

УДК 621.396.96

И. В. Гоголев
АО «НИИ "Вектор"»

Кантемировская ул., д. 10, Санкт-Петербург, Россия, 197342

Сравнение статистических характеристик оценок доплеровской деформации и задержки сигнала с результатами узкополосной модели

Аннотация. Изучаются статистические характеристики совместных оценок доплеровской деформации и задержки сигнала с произвольной шириной спектра, т. е. без допущений узкополосной модели. Исследован переход между параметрами узкополосной и широкополосной моделей на примере треугольного импульса с линейной частотной модуляцией, проведен анализ отличий в элементах информационных матриц. Проанализирована неинвариантность дисперсии оценки масштаба/задержки к выбору начала отсчета и приведено объяснение причин указанного эффекта.

Показано, что неинвариантность дисперсии оценки задержки сигнала к выбору начала отсчета связана с изменением оцениваемого параметра и влиянием скорости цели на задержку. Полученные дисперсии оценок узкополосной модели совпадают с результатами широкополосной модели с точностью до поправки порядка отношения ширины спектра к центральной частоте.

Ключевые слова: эффект Доплера, деформация, задержка, начало отсчета, граница Крамера–Рао

Для цитирования: Гоголев И. В. Сравнение статистических характеристик оценок доплеровской деформации и задержки сигнала с результатами узкополосной модели // Изв. вузов России. Радиоэлектроника. 2018. № 1. С. 13–18.

I. V. Gogolev
JSC "Vector"
10, Kantemirovskaya Str., 197342, St. Petersburg, Russia

Doppler Stretch and Delay Statistical Performance Comparison for Wideband and Narrowband Signal Model

Abstract. Narrowband approximation of Doppler effect by a frequency shift is inappropriate for some problems of radiolocation, hydro acoustics or passive location. In this case it is necessary to use Doppler stretch (time-scaling) as a signal parameter. Statistical performance of joint Doppler stretch and delay for arbitrary spectral width signal without narrowband approximations is derived in this paper.

Narrowband and wideband parameters relations are investigated for triangle impulse with linear spectral modulation. Besides, Fisher Information Matrices (FIM) differences are analyzed. In the narrowband limit consideration of results in well-known FIM of Doppler shift and delay estimation are proposed. Another feature of wideband FIM is reference time dependence on time delay variance. Transition from Doppler stretch to Doppler frequency shift considering narrowband limitations results in translation invariant FIM.

The article shows that reference time variance of delay estimation is related to estimated parameter modification and velocity influence on delay. Also, estimation variances in narrowband signal model differ from wideband parameter variances by magnitude of spectrum width to central frequency ratio.

Key words: Doppler Effect, Doppler Stretch, Delay, Reference Time, Cramer–Rao bound

For citation: Gogolev I. V. Doppler Stretch and Delay Statistical Performance Comparison for Wideband and Narrowband Signal Model. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii Rossii. Radioelektronika* [Journal of the Russian Universities. Radioelectronics]. 2018, no. 1, pp. 13–18. (In Russian)

Введение. В стандартной модели измерений эхо $r(t)$ излученного локатором сигнала $s(t)$ принимается с запаздыванием $T(t)$ и в случае ненулевой относительной радиальной скорости $v(t)$ оказывается деформированным относительно $s(t)$ вследствие эффекта Доплера. Соотношение между принятым и излученным сигналами принято записывать в виде [1], [2]

$$r(t) = s[t - T(t)]. \quad (1)$$

В узкополосной модели сигнала деформацией огибающей пренебрегают, и эффект Доплера сводится к сдвигу центральной частоты сигнала ω_0 на величину

$$\omega_D = (2v/c)\omega_0,$$

где c – скорость света. Можно показать [2], что возможность описания эффекта Доплера с помощью единственного параметра ω_D является следствием разложения полной модели измерений по параметру B/ω_0 , где B – ширина спектра огибающей.

Для некоторых задач радиолокации, гидроакустики, а также пассивной локации [2]–[4] узкополосная модель перестает быть адекватной проводимым измерениям, и информативными параметрами, подлежащими оценке, являются запаздывание τ и фактор доплеровской деформации (масштаб) σ .

