор-гётрлеровской неустойчивости и обнаружить возможную потерю поперечной симметрии вниз по потоку.

В [15, 16] показано, что разреженность газа имеет большое влияние на возникновение тейлор-гётрлеровской неустойчивости. При исследовании струйных течений было продемонстрировано, что в разреженном режиме поля течений в поперечном разрезе носят дивергентный характер, т.е. завихренность отсутствует. При уменьшении числа Кнудсена начинают появляться системы продольных вихрей.

Многочисленные иллюстрации, полученные в настоящей работе при различных условиях течения, демонстрируют возникновение и развитие вихревой картины, что качественно соответствует известным экспериментальным данным для аналогичных течений. Вниз по потоку вихревая система постепенно размывается и течение в поперечном сечении приобретает изотропный характер. При этом обнаруживаются и некоторые черты потери симметрии, что фиксируется не только по полям течения, но и с помощью вычисленной завихренности. В частности, обнаружено, что картина течения зависит от геометрии отверстия, а также степени разреженности газа.

## 1. Постановка задачи и численный метод

Численно моделируется истечение моноатомного газа из отверстий с различной геометрией в затопленное пространство. Следуя работе [17] расчетная область задается в виде усеченной пирамиды, в сечении  $x = 0$  которой расположено отверстие размера  $h$  (для примера на Рис. 1 приведено квадратное отверстие). Сечение  $Oxy$ , показанное на Рис. 2а, представляет собой трапецию с высотой  $0 \leq x \leq 15h$ , расширяющуюся вдоль оси струи  $Ox$ . В сечении  $x = 15h$   $Oy$  меняется от  $-10.66h$  до  $10.66h$ , в сечении  $x = 0$  в зависимости от геометрии отверстия от  $-2h$  до  $2h$  или от  $-4h$  до  $4h$ .  $Oz$  направлена по нормали к плоскости  $Oxy$  и меняется от  $-4h$  до  $4h$  или от  $-5h$  до  $5h$ .

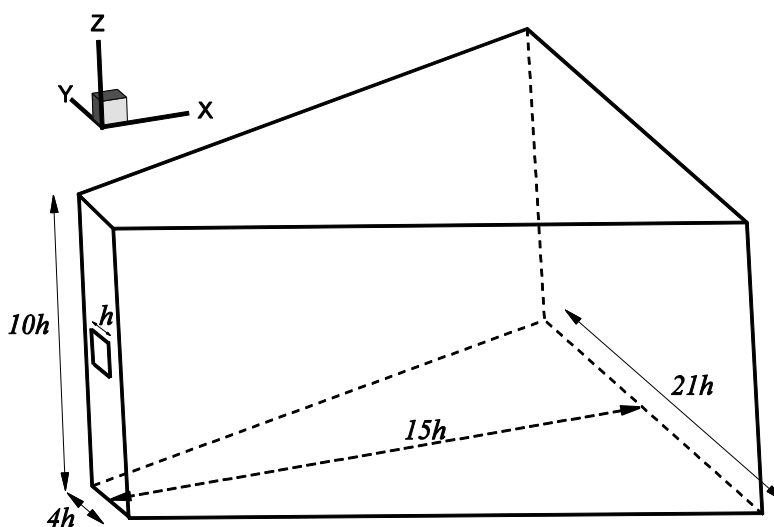


Рис. 1. Схематическое изображение расчетной области.

Отметим, что используемая геометрия расчетной области, сужающаяся в области отверстия, позволяет использовать меньшее число точек в физическом пространстве, при этом сохраняя высокое разрешение в области отверстия. Кроме того, эффект влияния размера расчетной области на поле течения специально исследовался, и выбранный размер области является компромиссом между эффективностью численных расчетов и минимизацией граничных эффектов. Используемая в расчетах сетка в сечениях  $y = 0$  и  $z = 0$  показана на Рис. 2. Размер сетки в сечении  $x = 0$ , определяется выбранной геометрии отверстия и детально показан на Рис. 3.

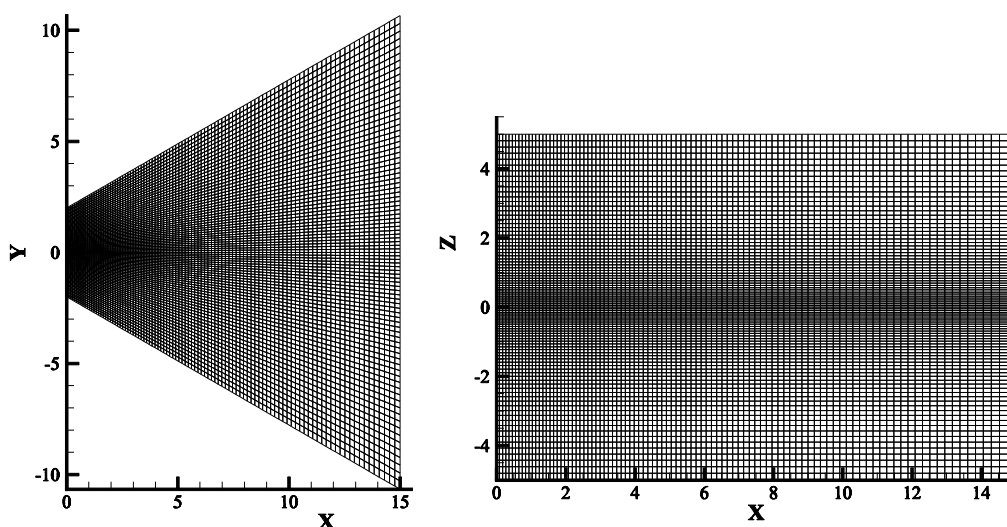


Рис. 2. Расчетная сетка в сечении: (а)  $z = 0$ , (б)  $y = 0$ .

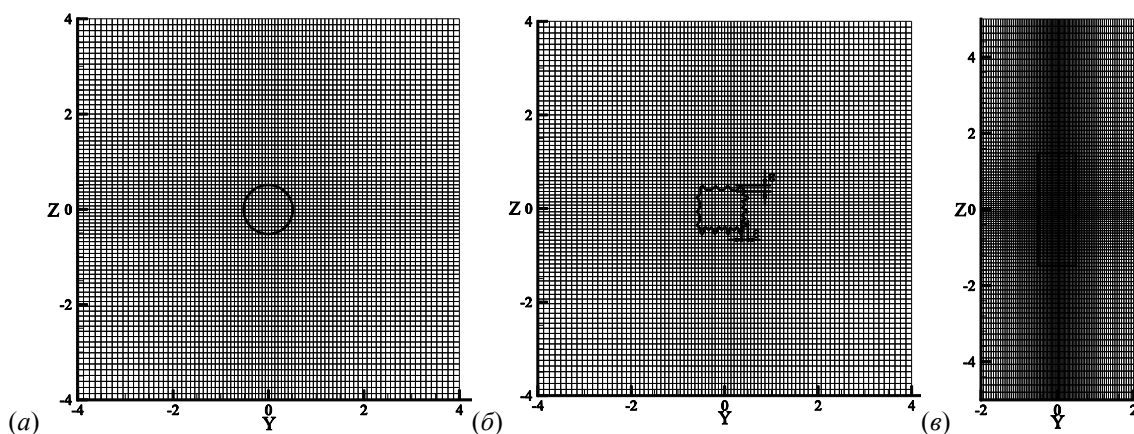


Рис. 3. Расчетная сетка в сечении  $x = 0$ : (а) круглое отверстие (приближается элементами квадратной сетки), (б) квадратное отверстие с произвольной шероховатостью (в) прямоугольное отверстие.

