Математика и Математическое моделирование
Сетевое научное издание
http://mathmelpub.ru ISSN 2412-5911

Ссылка на статью:
// Математика и математическое моделирование. 2018. № 02. С. 19–32

DOI: **10.24108/mathm.0218.0000113**

Представлена в редакцию: 29.03.2018

УДК 536.2

Температурное поле анизотропного полупространства, подвижная граница которого подвержена локальному импульсно-периодическому тепловому воздействию в условиях теплообмена с внешней средой

Аттетков А.В.[1,*], Волков И.К.[1]

[*] fn2@bmstu.ru

[1]МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

Предложена математическая модель процесса формирования температурного поля в анизотропном полупространстве, граница которого движется по линейному закону и подвержена локальному импульсно-периодическому тепловому воздействию в условиях теплообмена с внешней средой. Показано, что в подвижной системе координат температурное поле представляет собой сумму двух независимых аддитивных составляющих. С применением интегрального преобразования Лапласа найдено аналитическое решение для первой из аддитивных составляющих температурного поля, формируемого за счет различия начальной температуры полупространства и температуры внешней среды. Идентифицирована вторая аддитивная составляющая температурного поля, формируемого за счет воздействия импульсно-периодического теплового потока на внешнюю поверхность анизотропного полупространства при совпадении его начальной температуры с температурой внешней среды. С применением композиции двумерного экспоненциального интегрального преобразования Фурье и интегрального преобразования Лапласа в аналитически замкнутом виде найдено решение для второй аддитивной составляющей температурного поля. Полученные результаты подтверждают обнаруженный ранее эффект «сноса» температурного поля в анизотропном материале с анизотропией свойств общего вида.

Ключевые слова: анизотропное полупространство с подвижной границей, теплообмен с внешней средой, локальный импульсно-периодический нагрев, температурное поле, интегральные преобразования

Введение

Заметное повышение интереса к аналитическим методам исследований в математической теории теплопроводности твердых тел [1-3] инициировано различными причинами, среди которых, как наиболее значимых, следует выделить широкое внедрение в инженерную практику вычислительной техники, методов математического моделирования и анизотропных материалов различного происхождения. В настоящее время в математической теории теплопроводности твердых тел «анизотропный раздел» [3,4] занимает особое положение, обусловленное как спецификой используемых в нем математических моделей, так и объективной необходимостью разработки принципиально новых высокопроизводительных и абсолютно устойчивых вычислительных методов [4-6], ориентированных на решение реальных, практически важных инженерных задач.

Спектр практического использования решений задач математической теории теплопроводности, представленных в аналитически замкнутом виде, достаточно широк. В частности, подобные решения используют для тестирования новых вычислительных алгоритмов, а сами задачи, порождающие эти решения, называют тестовыми задачами. И если в традиционных разделах математической теории теплопроводности множество тестовых задач весьма обширно [1-3, 7] то тестовые задачи «анизотропной теплопроводности» в областях с неподвижными и движущимися границами весьма немногочисленны [4, 8-14].

Основная цель проведенных исследований – решение задачи об определении температурного поля анизотропного полупространства, граница которого перемещается по линейному закону и подвержена локальному импульсно-периодическому тепловому воздействию в условиях теплообмена с внешней средой.

1. Исходные допущения и математическая модель

Для достижения поставленной цели, при построении исходной математической модели процесса формирования температурного поля $T(x_1, x_2, x_3, t)$ объекта исследований в фиксированной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ предполагалось, что:

1) объект исследований имитируется анизотропным полупространством с подвижной границей, закон движения которой известен и задан линейным уравнением $x_2 = vt$, где скорость движения v является положительной постоянной величиной;

2) в начальный момент времени $t = 0$ температура в любой точке объекта исследований равна величине $T_0 - \text{const}$;

3) внешняя поверхность границы объекта исследований находится как под воздействием внешней среды, обладающей постоянной температурной $T_c \neq T_0$, так и внешнего теплового потока с плотностью мощности $q(x_1, x_3, t)$;

4) теплообмен в системе «внешняя среда – объект исследований» реализуется по закону Ньютона с постоянным коэффициентом теплоотдачи α [2];

5) внешний тепловой поток $q(x_1, x_3, t)$ обладает стационарной интенсивностью $q(x_1, x_3)$ и функционирует в импульсно-периодическом режиме, определяемым функцией

$$q_2(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f(t - kh)\left\{J(t - kh) - J(t - (k+1)h)\right\},$$

т.е.

$$q(x_1, x_3, t) = q_1(x_1, x_3) q_2(t),$$

где скалярная функция $f(t)$ моделирует профиль единичного импульса длительности h, а

$$J(t) = \begin{cases} 1, & t > 0; \\ 0, & t < 0; \end{cases}$$

— единичная функция Хевисайда [2];

6) при любых фиксированных значениях временного переменного $t \ge 0$ функция $q(x_1, x_3, t)$, как скалярная функция пространственных переменных x_1, x_3, интегрируема с квадратом в Ў^2, т.е.:

$$q(x_1, x_3, t)\big|_{(t \ge 0)} \in L^2(\text{Ў}^2) \Leftrightarrow q_1(x_1, x_3) \in L^2(\text{Ў}^2);$$