Модель измерений и дисперсия оценки. Формула (1), описывающая связь излученного и принятого сигналов, в общем виде записывается следующим образом:

$$r(t) = s\left(\frac{t-\tau}{\sigma}\right). \quad (2)$$

Аргумент сигнала в (2) может быть записан в разных эквивалентных формах [4]. Изменение формы записи аргумента меняет вид связи измеряемых параметров $\{\tau, \sigma\}$ с параметрами движения цели: дальностью и радиальной скоростью.

Помимо информационных параметров в принятом сигнале также можно выделить неинформационные. В общем виде принятая реализация $r(t)$ как функция времени t , вектора измеряемых информативных параметров $\theta = \{\tau, \sigma\}$, а также вектора мешающих параметров Ψ , содержит и помеховую составляющую:

$$r(t) = s(t, \theta, \Psi) + n(t),$$

где $n(t)$ – вклад "белого" гауссовского шума со спектральной плотностью N_0 .

При большом соотношении "сигнал/шум" оценка параметров и вычисление их дисперсий производятся по методу максимального правдоподобия. Известно [1], что максимально правдоподобные оценки асимптотически состоятельны и эффективны, т. е. их дисперсия совпадает с нижней границей Крамера–Рао.

При такой постановке оценка θ определяется как координата минимума функционала правдоподобия $W[r(t)|\theta]$, а дисперсии компонент θ_i удовлетворяют неравенству

$$D\{\theta_i|\theta\} \geq \Phi_{ii}^{-1}, \quad (3)$$

где Φ_{ii}^{-1} – диагональный элемент матрицы, обратной информационной матрице Фишера:

$$\Phi_{ij} = -\frac{\partial^2 \ln W[r(t)|\theta]}{\partial \theta_i \partial \theta_j}.$$

Матрица Фишера и дисперсия оценок масштаба и задержки может быть получена для любого набора мешающих параметров. В рамках настоящей статьи для простоты сравнения результатов узкополосной и широкополосной моделей рассмотрим сигнал с известной амплитудой и случайной начальной фазой, распределенной равномерно на интервале $[0, 2\pi]$:

$$\dot{r}(t) = \dot{s}(t, \theta, \varphi) + \dot{n}(t) = \dot{s}\left(\frac{t-\tau}{\sigma}\right) e^{i\varphi} + \dot{n}(t).$$

В этом случае матрица Фишера¹ оценок $\theta = \{\tau, \sigma\}$ записывается в следующем виде [5]:

$$\Phi^{[w]}_{\{\tau, \sigma\}} = \frac{2E_0}{N_0\sigma_0^2} \begin{bmatrix} \overline{\Omega^2} - \overline{\Omega}^2 & \overline{t\Omega^2} - \overline{\Omega}t\overline{\Omega} \\ \overline{t\Omega^2} - \overline{\Omega}t\overline{\Omega} & \overline{t^2\Omega^2} - \overline{t\Omega}^2 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} 2E_0 &= \int \dot{s}\left(\frac{t-\tau_0}{\sigma_0}\right) \dot{s}^*\left(\frac{t-\tau_0}{\sigma_0}\right) dt = \\ &= \sigma_0 \int \dot{s}(t) \dot{s}^*(t) dt = 2\sigma_0 E_t; \end{aligned} \quad (5)$$

$\{t_0, \sigma_0\}$ – вектор истинных значений оцениваемых параметров:

$$\overline{\Omega^2} = \frac{1}{E_t} \int |\dot{s}'(t)|^2 dt, \quad (6)$$

$$\overline{\Omega} = -\frac{1}{E_t} \text{Im} \int \dot{s}(t) \dot{s}'^*(t) dt, \quad (7)$$

$$\overline{t\Omega^2} = \frac{1}{E_t} \int t |\dot{s}'(t)|^2 dt, \quad (8)$$

$$\overline{t^2\Omega^2} = \frac{1}{E_t} \int t^2 |\dot{s}'(t)|^2 dt, \quad (9)$$

$$\overline{t\Omega} = -\frac{1}{E_t} \text{Im} \int t \dot{s}(t) \dot{s}'^*(t) dt. \quad (10)$$

Дисперсия оценки задержки сигнала, вычисленная из (4) с учетом (3), оказывается инвариантной к выбору начала отсчета времени. Матрица Фишера при оценке амплитуды и начальной фазы имеет иной вид [6], но часть ее элементов также определяется (5)–(10), и инвариантность дисперсии оценки задержки сохраняется.

¹ В пределах настоящей статьи индекс "w" указывает на принадлежность величины к широкополосной модели, индекс "n" – на принадлежность к узкополосной модели.

