

Ссылка на статью:

// Математика и математическое моделирование.
2018. № 04. С. 12–26DOI: [10.24108/mathm.0418.0000134](https://doi.org/10.24108/mathm.0418.0000134)

Представлена в редакцию: 13.07.2018

© НП «НЕИКОН»

УДК 519.8

**Использование математических моделей при
анализе событий из военной истории**Неустроев С.С.¹, Сердюков В.И.^{1,2},
Сердюкова Н.А.³, Шишкина С.И.^{2,*}[*shish-bmstu@mail.ru](mailto:shish-bmstu@mail.ru)¹Институт управления образованием
Российской академии образования,
Москва, Россия²МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия³Российский экономический университет
имени Г.В. Плеханова, Москва, Россия

Один из способов познания событий состоит в их воспроизведении при помощи математических моделей. Основываясь на известных исторических фактах, обоснована возможность математического моделирования фрагментов боевых действий и применения для этих целей аппарата марковских случайных процессов. Построены математические модели, позволяющие воспроизвести различные фрагменты боя по схеме марковского случайного процесса, проведены расчеты по ним. Установлена взаимосвязь соотношения потерь противодействующих сторон с количеством огневых позиций, использованных танком, стоявшим в засаде, при условии, что смена этих позиций производилась незаметно для противника. Полученные результаты могут быть использованы при разработке тактических приемов применения танков в современных вооруженных конфликтах и антитеррористических операциях.

Ключевые слова: математическая модель; соотношение потерь; эффективность

Введение

Эффективность танков зависит от их компоновки и конструкции, боевых и технических свойств, а также от способов их применения на поле боя. При этом под боевой эффективностью танков обычно понимают их эффективность в условиях, когда способы ведения боевых действий каждой из противодействующих сторон являются наилучшими. Однако в случае, когда выбранные способы ведения боевых действий танками окажутся не лучшими, то соответствующая этим способам эффективность танков (далее – практическая эффективность) может быть ниже их боевой эффективности, а потери могут оказаться большими, и даже очень большими (здесь под потерями танков понимается среднее

значение случайной величины). Опираясь на факты военной истории, построим математические модели, позволяющие выявить и обосновать присущие одному из исторических событий количественные закономерности, пригодные для использования при разработке новых тактических приемов применения танков в современных условиях.

1. Факты военной истории

К началу Великой Отечественной войны в Красной Армии было 22,6 тысячи танков, а в войсках фашистской Германии, вероломно вторгшейся 22 июня 1941 г. на территорию СССР, – 4,3 тысячи танков [1]. Количественное превосходство в танках вселяло уверенность, что в случае войны Красная Армия сумеет организовать крепкую оборону пограничных рубежей нашей страны и отразить вторжение противника. Однако война началась для страны внезапно, и организовать крепкую оборону наши войска не успели. Более того, внезапное нападение позволило противнику захватить и продолжительное время удерживать стратегическую инициативу. По этим причинам в ряде случаев способы применения танков на поле боя не в полной мере соответствовали сложившейся боевой обстановке, в том числе и потому, что обеспечение танков боеприпасами, топливом и запасными частями, необходимыми для ремонта в полевых условиях, не было организовано должным образом. В этих условиях практическая эффективность наших танков оказалась ниже боевой, что сказалось на их потерях. Так, например, потери Северо-Западного фронта в Прибалтийской оборонительной операции, продолжавшейся первые 18 дней войны с 22 июня по 9 июля 1941 г., составили 2523 танков; потери Западного фронта в Белорусской оборонительной операции, продолжавшейся те же первые 18 дней войны с 22 июня по 9 июля 1941 г., – 4799 танков; потери Юго-Западного фронта в оборонительной операции в Западной Украине, продолжавшейся первые 15 дней войны с 22 июня по 6 июля 1941 г., – 4381 танков [1]. К сожалению, недостатки, имевшиеся в выборе способов ведения боевых действий нашими танками в этих операциях, имели место и в некоторых последующих оборонительных операциях летнего и осеннего периодов 1941 года. Изменения в количестве танков в Красной Армии, произошедшие за период с начала войны до конца 1941 г., представлены в табл. 1, составленной по данным [1].

Таблица 1. Изменение численности танков в составе Красной Армии в ходе Великой Отечественной войны в 1941 г. (в тыс. шт.)

Наименование танков	Имелось к началу войны	За период с 22 июня по 31 декабря 1941 г.		Имелось к началу 1942 г.
		поступило	потеряно	
Тяжелые	0,5	1,0	0,9	0,6
Средние	0,9	2,2	2,3	0,8
Легкие	21,2	2,4	17,3	6,3
Всего	22,6	5,6	20,5	7,7

Как по отдельным боевым свойствам, так и в целом, наши новейшие тяжелые танки KB-1 и средние танки Т-34 превосходили танки противника. Танк Т-34 превосходил их по всем основным боевым свойствам (огневой мощи, подвижности и защищенности). Танк

КВ-1 превосходил танки противника по огневой мощи, а по своей защищенности был лучше любого танка противника и любого нашего танка. Но их было немного. Так, по состоянию на 1 июня 1941 г. Красная Армия имела в своем составе 370 танков КВ-1, 608 линейных танков Т-34, а также 138 танков Т-34, оснащенных танковыми рациями [2]. В округах эти танки были распределены поштучно по имевшимся у них войсковым соединениям и частям, причем к началу войны часть этих танков находилась в ремонте. В первые месяцы войны было много случаев, когда экипажам танков КВ-1 удавалось нанести чувствительные потери противнику. Так, например, экипаж танка КВ-1 (командир – Колобанов З. Г.), находясь в засаде у дороги, проложенной по болотистой местности рядом с поселком «Учхоз» Красногвардейского района Ленинградской области, 20 августа 1941 года подкараулил и расстрелял колонну из 22 немецких танков [3]. Но этот и другие примеры были примерами удачных разрозненных действий единичных танков, обычно не обеспеченных должным образом боеприпасами и горючим [4].

