Математика и Математическое моделирование
Сетевое научное издание
http://mathmelpub.ru

Ссылка на статью:
// Математика и математическое моделирование. 2017. № 06. С. 32–39.

DOI: **10.24108/mathm.0617.0000088**

Представлена в редакцию: 07.11.2017

УДК 519.718

Доверительное оценивание показателей надежности системы с дублированием и восстановлением элементов

Павлов И.В.[1,*], **Разгуляев С.В.**[1]

[*]ipavlov@bmstu.ru

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Рассматривается построение доверительных границ (по результатам испытаний элементов) основных показателей надежности – коэффициента готовности, среднего времени безотказной работы и коэффициента оперативной готовности (в стационарном режиме) для модели системы с дублированием и независимым восстановлением элементов. Предлагается приближенное решение данной задачи в предположении, что среднее время восстановления элементов мало по сравнению со средним временем безотказной работы.

Ключевые слова: надежность, система, дублирование, коэффициент готовности, среднее время безотказной работы, коэффициент оперативной готовности

Введение

Задачи на построение доверительных границ для показателей надежности сложных систем по результатам испытаний их отдельных элементов довольно часто встречаются в инженерной практике при проектировании и эксплуатации различных технических систем. В существующих в настоящее время работах данная проблема рассматривается в основном для систем без восстановления (см. например, [1] – [10] и др.). Далее рассматривается решение этой задачи для важного частного случая, когда элементы системы дублируются резервными элементами.

Пусть имеется система, состоящая из m последовательно соединенных (вообще говоря, разнотипных) элементов, каждый из которых дублируется резервным элементом того же типа, работающим в режиме нагруженного резервирования. Предполагается, что время безотказной работы одного элемента i-го типа имеет экспоненциальное распределение $F_i(t) = 1 - \exp(-\lambda_i t)$ где, $\lambda_i > 0$ - параметр интенсивности отказов $i = 1, \dots, m$. Точные значения параметров надежности элементов системы $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ неизвестны, а известны лишь результаты испытаний элементов на надежность, исходя из которых требуется оценить те или иные показатели надежности системы в целом. Предполагается, что испытания элементов системы проводились по стандартным планам типа $[N_i \text{ В } T_i]$ (в обозначениях книги [1]), то есть на испытания с восстановлением отказавших элементов в течение времени T_i было поставлено N_i элементов i-го типа, в результате чего наблюдалось d_i отказов, $i = 1, \dots, m$. Требуется на основе вектора результатов испытаний элементов $d = (d_1, d_2, \dots, d_m)$ оценить тот или иной показатель надежности системы. При этом основной интерес чаще всего представляет построение доверительных границ с заданным уровнем достоверности для показателей надежности системы.

Отказавшие элементы i-й подсистемы восстанавливаются (независимо от состояния других элементов) в течение времени η_i со средним значением $v_i = M\eta_i = \int_0^\infty [1 - G_i(t)]dt$, где $G_i(t)$ - функция распределения η_i, $i = 1, \dots, m$. Требуется, исходя из вектора результатов испытаний $d = (d_1, d_2, \dots, d_m)$ построить доверительные оценки для основных показателей надежности системы – коэффициента готовности, среднего времени безотказной работы и коэффициента оперативной готовности.

1. Нижние доверительные границы для показателей надежности системы

Обозначим через $k_i(\lambda_i)$ коэффициент готовности одного элемента i-го типа $k_i(\lambda_i) = 1/(1 + v_i \lambda_i)$, $i = 1, \dots, m$. В предположении, что отказы и восстановление в различных подсистемах независимы друг от друга, коэффициент готовности системы имеет вид

$$K_c = \prod_{i=1}^{m} h_i[k_i(\lambda_i)] \quad (1)$$

где

$$h_i[k_i(\lambda_i)] = 1 - [1 - k_i(\lambda_i)]^2 = 1 - [v_i \lambda_i/(1 + v_i \lambda_i)]^2 \quad (2)$$

коэффициент готовности i-й подсистемы, $i = 1, \dots, m$.