Неинвариантность дисперсии к выбору начала отсчета. Все элементы матрицы (4) кроме Φ_{11} зависят от выбора начала отсчета. Так как $\det \Phi$ от этого выбора не зависит, зависимой оказывается оценка дисперсии τ . Этот эффект отсутствует в узкополосной модели в силу пренебрежения вгибающей изменением положения цели за время порядка длительности импульса.

Рассмотрим связь измеряемых параметров в широкополосной модели с параметрами движения цели и проследим переход к узкополосной модели для последующего анализа связи матриц Фишера.

Пусть цель движется без ускорения. Тогда расстояние до цели определяется выражением

$$R(t) = R_0 + vt,$$

где R_0 – расстояние до цели в момент времени $t = 0$; v – радиальная скорость цели.

В радиолокационной модели измерений задержка сигнала определяется временем его прохода удвоенного расстояния до цели. Задержка между излученным сигналом и принятым после отражения от цели в общем случае является функцией от времени и определяется расстоянием в момент отражения от цели:

$$T(t) = (2/c)R[t - T(t)/2].$$

Решив данное уравнение относительно $T(t)$, получим:

$$T(t) = \frac{2R_0}{c+v} + t \frac{2v}{c+v}.$$

Подстановка полученного выражения в (1) позволяет записать соотношение между переданным и принятым сигналами в виде

$$r(t) = s[t - T(t)] = s\left(\frac{c-v}{c+v}t - \frac{2R_0}{c+v}\right) = s\left(\frac{t-\tau}{\sigma}\right), \quad (11)$$

где

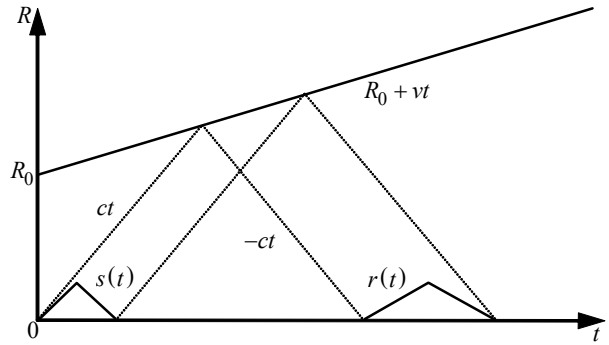
$$\tau = T(t=0) = 2R_0/(c-v)$$

– задержка в момент времени $t = 0$;

$$\sigma = (c+v)/(c-v)$$

– масштаб.

При анализе широкополосной ситуации требуется уточнение, отражение какой именно части сигнала используется при определении времени задержки. Выбор начала отсчета определяет значение параметра τ , т. е. момент времени, связанный с измерением (см. рисунок). Так как изменение начала отсчета приводит к изменению изме-



ряемой величины, то и оценка ее дисперсии оказывается неинвариантной. Масштаб же сигнала определяется скоростью цели и от выбора начала отсчета не зависит (при неизменной скорости цели относительно излучателя).

Также следует отметить, что скорость цели v входит в выражения и для задержки, и для масштаба сигнала.

Подобный эффект зависимости точности оценок дальности, скорости и ускорения от выбора начала отсчета сигнала при зондировании последовательностью сверхширокополосных импульсов был описан в [7]. Зависимость дисперсии оценки задержки при совместном с масштабом оценивании также отмечена в [8].

От общего выражения (11) несложно перейти к записи в узкополосной модели сигнала, т. е. при условии $v = c$, $B = \omega_0$. Записав выражение для аналитического сигнала и упростив его с учетом допущений узкополосной модели, получим:

$$\begin{aligned} & \dot{s}\left(t - \frac{2R_0}{c+v} - t \frac{2v}{c+v}\right) = \\ & = \dot{A}(t - \tau_n) \exp[j\psi(t - \tau_n) + j(\omega_0 + \omega_D)t + j\phi], \end{aligned}$$

где $A(t)$ – закон амплитудной модуляции;

$$\tau_n = \frac{2R_0}{c+v} \approx \frac{2R_0}{c};$$

$\psi(t)$ – закон модуляции фазы;

$$\omega_D = \omega_0 \frac{2v}{c+v} \approx \omega_0 \frac{2v}{c};$$

$$\phi = \omega_0 \frac{2R_0}{c+v} \approx \omega_0 \frac{2R_0}{c}$$

– набег фазы за время задержки.