7) при любых фиксированных значениях пространственных переменных x_1, x_3, представленных вектором $\left[x_1, x_3\right]^{\mathrm{T}} \in \text{Ў}^2$, функция $q(x_1, x_3, t)$ как скалярная функция временного переменного t, является оригиналом интегрального преобразования Лапласа [2, 15], т.е.

$$q(x_1, x_3, t)\big|_{\left(\left[x_1, x_3\right]^{\mathrm{T}} \in \text{Ў}^2\right)} \in L_t\left[0, +\infty\right) \Leftrightarrow q_2(t) \in L_t\left[0, +\infty\right).$$

С учетом исходных предположений, представленных выше, и при использовании следующих обозначений:

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_0}; \quad \theta = \frac{T_c - T_0}{T_0}; \quad x = \frac{x_1}{l}; \quad y = \frac{x_2}{l}; \quad z = \frac{x_3}{l};$$

$$\mathrm{Fo} = \frac{\lambda_{22} t}{c \rho l^2}; \quad \mu_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{22}}; \quad V = v \frac{c \rho l}{\lambda_{22}}; \quad \mathrm{Bi} = \frac{\alpha l}{\lambda_{22}};$$

$$Q_1 = \frac{q_1 l}{\lambda_{22} T_0}; \quad H = \frac{\lambda_{22} t}{c \rho l^2},$$

где l — используемая единица масштаба пространственных переменных; $\lambda_{ij} \equiv \lambda_{ji}$ — компонента тензора теплопроводности анизотропного материала; c и ρ — его удельная массовая теплоемкость и плотность соответственно, можно утверждать, что функция $\theta(x, y, z, \mathrm{Fo})$, определяющая искомое температурное поле объекта исследований, удовлетворяет однородному линейному дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка параболического типа [3,4].

$$\frac{\partial \theta}{\partial \mathrm{Fo}} = \mu_{11} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + 2\mu_{12} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} + 2\mu_{13} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + 2\mu_{23} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y \partial z} + \mu_{33} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}, \tag{1}$$

где $x, z \in \text{Ў}$, $y > V\mathrm{Fo}$, $\mathrm{Fo} > 0$, нулевому начальному условию

$$\theta(x, y, \mathrm{z}, \mathrm{Fo})\big|_{\mathrm{Fo}=0} = 0 \tag{2}$$

и специфическому краевому условию при [4,16] на подвижной границе:

$$\left[\mu_{12} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu_{23} \frac{\partial \theta}{\partial z}\right]\Bigg|_{y=V\mathrm{Fo}} = -\mathrm{Bi}\left(\theta_c - \theta\right)\big|_{y=V\mathrm{Fo}} - Q_1(x, z) Q_2(\mathrm{Fo}), \tag{3}$$

наличие которого обуславливает проблематичность корректного задания класса функций, которому принадлежит $\theta(x, y, z, \mathrm{Fo})$, что обычно ассоциируется с заданием краевого условия при $x^2 + y + z^2 \to +\infty$ при замыкании математической модели (1)–(3) [2,3].

С учетом специфики внешнего теплового потока, функционирующего в импульсно-периодическом режиме, для преодоления возникших трудностей переходим в подвижную систему координат:

$$(Y = y - V\mathrm{Fo}) \wedge (\tau = \mathrm{Fo}), \tag{4}$$

предполагаем наличие у искомого температурного поля аддитивной структуры с двумя независимыми составляющими:

$$\theta(x, Y, z, \tau) = \theta_1(Y, \tau) + \theta_2(x, Y, z, \tau) \tag{5}$$

и требуем, чтобы функция $\theta_1(Y, \tau)$ являлась решением следующей смешанной задачи для уравнения в частных производных второго порядка параболического типа:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\theta_1}{\partial\tau} = \frac{\partial^2\theta_1}{\partial Y^2} + V\frac{\partial\theta_1}{\partial Y}, \quad Y > 0, \tau > 0;\\
&\theta_1(Y, 0) = 0;\\
&\left.\frac{\partial\theta_1}{\partial Y}\right|_{Y=0} = -\mathrm{Bi}(\theta_c - \theta_1)\big|_{Y=0};\\
&\theta_1(Y, \tau)\big|_{(\tau\ge 0)} \in L^2\left[0, +\infty\right);\\
&\theta_1(Y, \tau)\big|_{(\mathrm{Y}\ge 0)} \in L_\tau\left[0, +\infty\right).
\end{aligned} \tag{6}$$