В кинетическом подходе состояние газа в физическом пространстве  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  в момент времени  $t$  описывается с помощью функции распределения молекул по скоростям  $f = f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ , где  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_x, \xi_y, \xi_z)$  компоненты вектора молекулярной скорости частицы в направлении  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  соответственно. Уравнение Больцмана (см., например, [10]), описывающее эволюцию функции распределения частицы  $f = f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ , имеет следующий вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = I_B(f, f), \quad (1)$$

где  $I_B(f, f)$  интеграл столкновений Больцмана.

Макроскопические параметры течения, такие как плотность  $\rho$ , средняя скорость газа  $\mathbf{V} = (u, v, w)$ , температура  $T$ , давление  $p$  и поток тепла  $\mathbf{q} = (q_x, q_y, q_z)$  вычисляются интегрированием функции распределения по всему пространству молекулярных скоростей:

$$\rho = \int f d\xi, \quad \rho \mathbf{V} = \int \xi f d\xi, \quad \rho T = \frac{1}{3} \int \mathbf{c}^2 f d\xi, \quad \mathbf{q} = \frac{1}{2} \int \mathbf{c} \mathbf{c}^2 f d\xi, \quad \mathbf{c} = \xi - \mathbf{V}. \quad (2)$$

Для упрощения численных расчетов интеграл столкновений Больцмана аппроксимируется  $S$ -моделью, обеспечивающей правильное число Прандтля для одноатомного газа  $Pr = 2/3$ :

$$I_S(f, f) = \frac{p}{\mu} \left( f_M \left( 1 + \frac{2m^2 \mathbf{q} \mathbf{c}}{15\rho(kT)^2} \left( \frac{m\mathbf{c}^2}{2kT} - \frac{5}{2} \right) \right) - f \right) = \frac{p}{\mu} (f^S - f), \quad (3)$$

$$f_M(\rho, \mathbf{V}, T) = \frac{\rho}{(2\pi kT/m)^{3/2}} \exp\left(-\frac{m\mathbf{c}^2}{2kT}\right), \quad (4)$$

где  $f_M(\rho, \mathbf{V}, T)$  максвелловская функция распределения,  $f^S$  функция распределения Шахова [11]. Несмотря на замену интеграла Больцмана упрощенной  $S$  моделью, необходимо решать сложное интегро-дифференциальное уравнение высокой размерности (в данном случае семимерное), численное решение которого требует высокоточных параллельных методов решения.

Сечение  $x = 0$  представляет собой твердую поверхность, в которой вырезано отверстие: прямоугольной или круглой, или квадратной формы. На Рис. 3а показана форма прямоугольного отверстия с отношением короткой стороны к длинной равным 3. Круглое отверстие, задается с помощью условия  $(y^2 + z^2) \leq h^2$  и приближается квадратной сеткой (см. Рис. 3б). В квадратном отверстии, на рис. 3в, задается произвольно распределенная шероховатость с относительным размером  $\varepsilon = 15\%$  от высоты отверстия  $h$ .

Для частиц, вылетающих из отверстия в расчетную область, задается максвелловская функция распределения  $f_M(\rho_0, u_0, 0, 0, T_0)$  со средней скоростью на срезе отверстия  $u_0 = Ma_0 \sqrt{\gamma RT_0}$ ,  $Ma_0$  - число Маха на срезе отверстия. Вне отверстия задаются диффузные граничные условия с полной аккомодацией на поверхности. На остальных границах счетной области задавались максвелловские функции для покоящегося газа  $f_M(\rho_\infty, 0, 0, 0, T_\infty)$  для частиц входящих в область, где  $\rho_\infty$  и  $T_\infty$  - соответственно плотность и температура в окружающей среде.

Следует отметить, что в реальности функция распределения на срезе отверстия отличается от равновесной максвелловской вследствие влияния внутренней части сопла и образующегося там пристеночного слоя, поэтому в более точной постановке необходимо моделировать также внутренние части сопла. Однако в данной работе мы сосредоточены на исследовании общего влияния геометрии отверстия на течения газа и можем пренебречь указанной неточностью.

Для обезразмеривания уравнения (1) с интегралом столкновений (3) использовались параметры газа, задаваемые в отверстии: плотность  $\rho_0$  и температура  $T_0$ , а также характер-

ный размер отверстия  $h$ . Используется модель взаимодействий упругих сфер, тогда безразмерная вязкость  $\mu = T^{0.5}$ . Следует отметить, что степень разреженности газа характеризуется числом Кнудсена  $Kn = \lambda_0/h$ , где  $\lambda_0$  - длина свободного пробега в отверстии для газа, состоящего из твердых сфер с диаметром  $\sigma$ .

Для простоты далее безразмерные величины сохраняют те же обозначения, что и размерные. Кинетическое уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \frac{8\rho\sqrt{T}}{5\sqrt{\pi}Kn} (f^S - f), \quad (5)$$

$$f^S(\rho, \mathbf{c}, T) = f_M(\rho, \mathbf{c}, T) \left( 1 + \frac{4}{5} (1 - \text{Pr}) \frac{2\mathbf{q}\mathbf{c}}{\rho T^2} \left( \frac{\mathbf{c}^2}{T} - \frac{5}{2} \right) \right), \quad (6)$$

$$f_M(\rho, \mathbf{c}, T) = \frac{\rho}{(\pi T)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\mathbf{c}^2}{T}\right). \quad (7)$$