Несмотря на потери, понесенные в первые месяцы войны, Красная Армия сумела преодолеть возникшие трудности и найти эффективные способы ведения боевых действий нашими танками. Один из таких способов был реализован 4-й танковой бригадой (далее – *4-я тбр*) полковника Катукова М. Е., перехватившей в районе между городами Орел и Мценск прорвавшийся в глубокий тыл наших войск 24-й танковый корпус 2-й танковой армии Г. Гудериана и нанесшей ему большие потери. В Приказе Народного комиссара обороны СССР №337 от 11 ноября 1941 г. о переименовании *4-ой тбр* в 1-ю гвардейскую танковую бригаду отмечалось, что эта бригада своими «отважными и умелыми боевыми действиями с 4.X по 11.X несмотря на значительное численное превосходство противника, нанесла ему тяжелые потери и выполнила поставленные ... задачи прикрытия сосредоточения наших войск ... В результате ожесточенных боев бригады с 3-й и 4-й танковыми дивизиями и мотодивизией противника фашисты потеряли 133 танка, 49 орудий, 8 самолетов, 15 тягачей с боеприпасами, до полка пехоты ... Потери 4-й танковой бригады исчисляются единицами» [5]. При этом в штате каждой из фашистских танковых дивизий было 160 танков, в 10 мотодивизии – еще 60 танков, т. е. в сумме – до 380 танков, а в нашей танковой бригаде было только 46 танков [6].

В свою очередь, командующий 2-й танковой армии фашистской Германии Г. Гудериан в своих послевоенных воспоминаниях так описывал эти события: «Южнее города Мценска 4-я танковая дивизия фашистской Германии была атакована русскими танками, и ей пришлось пережить тяжелый момент. (Точнее, атаковала 4-я танковая дивизия, а русские танки, обороняясь, отразили эту атаку, действуя из засады – примечание авторов). Впервые проявилось в резкой форме превосходство русских танков Т-34. Дивизия понесла значительные потери. Намеченное быстрое наступление на Тулу пришлось пока отложить» [7]. Г. Гудериан в своих мемуарах не раскрыл, в чем выразались эти потери, но тот факт, что из-за них немецкое наступление на Тулу было сорвано, говорит сам за себя.

Далее Г. Гудериан продолжал: «Особенно неутешительными были полученные нами донесения о действиях русских танков, а главное, об их новой тактике» [7].

2. Новая тактика

Что же это за новая тактика, впервые примененная *4 тбр*. Катуков М. Е. вспоминал об этом следующее: «Фашисты бросили против меня до сотни танков. (Речь идет о бое, проходившем 6 октября 1941 г. при попытке гитлеровских войск прорваться к городу Мценку по шоссе Орел-Мценск в районе населенных пунктов Нарышкино – Первый Воин - примечание авторов). И вот мои танкисты подпустили в упор танки и начали их расстреливать. Фашисты отхлынули, отошли, потом опять полезли, потом опять, и так в течение дня до вечера мы продержались. За день мы уничтожили у немцев 43 танка и несколько сот живой силы. И фашисты отошли километр от моих позиций, так и не узнав, кто-же (и какими силами вел с ними бой – примечание авторов), потому что как только танки стреляют, три-четыре выстрела, и сразу отходят задним ходом, лощинками, кустарниками выскакивают с другого места. Немцы туда направляют огонь, а танков моих там нет. В этом то и хитрость была» [6, 8].

Мы не знаем, и никогда не узнаем, как у Катукова М. Е. возник замысел первого и последующего боев. Известно, что *4 тбр* выдвигалась навстречу противнику из глубины, не имея точных сведений о нем [8]. Известно, что Ставка Верховного Главнокомандования выделила ей из резерва 2 боекомплекта боеприпасов и 2 заправки горючим [5]. Известно, что переход к обороне вдоль северного берега реки Оптуха у села Ивановское, что в 5 км северо-восточнее Орла, *4 тбр* осуществила 4 октября 1941 г. под их прикрытием двух высланных вперед разведывательных отрядов [8]. Один из отрядов под командой комбата В. Гусева, второй – командира роты средних танков А. Бурды. Из отряда В. Гусева был выделен взвод средних танков, усиленный двумя тяжелыми танками КВ-1, который попытался прощупать силы противника боем, ворвавшись на окраину города Орла, после чего связь с ним была потеряна.