Выполненный анализ показывает, что в узкополосной модели первичные параметры $\{R_0, v\}$ входят в выражения для задержки и сдвига частоты раздельно, тогда как в широкополосной модели скорость цели входит в выражения и задержки, и масштаба. При этом в широкополос-

ной модели доплеровский сдвиг связан с масштабом сигнала соотношением

$$\omega_D = \omega_0 \left(1 - \frac{c-v}{c+v} \right) = \omega_0 \left(1 - \frac{1}{\sigma} \right). \quad (12)$$

Наличие зависимостей, в явном виде связывающих доплеровский масштаб и сдвиг центральной частоты, позволяет провести анализ перехода от широкополосной модели к узкополосной и оценить порядок поправок к оценкам дисперсий.

Переход от широкополосной модели к узкополосной. Матрица Фишера совместной оценки задержки и сдвига частоты в узкополосной модели имеет вид [9]

$$\Phi^{[n]} \{ \tau, \omega_D \} = \frac{2E_0}{N_0} \begin{bmatrix} \overline{\Omega^2} - \bar{\Omega}^2 & \overline{t\Omega} - \bar{t}\bar{\Omega} \\ \overline{t\Omega} - \bar{t}\bar{\Omega} & \bar{t}^2 - \bar{t}^2 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Различия матриц Фишера в широкополосной (4) и узкополосной (13) моделях в общем виде определяются функционалами от сигнала, не имеющими общепринятой трактовки. Тем не менее предельный переход от оценки масштаба к оценке сдвига частоты можно проанализировать для сигналов определенной формы.

Проведем анализ элементов матрицы Фишера для треугольного импульса с линейной частотной модуляцией. Комплексная огибающая такого сигнала при условии $\omega_0 T \gg 1$ (T – длительность импульса по основанию огибающей) может быть записана в виде

$$\dot{s}(t) = \text{triang}(t, T, \tau_0) \exp \left\{ j \left[\omega_0 t + \frac{F}{T} \left(\frac{t^2}{2} - t\tau_0 \right) \right] \right\},$$

где $\text{triang}(t, T, \tau_0)$ – функция, описывающая огибающую импульса; F – девиация частоты; τ_0 – положение центра импульса.

Огибающая импульса определена выражением

$$\begin{aligned} \text{triang}(t, T, \tau_0) &= \\ &= \begin{cases} 2(A/T)(t - \tau_0 + T/2); & t \in [\tau_0 - T/2, \tau_0]; \\ -2(A/T)(t - \tau_0 - T/2); & t \in [\tau_0, \tau_0 + T/2], \end{cases} \end{aligned}$$

где A – максимальное значение огибающей.

Матрица Фишера оценки $\{ \tau, \omega_D \}$ в узкополосной модели имеет вид

$$\Phi^{[n]} \{ \tau, \omega_D \} = \frac{2E_0}{N_0} \begin{bmatrix} \frac{F^2}{40} + \frac{12}{T^2} & \frac{FT}{40} \\ \frac{FT}{40} & \frac{T^2}{40} \end{bmatrix}.$$

Матрица Фишера оценки $\{ \tau, \sigma \}$ в широкополосной модели имеет вид

$$\Phi^{[w]} \{ \tau, \sigma \} = \frac{2E_0}{N_0 \sigma^2} \begin{bmatrix} \Phi_{11}^{[w]} \{ \tau, \sigma \} & \Phi_{21}^{[w]} \{ \tau, \sigma \} \\ \Phi_{12}^{[w]} \{ \tau, \sigma \} & \Phi_{22}^{[w]} \{ \tau, \sigma \} \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_{11}^{[w]} \{ \tau, \sigma \} &= \frac{F^2}{40} + \frac{12}{T^2}; \\ \Phi_{21}^{[w]} \{ \tau, \sigma \} &= \left(\frac{F^2}{40} + \frac{12}{T^2} \right) \tau_0 + \frac{FT}{40} \omega_0; \\ \Phi_{12}^{[w]} \{ \tau, \sigma \} &= \left(\frac{F^2}{40} + \frac{12}{T^2} \right) \tau_0 + \frac{FT}{40} \omega_0; \\ \Phi_{22}^{[w]} \{ \tau, \sigma \} &= \left(\frac{F^2}{40} + \frac{12}{T^2} \right) \tau_0^2 + \frac{FT}{20} \omega_0 \tau_0 + \\ &+ F^2 T^2 \left(\frac{1}{560} - \frac{1}{40^2} \right) + \frac{T^2 \omega_0^2}{40} + 1. \end{aligned}$$