Кинетическое уравнение (5) дискретизируется в физическом и скоростном пространствах. В скоростном пространстве строится трехмерная декартова сетка:  $\{\xi_{\Gamma}\} = (\xi_{xl}, \xi_{ym}, \xi_{zn}) = (\xi_{xk} = -V_{max} + k\Delta\xi, \quad \xi_{yl} = -V_{max} + l\Delta\xi, \quad \xi_{zm} = -V_{max} + m\Delta\xi)$  с равноотстоящими узлами;  $\Gamma = (k, l, m) = 1, \dots, \Gamma_{max}$  определяет индексы скоростных узлов,  $\Gamma_{max} = k_{max} \times l_{max} \times m_{max}$ . В трехмерном физическом пространстве использовалась неоднородная структурированная одноблочная сетка  $\mathbf{x}_I$ , где  $\mathbf{I} = (i, j, k) = (1, \dots, i_{max}, j = 1, \dots, j_{max}, k = 1, \dots, k_{max})$ . Обозначая через  $f_{\Gamma, I}^n$  аппроксимацию  $f(t^n, \xi_{\Gamma}, \mathbf{x}_I)$ , мы получим систему уравнений для сеточных величин  $f_{\Gamma, I}^n$ . Каждое уравнение системы решается численно с использованием явно-неявной схемы [13, 14]:

$$\frac{f_{\Gamma}^{n+1} - f_{\Gamma}^{n+1/2}}{\Delta t} + \xi_{\Gamma} \frac{\partial f_{\Gamma}^n}{\partial \mathbf{x}} = \frac{8\rho^{n+1/2}\sqrt{T^{n+1/2}}}{5\sqrt{\pi}Kn} (\Phi_S^{n+1/2} - f_{\Gamma}^{n+1}) \quad (8)$$

Этап переноса в уравнении (5) аппроксимируется явной конечно-объемной схемой:

$$f_{\Gamma, I}^{n+1/2} = f_{\Gamma, I}^n - \Delta t (F_{\Gamma, i+1/2, j}^n - F_{\Gamma, i-1/2, j}^n) J_I - \Delta t (F_{\Gamma, i, j+1/2}^n - F_{\Gamma, i, j-1/2}^n) J_I, \quad (9)$$

где  $J_I$  матрица Якоби, используемая для трансформации декартовой системы координат в криволинейные. В частности, потоки  $F_{\Gamma, i\pm 1/2, j}^k, F_{\Gamma, i, j\pm 1/2}^k$  вычисляются с помощью стандартного TVD метода с ограничителем в виде  $\min\text{mod}$ .

Для повышения эффективности код при решении кинетического уравнения распараллелен с помощью MPI (Message Passing Interface) в физическом пространстве. Расчеты выполнены на суперкомпьютере MVS-100K, при этом максимальное количество использованных ядер было 480.

## 2. Анализ численных результатов

Изучение струйных течений проводилось при следующих параметрах: степень нерасчётности (отношение давления на срезе сопла к давлению в окружающей среде в начальный момент времени)  $n_p = p_0/p_{\infty} = 3.16$ , число Маха на срезе отверстия  $Ma_0 = 1.4$ , чис-

ло Кнудсена в отверстии менялось в широком диапазоне. Степень нерасчётности и число Маха на срезе отверстия взяты из [18].

Численные результаты получены на неоднородной структурированной одноблочной сетке, состоящей из  $100 \times 88 \times 84$  узлов. Минимальный шаг около стенки равен 0.067. Пространство скоростей ограничено значением максимально возможной скорости  $V_{\max} = u_0 + 4\sqrt{T_0}$  и дискретизировано на однородной декартовой сетке  $20 \times 20 \times 20$ . Исследование влияния сетки в физическом пространстве на результаты расчетов проводилось с использованием более грубой сетки из  $80 \times 44 \times 42$  узлов. Максимальная разница в давлении, полученном на мелкой и грубой сетках, не превышает 2%. Шаг по времени, определяемый условием Куранта, меняется от 0.0038 до 0.025.

Рассматривается несколько геометрий отверстий: круглое отверстие (приближается элементами квадратной сетки), квадратное отверстие с произвольной шероховатостью, прямоугольное отверстие с отношением большей стороны к меньшей, равным 3.

### 2.1. Эффект разреженности газа

Разреженность газа играет важную роль и должна учитываться при изучении струйных течений. Чтобы исследовать эффект разреженности серия расчетов была выполнена для чисел Кнудсена  $Kn = 0.1, 0.001$  и  $10^{-5}$ . Рис. 4 показывает распределение давления, числа Маха, теплового потока  $q_x$  и модуля завихренности вдоль средней линии для разных величин  $Kn$ . Можно видеть, что в случае, когда газ разрежен, имеет место растекание струи, т.е. убывание средней скорости течения в продольном направлении. При этом число Маха и модуль завихренности быстро стремятся к нулю, а давление к давлению в окружающей среде. Начиная с  $Kn \geq 0.001$  вниз по течению, возникает серия скачков, которые отчетливо видны как в графике распределении давления (Рис. 4а), так и в распределении числа Маха (Рис. 4б) и потока тепла (Рис. 4г). Модуль завихренности, представленный на Рис. 4в, демонстрирует нерегулярное поведение. Следует отметить, что при дальнейшем уменьшении числа  $Kn$  значительных изменений в картине течения не наблюдается. Несмотря на то, что распределения параметров при двух меньших числах Кнудсена близки все же можно наблюдать отличия. Наибольшие различия фиксируются для потока тепла (Рис. 4г) и модуля завихренности (Рис. 4в), причем вниз по потоку эти величины в несколько раз выше для  $Kn = 10^{-5}$  по сравнению с  $Kn = 0.001$ . Вследствие высокой размерности кинетического уравнения и ограниченности машинных ресурсов на данный момент мы не можем говорить о точном количественном соответствии режиму сплошной среды. В настоящей работе не ставится целью добиться максимально возможной точности, чтобы во всех подробностях отмечать переход к режиму сплошной среды. На данный момент важно показать качественное изменение характера течения при переходе через критическое значение параметра разреженности ( $Kn \sim 0.001$ ). Как можно видеть на Рис. 4 дальнейшее уменьшение числа Кнудсена демонстрирует ожидаемое сохранение основных качественных особенностей. При этом все же отмечается и возрастание интенсивности вихревых образований. Количественное соответствие режиму сплошной среды – следующая задача.