При этом мост через реку, отделявший наши войска от противника, был сохранен [8]. Это предопределило направление наступления противника, что позволило заманить его в засаду, исключив возможность глубокого обхода оборонительных позиций *4 тбр* с флангов. Для этого мотострелковый батальон бригады на направлении предполагаемого наступления противника создал несколько слабо укрепленных линий обороны, насытив их ложными целями. Известно, что противник 5 октября 1941 г., (по немецким источникам первый бой с основными силами *4 тбр* произошел 6 октября 1941 г. [7, 9]), перейдя мост, «клянул на приманку», атаковал оборону мотострелкового батальона *4 тбр*. При этом танки танкового батальона *4 тбр*, находившиеся в изначально замаскированных от наблюдения противника укрытиях, выжидали момент, когда противник, увлекшийся атакой, подставит им под огонь борта своих танков. Экипаж каждого нашего танка, выставленного в засаду, использовал для маскировки «местные укрытия: кустарники, деревья, скирды хлеба, стога сена, обратные скаты высот» [6, 8] и подготовил для себя «не одну позицию (речь идет о заранее подготовленных экипажем танка огневых позициях – примечание авторов), а две-три, которые можно менять незаметно для противника» [6, 8].

Известно, что в критический момент, когда возникла угроза прорыва обороны противником, в бой вступили находившиеся в засаде танки. М. Е. Катуков вспоминал: «В бинокль вижу, как из-за пригорка выскочило несколько тридцатьчетверок. Сверкает пламя выстрелов. Один за одним, словно наткнувшись на невидимую преграду, застывают гитлеровские машины. А юркие, стремительные тридцатьчетверки выскакивают и выскакивают из-за стогов сена, из-за сараев, из-за кустарников, делают несколько выстрелов и так же стремительно меняют позиции» [8]. Противник потерял за день боя 18 танков [8].

Известно, что в ночь на 6 октября 1941 г. *4 тбр* отошла (здесь надо учитывать, что противник, выявив в ходе первого боя оборонительные позиции *4 тбр*, мог предпринять их обход с флангов, кроме того, боевая задача *4 тбр* состояла не в удержании конкретной позиции, а в том, чтобы, сдерживая наступление противника, выиграть время для развертывания наших войск в районе Тулы – примечание авторов), по шоссе Орел-Мценск в район населенных пунктов Нарышкино – Первый Воин, где организовала новую танковую засаду, в которую гитлеровцы попали 6 октября 1941 г. (По немецким данным этот бой произошел 7 октября 1941 г. [7, 9]). Описание этого боя в изложении Катукова М. Е. приведено ранее. Тактический прием, примененный Катуковым М. Е., можно назвать как сдерживание противника путем последовательной организации *4 тбр* подвижных танковых засад на направлении его наступления. Практическая эффективность танков *4 тбр* за счет этого приема, вынуждавшего противника действовать не лучшим образом, оказалась существенно выше их боевой эффективности.

Известно, что к месту боев срочно вылетел командующий 2-й танковой армии фашистской Германии Г. Гудериан, который позднее вспоминал: «На поле боя командир дивизии показал мне результаты боев 6 и 7 октября ... Подбитые с обеих сторон танки еще оставались на своих местах. Потери русских были значительно меньше наших потерь». Уместно отметить, что ранее Г. Гудериан не придавал особого значения танку Т-34 как образцу вооружения. Однако осмотрев поле боя, он изменил свое мнение, отметив, что: «Наши противотанковые средства могли успешно действовать против танков Т-34 только при особо благоприятных условиях. Например, наш танк Т-IV со своей короткоствольной 75-мм пушкой имел возможность уничтожить танк Т-34 только с тыльной стороны, поражая его мотор через жалюзи. Для этого требовалось большое искусство» [7]. В немецком исследовании [8], посвященном истории 4-й танковой дивизии гитлеровцев, о бое у с. Ивановское написано следующее: «Шок от первого столкновения со ставшими легендарными Т-34, действовавшими грамотно и в большом количестве, был глубок. Новый вражеский танк быстр, маневрен и имеет хорошую проходимость благодаря широким гусеницам. Огневая мощь его 7,62-см пушки далеко превосходит наши короткие 5-см и 7,5-см. Его бронирование очень сильно по форме и толщине, особенно с фронта. По баллистике с Т-34 справляются только 8,8-см зенитная пушка и 10-см тяжелая пушка. Однако обе только с оговорками подходят для борьбы с этими танками, так как зависят от тягачей, а 10-см пушка не имеет подходящего лафета. ... Соотношение сил на поле боя внезапно изменилось и надолго. Впервые после боя пришлось отступить» [9].

3. Закономерности боя

Исход боя *4-я тбр* у села Ивановское и у населенных пунктов Нарышкино – Первый Воин, следует рассматривать, с одной стороны, как результат героических действий ее командиров и бойцов. С другой стороны, это результат вероятностный, а, следовательно, за ним должна стоять некая количественная закономерность.

Воспроизвести боевые действия *4-й тбр* по математической модели в полном объеме не представляется возможным из-за отсутствия точных данных о боевых порядках сторон к началу боя, последовательности их действий в бою, условиях местности (кустарников, стогов сена и пр.), о расположении окопов, ложных целях и т. п.

Однако известно, в чем заключалась «хитрость» и сколько танк, стоящий в засаде, мог иметь сменных огневых позиций. Известно, что эти сменные позиции были оборудованы для того, чтобы танк, открывший огонь из засады по танку противника, мог скрытно менять их с тем, чтобы уйти от ответного огня других танков противника. По замыслу М. Е. Катукова, наш танк, стоящий в засаде, должен был скрытно сменить огневую позицию, не дожидаясь попадания под прицельный огонь противодействующих танков. Один из возможных способов реализации этого замысла мог состоять в следующем. Экипаж танка, ведущего огонь из засады, должен был следить за тем, куда развернуты башни танков противника. Если направление разворота какой-либо из этих башен противника будет совпадать с направлением ведения прицельного огня по нашему танку, то последний должен был скрытно сменить свою огневую позицию. При этом танк, находившийся в засаде, мог попасть под прицельный огонь лишь одного танка противника. Другой способ изложен в процитированных ранее фрагментах воспоминаний М. Е. Катукова. Он состоял в том, что танк, находившийся в засаде, действовал в условиях, позволявших ему упредить противника в обнаружении цели и открытии прицельного огня по ней. Открывая огонь, танк производил не более трех-четырех выстрелов, затем скрытно сменить огневую позицию. Расчет был в том, что промежуток времени на производство трех-четырех выстрелов, недостаточен для обнаружения танка, ведущего огонь из засады, и открытия огня по нему.

