Математика и Математическое моделирование
Сетевое научное издание
http://mathmelpub.ru ISSN 2412-5911

Ссылка на статью:
// Математика и математическое моделирование.
2018. № 04. С. 1–11

DOI: **10.24108/mathm.0418.0000121**

Представлена в редакцию: 27.07.2018

УДК 519.76

Об одном достаточном условии нерегулярности языков

Белоусов А.И.[1,*], **Исмагилов Р.С**[1]

[*]al_belous@bk.ru

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

В статье доказано достаточное условие нерегулярности языков, состоящее в том, что векторы распределения букв в словах языка принадлежат сильно отделимому отношению на множестве натуральных чисел. Достаточное условие основано на известной в теории формальных языков теореме Майхилла — Нероуда, согласно которой необходимое и достаточное условие регулярности языка состоит в конечности индекса некоторого отношения эквивалентности, определяемого языком, а свойство сильной отделимости оказывается достаточным для бесконечности соответствующего фактор-множества.

Ключевые слова: язык, регулярный язык, индекс отношения эквивалентности, арифметическое векторное пространство, прямая сумма векторных пространств, теорема Майхилла-Нероуда

Введение

Статья посвящена доказательству одного достаточного условия нерегулярности языков. Это условие связано со свойствами некоторых отношений на множестве натуральных чисел, а именно отношений, обладающих свойством, которое мы назвали сильной отделимостью. В свою очередь, это свойство связано с возможностью разложения арифметического векторного пространства в прямую сумму подпространств. Мы задаем языки в некотором конечном алфавите через свойства вектора, показывающего числа вхождений каждой буквы алфавита в слова языка и называемого нами вектором распределения букв в слове. Основной результат статьи — теорема, согласно которой язык, задаваемый таким образом, что вектор распределения букв в каждом слове языка принадлежит сильно отделимому отношению на множестве натуральных чисел, нерегулярен.

Доказательство основного результата основано на известной в теории формальных языков теореме Майхилла — Нероуда [1,2]. Теорема многократно переизлагалась в разных публикациях [3, 4], причем исследовались различные обобщения и модификации теоремы [5, 6, 7, 8]. Традиционное доказательство теоремы Майхилла — Нероуда изложено, например, в статье [9].

Теорема Майхилла — Нероуда дает в руки более мощный инструмент для анализа регулярности/нерегулярности языков, чем известная лемма о разрастании [10, 11], поскольку предлагает критерий регулярности, а не только ее необходимое условие, как лемма о разрастании. Далее, поскольку для доказательства нерегулярности языка (согласно теореме Майхилла — Нероуда) достаточно установить бесконечность некоторого фактор-множества, возникают предпосылки арифметизации лингвистической проблемы, т.е. сведения анализа языков к анализу арифметических отношений, чему и посвящена данная статья. Этот подход находится в русле исследований в теории формальных языков, устанавливающих нетривиальные связи между свойствами языков и свойствами чисел и числовых функций и отношений [12].

Также нелишне заметить, что сама проблема распознавания регулярности и нерегулярности языков весьма важна ввиду прикладного значения теории регулярных языков (разработка лексических анализаторов, поиск по ключам в базах данных и ряд других приложений; см., например [13]).

По тематике, связанной с нетривиальными свойствами регулярных языков и отношений эквивалентности, определяемых языками, следует указать на работы [14, 15, 16], а в работе [17] получен интересный результат, касающийся связи теории регулярных языков с теорией линейных пространств.

Предлагаемая статья имеет следующую структуру.

В разделе 1 формулируется и доказывается основная теорема, для чего предварительно определяются сильно отделимые отношения на множестве натуральных (неотрицательных целых) чисел и рассматривается способ определения языков через числовые отношения. Перед доказательством основной теоремы мы даем формулировку теоремы Майхилла — Нероуда и доказываем одну лемму о свойствах сильно отделимых отношений.

В разделе 2 рассматриваются некоторые примеры доказательства нерегулярности некоторых конкретных языков. Также вводится один весьма широкий класс сильно отделимых отношений, определяемый в терминах изоморфизма линейных пространств. Смысл рассмотренных примеров состоит в том, чтобы показать, как лингвистическая проблема может сводиться к проблеме арифметической. В этом и заключается эффективность инструмента анализа языков, базирующегося на доказанной основной теореме.