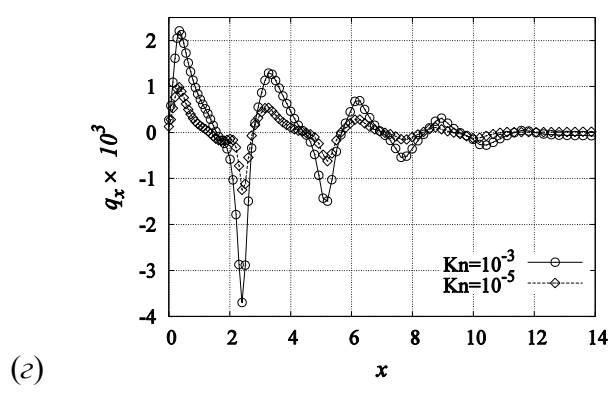
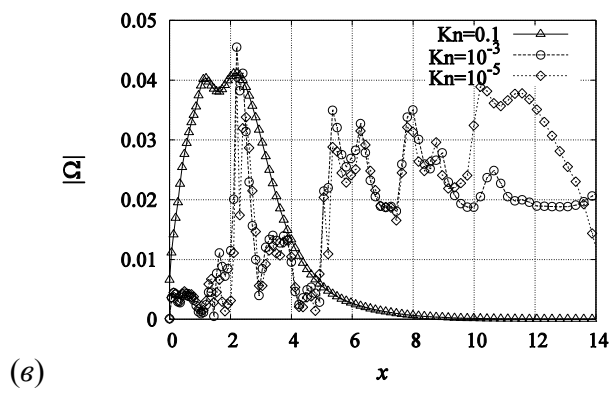
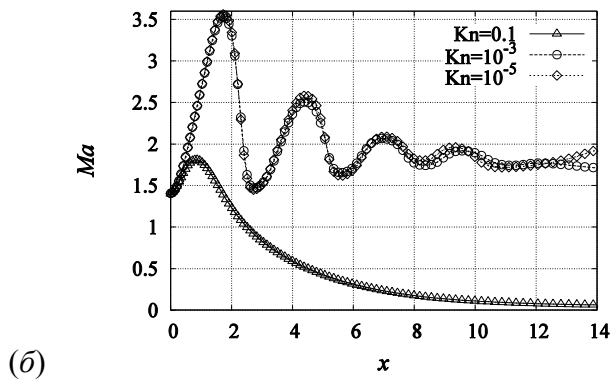
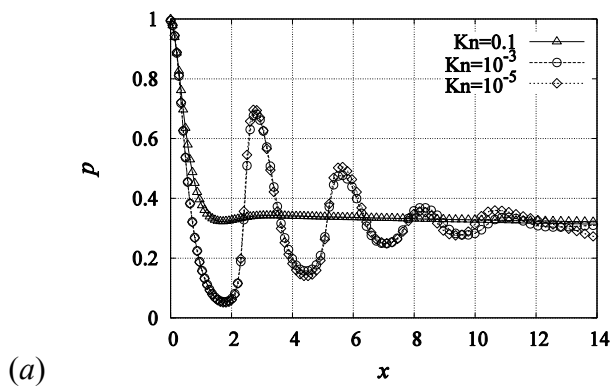
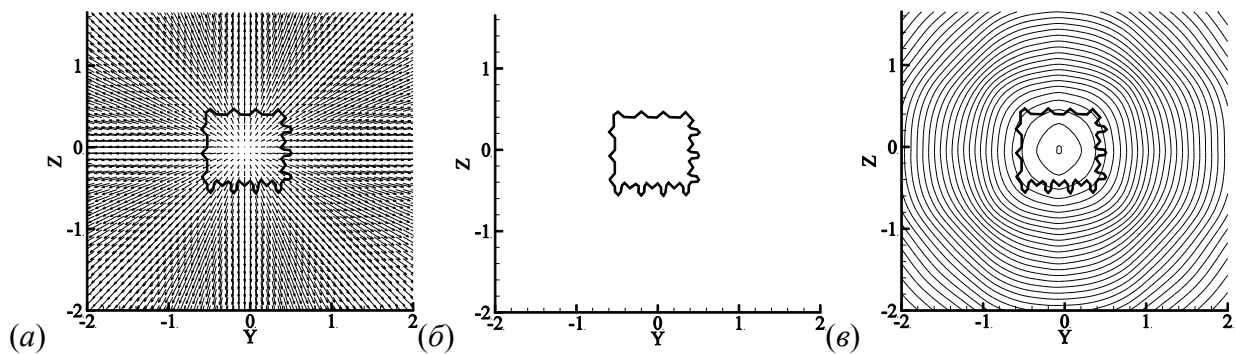


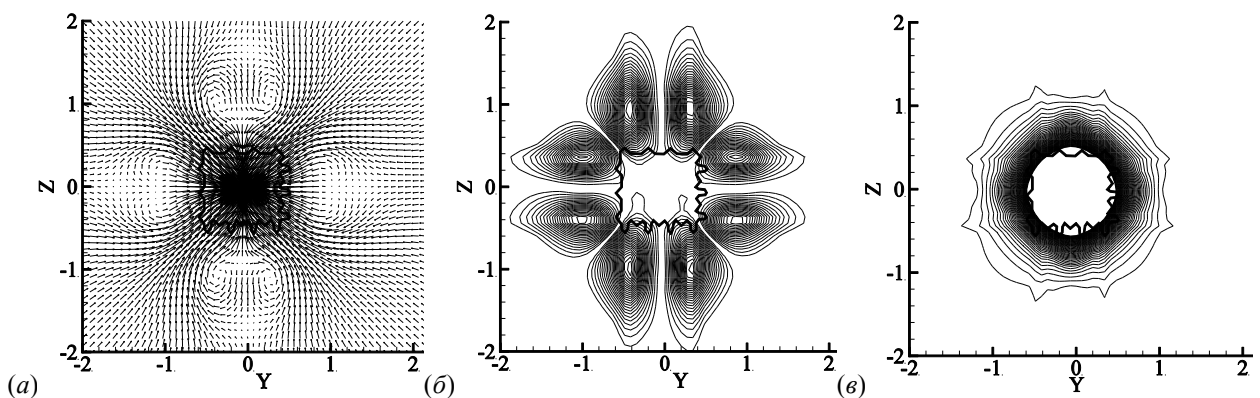
Рис. 4. Распределение давления (а), числа Маха, (б), теплового потока (в) и модуля завихренности (г) вдоль средней линии.



Рисунки 5-7 демонстрируют влияние числа Кнудсена на картину течения в поперечные сечения струи, в плоскости  $x = 5$ . Для трех чисел Кнудсена  $Kn = 0.1, 0.001$  и  $10^{-5}$  показаны векторные поля, изолинии завихренности  $\omega_x$  и давления, а также проекция отверстия в поперечном сечении струи. Когда газ разрежен (число Кнудсена  $Kn = 0.1$ ), поле течения в поперечном сечении демонстрирует полное отсутствие изолиний завихренности  $\omega_x$  (Рис. 5б). Однако, в случае  $Kn = 0.001$  и  $10^{-5}$  изолинии завихренности  $\omega_x$  демонстрируют сформированную систему вихрей. Векторные поля, показанные на рис. 6а и 7а, также в случае слабо разреженного газа представляют собой вихревую систему из 8 вихрей. Кроме того, с уменьшением числа Кнудсена изолинии давления демонстрируют нелинейное поведение (Рис. 5-7в).



**Рис. 5.** Векторное поле (а), изолинии завихренности  $\omega_x$  (б) и давления (в) в поперечном сечении  $x = 5$ :  $Kn = 0.1$ .



**Рис. 6.** Векторное поле (а), изолинии завихренности  $\omega_x$  (б) и давления (в) в поперечном сечении  $x = 5$ :  $Kn = 0.001$ .