Для перехода от широкополосной модели к узкополосной и обратно можно произвести замену оцениваемой переменной в функционале правдоподобия. Тогда элементы новой матрицы Фишера будут определяться выражением

$$\begin{aligned} \Phi_{\tau, \omega_D}^{[w]} &= - \frac{\partial^2 \ln W[r(t)|\theta]}{\partial \tau \partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \omega_D} = \Phi_{\tau, \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \omega_D}; \\ \Phi_{\omega_D, \omega_D}^{[w]} &= - \frac{\partial^2 \ln W[r(t)|\theta]}{\partial \sigma^2} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \omega_D} \right)^2 = \Phi_{\sigma, \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \omega_D}. \end{aligned}$$

Осуществим замену (16) для перехода от $\{ \tau, \sigma \}$ к $\{ \tau, \omega_D \}$. С учетом соотношения

$$\frac{\partial \omega_D}{\partial \sigma} = \frac{\omega_0}{\sigma^2}$$

матрица Фишера оценки задержки τ и сдвига ω_D , полученная из широкополосной модели $\Phi^{[w]} \{ \tau, \omega_D \}$, приобретает вид

$$\begin{aligned} \Phi^{[w]} \{ \tau, \omega_D \} &= \\ &= \frac{2E_0}{N_0 \sigma^2} \begin{bmatrix} \Phi_{11}^{[w]} \{ \tau, \omega_D \} & \Phi_{21}^{[w]} \{ \tau, \omega_D \} \\ \Phi_{12}^{[w]} \{ \tau, \omega_D \} & \Phi_{22}^{[w]} \{ \tau, \omega_D \} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_{21}^{[w]} \{ \tau, \omega_D \} &= \Phi_{12}^{[w]} \{ \tau, \omega_D \} = \\ &= \left(\frac{F^2}{40} + \frac{12}{T^2} \right) \tau_0 + \frac{FT}{40}; \end{aligned}$$

$$\Phi_{22}^{[w]} \{ \tau, \omega_D \} = \left(\frac{F^2}{40} + \frac{12}{T^2} \right) \frac{\tau_0^2}{\omega_0^2} + \frac{FT}{20\omega_0} \tau_0 + \frac{F^2 T^2}{\omega_0^2} \left(\frac{1}{560} - \frac{1}{40^2} \right) + \frac{1}{\omega_0^2} + \frac{T^2}{40}.$$

Полученная матрица совпадает с матрицей узкополосной модели с точностью до поправки порядка отношения ширины спектра к центральной частоте.

Заключение. В рамках широкополосной модели сигнала, когда не применяются приближения малой ширины спектра и малой скорости цели, эффект Доплера проявляется в изменении временного масштаба. Оценки масштаба и задержки сигнала в общем случае коррелированы, а дисперсия оценки задержки зависит от выбора начала отсчета времени.

В результате проведенного анализа показано, что неинвариантность дисперсии оценки задержки сигнала к выбору начала отсчета связана с изменением оцениваемого параметра и влиянием скорости цели на задержку. При этом в рамках узкополосной модели за счет пренебрежения деформацией огибающей за время измерения данный эффект отсутствует.

Сравнение матриц Фишера в узкополосной и широкополосной моделях и анализ предельных переходов показывают, что полученные дисперсии оценок узкополосной модели совпадают с результатами широкополосной модели с точностью до поправки порядка отношения ширины спектра к центральной частоте.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ван-Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции: в 3 т. / пер. с англ. под ред. В. Т. Горяинова. М.: Сов. радио, 1977. Т. 3. 664 с.

2. Swick D. A. An Ambiguity Function Independent of Assumptions About Bandwidth and Carrier Frequency. NRL Report 6471, 1966. URL: <http://www.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/645918.pdf> (дата обращения: 20.02.2018).

3. Гоголев И. В., Яшин Г. Ю. Ограничения узкополосного разностно-временного и разностно-частотного методов и их модификация для широкополосного сигнала // Успехи современной радиоэлектроники. 2015. № 5. С. 75–78.

4. Weiss L. G. Wavelets and wideband correlation processing // IEEE Signal Processing Magazine. 1994. Vol. 11, iss. 1. P. 13–32.