1. Основной результат

Прежде чем формулировать и доказывать основную теорему, необходимо ввести некоторые понятия.

Начнем с определения сильно отделимого отношения на множестве натуральных (неотрицательных целых) чисел.

Пусть $\mathbb{Q}^n$ — n-мерное арифметическое векторное пространство над полем рациональных чисел. Будем далее рассматривать аддитивную полугруппу $\mathbb{N}^n \subset \mathbb{Q}^n$ векторов, все компоненты которых являются целыми неотрицательными числами, и пусть

$I \subseteq \{1,...,n\}$. Назовем *I*-подполугруппой полугруппы $\mathbb{N}^n$ множество всех векторов, у которых все компоненты с номерами, не принадлежащими I, равны нулю. Обозначим эту подполугруппу $\mathbb{N}_I^n$. Пусть далее полугруппа $\mathbb{N}^n$ разложена в прямую сумму полугрупп: $\mathbb{N}^n = \mathbb{N}_I^n \oplus \mathbb{N}_J^n$, т.е. $I \cup J = \{1,...,n\}$ и $I \cap J = \varnothing$.

Отношение $\rho \subseteq \mathbb{N}^n$ назовем *сильно I-отделимым*, если существует бесконечное множество M_J векторов из $\mathbb{N}_J^n$, такое, что для любых двух различных векторов $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in M_J$ существует вектор $\tilde{\gamma} \epsilon \mathbb{N}_I^n$, для которого $\tilde{\gamma} + \tilde{\alpha} \in \rho$, а $\tilde{\gamma} + \tilde{\beta} \notin \rho$.

Из определения следует, что дополнение сильно *I*-отделимого отношения также будет сильно *I*-отделимым.

Векторы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ будем называть ρ-дизъюнктными, а вектор $\tilde{\gamma} \epsilon \mathbb{N}_I^n$ — разделяющим вектором.

В некоторых случаях будем говорить, что *отношение сильно отделимо по компонентам* с номерами из множества *I*, в частности, по одной какой-то компоненте.

Свойством сильной отделимости по каждой из компонент обладают следующие просто определяемые бинарных отношений.

1. Бинарное отношение $\rho_1 = \{(x,y) : x = y\}$ сильно отделимо по любой компоненте.

Действительно, какие бы два разных числа x, y мы ни взяли, $(x,x) \in \rho_1$, а $(x,y) \notin \rho_1$. В данном случае множество M_J есть множество всех натуральных (целых неотрицательных) чисел, и размерности обеих подполугрупп равны единице, а разделяющим вектором может служить любое число. Аналогично при рассмотрении отделимости по второй компоненте.

2. Аналогично устанавливается сильная отделимость следующих отношений:

$\rho_2 = \{(x,y) : x < y\}$;

$\rho_3 = \{(x,y) : \text{НОД}(x,y) = 1\}$;

$\rho_4 = \{(x,y) : \text{НОД}(x,y) \geq m > 1\}$.

3. Более сложный пример, который рассмотрим подробнее, — отношение ρ_5 произвольной арности *n*, состоящее из всех таких кортежей, в которых значения компонент с номерами i_1, …, i_k совпадают.

Рассмотрим сначала случай $k = 2$. Пусть $I = \{i_1\}$ (соответственно $J = \{1,...,n\} \setminus \{i_1\}$, и понятно, что $i_2 \in J$). В качестве множества векторов M_J возьмем все такие векторы, в которых все одноименные компоненты попарно различны (например, множество значений компоненты с заданным номером можно расположить в бесконечно возрастающую последовательность). Берем два произвольных вектора $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in M_J$. Разделяющий (одномерный) вектор $\tilde{\gamma}$ может быть тогда определен следующим образом: значение его единственной компоненты с номером i_1 совпадает со значением компоненты с номером i_2 вектора $\tilde{\alpha}$. Тогда $\tilde{\gamma} + \tilde{\alpha} \in \rho_5$, а $\tilde{\gamma} + \tilde{\beta} \notin \rho_5$.