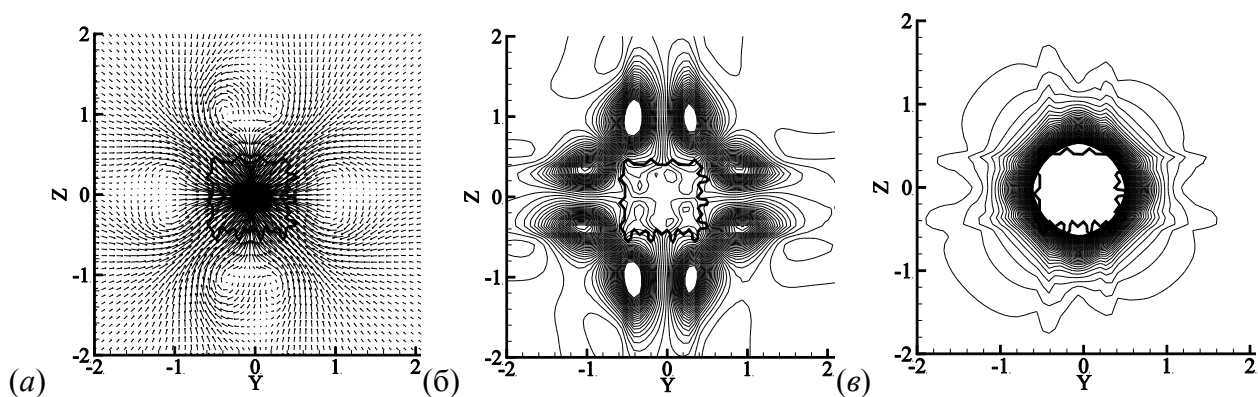


Рис. 7. Векторное поле (а), изолинии завихренности  $\omega_x$  (б) и давления (в) в поперечном сечении  $x = 5$ :  $Kn = 10^{-5}$ .

## 2.2. Прямоугольное отверстие

Изучается истечение газа из прямоугольного отверстия, с отношением большей стороны к меньшей, равным 3 при числе Кнудсена  $Kn = 10^{-5}$ . На рис. 8 и 9 показаны изолинии давления и числа Маха в плоскости  $z = 0$  и  $y = 0$ , соответственно. Так как состояние газа близко к сплошносредному, можно видеть формирование за отверстием диска Маха, а также несколько скачков уплотнения - бочек Маха.

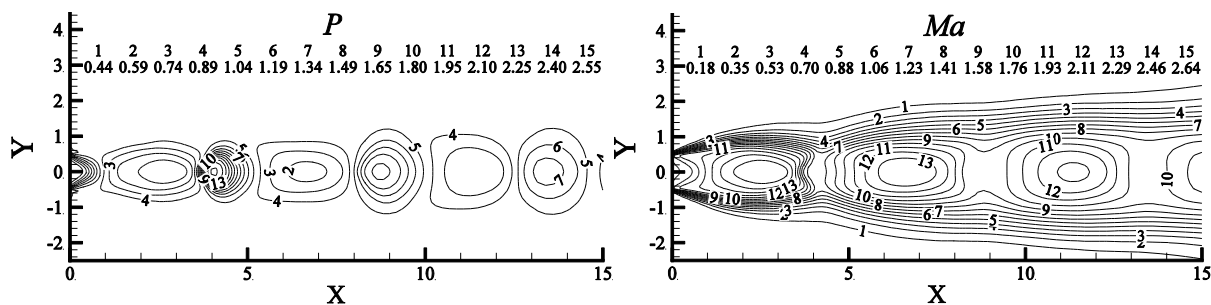


Рис. 8. Изолинии давления (справа) и число Маха (слева) в сечении  $z = 0$ .

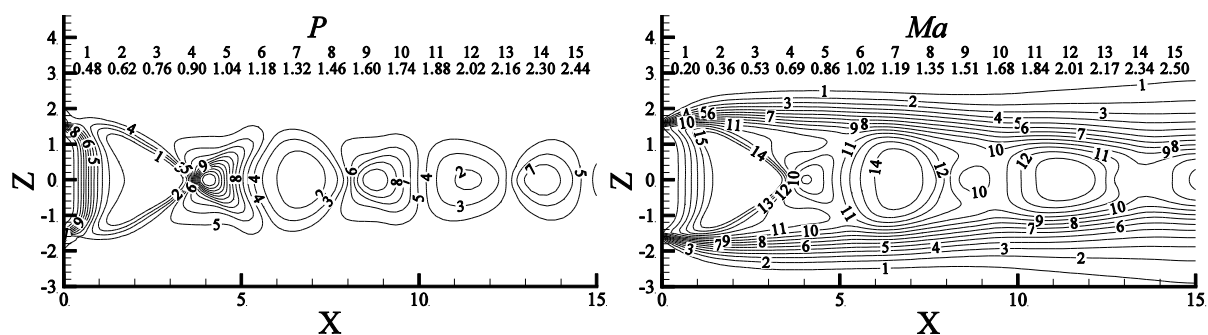


Рис. 9. Изолинии давления (справа) и число Маха (слева) в сечении  $y = 0$ .

При этом, как показано на Рис. 10, в поперечном сечении струи на некотором удалении от отверстия ( $x = 9$ ) возникает неустойчивость типа Тейлора – Гётлера. Векторное поле, Рис. 10а, а также изолинии завихренности  $\omega_x$ , Рис. 10б, демонстрируют 4 отчетливых вихря. Кроме того, на некотором удалении от углов проекции прямоугольного отверстия

различимы еще 4 вихря с противоположным направлением вектора ротора по отношению к 4 указанным. Изолинии давления на Рис. 10в показывают нелинейное поведение.

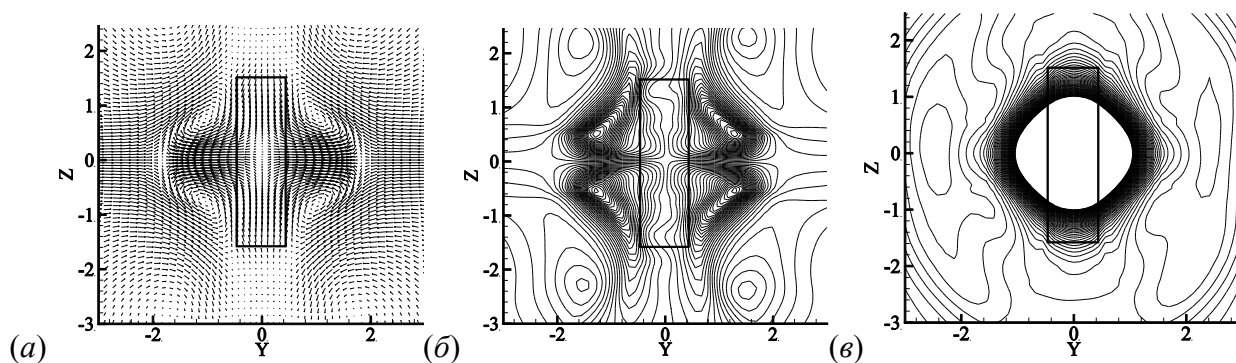


Рис. 10. Векторное поле (а), изолинии завихренности  $\omega_x$  (б) и давления (в) в поперечном сечении  $x = 9$ .