Из этого следует, что, с одной стороны, имел место бой между танками *4 тбр* и танками противника, где каждый танк имел возможность до момента своего поражения вести огонь по любому из танков противника, и наоборот. Такой бой иногда называют групповым боем танков.

С другой стороны, экипаж танка в засаде, скорее всего, стремился действовать наперекор, и открывал огонь в случайный момент времени по той цели, вероятность поражения которой была наибольшей. В силу этого, одновременная концентрация огня двух и более наших танков на одной цели была маловероятной. Для экипажа танка противника непосредственную опасность представлял лишь тот танк, что вел по нему огонь из засады. В этих условиях он вынужден был стремиться к тому, чтобы быстрее обнаружить обстреливающий его танк и поразить его ответным огнем. Тем самым, бой между танками *4 тбр* и танками противника можно представить, как множество возникавших случайным обра-

зом дуэльных боев между танками, различавшихся по месту их расположения и дальностям ведения огня (под дуэльным боем танков обычно понимают такой бой, в котором принимают участие по одному танку от каждой из противодействующих сторон).

4. Математические модели дуэльного боя

Основываясь на этом, можно построить различные математические модели дуэльного боя, соответствующие описаниям М. Е. Катгукова [6, 8], позволяющие оценить соотношение потерь сторон. В этой связи рассмотрим три возможных случая.

Первый случай, когда танк стороны А, действуя из засады, навязывает дуэльный бой танку стороны В, оставаясь на занимаемой огневой позиции до конца боя.

Возможным состояниям системы, в которой будет развиваться такой бой, присвоим следующие порядковые номера: 1 (наводчик танка стороны А поразил танк стороны В); 2 (наводчик танка стороны В поразил танк стороны А); 3 (наводчики обоих танков ведут огонь по противнику); 4 (наводчик танка стороны А ведет огонь по противнику, экипаж танка стороны В осуществляет поиск противника); 5 (наводчик танка стороны А упредил противника в обнаружении и открытии огня).

Граф состояний системы, в которой будет развиваться такой процесс, представлен на рис. 1.

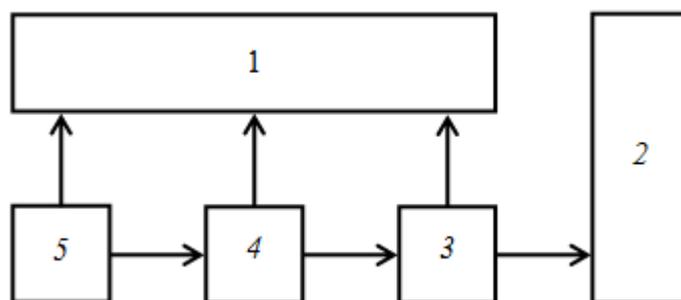


Рис. 1. Граф состояний системы, в которой будет развиваться процесс боя в первом случае

Здесь и далее переход системы из одного состояния в другое происходит случайным образом. При этом будем считать, что вероятности перехода процесса из текущего состояния в одно из смежных состояний зависят только от текущего состояния и не зависят от того, как процесс попал в текущее состояние. Это позволяет построить модель дуэльного боя танков по схеме цепи Маркова, используя подход, изложенный в [10, 11]. Если обозначить через p_{ij} вероятность перехода системы из состояния i в состояние j , то матрицу переходных вероятностей можно записать в следующем виде:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ p_{31} & p_{32} & 0 & 0 & 0 \\ p_{41} & 0 & p_{43} & 0 & 0 \\ p_{51} & 0 & 0 & p_{54} & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом сумма элементов каждой строки матрицы P_1 равна единице, а фундаментальная матрица равна

$$N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p_{43} & 1 & 0 \\ p_{43} \cdot p_{54} & p_{54} & 1 \end{pmatrix}.$$

Выделим в матрице P_1 подматрицу

$$R_1 = \begin{pmatrix} p_{31} & p_{32} \\ p_{41} & 0 \\ p_{51} & 0 \end{pmatrix}.$$

Вектор распределения процесса по состояниям системы на момент начала боя равен

$$\pi_1 = (0, 0, 0, 0, 1),$$

следовательно, вероятности достижения системой поглощающих состояний 1 и 2 будут равны соответственно первому и второму элементам третьей строки матрицы

$$W_1 = N_1 \cdot R_1,$$

$$W_{A1} = p_{31} \cdot p_{43} \cdot p_{54} + p_{41} \cdot p_{54} + p_{51};$$

$$W_{B1} = 1 - W_{A1} = p_{32} \cdot p_{43} \cdot p_{54}.$$

Среднее значение потерь стороны А в дуэльном бою равно

$$M[A] = p_{32} \cdot p_{43} \cdot p_{54},$$

а их среднее квадратичное отклонение

$$\sigma[A] = \sqrt{p_{32} \cdot p_{43} \cdot p_{54} \cdot (1 - p_{32} \cdot p_{43} \cdot p_{54})}.$$

Следовательно, в первом случае среднее соотношение потерь сторон А и В будет равно

$$1 : \frac{p_{31} \cdot p_{43} \cdot p_{54} + p_{41} \cdot p_{54} + p_{51}}{p_{32} \cdot p_{43} \cdot p_{54}}. \quad (1)$$

Второй случай, когда танк стороны А, действуя из засады, навязывает дуэльный бой танку стороны В, при этом скрытно меняет свою огневую позицию, чтобы уйти от обстрела противника, один раз.