Действительно, так как $\alpha_{i_2} \neq \beta_{i_2}$ по построению множества M_J, то у первой суммы значения компонент с номерами i_1 и i_2 совпадают, а у второго нет. Следовательно, векторы $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ ρ_5-дизъюнктны, а рассматриваемое отношение ρ_5 сильно отделимо по компоненте с номером i_1. Точно так же доказывается, что оно сильно отделимо и по компоненте с номером i_2. Можно заметить, однако, что это отношение не будет сильно отделимо по обеим компонентам одновременно.

Рассуждая подобным образом, можно доказать, что в общем случае отношение ρ_5 будет сильно отделимо по всем таким компонентам, множество номеров которых строго содержится в множестве $\{i_1,\ldots,i_k\}$. Ясно, что дополнение этого отношения, состоящее из всех таких векторов, что у них хотя бы две компоненты с номерами из множества $\{i_1,\ldots,i_k\}$ различны, также будет сильно отделимо по соответствующим компонентам.

Представляется небезынтересной задача описания сильно отделимых отношений, но эта проблема выходит за рамки данной статьи. В следующем разделе, однако, при обсуждении примеров анализа конкретных языков на предмет их нерегулярности мы рассмотрим одну конструкцию, охватывающую достаточно широкий класс сильно отделимых отношений.

Теперь перейдем к рассмотрению способа определения языков в конечных алфавитах через функции, называемые нами функциями распределения числа букв в словах языка.

Пусть $V = \{a_1,\ldots,a_n\}$ — произвольный алфавит, V^* — множество всех слов в алфавите V, а $f : V^* \to \mathbb{N}^n$ — функция, значение которой на слове $u \in V^*$ есть вектор $(m_u(a_1),\ldots,m_u(a_n))$, где через $m_u(a_i)$ обозначено число вхождений буквы a_i в слово $u \in V^*$. Этот вектор назовем вектором распределения числа букв в слове u.

Тогда можно определить язык $L(\rho) = \{u : f(u) \in \rho\}$, где $\rho \subseteq \mathbb{N}^n$ — некоторое отношение. Будем говорить про такой язык, что он определен отношением ρ.

Основной результат статьи состоит в следующем.

Теорема 1. Язык $L(\rho)$ в алфавите $V = \{a_1,\ldots,a_n\}$, где ρ — произвольное сильно I-отделимое отношение, не регулярен.

Это и есть достаточное условие нерегулярности в соответствующем классе языков.

Доказательство теоремы основано на упомянутой выше теореме Майхилла — Нероуда. Эта теорема которая дает критерий регулярности языков в конечных алфавитах, формулируемый через свойства отношения эквивалентности на множестве слов, которое определяется языком.

Пусть V — конечный алфавит. Обозначим через V^* множество всех слов в алфавите V и пусть $L \subseteq V^*$ — некоторый язык в этом алфавите.

Зададим отношение $\equiv_L$ на V^* следующим образом: два слова $u, v \in V^*$ находятся в отношении $\equiv_L$ тогда и только тогда, когда при любом $x \in V^*$ слова ux и vx одновременно принадлежат или не принадлежат L. Это можно записать так:

$$u \equiv_L v \Leftrightarrow (\forall x \in V^*)(ux \in L \Leftrightarrow vx \in L)$$

Легко проверить, что отношение $\equiv_L$ — эквивалентность. Свойства этого отношения подробно рассмотрены в статье [9].

Следующую теорему называют теоремой Майхилла — Нероуда.

Теорема 2. Язык L регулярен тогда и только тогда, когда индекс отношения $\equiv_L$ конечен.

Под индексом отношения эквивалентности понимается мощность фактор-множества, определяемого эти отношением.

Лемма. Если ρ — сильно I-отделимое отношение, то существует бесконечная последовательность векторов (соответствующей размерности), все члены которой попарно ρ-дизъюнктны.

Доказательство. Такая последовательность может быть построена как последовательность векторов множества M_J, все члены которой попарно различны. Тогда по определению сильно отделимого отношения, для любых двух членов этой последовательности $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ существует разделяющий вектор $\tilde{\gamma} \epsilon \mathbb{N}_I^n$, при котором $\tilde{\gamma} + \tilde{\alpha} \in \rho$, а $\tilde{\gamma} + \tilde{\beta} \notin \rho$. Это и означает ρ-дизъюнктность векторов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$.