5. Гоголев И. В., Яшин Г. Ю., Граница Крамера–Рао совместной оценки доплеровской деформации и задержки сигнала со случайной начальной фазой //

Статья поступила в редакцию 29 декабря 2017 г.

XXII Междунар. науч.-техн. конф. "Радиолокация, навигация, связь", Воронеж, 19–21 апр. 2016 г. / НПФ "САКВОЕЕ". Воронеж, 2016. Т. 1. С. 42–46.

6. Гоголев И. В. Граница Крамера–Рао оценки доплеровской деформации и задержки сигнала с произвольной шириной спектра // Изв. вузов России. Радиоэлектроника. 2016. № 6. С. 3–6.

7. Трифонов А. П., Беспалова М. Б. Сверхширокополосная оценка дальности, скорости и ускорения // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 2003. Т. 46, № 5. С. 3–11.

8. Jin Q., Wong K. M., Luo Z. The estimation of time delay and Doppler stretch of wideband signals // IEEE Trans. on Signal Processing. 1995. Vol. 43, iss 4. P. 904–916.

9. Гришин Ю. П., Ипатов В. П., Казаринов Ю. М. Радиотехнические системы / под ред. Ю. М. Казаринова. М.: Высш. шк., 1990. 496 с.

Гоголев Иван Васильевич – магистр по направлению "Инфокоммуникационные технологии и системы связи" (2014), инженер 1-й категории научно-исследовательской лаборатории АО «НИИ "Вектор"», аспирант кафедры радиоэлектронных средств Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета "ЛЭТИ" им. В. И. Ульянова (Ленина). Автор 13 научных работ. Сфера научных интересов – пассивная радиолокация, статистическая радиотехника.
E-mail: ivgogolev@inbox.ru

REFERENCES

1. Van Trees H. L. Detection, Estimation and Modulation Theory. Pt. 3. New York, Wiley, 1971, 626 с.

2. Swick D. A. An Ambiguity Function Independent of Assumptions about Bandwidth and Carrier Frequency. NRL Report 6471, 1966. (accessed: 20.02.2018).

3. Gogolev I. V., Yashin G. Y. Narrowband TDOA and FDOA Restrictions and Wideband Modification of Emitter

Location Methods. *Uspekhi sovremennoi radioelektroniki*, 2015, no. 5, pp. 75–78. (In Russian)

4. Weiss L. G. Wavelets and Wideband Correlation Processing. *IEEE Signal Processing Magazine*. 1994, pp. 13–32.

5. Gogolev I. V., Yashin G. Y. Doppler Stretch and Delay Estimation Cramer–Rao Lower Bound in Case of Random Phase Signal. *XXII mezhdunarodnaya nauchno*

tekhnikeskaya konferenciya Radiolokaciya, Navigaciya, Svyaz [XXII International scientific conference Radiolocation, Navigation, Communication]. 2016, vol. 1, pp. 42–46. (In Russian)

6. Gogolev I. V. Doppler Stretch and Delay Cramer-Rao Lower Bound for Signal with Large Bandwidth. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii Rossii. Radioelektronika* [Journal of the Russian Universities. Radioelectronics]. 2016, no. 6, pp. 3–6. (In Russian)

7. Trifonov A. P., Bespalova M. B. *Sverhshirokopolosnaya ocenka dalnosti skorosti i uskoreniya* [Ultra-

Wideband Range, Velocity and Acceleration Estimation]. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Radioelektronika* [Radioelectronics and Communications Systems]. 2003, vol. 46, no. 5, pp. 3–11. (In Russian)

8. Jin Q., Wong K. M., Luo Z. The Estimation of Time Delay and Doppler Stretch of Wideband Signals. *IEEE Transactions on Signal Processing*. 1995, vol. 43, pp. 904–916.

9. Grishin Y. P., Ipatov V. P., Kazarinov Y. M. *Radio-tekhnicheskie sistemy* [Radio engineering systems]. Moscow, High School publ., 1990, 496 p. (In Russian)

Received December, 29, 2017

Ivan V. Gogolev – Master's Degree in Infocommunication Systems (2014), postgraduate student of Department of Radio Electronic Equipment of Saint Petersburg Electrotechnical University "LETI". Engineer (2012) in Research and Development Laboratory of JSC «SRI "Vector"» (Saint Petersburg). The author of 13 scientific publications. Area of expertise: passive location, statistical radio engineering.
E-mail: ivgogolev@inbox.ru