Обозначим через $\Lambda = \{\lambda: \ \lambda_i > 0, \ i = 1, \dots, m\}$ множество возможных значений вектора параметров $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, $W = \{d: \ d_i = 0,1,2, \dots, m, \ i = 1, \dots, m\}$ - множество возможных значений вектора результатов испытаний, $P_\lambda\{d\}$ - вероятностное распределение случайного вектора $d = (d_1, \dots, d_m)$ при данном $\lambda \in \Lambda$ и $\Delta_\gamma(r)$ - стандартная верхняя γ-доверительная граница для параметра пуассоновского распределения при результате наблюдений r [1], [11].

Наблюдаемое на испытаниях число отказов элементов i-го типа d_i имеет пуассоновское распределение с параметром $N_i T_i \lambda_i$ [1], откуда следует, что статистика типа $D = d_1 + \dots + d_m$ имеет также пуассоновское распределение с параметром $\sum_{i=1}^m N_i T_i \lambda_i$, а $\Delta_\gamma(D)$ является верхней γ-доверительной границей для линейной функции $\sum_{i=1}^m N_i T_i \lambda_i$ от λ, то есть имеет место неравенство

$$P_\lambda\left\{\sum_{i=1}^{m} N_i T_i \lambda_i \le \Delta_\gamma(D)\right\} \ge \gamma, \quad \lambda \in \Lambda$$

откуда следует, что набор подмножеств

$$H(d) = \{\lambda\colon \sum_{i=1}^{m} N_i T_i \lambda_i \le \Delta_\gamma(D), \quad \lambda_i \ge 0, \quad i = 1, \dots, m\} \subset \Lambda, \quad \mathrm{d} \in W \qquad (3)$$

образует систему γ-доверительных множеств для $\lambda \in \Lambda$. В соответствии с общим методом доверительных множеств (см. например, [1], [6], [11] и др.) нижняя γ-доверительная граница для функции (1) вектора параметров $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ может быть найдена как

$$\underline{K_c} = \min \prod_{i=1}^{m} h_i[k_i(\lambda_i)] \qquad (4)$$

где минимум берется по доверительному множеству (3), то есть по всем $\lambda \in \Lambda$, удовлетворяющим неравенствам

$$\sum_{i=1}^{m} N_i T_i \lambda_i \le \Delta_\gamma(D), \qquad (5)$$
$$\lambda_i \ge 0, \qquad i = 1, \dots, m$$

Рассмотрим приближенное асимптотическое решение задачи нахождения доверительной границы (4), (5) для случая высокой надежности (“быстрого восстановления“) элементов системы, при условии

$$v_i \lambda_i \ll 1, \quad i = 1, \dots, m \qquad (6)$$

(т.е. будем предполагать, что среднее время восстановления элементов мало по сравнению со средним временем безотказной работы). Для коэффициента готовности системы (1) при $v_i \lambda_i \to 0, \quad i = 1, \dots, m$ имеет место выражение

$$K_c(\lambda) = \exp\left\{-\sum_{i=1}^{m} f_i(\lambda_i)\right\}$$

где $f_i(\lambda_i) = -\ln h_i[k_i(\lambda_i)] = (v_i\lambda_i)^2[1 - 2v_i\lambda_i + o(v_i\lambda_i)]$, откуда следуют приближенные (при $v_i\lambda_i \ll 1, \quad i = 1, \dots, m$) формулы для коэффициента готовности системы $K_c(\lambda)$ и нижней доверительной границы этого показателя, определенной в (3), (4)

$$K_c(\lambda) \cong \exp\left\{-\sum_{i=1}^{m} v_i^2 \lambda_i^2\right\},$$

и, следовательно, нижняя доверительная граница $\underline{K_c} \cong \exp\{-\overline{f}\}$, где

$$\overline{f} = \max \sum_{i=1}^{m} v_i^2 \lambda_i^2 \qquad (7)$$

где максимум берется по $\lambda \in \mathrm{H(d)}$. Откуда после нахождения максимума в (6) при ограничениях (5), следует приближенное (для случая высокой надежности) выражение нижней доверительной границы для коэффициента готовности системы

$$\underline{K_c} \cong \exp\left\{-\max_i \frac{\Delta_\gamma^2(D) v_i^2}{(N_i T_i)^2}\right\} \qquad (8)$$