Доказательство теоремы 1. Обозначим (как и выше) через $m_x(a_i)$ число вхождений символа $a_i \in V$ в слово x. Пусть отношение $\rho \subseteq \mathbb{N}^n$ сильно I-отделимо, а язык $L \subseteq V^*$ состоит из всех таких слов x, что $(m_x(a_1), ..., m_x(a_n)) \in \rho$.

Обозначая для краткости $m_x(a_i)$ через α_i, рассмотрим пересечение языка L с регулярным языком $(a_{j_1})^* \dots (a_{j_{n-k}})^* (a_{i_1})^* \dots (a_{i_k})^*$, где $\{j_1, \dots, j_{n-k}\}$ — дополнение множества $I = \{i_1, \dots i_k\}$ до $\{1, \dots, n\}$ (т.е. это множество J в исходном определении). Это пересечение будет состоять из всех слов вида

$$a_{j_1}^{\alpha_{j_1}} \dots a_{j_{n-k}}^{\alpha_{j_{n-k}}} a_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \dots a_{i_k}^{\alpha_{i_k}},$$

где

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \rho.$$

Тогда, ввиду сильной I-отделимости отношения ρ и в силу доказанной леммы, найдется последовательность слов $\{u_m\}$, в которой для любых двух слов

$$u_l = a_{j_1}^{\alpha_{j_1}} \dots a_{j_{n-k}}^{\alpha_{j_{n-k}}} \text{ и } u_p = a_{j_1}^{\beta_{j_1}} \dots a_{j_{n-k}}^{\beta_{j_{n-k}}}$$

существует разделяющая цепочка

$$w = a_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \dots a_{i_k}^{\alpha_{i_k}},$$

а именно, вектор $(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k})$ окажется разделяющим для векторов $(\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_{n-k}})$ и $(\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_{n-k}})$, которые тем самым окажутся ρ-дизъюнктными, а слова u_l и u_p соответственно неэквивалентными. Но это значит, что все слова этой последовательности попарно неэквивалентны, фактор-множество бесконечно, и язык $L(\rho)$ нерегулярен.

2. Примеры анализа языков

Преимущество подхода к анализу регулярности или нерегулярности языков, основанного на теореме 2, состоит в том, что проблема анализа языка сводится к относительно более простой проблеме анализа арифметических отношений. Например, в силу полученного результата становится очевидной нерегулярность всех языков, определяемых рассмотренными выше отношениями ρ_i, $i = \overline{1,5}$, и нет необходимости прибегать к анализу, примеры которого показаны в статье [9].

Легко устанавливается и нерегулярность языка $L(\sigma)$ в некотором алфавите, определенного отношением σ, состоящим из всех таких векторов, компоненты которых попарно взаимно просты, ввиду очевидной сильной отделимости данного отношения (по любой компоненте).

Рассмотрим теперь несколько более сложный пример, для чего сначала опишем достаточно широкий класс сильно отделимых отношений.

Пусть $\mathbb{Q}^{2m}$ — векторное пространство над полем рациональных чисел четной размерности и пусть оно разложено в прямую сумму подпространств Q_1^m и Q_2^m одной и той же размерности m. Зададим произвольно изоморфизм $\varphi : Q_1^m \to Q_2^m$. Докажем, что отношение $\sigma \subseteq Q_1^m \oplus Q_2^m$, состоящее из векторов с неотрицательными целыми компонентами и определяемое как множество всех сумм вида $\tilde{\alpha} + \varphi(\tilde{\alpha})$, где $\tilde{\alpha} \in Q_1^m$, сильно отделимо по компонентам из Q_2^m.

Действительно, для любых двух различных векторов $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in Q_1^m$ вектор $\varphi(\tilde{\alpha})$ будет разделяющим, так как, ввиду того, что φ изоморфизм, $\varphi(\tilde{\alpha}) \neq \varphi(\tilde{\beta})$, и вектор $\tilde{\alpha} + \varphi(\tilde{\alpha}) \in \sigma$, а вектор $\tilde{\beta} + \varphi(\tilde{\alpha}) \notin \sigma$.