В этом случае, согласно (1)–(6), функция $\theta_2(x, Y, z, \tau)$ удовлетворяет модифицированному уравнению (1), нулевому начальному условию (2), модифицированному краевому условию (3) и требованиям ее принадлежности к классу функций $L^2(\text{Ў}^2)$ по совокупности пространственных переменных x, z, классу функций $L^2\left[0, +\infty\right)$ по пространственному переменному Y и классу функций-оригиналов интегрального преобразования Лапласа $L_\tau\left[0, +\infty\right)$ по временному переменному τ, т.е.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\theta}{\partial\tau} = \mu_{11}\frac{\partial^2\theta_2}{\partial x^2} + 2\mu_{12}\frac{\partial^2\theta_2}{\partial x\partial Y} + 2\mu_{13}\frac{\partial^2\theta_2}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2\theta_2}{\partial Y^2} + V\frac{\partial\theta_2}{\partial Y} +\\
&\qquad + 2\mu_{33}\frac{\partial^2\theta_2}{\partial Y\partial z} + \mu_{33}\frac{\partial^2\theta_2}{\partial z^2}, \quad x, z \in \text{Ў},\ Y > 0,\ \tau > 0;\\
&\theta_2(x, y, z, 0) = 0;\\
&\left.\left[\mu_{12}\frac{\partial\theta_2}{\partial x} + \frac{\partial\theta_2}{\partial Y} + \mu_{23}\frac{\partial\theta_2}{\partial z} - \mathrm{Bi}\,\theta_2\right]\right|_{Y=0} = -Q_1(x, z)Q_2(\tau);\\
&\theta_2(x, Y, z, \tau)\big|_{(Y\ge 0)\wedge(\tau\ge 0)} \in L^2(\text{Ў}^2);\\
&\theta_2(x, Y, z, \tau)\big|_{([x,z]^{\mathrm{T}}\in\text{Ў}^2)\wedge(\tau\ge 0)} \in L^2[0, +\infty);\\
&\theta_2(x, Y, z, \tau)\big|_{([x,z]^{\mathrm{T}}\in\text{Ў}^2)\wedge(\mathrm{Y}\ge 0)} \in L_\tau[0, +\infty);\\
&Q_1(x, z) \in L^2(\text{Ў}^2),\ Q_2(\tau) \in L_\tau[0, +\infty).
\end{aligned} \tag{7}$$

Таким образом, в подвижной системе координат (4) функции $\theta_1(Y,\tau)$ и $\theta_2(\mathrm{x},Y,\mathrm{z},\tau)$, определяемые математическими моделями (6) и (7) соответственно, описывают процессы формирования двух различных температурных полей в полупространстве при наличии конвективного прямолинейно-параллельного теплопереноса [17] в направлении внешней нормали к ограничивающей плоскости. Функция $\theta_1(Y,\tau)$ описывает процесс формирования температурного поля изотропного полупространства в условиях теплообмена с внешней средой, обладающей температурой, отличной от начальной температуры объекта исследований, а функция $\theta_2(\mathrm{x},Y,\mathrm{z},\tau)$ описывает процесс формирования температурного поля анизотропного полупространства, граница которого находится под воздействием теплового потока в условиях теплообмена с внешней средой, температура которой совпадает с начальной температурой объекта исследований.

2. Температурное поле. Аддитивная составляющая $\theta_1(Y,\tau)$

Согласно условиям, представленным в математической модели (6), аддитивная составляющая $\theta_1(Y,\tau)$ искомого температурного поля, как скалярная функция временного переменного τ, является оригиналом интегрального преобразования Лапласа, задаваемого парой линейных интегральных операторов [2,3]:

$$L[g] \equiv \int_0^\infty g\exp(-s\mathrm{Fo})d\mathrm{Fo}\,; \qquad L^{-1}[g] \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} g\exp(s\mathrm{Fo})ds. \tag{8}$$

где i — мнимая единица [2].

С учетом сказанного выше полагаем

$$A_1(Y,s) @L[\theta_1(Y,\tau)], \tag{9}$$

применяем к математической модели (6) оператор $L[g]$ интегрального преобразования Лапласа (8) и с учетом его стандартных свойств [2] приходим к краевой задаче для определения изображения $A_1(Y,s)$ аддитивной составляющей $\theta_1(Y,\tau)$ искомого температурного поля:

$$\frac{d^2A_1}{dY^2} + V\frac{dA_1}{dY} - sA_1 = 0,\ Y > 0;$$

$$\left[\frac{dA_1}{dY} - \mathrm{Bi}A_1\right]\Bigg|_{Y=0} = -\frac{\mathrm{Bi}\theta_c}{s};$$

$$A_1(Y,s)\big|_{(s\in J\ )} \in L^2\left[0,+\infty\right),$$

решение которой может быть найдено с использованием стандартных методов [18] и представлено в следующем виде:

$$A_1(Y,\tau) = \mathrm{Bi}\frac{\exp\left\{-Y\left(V/2+\sqrt{s+V^2/4})\right)\right\}}{s\left(\mathrm{Bi}+V/2+\sqrt{s+V^2/4}\right)}. \tag{10}$$

Для завершения процедуры идентификации функции $\theta_1(Y,\tau)$ достаточно воспользоваться равенствами (9) и (10), свойством линейности оператора $L^{-1}[\bullet]$ обращения интегрального преобразования Лапласа (8) и известным соотношением «изображение – оригинал» [19]:

$$\theta_1(Y,\tau)=\theta_c\left(\frac{\mathrm{Bi}}{2(\mathrm{Bi}+V)}\exp(-VY)\operatorname{erfc}\left(\frac{Y-V\tau}{2\sqrt{\tau}}\right)+\frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{Y+V\tau}{2\sqrt{\tau}}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{\mathrm{Bi}+V/2}{\mathrm{Bi}+V}\exp\left\{\mathrm{Bi}[Y+(\mathrm{Bi}+V)\tau]\right\}\operatorname{erfc}\left[\frac{Y}{2\sqrt{\tau}}+(\mathrm{Bi}+V/2)\sqrt{\tau}\right]\right),\quad Y\ge 0,\quad \tau\ge 0 \qquad (11)$$

где $\operatorname{erfc}(\bullet)$ — дополнительная функция ошибок Гаусса [2].