Возможные состояния системы, в которой будет развиваться рассматриваемый процесс, обозначим порядковыми номерами: 1 (наводчик танка стороны А поразил танк стороны В); 2 (наводчик танка стороны В поразил танк стороны А); 3 (наводчики обоих танков ведут огонь по противнику); 4 (наводчик танка стороны А, сменив скрытно огневую позицию, повторно упредил противника в обнаружении и открытии огня); 5 (наводчик танка стороны А ведет огонь по противнику, экипаж танка стороны В приступил к поиску цели); 6 (наводчик танка стороны А упредил противника в обнаружении и открытии огня). При этом необходимо пояснить, что при нахождении системы в состоянии 5 экипаж танка стороны А должен отслеживать положение башни каждого из противодействующих танков с тем, чтобы приступить к смене своей огневой позиции до того, как одна из этих башен будет развернута для ведения прицельного ответного огня.

Граф состояний системы, в которой будет развиваться такой процесс, представлен на рис. 2.

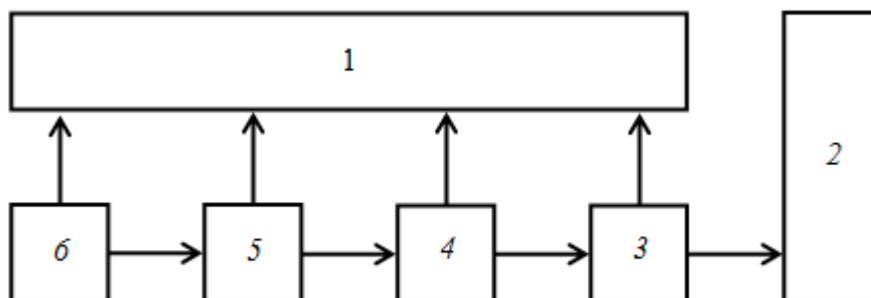


Рис. 2. Граф состояний системы, в которой будет развиваться процесс боя во втором случае

Матрицу переходных вероятностей можно записать в этом случае в следующем виде:

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{31} & p_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{41} & 0 & p_{43} & 0 & 0 & 0 \\ p_{51} & 0 & 0 & p_{54} & 0 & 0 \\ p_{61} & 0 & 0 & 0 & p_{65} & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом сумма элементов каждой строки матрицы P_2 равна единице, а фундаментальная матрица имеет следующий вид:

$$N_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ p_{43} & 1 & 0 & 0 \\ p_{43} \cdot p_{54} & p_{54} & 1 & 0 \\ p_{43} \cdot p_{54} \cdot p_{65} & p_{54} \cdot p_{65} & p_{65} & 1 \end{pmatrix}.$$

Используя указанный ранее подход, выделим в матрице P_2 подматрицу

$$R_2 = \begin{pmatrix} p_{31} & p_{32} \\ p_{41} & 0 \\ p_{51} & 0 \\ p_{61} & 0 \end{pmatrix}.$$

Вектор распределения процесса по состояниям системы на момент начала боя

$$\pi_2 = (0, 0, 0, 0, 0, 1),$$

следовательно, вероятности достижения системой поглощающих состояний 1 и 2 будут равны соответственно первому и второму элементам четвертой строки матрицы

$$W_2 = N_2 \cdot R_2,$$

$$W_{A2} = p_{31} \cdot p_{43} \cdot p_{54} \cdot p_{65} + p_{41} \cdot p_{54} \cdot p_{65} + p_{51} \cdot p_{65} + p_{61};$$

$$W_{B2} = 1 - W_{A2} = p_{32} \cdot p_{43} \cdot p_{54} \cdot p_{65}.$$

Среднее значение потерь стороны А в дуэльном бою равно

$$M[A] = p_{32} \cdot p_{43} \cdot p_{54} \cdot p_{65},$$

а их среднее квадратичное отклонение

$$\sigma[A] = \sqrt{p_{32} \cdot p_{43} \cdot p_{54} \cdot p_{65} \cdot (1 - p_{32} \cdot p_{43} \cdot p_{54} \cdot p_{65})}.$$

Следовательно, во втором случае математическое ожидание соотношения потерь сторон А и В будет равно

$$1 : \frac{p_{31} \cdot p_{43} \cdot p_{54} \cdot p_{65} + p_{41} \cdot p_{54} \cdot p_{65} + p_{51} \cdot p_{65} + p_{61}}{p_{32} \cdot p_{43} \cdot p_{54} \cdot p_{65}}. \quad (2)$$

Третий случай, когда танк стороны А, действуя из засады, навязывает дуэльный бой танку стороны В, имея возможность скрытно сменить огневую позицию для ухода от обстрела противника два раза.