В частности, если φ тождественное отображение, мы получим множество векторов, у которых компоненты с какими-то номерами $i_1, \dots, i_m$ соответственно равны компонентам с номерами $j_1, \dots, j_m$ (при $m = 2$ получим рассмотренное выше отношение ρ_1), а если φ есть отображение сдвига на фиксированный вектор $\tilde{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_m)$, то отношение σ состоит из всех таких векторов $\tilde{\alpha} \in \mathbb{Q}^{2m}$, у которых компоненты с указанными выше номерами связаны следующим образом: $\alpha_{j_k} = \alpha_{i_k} + \delta_k, k = 1, \dots, m$.

Определим теперь язык $L(\tau)$ в алфавите $V=\{a_1,...,a_m,b_1,...,b_m\}$, который состоит из двух равных по числу букв частей, а отношение τ состоит из всех таких векторов размерности $2m$, в каждом из которых вектор $\tilde{\beta}$ компонент с номерами $m+1,...,2m$, показывающий числа вхождений букв b_i в слово языка вычисляется по вектору $\tilde{\alpha}$ компонент с номерами $1,...,m$, показывающего числа вхождений букв a_i в слово языка, по формуле $\tilde{\beta}=A\tilde{\alpha}$, где A — невырожденная целочисленная (с неотрицательными элементами) матрица порядка m. Так как эта матрица определяет изоморфизм соответствующих подпространств размерности m (в пространстве размерности $2m$), то язык $L(\tau)$ нерегулярен в силу доказанного выше.

Заметим, что к языкам последних двух примеров лемма о разрастании заведомо неприменима.

Заключение

Основной результат работы — доказательство теоремы о нерегулярности языка, определяемого сильно отделимым отношением. Этот результат расширяет инструментарий анализа регулярности/нерегулярности языков, основанный на теореме Майхилла — Нероуда.

Кроме того, доказанная теорема и анализ некоторых примеров сильно отделимых отношений позволяет установить нетривиальные связи между теорией формальных языков и теорией линейных пространств, что, как показывает анализ источников, является актуальной проблематикой.

В плане развития полученных результатов интерес представляет задача описания сильно отделимых отношений, а также анализ других свойств числовых множеств, важных с точки зрения анализа регулярности/нерегулярности языков.

Список литературы

1. Myhill J. Finite automata and the representation of events // WADD Technical Report. 1957. TR-57-624. Pp. 112–137.
2. Nerode A. Linear automation transformations // Proc. of the Amer. Math. Soc. 1958. Vol. 9. No. 4. Pp. 541–544. DOI: 10.2307/2033204
3. Khoussainov B., Nerode A. Automata theory and its applications. Boston: Birkhauser, 2001. 430 p.
4. Kozen D.C. Automata and computability. N.Y.: Springer, 1997. 400 p.
5. Comon H., Dauchet M., Gilleron R., Jacquemard F., Lugiez D., Loding C., Tison S., Tommasi M. Tree automata techniques and applications. TATA. 2014. 262 p. Режим доступа: http://tata.gforge.inria.fr/ (дата обращения 6.05.2016).