3. Аддитивная составляющая $\theta_2(\mathrm{x},Y,\mathrm{z},\tau)$

Согласно условиям, представленным в математической модели (7), функция $\theta_2(\mathrm{x},Y,\mathrm{z},\tau)$, определяющая вторую аддитивную составляющую искомого температурного поля, как скалярная функция пространственных переменных x и z, является оригиналом двумерного экспоненциального интегрального преобразования Фурье, задаваемого парой линейных интегральных операторов [20]:

$$\Phi[\bullet]\equiv\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\bullet\exp(-ipx-irz)dxdz;\quad \Phi^{-1}[\bullet]\equiv\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\bullet\exp(ipx+irz)dpdr, \qquad (12)$$

а как скалярная функция временного переменного τ — оригиналом интегрального преобразования Лапласа (8). Кроме того, согласно (7), функции $Q_1(x,z)$ и $Q_2(\tau)$ являются оригиналами интегральных преобразований (12) и (8) соответственно.

С учетом сказанного выше, полагаем:

$$\begin{gathered}B(p,Y,r,\tau)\triangleq\Phi\left[\theta_2(x,Y,z,\tau)\right];\quad A_2(p,Y,r,s)\triangleq L\left[B(p,Y,r,\tau)\right];\\ g_1(p,r)\triangleq\Phi\left[Q_1(x,z)\right];\quad g_2(s)\triangleq L\left[Q_2(\tau)\right],\end{gathered} \qquad (13)$$

и к математической модели (7) последовательно применяем операторы $\Phi[\bullet]$ и $L[\bullet]$ интегральных преобразований (12) и (8) соответственно с использованием их стандартных свойств [2, 20]. В результате приходим к краевой задаче для определения функции $\theta_2(\mathrm{x},Y,z,\tau)$ в пространстве изображений композиции двумерного экспоненциального интегрального преобразования Фурье (12) и интегрального преобразования Лапласа (8):

$$\begin{gathered}\frac{d^2A_2}{dY^2}+\left[2i(\mu_{12}p+\mu_{23}r)+V\right]\frac{dA_2}{dY}-\\ -\left[(\mu_{11}p^2+2\mu_{12}pr+\mu_{33}r^2+s)\right]A_2=0,\quad Y>0;\\ \left.\left[\frac{dA_2}{dY}+i(\mu_{12}p+\mu_{23}r)A_2-\mathrm{Bi}A_2\right]\right|_{Y=0}=-g_1(p,r)g_2(s);\\ A_2(p,Y,r,s)\Big|_{([p,r]^T\in\mathbb{R}^2)\wedge(s\in\mathbb{C})}\in L^2\left[0,+\infty\right).\end{gathered} \qquad (14)$$

При этом, согласно (13), исходным допущениям относительно внешнего теплового потока, используемым обозначениям, свойству линейности оператора $L[\text{g}]$ интегрального преобразования Лапласа (8) и теоремы запаздывания [2] имеем

$$\left\{ f_*(\tau) @ f(\tau)[J(\tau) - J(\tau - H)] \right\} \wedge \left\{ F(s) @ L[f_*(\tau)] \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g_2(s) = L\left[\sum_{k=0}^{\infty} f(\tau - kH)\left\{ J(\tau - kH) - J(\tau - kH - H) \right\} \right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} F(s)\exp(-skH) = \frac{F(s)}{1 - \exp(-sH)}. \qquad (15)$$

Решение краевой задачи (14) находим стандартными методами и с учетом (15) представляем в следующем виде:

$$A_2(p, Y, r, s) = g_1(p, r)\exp\left\{ -[i(\mu_{12}p + \mu_{23}r) + V/2]Y \right\} D(p, Y, r, s);$$

$$D(p, Y, r, s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F(s)}{\mathrm{Bi} + V/2 + \sqrt{\rho(p, r, s)}} \exp\left\{ -skH - Y\sqrt{\rho(p, r, s)} \right\}, \qquad (16)$$

где комплексная функция

$$\rho(p, r, s) = \delta(p, r) + V^2/4 + i(\mu_{12}p + \mu_{23}r) + s \qquad (17)$$

содержит квадратичную форму

$$\delta(p, r) = (\mu_{11} - \mu_{12}^2)p^2 + 2(\mu_{13} - \mu_{12}\mu_{23})pr + (\mu_{33} - \mu_{23}^2)r^2, \qquad (18)$$

в положительной определенности которой можно убедиться непосредственно с использованием свойств тензора теплопроводности второго ранга [4] и критерия Сильвестра [21], предварительно вернувшись к размерным обозначениям.