2. Нижняя доверительная граница для среднего времени безотказной работы системы

Коэффициент готовности i-й подсистемы может быть выражен через среднее время безотказной работы i-й подсистемы $L_i = L_i(\lambda_i)$ в следующем виде

$$h_i[k_i(\lambda_i)] = \frac{L_i(\lambda_i)}{L_i(\lambda_i) + V_i}$$

где $V_i = v_i/2$ - среднее время восстановления i-й подсистемы, $i = 1, \ldots, m$. Отсюда с учетом (2) следует, что среднее время безотказной работы отдельно взятой i-й подсистемы определяется выражением

$$L_i(\lambda_i) = \frac{V_i\, h_i[k_i(\lambda_i)]}{(1-h_i[k_i(\lambda_i)])} = \frac{v_i\,[(1+1/v_i\lambda_i)^2-1]}{2} \qquad (9)$$

Среднее время безотказной работы L_c системы, составленной из m последовательно соединенных подсистем определяется выражением [1]

$$L_c = L_c(\lambda) = 1/f(\lambda)$$

где

$$f(\lambda) = \sum\nolimits_{i=1}^{m} \frac{1}{L_i(\lambda_i)}$$

откуда следует, что нижняя доверительная граница для среднего времени безотказной работы системы имеет вид

$$\underline{L}_c = 1/\overline{f}$$

Где

$$\overline{f} = \max \sum\nolimits_{i=1}^{m} \frac{1}{L_i(\lambda_i)} \qquad (10)$$

где максимум берется по доверительной области (5) в пространстве параметров тов $\lambda \in \Lambda$.

В соответствии с (9), при $(v_i\lambda_i) \to 0, \quad i = 1, \ldots, m$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{L_i(\lambda_i)} = 2v_i\lambda_i^2[1 - 2v_i\lambda_i + o(v_i\lambda_i)], \quad i = 1, \ldots, m$$

Откуда следует приближенное выражение для доверительной границы (10)

$$\overline{f} \cong \max_{\lambda \in H(d)} \sum_{i=1}^{m} 2v_i\lambda_i^2 = 2 \max_i \frac{\Delta_\gamma^2(D)v_i^2}{N_i^2T_i^2}$$

Из этого выражения находим приближенную (для случая высокой надежности, при $v_i\lambda_i \ll 1, \quad i = 1, \ldots, m$) нижнюю доверительную границу для среднего времени безотказной работы системы

$$\underline{L}_c = \frac{1}{2\Delta_\gamma^2(D)} \min_i \left(\frac{N_i^2T_i^2}{v_i}\right)$$

где минимум берется по всем подсистемам $i = 1, \ldots, m$.

3. Доверительное оценивание коэффициента оперативной готовности системы

В используемых предположениях (6) коэффициент оперативной готовности (вероятность безотказной работы системы на интервале времени длины τ в стационарном режиме) определяется выражением [1]

$$K_{\text{ог}} = K_{\text{ог}}(\lambda) \cong K_{\text{c}}(\lambda)\, exp\{-\tau/L_c(\lambda)\} \qquad (11)$$

откуда видно, что в случае высокой надежности (“быстрого восстановления”) элементов коэффициент оперативной готовности фактически определяется коэффициентом готовности $K_{\text{с}}(\lambda)$ и средним временем безотказной работы системы $L_c(\lambda)$.

Из (11) и выражений для $K_{\text{с}}(\lambda)$ и $L_c(\lambda)$ следует приближенная формула для коэффициента оперативной готовности системы

$$K_{\text{ог}}(\lambda,\tau) \cong exp\left\{-\sum_{i=1}^{m}(v_i^2+2\tau v_i)\lambda_i^2\right\}$$

Отсюда следует, что нижняя доверительная граница для этого показателя имеет вид

$$K_{\text{ог}}(\tau) \cong exp\{-\overline{f}\}$$

где

$$\overline{f} = \max_{\lambda\in H(d)}\sum_{i=1}^{m}(v_i^2+2\tau v_i)\lambda_i^2$$

Откуда находим, что нижняя доверительная граница для коэффициента оперативной готовности системы определяется приближенным (для случая высокой надежности или “быстрого восстановления” элементов) выражением

$$\underline{K}_{\text{ог}}(\tau) \cong exp\left\{-\max_i\frac{(v_i^2+2\tau v_i)\Delta_\gamma^2(D)}{(N_iT_i)^2}\right\}$$

где максимум берется по всем подсистемам $i=1,\dots,m$.