Возможные состояния системы, в которой будет развиваться рассматриваемый процесс, обозначим порядковыми номерами: 1 (наводчик танка стороны А поразил танк стороны В); 2 (наводчик танка стороны В поразил танк стороны А); 3 (наводчики обоих танков ведут огонь по противнику); 4 (наводчик танка стороны А, сменив скрытно огневую позицию во второй раз, вновь упредил противника в обнаружении и открытии огня); 5 (наводчик танка стороны А, сменив скрытно огневую позицию в первый раз, вновь упредил противника в открытии огня); 6 (наводчик танка ведет огонь по противнику, экипаж танка стороны В приступил к поиску цели); 7 (наводчик танка стороны А упредил противника в обнаружении и открытии огня).

Граф состояний системы, в которой такой бой будет развиваться, представлен на рис. 3.

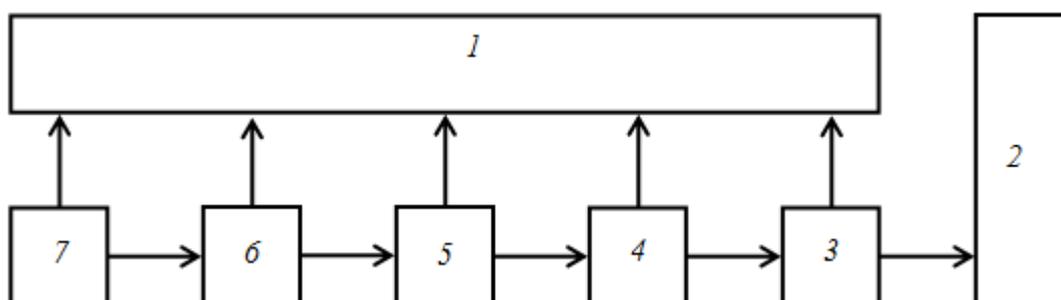


Рис. 3. Граф состояний системы, в которой будет развиваться процесс боя в третьем случае

Матрицу переходных вероятностей можно записать в этом случае в следующем виде:

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{31} & p_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{41} & 0 & p_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{51} & 0 & 0 & p_{54} & 0 & 0 & 0 \\ p_{61} & 0 & 0 & 0 & p_{65} & 0 & 0 \\ p_{71} & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{76} & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом сумма элементов каждой строки матрицы P_3 равна единице, а фундаментальная матрица равна

$$N_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{43} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ p_{43} \cdot p_{54} & p_{54} & 1 & 0 & 0 \\ p_{43} \cdot p_{54} \cdot p_{65} & p_{54} \cdot p_{65} & p_{65} & 1 & 0 \\ p_{43} \cdot p_{54} \cdot p_{65} \cdot p_{76} & p_{54} \cdot p_{65} \cdot p_{76} & p_{65} \cdot p_{76} & p_{76} & 1 \end{pmatrix}.$$

Используя указанный ранее подход, выделим в матрице P_3 подматрицу

$$R_3 = \begin{pmatrix} p_{31} & p_{32} \\ p_{41} & 0 \\ p_{51} & 0 \\ p_{65} & 0 \\ p_{76} & 0 \end{pmatrix}.$$

Вектор распределения процесса по состояниям системы на момент начала боя

$$\pi_3 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1),$$

следовательно, вероятности достижения системой поглощающих состояний 1 и 2 будут равны соответственно первому и второму элементам пятой строки матрицы

$$W_3 = N_2 \cdot R_2,$$

$$W_{A3} = p_{31} \cdot p_{43} \cdot p_{54} \cdot p_{65} \cdot p_{76} + p_{41} \cdot p_{54} \cdot p_{65} \cdot p_{76} + p_{51} \cdot p_{65} \cdot p_{76} + p_{65} \cdot p_{76} + p_{76};$$

$$W_{B3} = 1 - W_{A3} = p_{32} \cdot p_{43} \cdot p_{54} \cdot p_{65} \cdot p_{76}.$$

Среднее значение потерь стороны А в дуэльном бою равно

$$M[A] = p_{32} \cdot p_{43} \cdot p_{54} \cdot p_{65} \cdot p_{76},$$

а их среднее квадратичное отклонение

$$\sigma[A] = \sqrt{p_{32} \cdot p_{43} \cdot p_{54} \cdot p_{65} \cdot p_{76} \cdot (1 - p_{32} \cdot p_{43} \cdot p_{54} \cdot p_{65} \cdot p_{76})}.$$

Следовательно, в третьем случае математическое ожидание соотношения потерь сторон А и В будет равно

$$1 : \frac{p_{31} \cdot p_{43} \cdot p_{54} \cdot p_{65} \cdot p_{76} + p_{41} \cdot p_{54} \cdot p_{65} \cdot p_{76} + p_{51} \cdot p_{65} \cdot p_{76} + p_{65} \cdot p_{76}}{p_{32} \cdot p_{43} \cdot p_{54} \cdot p_{65} \cdot p_{76}}. \quad (3)$$

Используя выражения (1), (2) и (3), можно оценить математическое ожидание соотношения потерь сторон А и В при заданных значениях вероятностей перехода системы из одних состояний в другие состояния. Однако точные значения этих вероятностей неизвестны, и возможности их определить уже нет. Но известно, что мотострелковый батальон *4-й тбр* использовался для того, чтобы заманить противника в засаду под огонь танков танкового батальона этой бригады. При этом важное значение имеют ответы на следующие два вопроса. Первый, уступали ли наши танки по своей боевой эффективности танкам противника, или нет? Второй, были ли наши танкисты подготовлены к тому, чтобы не упустить возникающие при бое из засады выгодные возможности поражения танков противника?