Для реализации перехода из пространства изображений композиции использованных интегральных преобразований (8), (12) в пространстве изображений двумерного экспоненциального интегрального преобразования Фурье (12) воспользуемся равенствами (13), (15)–(18), линейным оператором $L^{-1}[\text{g}]$ обращения интегрального преобразования Лапласа, теоремой смещения, теоремой о свертке и известным соотношением «изображение — оригинал» [2], в результате чего находим:

$$B(p, Y, r, \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\tau} f_*(\tau - kH - \tau')\Psi(Y, \tau')\exp\left\{ -(V/2)\left[Y + (V/2)\tau' \right] \right\} \times$$

$$\times g_1(p, r)\exp\left\{ -i(\mu_{12}p + \mu_{23}r) + (Y + \tau') - \delta(p, r)\tau' \right\} d\tau';$$

$$\Psi(Y, \tau') @ L^{-1}\left[\frac{1}{\mathrm{Bi} + (V/2) + \sqrt{s}} \exp(-Y\sqrt{s}) \right] = \frac{1}{\sqrt{\pi\tau'}} \exp\left(-\frac{Y^2}{4\tau'} \right) -$$

$$-(\mathrm{Bi} + V/2)\exp\left\{ (\mathrm{Bi} + V/2)\left[Y + (\mathrm{Bi} + V/2)\tau' \right] \right\} \mathrm{erfc}\left[\frac{Y + 2(\mathrm{Bi} + V/2)^2\tau'}{2\sqrt{\tau'}} \right]. \qquad (19)$$

Равенства (19), (18) и (13) полностью определяют функцию $\theta_2(\mathrm{x}, Y, z, \tau)$ в пространстве изображений двумерного экспоненциального интегрального преобразования Фурье

(12). Для завершения процедуры решения исходной задачи об определении температурного поля $\theta_2(x,Y,z,\tau)$ в подвижной системе координат (4) достаточно воспользоваться оператором $\Phi^{-1}[g]$ обращения интегрального преобразования Фурье (12) и теоремой о свертке для него [20], предварительно идентифицировав оригинал

$$G(x,Y,p,\tau') @\Phi^{-1}\left[\exp\left\{-\delta(p,r)\tau' - i(\mu_{12}p+\mu_{23}r)(Y+\tau')\right\}\right] =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\delta(p,r)\tau' - i\left[x-\mu_{12}(Y+\tau')\right]p - i\left[z-\mu_{23}(Y+\tau')\right]r\right\}dpdr. \qquad (20)$$

При этом, для получения обозримых результатов, пригодных для практической реализации, целесообразно воспользоваться положительно определенной квадратичной формой $\delta(p,r)$, заданной равенством (18), которая путем применения невырожденного ортогонального преобразования с матрицей $\left[\Pi_{ij}\right] \in M_{2\times 2}(\check{Y})$ может быть приведена к каноническому виду [14] с положительными коэффициентами μ_1 и μ_2 при квадратах новых переменных.

С учетом сказанного выше в двойном интеграле в правой части тождества (20) реализуем замену переменных с ортогональной матрицей $\left[\Pi_{ij}\right]$ и, с учетом существующей связи экспоненциального интегрального преобразования Фурье с интегральным косинус преобразованием Фурье, воспользуемся соответствующими таблицами «изображение – оригинал» [22]. Таким образом, приходим к следующему представлению оригинала $G(x,Y,p,\tau')$:

$$G(x,Y,z,\tau') = \frac{1}{\pi\sqrt{\mu_1\mu_2}}\exp\left(-\frac{\left\{\left[x-\mu_{12}(Y+\tau')\right]\Pi_{11}+\left[z-\mu_{23}(Y+\tau')\right]\Pi_{21}\right\}^2}{4\mu_1} - \right.$$

$$\left. - \frac{\left\{\left[x-\mu_{12}(Y+\tau')\right]\Pi_{12}+\left[z-\mu_{23}(Y+\tau')\right]\Pi_{22}\right\}^2}{4\mu_2}\right), \qquad (21)$$

и, с учетом (13), (19), (15), (21) и теореме о свертке для двумерного экспоненциального преобразования Фурье [20], получаем:

$$\theta_2(x,Y,z,\tau) = \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\tau} f_*(\tau - kH - \tau')\exp\left[-\frac{V}{2}\left(Y+\frac{V}{2}\tau'\right)\right]\times$$

$$\times\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Q_1(x-x',z-z')G(x',Y,z',\tau')dx'dz'\right\}d\tau', \quad x,z\in\check{Y}^2, \quad Y\ge 0, \quad \tau\ge 0. \qquad (22)$$

Следует заметить, что конкретизация функций $Q_1(x,z)$ и $f_*(\tau)$, определяющих интенсивность внешнего теплового потока и временной профиль его единичного импульса соответственно, может сопровождаться значимым упрощением аналитического выражения для аддитивной составляющей $\theta_2(x,Y,z,\tau)$ искомого температурного поля, которая в общем случае представлена равенствами (22) и (21). В частности, если внешний тепловой поток имеет интенсивность гауссовского типа с определяющими параметрами Q_0, K^2, т.е.

$$Q_1(x,z) = Q_0(K^2/\pi)\exp\left\{-K^2(x^2+z^2)\right\},$$

а временной профиль единичного импульса задан следующим равенством:

$$f_*(\tau) = J(\tau) - J(\tau - H/2) \equiv \begin{cases} 1, & \tau \in (0, H/2); \\ 0, & \tau \in (H/2, H), \end{cases} \tag{23}$$

то в этом случае имеем [20,22]:

$$g_1(p,r) \triangleq L\left[Q_1(x,z)\right] = \exp\left(-\frac{p^2+r^2}{4K^2}\right),$$

и согласно (18), (23)

$$g_1(p,r)\exp\left\{-\delta(p,r)\tau'\right\} \equiv \exp\left\{-\Delta(p,r,\tau')\right\}, \tag{24}$$