Пример 1. Пусть система составлена из m=9 подсистем, $\tau=5$. Количество резервных элементов n_i в различных подсистемах, среднее время восстановления v_i и результаты испытаний элементов различных типов N_i, T_i, d_i, $i=1,\dots,m$ приводятся в таблице 1.

Таблица 1.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n_i	2	2	2	2	2	2	2	2	2
v_i	2.60	2.30	1.50	2.50	1.30	2.60	1.20	2.70	2.90
N_i	4	4	5	5	6	6	5	3	3
T_i	75	50	60	65	65	60	65	50	35
d_i	0	1	0	0	0	0	0	1	0

В этом случае выражение нижней доверительной границы для коэффициента готовности системы $\underline{K}_c=0.978$, а построенная выше приближенная нижняя γ-доверительная граница (при γ=0.9) для среднего времени безотказной работы системы $\underline{L}_C$ =68.1, нижняя доверительная граница для коэффициента оперативной готовности системы $\underline{K}_{\text{ог}}(\tau)=0.907$.

Заключение

Таким образом, построены нижние доверительные границы (по результатам испытаний элементов системы) основных показателей надежности – коэффициента готовности, среднего времени безотказной работы и коэффициента оперативной готовности для модели системы с дублированием и независимым восстановлением элементов. Решение данной задачи получено в естественном с точки зрения приложений приближении, в предположении высокой надежности (“быстрого восстановления”) элементов. Существенный интерес представляет также разработка аналогичных методов решения данной проблемы для моделей систем с более общей структурой и более общими режимами резервирования и восстановления элементов.

Список литературы

1. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности. 2-е изд. М.: Либроком, 2013. 582 с.
2. Ллойд Д.К., Липов М. Надежность: пер. с англ. М.: Сов. радио, 1964. 686 с. [Lloyd D.K., Lipov M. Reliability: management, methods and mathematics. L.: Prentice-Hall, 1962. 528 p.].
3. Gnedenko B.V., Pavlov I.V., Ushakov I.A. Statistical reliability engineering. N.Y.: Wiley, 1999. 499 p.
4. Барлоу Р., Прошан Ф. Статистическая теория надежности и испытания на безотказность: пер. с англ. М.: Наука, 1984. 327 с. [Barlow R.E., Proschan F. Statistical theory of reliability and life testing: probability models. N.Y.; L.: Holt, Rinehart and Winston, 1975. 290 p.].
5. Вопросы математической теории надежности / Е.Ю. Барзилович, Ю.К. Беляев, В.А. Каштанов и др.; под ред. Б. В. Гнеденко. М.: Радио и связь, 1983. 376 с.
6. Беляев Ю.К. Доверительные интервалы для функций от многих неизвестных параметров // Докл. АН СССР. 1966. Т. 169. № 4. С. 755-758.
7. Сидняев Н.И. Математическое моделирование оценки надежности объектов сложных технических систем // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2003. № 4. С. 24-31.
8. Павлов И.В. Доверительные границы для показателей надежности системы с возрастающей функцией интенсивности отказов // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2017. № 2. С. 70 – 75.
9. Павлов И.В. Оценка надежности системы с резервированием по результатам испытаний ее элементов // Автоматика и телемеханика. 2017. № 3. С. 149-158.
10. Павлов И.В., Разгуляев С.В. Асимптотические оценки надежности системы с резервированием разнотипными элементами // Инженерный журнал: наука и инновации. 2015. Вып. 2(38). С. 5. DOI: 10.18698/2308-6033-2015-2-1365
11. Математическая статистика: учебник / В.Б. Горяинов и др.; под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. 3-е изд. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 423 с.