Ответ на первый вопрос содержится в воспоминаниях Катукова М. Е. [6, 8], в воспоминаниях Г. Гудериана [7] и в работе [9], фрагменты которых цитировались ранее. В дополнение к этому 1 танковый батальон *4 тбр*, по воспоминаниям М. Е. Катукова, для своего формирования «получил тридцатьчетверки. (По другим данным в составе 1-го танкового батальона 4-го танкового полка 4-й танковой бригады Катукова М. Е. имелись одна рота тяжелых танков (7 танков КВ-1) и две роты средних танков (10 танков Т-34 в каждой) [12]). Мощная броня, легкость управления, подвижность и маневренность — вот что привлекало в этом танке. Эта машина во всех отношениях превосходила немецкие Т-II, Т-III, Т-IV, которые имели на вооружении соответственно 20, 37, 50 и 75-мм пушки и по своим боевым качествам значительно уступали новым советским машинам» [6, 8]. Из этого сле-

дует, что обе противодействующие стороны, участвовавшие в указанных боевых действиях, в лице их руководителей признавали, что наши танки, стоявшие в засаде, не уступали по своим боевым характеристикам танкам противника. Более того, общепризнанным является тот факт, что танк Т-34 по своей боевой эффективности превосходил в 1941 и 1942 годах немецкие танки, но для расчета нижней границы соотношения потерь по формулам (1), (2) и (3) важно, чтобы он не уступал им.

Ответ на второй вопрос также можно найти в воспоминаниях Катукова М. Е. [6, 8], в воспоминаниях Г. Гудериана [7] и в работе [9], фрагменты которых цитировались ранее. Следовательно, наши танкисты были готовы к тому, чтобы умело использовать тактические преимущества ведения боя из засад.

Это позволяет провести прикидочный расчет в предположении, что наши танки, действуя из засад, ни в чем не уступали танкам противника. Если положить вероятности перехода системы из каждого невозвратного состояния в последующие будут равновероятными, то получим минимальное значение соотношения средних потерь сторон А и В.

Применительно к первому случаю это соотношение будет равно 1 : 7 (на каждый пораженный танк стороны А будет в среднем приходиться 7 танков стороны В). Применительно ко второму случаю оно равно 1 : 15 (на каждый пораженный танк стороны А будет в среднем приходиться 15 танков стороны В). Наконец, применительно к третьему случаю это соотношение равно 1 : 31 (на каждый пораженный танк стороны А будет в среднем приходиться 31 танков стороны В). Это позволяет предположить, что, чем больше танк, стоящий в засаде, будет скрытно менять огневые позиции, тем больше это соотношение будет меняться в его пользу.

Заключение

Результаты расчетов по формулам (1), (2) и (3) свидетельствуют о том, что успех, достигнутый *4 тбр* в боях на подступах к г. Мценску, не был случайным. Помимо тактического обоснования, у него теперь есть и математическое обоснование. Маршал бронетанковых войск Катуков М. Е. в своих воспоминаниях отмечал, что каждый танк в засаде должен был иметь две – три огневые позиции. Из результатов расчетов следует, что в первом бою наши танки, стоявшие в засаде, возможно, сумели использовать одну – две огневые позиции, а в дальнейшем количество таких позиций было доведено до трех.

Результаты расчетов позволяют утверждать, что тактический прием, примененный *4 тбр* в боях под Мценском для сдерживания противника путем последовательной организации на направлении его наступления подвижных танковых засад, имеет большое значение и в наши дни, в том числе при проведении антитеррористических операций против боевиков, использующих танки.

Список литературы

1. Великая Отечественная без грифа секретности. Книга потерь: [Новейшее справочное издание] / Г.Ф. Кривошеев и др. М.: Вече, 2010. 384 с.
2. Отечественные бронированные машины. XX век: [В 4 т.] / А.Г. Солянкин и др. Т. 2: 1941-1945. М.: Экспринт, 2005. 448 с.
3. Барятинский М.Б. Советские танковые асы. М.: Яуза: Эксмо, 2008. 352 с.
4. Ротмистров П.А. Стальная гвардия. М.: Воениздат, 1984. 272 с.
5. Шеин Д. 1-я гвардейская танковая бригада в боях за Москву // Фронтальная иллюстрация. 2007. № 4. С. 2 – 71. Режим доступа: <http://militarylib.com/magazines/front-illustration/1009-frontovaya-illyustraciya-4-2007-1-ya-gvardejskaya-tankovaya-brigada-v-boyax-za-moskvu.html> (дата обращения 11.10.2018).
6. Воспоминания. Катуков Михаил Ефимович (1900-1976). Режим доступа: <https://www.youtube.com/watch?v=60ld62KXB9s> (дата обращения 18.04.2018).
7. Гудериан Г. Воспоминания солдата. Смоленск: Русич, 2003. 656 с. [Guderian H. Erinnerungen eines Soldaten. HdbI.: K. Vowinckel, 1951. 462 s.].
8. Катуков М.Е. На острие главного удара. М.: Воениздат, 1974. 432 с.
9. Neumann J. Die 4. Panzerdivision, 1938 – 1943: Bericht und Betrachtung zu zwei Blitzfeldzügen und zwei Jahren Krieg in Rußland. Bonn: Im Selbstverlag des Verfassers Wesselheideweg, 1985. 652 s.
10. Вентцель Е.С. Исследование операций. М.: Советское радио, 1972. 551 с.
11. Кемени Дж., Снелл Дж. Конечные цепи Маркова. М.: Наука, 1970. 271 с. [Kemeny J.G., Snell J.L. Finite Markov chains. Princeton: Van Nostrand Publ., 1960. 210 p.].
12. 1-я гвардейская танковая бригада. Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/1-я_гвардейская_танковая_бригада (дата обращения 18.04.2018).