где квадратичная форма

$$\Delta(p,r,\tau') \triangleq \left[(\mu_{11}-\mu_{12}^2)\tau' + \frac{1}{4K^2}\right]p^2 + 2(\mu_{13}-\mu_{12}\mu_{23})pr + \left[(\mu_{33}-\mu_{23}^2)\tau' + \frac{1}{4K^2}\right]r^2 \tag{25}$$

положительно определена, что проверяется непосредственно с учетом положительной определенности квадратичной формы $\delta(p,r)$. Для получения окончательного результата в рассматриваемой ситуации достаточно воспользоваться равенствами (19), (24), (25) и повторить рассуждения, проведенные при получении равенства (21) с той лишь разницей, что в данном случае элементы $\left\{\Pi_{ij}\right\}$ матрицы используемого ортогонального преобразования являются функциями аргумента τ' , равно как и коэффициенты $\left\{\mu_i\right\}$ при квадратах новых переменных квадратичной формы $\Delta(p,r,\tau')$. С учетом сказанного выше приходим к следующему представлению второй аддитивной составляющей искомого температурного поля:

$$\theta_2(\mathrm{x},Y,z,\tau) = \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\tau} f_*(\tau - kH - \tau')\Psi(Y,\tau')\exp\left\{-\frac{V}{2}\left(Y + \frac{V}{2}\tau'\right)\right\}G_*(x,Y,z,\tau')d\tau',$$
$$x,z \in \mathbb{R}^2,\ Y \ge 0,\ \tau \ge 0,$$

где функции $f_*(\tau)$ и $\Psi(Y,\tau')$ определены равенствами (23) и (19) соответственно, а

$$G_*(x,Y,z,\tau') = 4\frac{1}{\pi\sqrt{\mu_1(\tau')\mu_2(\tau')}}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{1}{4\mu_1(\tau')}\left\{\left[x-\mu_{12}(Y+\tau')\right]\Pi_{11}(\tau') + \left[z-\mu_{23}(Y+\tau')\right]\Pi_{21}(\tau')\right\}^2 -\right.$$
$$\left.-\frac{1}{4\mu_2(\tau')}\left\{\left[x-\mu_{12}(Y+\tau')\right]\Pi_{12}(\tau') + \left[z-\mu_{23}(Y+\tau')\right]\Pi_{22}(\tau')\right\}^2\right\}.$$

Заключение

Температурное поле анизотропного полупространства, подвижная граница которого находится под воздействием как внешнего теплового потока, функционирующего в импульсно-периодическом режиме, так и внешней среды, обладающей постоянной температурой, полностью определено равенствами (4), (5), (11), (22), (15), (21). В подвижной системе координат искомое температурное поле объекта исследований представляет собой аддитивную композицию двух независимых температурных полей в полупространстве при наличии в нем конвективного прямолинейно-параллельного теплопереноса в направлении внешней нормали к ограничивающей плоскости.

Первая аддитивная составляющая искомого температурного поля объекта исследований — температурное поле изотропного полупространства в условиях теплообмена с внешней средой, обладающей температурой, отличной от начальной температуры объекта исследований. Вторая аддитивная составляющая искомого температурного поля объекта исследований — температурное поле анизотропного полупространства, граница которого находится под воздействием внешнего теплового потока в условиях теплообмена с внешней средой, температура которой совпадает с начальной температурой объекта исследований.

Список литературы

1. Карслоу Г.С., Егер Дж. Теплопроводность твердых тел: пер. с англ. М.: Наука, 1964. 487 с. [Carslaw H.S., Jaeger J.C. Conduction of heat in solids. 2nd ed. Oxf.: Clarendon Press, 1959. 510 p.].
2. Лыков А.В. Теория теплопроводности: учебное пособие. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
3. Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел: учеб. пособие. 3-е изд. М.: Высшая школа, 2001. 549 с.
4. Формалёв В.Ф. Теплопроводность анизотропных тел. Аналитические методы решения задач. М.: Физматлит, 2014. 309 с.
5. Формалёв В.Ф. Теплоперенос в анизотропных твердых телах. Численные методы, тепловые волны, обратные задачи. М.: Физматлит, 2015. 274 с.
6. Формалёв В.Ф., Колесник С.А. Математическое моделирование аэрогазодинамического нагрева затупленных анизотропных тел. М.: Изд-во МАИ, 2016. 160 с.
7. Карташов Э.М. Аналитические методы решения краевых задач нестационарной теплопроводности в областях с движущимися границами (Обзор) // Инженерно-физический журнал. 2001. Т. 74. № 2. С. 171–195.
8. Аттетков А.В., Волков И.К. Температурное поле анизотропного полупространства, подвижная граница которого находится под воздействием внешнего теплового потока // Тепловые процессы в технике. 2015. Т. 7. № 2. С. 73–79.