Mathematics & Mathematical Modelling
Electronic journal
http://mathmelpub.ru

Mathematics and Mathematical Modeling, 2017, no. 06, pp. 32–39.
DOI: **10.24108/mathm.0617.0000088**
Received: 07.11.2017

Confidence Estimation of Reliability Indices of the System with Elements Duplication and Recovery

I.V .Pavlov[1,*], S.V. Razgulyaev[1]
[*]ipavlov@bmstu.ru
[1]Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Keywords: reliability, system, duplication, availability rate, mean time between failures, operative availability

The article considers a problem to estimate a confidence interval of the main reliability indices such as availability rate, mean time between failures, and operative availability (in the stationary state) for the model of the system with duplication and independent recovery of elements.

Presents a solution of the problem for a situation that often arises in practice, when there are unknown exact values of the reliability parameters of the elements, and only test data of the system or its individual parts (elements, subsystems) for reliability are known. It should be noted that the problems of the confidence estimate of reliability indices of the complex systems based on the testing results of their individual elements are fairly common function in engineering practice when designing and running the various engineering systems. The available papers consider this problem, mainly, for non-recovery systems.

Describes a solution of this problem for the important particular case when the system elements are duplicated by the reserved elements, and the elements that have failed in the course of system operation are recovered (regardless of the state of other elements).

An approximate solution of this problem is obtained for the case of high reliability or "fast recovery" of elements on the assumption that the average recovery time of elements is small as compared to the average time between failures.

References

1. Gnedenko B.V., Belyaev Yu.K., Solov'ev A.D. *Matematicheskie metody v teorii nadezhnosti* [Mathematical methods of reliability theory]. 2nd ed. Moscow: Librokom Publ., 2013. 582 p. (in Russian).
2. Lloyd D.K., Lipov M. *Reliability: management, methods and mathematics*. L.: Prentice-Hall, 1962. 528 p. (Russ. ed.: Lloyd D.K., Lipov M. *Nadezhnost'*. Moscow: Sovetskoe radio Publ., 1964. 686 p.).

3. Gnedenko B.V., Pavlov I.V., Ushakov I.A. Statistical reliability engineering. N.Y.: Wiley, 1999. 499 p.
4. Barlow R.E., Proschan F. *Statistical theory of reliability and life testing: probability models*. N.Y.; L.: Holt, Rinehart and Winston, 1975. 290 p. (Russ. ed.: Barlow R.E., Proschan F. *Statisticheskaia teoriia nadezhnosti i ispytaniia na bezotkaznost'*. Moscow: Nauka Publ., 1984. 327 p.).
5. *Voprosy matematicheskoj teorii nadezhnosti* [Questions of the mathematical theory of reliability] / E.Yu. Barzilovich, Yu.K. Beliaev, V.A. Kashtanov a.o.; ed. by Gnedenko B.V. Moscow: Radio i Svyaz' Publ., 1983. 376 p. (in Russian).
6. Belyaev Yu.K. Confidence intervals for the functions of many unknown parameters. *Doklady Akademii nauk SSSR* [Proc. of the Soviet Acad. of Sciences], 1966, vol. 169, no. 4, pp. 755-758 (in Russian).
7. Sidnyaev N.I. Mathematical modeling of estimate the reliability of objects of complex technical systems. *Problemy mashinostroeniia i nadezhnosti mashin* [Problems of Mechanical Engineering and Reliability of the Machines], 2003, no. 4, pp. 24-31 (in Russian).
8. Pavlov I.V. Confidence limits for system reliability indices with increasing function of failure intensity. *J. of Machinery Manufacture and Reliability*, 2017, vol. 46, no. 2, pp. 149 – 153. DOI: 10.3103/S1052618817020133
9. Pavlov I.V. Estimating reliability of redundant system from the results of testing its elements. *Automation and Remote Control*, 2017, vol. 78, no. 3, pp. 507 - 514. DOI: 10.1134/S0005117917030109
10. Pavlov I.V., Razgulyaev S.V. Reliability asymptotic estimates of a system with redundant heterogeneous elements. *Inzhenernyj zhurnal*: *Nauka i innovatsii* [Engineering J.: Science and Innovation], 2015, no. 2(38), p. 5. DOI: 10.18698/2308-6033-2015-2-1365 (in Russian)
11. *Matematicheskaia statistika* [Mathematical statistics]: a textbook / V.B. Goriainov a.o.; ed. by V.S. Zarubin, A.P. Krishchenko. 3rd ed. Moscow: Bauman MSTU Publ., 2008. 423 p. (in Russian).