6. Borchardt B. The Myhill-Nerode theorem for recognizable tree series // Developments in language theory: DLT 2003: 7th Intern. conf. on developments in language theory (Szeged, Hungary, July 7-11, 2003): Proc. B.: Springer, 2003. Pp. 146–158. DOI: 10.1007/3-540-45007-6_11
7. Klarlund N. A homomorphism concept for ω-regularity. Aarhus: BRICS, Dep. of Computer Science Univ. of Aarhus, 1994. 19 p.
8. Doczkal C., Kaiser J.-O., Smolka G. A constructive theory of regular languages in Coq // Certified programs and proofs: CPP 2013: 3rd Intern. conf. on certified programs and proofs (Melbourne, Australia, December 11-13, 2013): Proc. Cham: Springer, 2013. Pp. 82-97. DOI: 10.1007/978-3-319-03545-1_6
9. Белоусов А.И. Теорема Майхилла-Нероуда в теории формальных языков и ее применение // Инженерный вестник. МГТУ им. Н.Э. Баумана: Электрон. журн. 2016. № 7. С. 1001–1009. Режим доступа: http://ainjournal.ru/doc/843177.html (дата обращения 15.07.16).
10. Белоусов А.И. О методике изложения некоторых разделов теории формальных языков: леммы о разрастании // Инженерный вестник. МГТУ им. Н.Э. Баумана: Электрон. журн. 2015. № 12. Режим доступа: http://engbul.bmstu.ru/doc/828263.html (дата обращения 23.12.15).
11. Guo-Qiang Zhang, Canfield E.R. The end of pumping? // Theoretical Computer Science. 1997. Vol. 174. No. 1-2. Pp. 275–279. DOI: 10.1016/S0304-3975(96)00247-2
12. Исмагилов Р.С., Мастихина А.А., Филиппова Л.Е. О числовых характеристиках формальных языков // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2017. № 4. С. 4–15. DOI: 10.18698/1812-3368-2017-4-4-15
13. Ахтеров А.В., Белоусов А.И., Воронин А.Ю., Кирильченко А.А., Пряничников В.Е. Формирование действий распределенных мобильных систем в режиме информационного мониторинга // Информационно-измерительные и управляющие системы. 2009. Т. 7. № 6. С. 27–34.
14. Пентус А.Е., Пентус М.Р. Математическая теория формальных языков: учеб. пособие. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. 247 с.
15. Мартыненко Б.К. Регулярные языки и КС-грамматики // Компьютерные инструменты в образовании. 2012. № 1. С. 14–20.
16. Долгов В.Н. Об одном отношении эквивалентности на множестве регулярных языков и его свойствах // Вектор науки Тольяттинского гос. ун-та. 2012. № 3. С. 19–22.
17. Вялый М.Н., Тарасов С.П. Орбиты линейных отображений и свойства регулярных языков // Дискретный анализ и исследование операций. 2010. Т. 17. № 6. С. 20–49.

Mathematics & Mathematical Modelling
Electronic journal
http://mathmelpub.ru ISSN 2412-5911

Mathematics and Mathematical Modeling, 2018, no. 04, pp. 1–11.
DOI: **10.24108/mathm.0418.0000121**
Received: 27.07.2018

On One Sufficient Condition for the Irregularity of Languages

A.I. Belousov[1,*], R.S. Ismagilov[1]

[*]al_belous@bk.ru

[1]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Keywords: language, regular language, index of equivalence relation, arithmetic vector space, direct sum of vector spaces, Myhill-Nerode theorem

The article deals with a proof of one sufficient condition for the irregularity of languages. This condition is related to the properties of certain relations on the set of natural numbers, namely relations possessing the property, referred to as strong separability. In turn, this property is related to the possibility of decomposition of an arithmetic vector space into a direct sum of subspaces. We specify languages in some finite alphabet through the properties of a vector that shows the number of occurrences of each letter of the alphabet in the language words and is called the word distribution vector in the word. The main result of the paper is the proof of the theorem according to which a language given in such a way that the vector of distribution of letters in each word of the language belongs to a strongly separable relation on the set of natural numbers is not regular. Such an approach to the proof of irregularity is based on the Myhill-Nerode theorem known in the theory of formal languages, according to which the necessary and sufficient condition for the regularity of a language consists in the finiteness of the index of some equivalence relation defined by the language.

The article gives a definition of a strongly separable relation on the set of natural numbers and examines examples of such relations. Also describes a construction covering a considerably wide class of strongly separable relations and connected with decomposition of the even-dimensional vector space into a direct sum of subspaces of the same dimension. Gives the proof of the lemma to assert an availability of an infinite sequence of vectors, any two terms of which are pairwise disjoint, i.e. one belongs to some strongly separable relation, and the other does not. Based on this lemma, there is a proof of the main theorem on the irregularity of a language defined by a strongly separable relation.

This result sheds additional light on the effectiveness of regularity / irregularity analysis tools based on the Myhill-Neroud theorem. In addition, the proved theorem and analysis of some examples of strongly separable relations allows us to establish non-trivial connections between the theory of formal languages and the theory of linear spaces, which, as analysis of sources shows, is relevant.

In terms of development of the obtained results, the problem of the general characteristic of strongly separable relations is of interest, as well as the analysis of other properties of numerical sets that are important from the point of view of regularity / irregularity analysis of languages.