### 2.3. Круглое отверстие

В случае изменения геометрии отверстия, а именно для круглого отверстия изолинии давления и числа Маха в плоскости  $z = 0$  и  $y = 0$  демонстрируют сходное поведение: формируются скачки уплотнения за диском Маха, поэтому не приводятся здесь. В поперечном сечении картина меняется, возникает система из 8 вихрей (4 парных вихрей), как видно на Рис. 9а, б. Изолинии давления (Рис. 9в) также демонстрируют сложную структуру: образуются вихри разного размера, расположенные по периметру отверстия. Следует заметить, что далее вниз по струе система вихрей разрушается, а изолинии давления становятся гладкими.

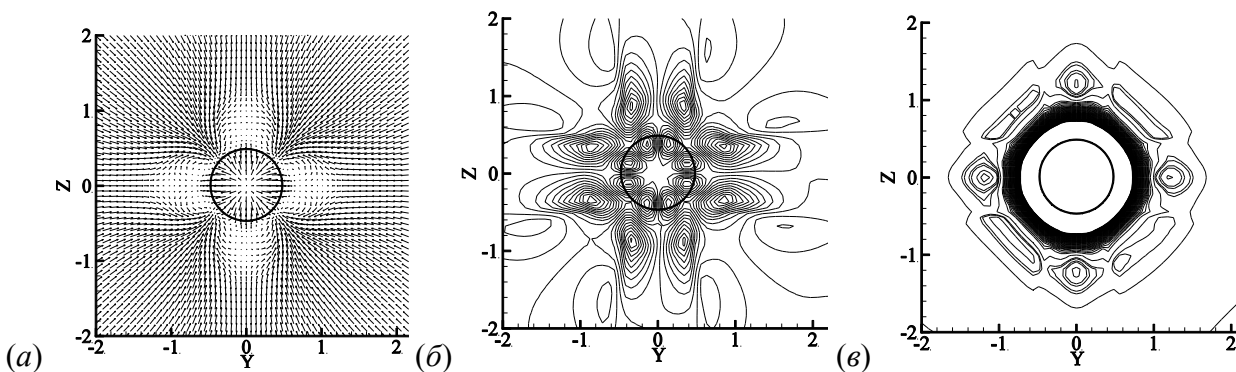


Рис. 11. Векторное поле (а), изолинии завихренности  $\omega_x$  (б) и давления (в) в поперечном сечении  $x = 4.1$ .

### 2.4. Квадратное отверстие с шероховатостью

Как и в предыдущем случае, изменения геометрии отверстия не оказывает значительного влияния на картину течения в плоскостях  $z = 0$  и  $y = 0$ . Однако в результате вне-сения дополнительных возмущающих факторов, таких, как шероховатость на поверхности отверстия, неустойчивость типа Тейлора–Гёртлера возникает выше по потоку. Согласно рис. 10 уже на расстоянии  $x = 2$  от отверстия можно наблюдать систему, состоящую из 8 вихрей, при этом изолинии давления также показывают сложный нелинейный характер.

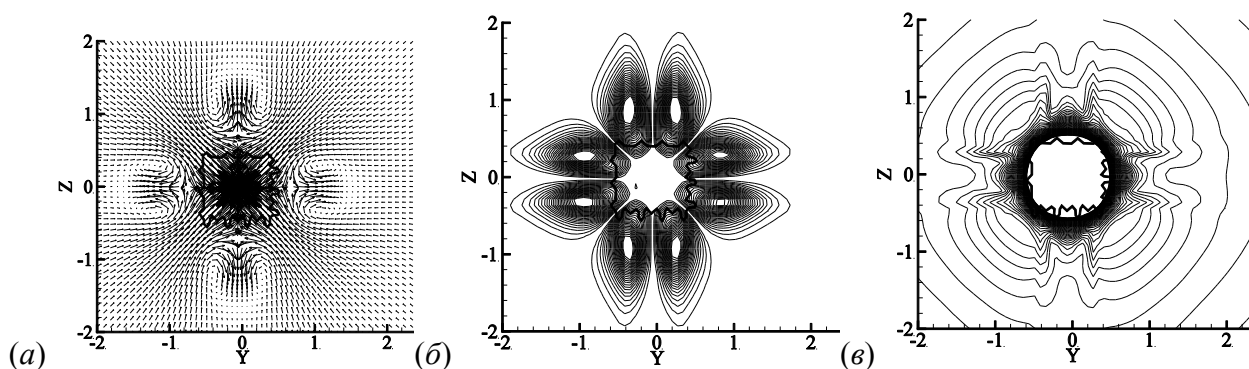


Рис. 12. Векторное поле (а), изолинии завихренности  $\omega_x$  (б) и давления (в) в поперечном сечении  $x = 2$ .

Вниз по потоку, при удалении от отверстия происходит потеря поперечной симметрии (см. Рис. 5). Возникшая вихревая система разрушается, и далее картина течения становится нерегулярной, как видно на Рис. 11 (сечение  $x = 8$ ).

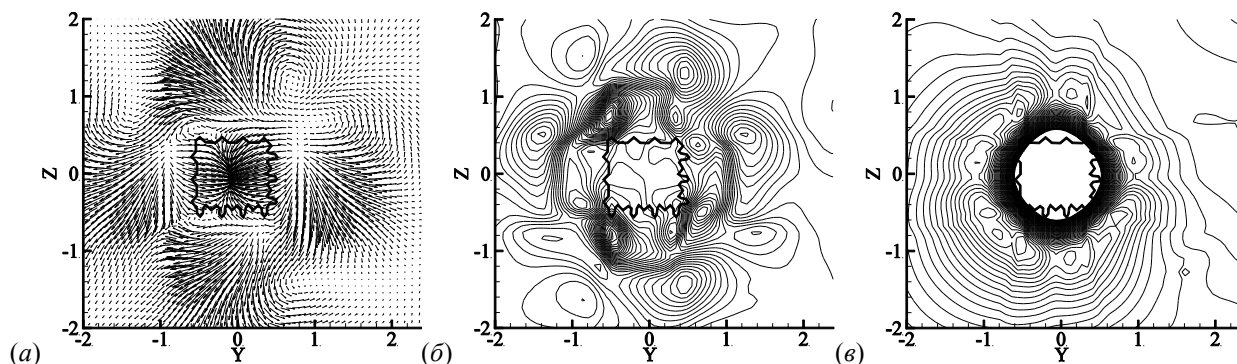


Рис. 13. Векторное поле (а), изолинии завихренности  $\omega_x$  (б) и давления (в) в поперечном сечении  $x = 8$ .