9. Аттетков А.В., Волков И.К. Температурное поле анизотропного полупространства, подвижная граница которого содержит пленочное покрытие // Известия РАН. Энергетика. 2015. № 3. С. 39–49.
10. Аттетков А.В., Волков И.К. Температурное поле анизотропного полупространства с подвижной границей при его нагреве внешней средой // Известия РАН. Энергетика. 2016. № 6. С. 125–133.
11. Формалев В.Ф., Колесник С.А., Кузнецова Е.Л. Нестационарный теплоперенос в анизотропном полупространстве в условиях теплообмена с окружающей средой, имеющей заданную температуру // Теплофизика высоких температур. 2016. Т. 54. № 6. С. 876–882. DOI: 10.7868/S0040364416060247
12. Аттетков А.В., Волков И.К. Температурное поле анизотропного полупространства с подвижной границей, обладающей термически тонким покрытием, при его нагреве внешней средой // Тепловые процессы в технике. 2016. Т. 8. № 8. С. 378–384.
13. Формалев В.Ф., Колесник С.А., Кузнецова Е.Л., Селин И.А. Аналитическое исследование теплопереноса в теплозащитных композиционных материалах с анизотропией общего вида при произвольном тепловом нагружении // Механика композиционных материалов и конструкций. 2017. Т. 23. № 2. С. 168–182. DOI: 10.25590/mkmk.ras.2017.23.02.168_182.02
14. Аттетков А.В., Волков И.К. Третья краевая задача математической теории теплопроводности для двухслойного анизотропного полупространства // Известия РАН. Энергетика. 2017. № 4. С. 136–142.
15. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики: учеб. пособие. [2-е изд.]. М.: Высшая школа, 1970. 710 с.
16. Пехович А.И., Жидких В.М. Расчет теплового режима твердых тел. Л.: Энергия, 1968. 304 с.
17. Пудовкин М.А., Волков И.К. Краевые задачи математической теории теплопроводности в приложении к расчетам температурных полей в нефтяных пластах при заводнении. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1978. 188 с.
18. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление: учебник. 2- е изд. М.: Наука, 1969. 424 с.
19. Диткин В.А., Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению. М.: Высшая школа, 1965. 466 с.
20. Снеддон И. Преобразования Фурье: пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1955. 668 с. [Sneddon I.N. Fourier transforms. N.Y.: McGraw-Hill, 1951. 542 p.].
21. Беллман Р. Введение в теорию матриц: пер. с англ. М.: Наука, 1969. 367 с. [Bellman R. Introduction to matrix analysis. N.Y.: McGraw-Hill, 1960. 328 p.].
22. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований: пер. с англ. Т. 1: Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. М.: Наука, 1969. 343 с. [Bateman H., Erdelyi A. Tables of integral transforms. Vol. 1: Fourier, Laplace, Mellin transforms. N.Y.: McGraw-Hill, 1954].

Mathematics & Mathematical Modelling
Electronic journal
http://mathmelpub.ru ISSN 2412-5911

Mathematics and Mathematical Modeling, 2018, no. 02, pp. 19–32.
DOI: **10.24108/mathm.0218.0000113**
Received: 29.03.2018

Anisotropic Half-Space Temperature Field with its Moving Boundary Being under Local Pulse-periodic Heat Action in Heat Exchange Conditions with External Environment

A.V. Attetkov[1,*], I.K. Volkov[1]
[*] fn2@bmstu.ru
[1] Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Keywords: anisotropic half-space with a moving boundary, heat exchange with external environment, local pulse-periodic thermal action, temperature field, integral transformations

A noticeably raising interest in analytical research methods in the mathematical theory of the thermal conductivity of solids [1-3] was initiated by various causes, among which, as the most significant, special mention should go to the widespread practical engineering application of computer technology, mathematical modelling techniques and anisotropic materials of various origin. At present, the "anisotropic section" [3, 4] holds a most unique position in the mathematical theory of the thermal conductivity of solids, due both to the specificity of the mathematical models used in it, and to the fair-minded development need in fundamentally new high-performance and absolutely stable computational methods [4-6] to solve real, practically important engineering tasks.

The spectrum of practical use of solutions to problems of the mathematical theory of the thermal conductivity, presented in an analytically closed form, is quite wide. In particular, such solutions are used to test new computational algorithms, and the problems generating these solutions are called test problems. And if in the traditional sections of the mathematical theory of the thermal conductivity a set of test problems is very extensive [1-3, 7], then test problems of the "anisotropic thermal conductivity" in regions with fixed and moving boundaries are inconsiderable in number [4, 8-14].

The main objective of the research is to solve the problem of determining the temperature field of an anisotropic half-space, the boundary of which moves linearly and is subject to local pulse-periodic thermal action under conditions of heat exchange with the external environment.