Using Mathematical Models in Event Analysis from Military History

S.S. Neustroev¹, V.I. Serdyukov^{1,2},
N.A. Serdyukova³, S.I. Shishkina^{2,*}

*shish-bmstu@mail.ru

¹Institute of Education Management of the Russian Academy
of Education, Moscow, Russia

²Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

³Plekhanov Russian University of Economics, Moscow, Russia

Keywords: mathematical model, loss ratio, effectiveness

One of the ways of knowing the events of military history is to reproduce them using mathematical models. Based on the analysis of the fighting operations of the 4th Panzer Brigade of the Red Army in the vicinity of the city of Mtsensk in early October 1941, the capability to provide mathematical modeling of the fragments of these combat operations and the application of the apparatus of Markov random processes for these purposes is substantiated.

The effectiveness of tanks depends not only on their technical properties, but also on the ways they are used on the battlefield. At the same time, combat effectiveness of tanks is commonly understood as their effectiveness in conditions when the methods of conducting combat operations by each of the opposing sides are the best.

The battle outcome is probabilistic. It has certain regularity, depending on the combat tactics. The battle can be imagined as a multitude of randomly dueling fights between tanks, differing in their location and range of fire. A study of the probability of a system transition from each transient state to the next leads to the construction of mathematical models that allow calculating the ratio of losses of opposing sides.

Based on the facts of military history and discovered regularities, the mathematical models are constructed to allow reproducing various fragments of combat according to the scheme of the Markov random process, and on their basis calculations are performed. The dependence of the ratio of the losses of the opposing sides depending on the number of firing positions used by the ambush tanks was established, provided that the change of these positions was made imperceptibly for the enemy.

The obtained results can be used to develop tactical methods of using tanks in antiterrorist operations.

References

1. *Velikaia Otechestvennaia bez grifa sekretnosti. Kniga poter': Novejshee spravochnoe izdanie* [The Great Patriotic War without the neck of secrecy. The book of losses. The latest reference edition] / G.F. Krivosheev a.o. Moscow: Veche Publ., 2010. 384 p. (in Russian).
2. *Otechestvennye bronirovannye mashiny. XX vek: [V 4-kh tomakh]* [Domestic armored vehicles. 20th century: [In 4 vol.]] / A.G. Soliankin a.o. Vol. 2: 1941-1945. Moscow: Exprint Publ., 2005. 448 p. (in Russian).
3. Bariatinskij M.B. *Sovetskie tankovye asy* [Soviet tank aces]. Moscow: Iauza: Eksmo Publ., 2008. 352 p. (in Russian).
4. Rotmistrov P.A. *Stal'naia gvardiia* [Steel guards]. Moscow: Voenizdat Publ., 1984. 272 p. (in Russian).
5. Shein D. The 1st guards tank brigade in the battles for Moscow. *Frontovaia illustratsiia* [Front illustration], 2007, no. 4, pp. 2 – 71. Available at: <http://militarylib.com/magazines/front-illustration/1009-frontovaya-illyustraciya-4-2007-1-ya-gvardejskaya-tankovaya-brigada-v-boyax-za-moskvu.html>, accessed 11.10.2018 (in Russian).
6. *Vospominaniia. Katukov Mikhail Efimovich. 1900-1976* [A video recording of the memories of the Marshal of the armored troops of Mikhail Efimovich Katukov about his participation in the Great Patriotic War (1900-1976)]. Available at: <https://www.youtube.com/watch?v=60ld62KXB9s>, accessed 18.04.2018 (in Russian).
7. Guderian H. *Erinnerungen eines Soldaten*. HdbI.: K. Vowinkel, 1951. 462 s. (Russ. ed.: Guderian H. *Vospominaniia soldata*. Smolensk: Rusich Publ., 2003. 656 p.).
8. Katukov M.E. *Na ostrie glavnogo udara* [On the edge of the main blow]. Moscow: Voenizdat Publ., 1974. 432 p. (in Russian).
9. Neumann J. Die 4. Panzerdivision, 1938 – 1943. Bericht und Betrachtung zu zwei Blitzfeldzügen und zwei Jahren Krieg in Rußland. Bonn: Im Selbstverlag des Verfassers Wesselheideweg, 1985. 652 s.
10. Ventzel' E.S. *Issledovanie operatsij* [Operations research]. Moscow: Sovetskoe radio Publ., 1972. 551 p. (in Russian).
11. Kemeni J.G., Snell J.L. *Finite Markov chains*. Princeton: Van Nostrand Publ., 1960. 210 p. (Russ. ed.: Kemeni J.G., Snell J.L. *Konechnye tsepi Markova*. Moscow: Nauka Publ., 1970. 271 p.).
12. *1-ia gvardejskaia tankovaia brigade* [The 1st guards tank brigade]. Available at: https://ru.wikipedia.org/wiki/1-я_гвардейская_танковая_бригада, accessed 18.04.2018 (in Russian).