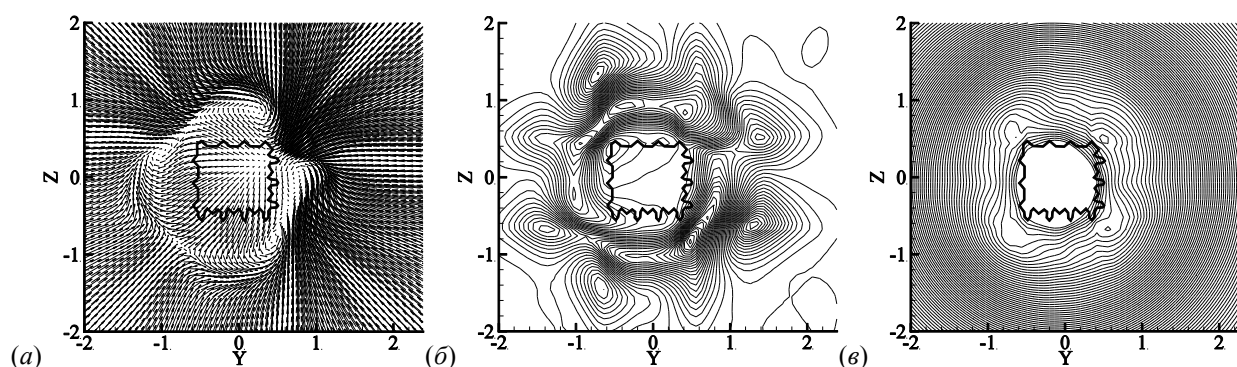


Рис. 14. Векторное поле (а), изолинии завихренности  $\omega_x$  (б) и давления (в) в поперечном сечении  $x = 11$ .

При дальнейшем удалении от отверстия, на расстоянии  $x = 11$ , можно наблюдать постепенное размытие нерегулярной картины изолиний (см. Рис. 12). Отметим, что показанное на Рис. 11 и 12 нарушение осевой симметрии течения, качественно соотносится с результатами эксперимента [6], где внесение шероховатостей в сопло приводило к подобным явлениям.

## Заключение

С помощью кинетического подхода проведено численное исследование струйных течений. В численных расчетах обнаружено, что геометрия отверстия влияет на характер формирования неустойчивости типа Тейлора-Гёртлера, при этом потеря симметрии возникает при наличии дополнительного возмущающего фактора – шероховатости по периметру отверстия. Кроме того показано что достаточно высокая разреженность газа (большие числа Кнудсена) препятствует возникновению неустойчивости Тейлора-Гёртлера, т.е. поля скоростей в поперечных сечениях струи безвихревые.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект 14-11-00870.

## Список литературы

1. Floryan J.M. On the Görtler instability of boundary layers // Progress in Aerospace Sciences. 1991. Vol. 28. Pp. 235-271.
2. Krothapalli A., Buzyna G., Lourenco L. Streamwise vortices in an underexpanded axisymmetric jet // Physics of Fluids A. 1991. Vol. 3. Pp. 1848-1851.
3. Arnette S.A., Samimy M., Elliott G.S. On streamwise vortices in high Reynolds number supersonic axisymmetric jets // Physics of Fluids A. 1993. Vol. 5. Pp. 187-202.
4. Запрягаев В.И., Киселев Н.П., Павлов А.А. Влияние кривизны линий тока на интенсивность продольных вихрей в слое смещения сверхзвуковых струй // Прикладная Механика и Техническая Физика, 2004. Т.45, №3. С. 32-43.
5. Запрягаев В.И., Солотчин А.В. Экспериментальное исследование влияния шероховатости сопла на продольные вихревые образования в сверхзвуковой струе // Прикладная Механика и Техническая Физика, 1997. Т.38, №5. С. 86-96.
6. Запрягаев В.И., Солотчин А.В. Развитие продольных вихрей при наличии микронеровностей внутренней поверхности сопла // Известия. РАН. Механика жидкости и газа, 1997. №3. С. 180-185.
7. Novopashin S.A., Perepelkin A.L. Axial symmetry loss of a supersonic preturbulent jet // Physical Letters. 1989. Vol. 135, N 4/5. Pp. 290–293. DOI: [10.1016/0375-9601\(89\)90116-3](https://doi.org/10.1016/0375-9601(89)90116-3)
8. Liepman D., Gharib M. The role of streamwise vortices in near-field entrainment of round jets // Journal of Fluid Mechanics. 1992. Vol. 245. Pp. 643–667.
9. Usami M. Teshima K. Three dimensional simulation on deformation of jet boundary in an underexpanded axisymmetric jet // Proc. 24th Intern. Symp on Rarefied Gas Dynamics. AIP Conference Proceedings. Vol. 762. Melville. New York. 2005. Pp. 401-406.
10. Aristov V.V. Direct methods for solving the Boltzmann equation and study of nonequilibrium flows. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001. 302 p.
11. Шахов Е.М. Об обобщении релаксационного кинетического уравнения Крукса // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1968. № 5. С. 142-145.

12. Ровенская О.И. Исследование эволюции вихревой системы на основе решения уравнения Больцмана // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2007. Т. 47. № 9. С. 1609-1615
13. Aristov V.V., Rovenskaya O.I., Application of the Boltzmann kinetic equation to the eddy problems // Computers & Fluids. 2011. Vol.50, Pp. 189-198. DOI: [10.1016/j.compfluid.2011.07.007](https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2011.07.007)
14. Aristov V.V., Rovenskaya O.I. Kinetic description of the turbulence in the supersonic compressible flow over a backward/forward-facing step // Computers & Fluids. 2015. Vol. 111. Pp. 150-158. DOI: [10.1016/j.compfluid.2015.01.012](https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2015.01.012)
15. Аристов В.В. Изучение устойчивых и неустойчивых свободных струйных течений на основе уравнения Больцмана // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 1998. № 2. С. 153-157.
16. Аристов В.В., Забелок С.А., Фролова А.А. Структура свободных сверхзвуковых струй, изучаемая с помощью уравнения Больцмана // Математическое моделирование. 2004. Т.16, № 6. С. 31-34.
17. Chyczewski T.S. A time dependent three dimensional numerical study of supersonic rectangular jet flow and noise using the full Navier-Stokes equations // Ph.D. thesis. 1996.
18. J.R. DeBonis J.N. Scott Large –Eddy Simulation of a Turbulent Compressible Round Jet // AIAA Journal. 2002. Vol 40, № 7. Pз. 1346-1354. DOI: [10.2514/2.1794](https://doi.org/10.2514/2.1794)

## Kinetic Approach-based Investigation of Taylor-Görtler Instability in Jets

O.I. Rovenskaya<sup>1,\*</sup>, V.V. Aristov<sup>1</sup>,

[\\*olga\\_rovenskaya@mail.ru](mailto:olga_rovenskaya@mail.ru)

T.I. Farkhutdinov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Federal Research Centre "Information and Management" of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