References

1. Carslaw H.S., Jaeger J.C. *Conduction of heat in solids*. 2nd ed. Oxf.: Clarendon Press, 1959. 510 p. (Russ. ed.: Carslaw H.S., Jaeger J.C. *Teploprovodnost' tverdykh tel*. Moscow: Nauka Publ., 1964. 487 p.).
2. Lykov A.V. *Teoriia teploprovodnosti* [Heat conduction theory]: a textbook. Moscow: Vysshaia Shkola Publ., 1967. 600 p. (in Russian).
3. Kartashov E.M. *Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tverdykh tel* [Analytical methods in the theory of thermal conductivity of solids]: a textbook. 3rd ed. Moscow: Vysshaia Shkola Publ., 2001. 549 p. (in Russian).
4. Formalev V.F. *Teploprovodnost' anizotropnykh tel. Analiticheskie metody resheniia zadach* [Thermal conductivity of anisotropic bodies. Analytical methods for solving problems]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2014. 309 p. (in Russian).
5. Formalev V.F. *Teploperenos v anizotropnykh tverdykh telakh. Chislennye metody, teplovye volny, obratnye zadachi* [Heat transfer in anisotropic solids. Numerical methods, heat waves, inverse problems]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2015. 274 p. (in Russian).
6. Formalev V.F., Kolesnik S.A. *Matematicheskoe modelirovanie aerogazodinamicheskogo nagreva zatuplennykh anizotropnykh tel* [Mathematical modeling aerogasdynamics heating of blunt anisotropic bodies]. Moscow: MEI Publ., 2016. 160 p. (in Russian).
7. Kartashov E.M. Analytical methods of solution of boundary-value problems of nonstationary heat conduction in regions with moving boundaries. *J. of Engineering Physics*, 2001, vol. 74, no. 2, pp. 498-536.
8. Attetkov A.V., Volkov I.K. Temperature field on anisotropic half-space with movable boundary being under influence of external heat flux. *Teplovye protsessy v tekhnike* [Thermal Protsesses in Engineering], 2015, vol. 7, no. 2, pp. 73-79 (in Russian).
9. Attetkov A.V., Volkov I.K. Temperature field of the anisotropic half-space, which mobile boundary contains the film coating. *Izvestiia RAN. Energetika* [Proc. of the Russian Acad. of Sciences. Power Engineering], 2015, no. 3, pp. 39-49 (in Russian).
10. Attetkov A.V., Volkov I.K. Temperature field of an anisotropic half-space with a moving boundary when heated by an external environment. *Izvestiia RAN. Energetika* [Proc. of the Russian Acad. of Sciences. Power Engineering], 2016, no. 6, pp. 125-133 (in Russian).
11. Formalev V.F., Kolesnik S.A., Kuznetsova E.L. Nonstationary heat transfer in anisotropic half-space under the conditions of heat exchange with the environment having a specified temperature. *High Temperature*, 2016, vol. 54, no. 6, pp. 824-830. DOI: 10.1134/S0018151X16060249
12. Attetkov A.V., Volkov I.K. Temperature field of the anisotropic half-space with the moving boundary, which has a thermally thin coating, heated by convection. *Teplovye protsessy v tekhnike* [Thermal Protsesses in Engineering], 2016, vol. 8, no. 8, pp. 378-384 (in Russian).

13. Formalev V.F., Kolesnik S.A., Kuznetsova E.L., Selin I.A. Heat transfer analytical investigation in heat protective composites with general type anisotropy under arbitrary heat loading. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsij* [Mechanics of Composite Materials and Structures], 2017, vol. 23, no. 2, pp. 168-182. DOI: 10.25590/mkmk.ras.2017.23.02.168_182.02 (in Russian)
14. Attetkov A.V., Volkov I.K. The third boundary value problem of the mathematical theory of heat conduction for a two-layer anisotropic half-space. *Izvestiia RAN. Energetika* [Proc. of the Russian Acad. of Sciences. Power Engineering], 2017, no. 4, pp. 136-142 (in Russian).
15. Koshliakov N.S., Gliner E.B., Smirnov M.M. *Uravneniia v chastnykh proizvodnykh matematicheskoj fiziki* [Partial differential equations of mathematical physics]: a textbook. [2nd ed.]. Moscow: Vysshaia Shkola Publ., 1970. 710 p. (in Russian).
16. Pekhovich A.I., Zhidkikh V.M. *Raschet teplovogo rezhima tverdykh tel* [Calculation of the thermal regime of solids]. Leningrad: Energiia Publ., 1968. 304 p. (in Russian).
17. Pudovkin M.A., Volkov I.K. *Kraevye zadachi matematicheskij teorii teploprovodnosti v prilozhenii k raschetam temperaturnykh polej v neftianykh plastakh pri zavodnenii* [Boundary value problems of the mathematical theory of thermal conductivity in the application to the calculations of temperature fields in oil reservoirs during flooding]. Kazan: Kazan Univ. Publ., 1978. 188 p. (in Russian).
18. El'sgol'ts L.E. *Differentsial'nye uravneniia i variatsionnoe ischislenie* [Differential equations and calculus of variations]: a textbook. 2nd ed. Moscow: Nauka Publ., 1969. 424 p. (in Russian).
19. Ditkin V.A., Prudnikov A.P. *Spravochnik po operatsionnomu ischisleniyu* [Handbook of operational calculus]. Moscow: Vysshaia Shkola Publ., 1965. 466 p. (in Russian).
20. Sneddon I.N. *Fourier transforms*. N.Y.: McGraw-Hill, 1951. 542 p. (Russ. ed.: Sneddon I. *Preobrazovaniia Fur'e*. Moscow: Foreign Literature Publ., 1955. 668 p.).
21. Bellman R. *Introduction to matrix analysis*. N.Y.: McGraw-Hill, 1960. 328 p. (Russ. ed.: Bellman R. *Vvedenie v teoriyu matrits*. Moscow: Nauka Publ., 1969. 367 p.).
22. Bateman H., Erdelyi A. *Tables of integral transforms*. Vol. 1: Fourier, Laplace, Mellin transforms. N.Y.: McGraw-Hill, 1954. (Russ. ed.: Bateman H., Erdelyi A. *Tablitsy integral'nykh preobrazovanij*. Vol. 1: Preobrazovaniia Fur'e, Laplasa, Mellina. Moscow: Nauka Publ., 1969. 343 p.).