References

1. Myhill J. Finite automata and the representation of events. *WADD Technical Report,* 1957, TR-57-624, pp. 112–137.
2. Nerode A. Linear automation transformations. *Proc. of the Amer. Math. Soc.*, 1958, vol. 9, no. 4, pp. 541—544. DOI: 10.2307/2033204
3. Khoussainov B., Nerode A. Automata theory and its applications. Boston: Birkhauser, 2001. 430 p.
4. Kozen D.C. Automata and computability. N.Y.: Springer, 1997. 400 p.
5. Comon H., Dauchet M., Gilleron R., Jacquemard F., Lugiez D., Loding C., Tison S., Tommasi M. Tree automata techniques and applications. TATA. 2014. 262 p. Available at: http://tata.gforge.inria.fr/, accessed 6.05.2016.
6. Borchardt B. The Myhill-Nerode theorem for recognizable tree series. *Developments in language theory: DLT 2003: 7th Intern. conf. on developments in language theory* (Szeged, Hungary, July 7-11, 2003): Proc. B.: Springer, 2003. Pp. 146-158. DOI: 10.1007/3-540-45007-6_11
7. Klarlund N. A homomorphism concept for ω-regularity. Aarhus: BRICS, Dep. of Computer Science Univ. of Aarhus, 1994. 19 p.
8. Doczkal C., Kaiser J.-O., Smolka G. A constructive theory of regular languages in Coq. *Certified programs and proofs: CPP 2013: 3rd Intern. conf. on certified programs and proofs* (Melbourne, Australia, December 11-13, 2013): Proc. Cham: Springer, 2013. Pp. 82-97. DOI: 1007/978-3-319-03545-1_6
9. Belousov A.I. The Myhill - Nerode theorem in formal languages theory and its application. *Inzhenernyj vestnik MGTU im. N.E. Baumana* [Engineering Bull. of the Bauman MSTU], 2016, no. 7, pp. 1001-1009. Available at: http://ainjournal.ru/doc/843177.html, accessed 15.07.16 (in Russian).
10. Belousov A.I. On the technique of presenting certain sections of the formal languages theory: the pumping lemmas. *Inzhenernyj vestnik MGTU im. N.E. Baumana* [Engineering Bull. of the Bauman MSTU], 2015, no. 12. Available at: http://engbul.bmstu.ru/doc/828263.html, accessed 23.12.15 (in Russian).
11. Guo-Qiang Zhang, Canfield E.R. The end of pumping? *Theoretical Computer Science*, 1997, vol. 174, no. 1-2, pp. 275–279. DOI: 10.1016/S0304-3975(96)00247-2
12. Ismagilov R.S., Mastikhina A.A., Filippova L.E. On the numerical characteristics of formal languages. *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki* [Herald of the Bau-

man MSTU. Ser. Natural sciences], 2017, no. 4, pp. 4 -15. DOI: 10.18698/1812-3368-2017-4-4-15 (in Russian)

13. Akhterov A.V., Belousov A.I., Voronin A.Yu., Kiril'chenko A.A., Prianichnikov V.E. Distributed mobile systems for information monitoring. *Informatsionno-izmeritel'nye i upravliayuschie sistemy* [Information-measuring and Control Systems], 2009, vol. 7, no. 6, pp. 27-34 (in Russian).
14. Pentus A.E., Pentus M.R. *Matematicheskaia teoriia formal'nykh iazykov* [Mathematical theory of formal languages]. Moscow: BINOM. Laboratoriia znanij Publ., 2006. 247 p. (in Russian).
15. Martynenko B.K. Regular languages and context free grammars. *Komp'yuternye instrumenty v obrazovanii* [Computer Tools in Education], 2012, no. 1, pp. 14-20 (in Russian).
16. Dolgov V.N. About an equivalence relation on the set of regular languages and its properties. *Vector nauki Tol'iattinskogo gosudarstvennogo universiteta* [Science Vector of Togliatti State Univ.], 2012, no. 3, pp. 19-22 (in Russian).
17. Vyalyi M.N., Tarasov S.P. Orbits of linear maps and regular languages. *J. of Applied and Industrial Mathematics*, 2011, vol. 5, no. 3, pp. 448-465.
DOI: 10.1134/S1990478911030173