<sup>2</sup>Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, Russia

---

**Keywords:** supersonic underexpanded jets, kinetic equations, Taylor-Görtler instability

---

The aim of the paper is to study the unstable processes in free supersonic unstable jet flows. The direct method of solving a kinetic equation is used. For numerical solution the finite-different schemes are applied. To perform parallel computations a supercomputer MVS-100K is used. The maximum number of processors was 480. A mechanism of instability for a supercritical regime for 3D flows is investigated. Solutions of these problems are made for flows in a wide range of Knudsen number  $Kn$  with different aspect ratio of the orifice (square and rectangular forms). Mach number  $Ma = 1.4$  and a ratio of pressure in the orifice and the background pressure  $n_p = 3.16$ . Comparison with results of known experiments is made. In calculations we have observed that for a subcritical regime with the large Knudsen numbers (small Reynolds numbers) a vorticity of the flow fields in the cross sections is equal zero. For supercritical regimes a system of streamwise pair vortices is obtained. That corresponds to theoretical and experimental data. The paper studies such a system of the Taylor-Görtler vortices in different cross-sections in an initial region of a jet. It presents results of numerous computations. When modeling a roughness in the nozzle orifice it has been found that the character of instability with disturbance of the symmetry in the cross-sections downstream is complicated. Based on direct method to solve the kinetic equation the paper, for the first time, studies in detail the character of 3D instability.

Previously, these problems were solved by continuum methods and also for some variants of flows was used the Direct Simulation Monte Carlo method. A potential field of application of the given results is theoretical and experimental investigations with more detailed, in comparison with previous studies, description of unstable supersonic flows, which show the similar features of the Taylor-Görtler instability. Based on conducted study the paper comes to conclusion that the direct methods of the kinetic approach allow us to describe appropriately a mechanism of the transition to the unstable flows in supersonic jets. We believe that a further study will make it possible to show up the characteristics of turbulence in free supersonic jets.

## References

1. Floryan J.M. On the Görtler instability of boundary layers. *Progress in Aerospace Sciences*, 1991, vol. 28, pp. 235-271.
2. Krothapalli A., Buzyna G., Lourenco L. Streamwise vortices in an underexpanded axisymmetric jet. *Physics of Fluids A*, 1991, vol. 3, pp. 1848-1851.
3. Arnette S.A., Samimy M., Elliott G.S. On streamwise vortices in high Reynolds number supersonic axisymmetric jets. *Physics of Fluids A*, 1993, vol. 5, pp. 187-202.
4. Zapryagaev V.I., Kiselev N.P., Pavlov A.A. Effect of streamline curvature on intensity of streamwise vortices in the mixing layer of supersonic jets. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika = Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2004, vol. 45, no. 3, pp. 32-43. (in Russian). (English version of journal: *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2004, vol. 45, no. 3, pp. 335-343. DOI: [10.1023/B:JAMT.0000025014.73642.1d](https://doi.org/10.1023/B:JAMT.0000025014.73642.1d) ).
5. Zapryagaev V.I., Solotchin A.V. Experimental investigation of the nozzle roughness effect on streamwise vortices in a supersonic jet. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika = Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1997, vol. 38, no. 5, pp. 86-96. (in Russian). (English translation: *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1997, vol. 38, no. 1, pp. 78-86. DOI: [10.1007/BF02468276](https://doi.org/10.1007/BF02468276) )
6. Zapryagaev V.I., Solotchin A.V. Evolution of streamwise vortices at the initial part of a supersonic nonisobaric jet in the presence of microroughnesses of the internal surface of the nozzle. *Izvestiya RAN. Mekhanika Zhidkosti I Gaza*, 1997, no. 3, pp. 180-185. (in Russian). (English version of journal: *Fluid Dynamics*, 1997, vol. 32, no.3, pp. 465-469).
7. Novopashin S.A., Perepelkin A.L. Axial symmetry loss of a supersonic preturbulent jet. *Physical Letters*, 1989, vol. 135, no. 4/5, pp. 290-293. DOI: [10.1016/0375-9601\(89\)90116-3](https://doi.org/10.1016/0375-9601(89)90116-3)
8. Liepman D., Gharib M. The role of streamwise vortices in near-field entrainment of round jets. *Journal of Fluid Mechanics*, 1992, vol. 245, pp. 643-667.
9. Usami M. Teshima K. [Three dimensional simulation on deformation of jet boundary in an underexpanded axisymmetric jet]. *Proc. 24th Intern. Symp on Rarefied Gas Dynamics. AIP Conference Proceedings*, Melville, New York, 2005, vol. 762, pp. 401-406.
10. Aristov V.V. *Direct methods for solving the Boltzmann equation and study of nonequilibrium flows*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001. 302 p.
11. Shakhov E.M. Generalization of the Krook kinetic relaxation equation. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika Zhidkosti i Gaza*, 1968, no. 5, pp. 142-145. (in Russian). (English translation: *Fluid Dynamics*, 1968, vol. 3, no. 5, pp. 95-96. DOI: [10.1007/BF01029546](https://doi.org/10.1007/BF01029546) )
12. Rovenskaya O.I. Analysis of the evolution of an eddy system based on the Boltzmann equation. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki*, 2007, vol. 47, no. 9, pp. 1609-1615. (in Russian). (English translation: *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2007, vol. 47, pp. 1544-1550. DOI: [10.1134/S0965542507090151](https://doi.org/10.1134/S0965542507090151) ).



13. Aristov V.V., Rovenskaya O.I., Application of the Boltzmann kinetic equation to the eddy problems. *Computers & Fluids*, 2011, vol.50, pp. 189-198. DOI: [10.1016/j.compfluid.2011.07.007](https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2011.07.007)
14. Aristov V.V., Rovenskaya O.I. Kinetic description of the turbulence in the supersonic compressible flow over a backward/forward-facing step. *Computers & Fluids*, 2015, vol.111, pp. 150-158. DOI: [10.1016/j.compfluid.2015.01.012](https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2015.01.012)
15. Aristov V.V. Study of stable and unstable jet flows on the basis of the Boltzmann equation. *Izvestiya RAN. Mekhanika Zhidkosti I Gaza*, 1998, no. 2, pp. 153-157. (in Russian). (English version of journal: *Fluid Dynamics*, 1998, vol. 33, no. 2, pp. 280-283. DOI: [10.1007/BF02698713](https://doi.org/10.1007/BF02698713) )
16. Aristov V.V., Zabelok S.A., Frolova A.A. Structure of free supersonic jets studied by means of the Boltzmann equation. *Matematicheskoe modelirovanie*, 2004, vol.16, no. 6, pp. 31-34. (in Russian).
17. Chyczewski T.S. *A time dependent three dimensional numerical study of supersonic rectangular jet flow and noise using the full Navier-Stokes equations*. Ph.D. thesis, 1996.
18. J.R. DeBonis J.N. Scott Large-Eddy Simulation of a Turbulent Compressible Round Jet. *AIAA Journal*, 2002, vol. 40, no. 7, pp. 1346-1354. DOI: [10.2514/2.1794](https://doi.org/10.2514/2.1794)