N. E. Koltsov
Saint Petersburg Electrotechnical University "LETI"
E. N. Nosov, S. A. Grenkov, L. V. Fedotov
Institute of Applied Astronomy of Russian Academy of Sciences (Saint Petersburg)

Measuring signal parameters in wideband receiving and recording channels

The built-in system of parameter measurement for wideband (up to 512 MHz) receiving and recording channel of radio interferometer is considered. The estimation of measurement accuracy and the precision alignment of group delays in the receiving channel are investigated. In addition, this system provides the control of receiving channel frequency response and phase response functions.

Radio telescope, digital wideband signal processing, signal group delay and signal spectrum

Статья поступила в редакцию 11 апреля 2016 г.

УДК 621.396.9

В. А. Данилов
Северокавказский филиал Московского технического университета связи и информатики (Ростов-на-Дону)
Л. В. Данилова
Ростовский государственный университет путей сообщения

Связь распределения огибающей квазигармонического случайного процесса с порождающим двумерным распределением

Рассмотрена методика моделирования стационарного случайного процесса с заданным двухмерным распределением. В основе моделирования лежит использование квазидетерминированного гармонического колебания с заданными параметрами. Модификацией указанного колебания установлена связь характеристической функции модели с заданным двумерным распределением.

Гармоническое колебание, вероятностное моделирование, порождающее распределение, характеристическая функция

Квазидетерминированное гармоническое колебание (ГК)

$$y(t) = A\cos(\omega t + \varphi), \tag{1}$$

где A, ω, φ – случайные величины с заданными плотностями вероятностей $W_A(A)$, $W_\omega(\omega)$, $W_\varphi(\varphi)$, часто используется в практике радиотехнических расчетов [1]. Колебание $y(t)$ может быть, например, использовано для вероятностного моделирования стационарных случайных процессов по заданным одномерной плотности вероятности $w_1(x)$ и корреляционной функции (КФ) $B_x(\tau)$ [2]. Несколько модифицировав процесс (1), можно также обеспечить требуемую двумерную плотность вероятности $w_2(x_1, x_2)$ для совокупности соседних отсчетов $\{x_1 = x(t),\ x_2 = x(t+\tau)\}$ стационарного случайного процесса $x(t)$. Заданную двумерную плотность вероятности (ПВ) будем называть порождающим распределением.

В настоящей статье рассмотрен способ модификации процесса (1), при котором обеспечивается заданное двумерное распределение. Также исследованы вероятностные характеристики модели на примере моделирования гауссовских и негауссовских случайных процессов.

Основные функциональные соотношения. Квазидетерминированное ГК (1) определяет стационарный случайный процесс при условии независимости случайных величин A, ω, φ и при равномерном распределении начальной фазы φ на интервале $[0,\ 2\pi]$ [2]. При этом условии в [1] получены фундаментальные соотношения между распределением мгновенных значений $w_1(y)$ ГК и распределением его амплитуды $W_A(A)$, $(A \geq 0)$, из которых следует, что характеристическая функция (ХФ) $Q_1(v)$ для плотности $w_1(y)$ и функция $W_A(A)/A$ связаны парой преобразований Фурье–Бесселя:

$$W_A(A)/A = \int_0^\infty Q_1(v) J_0(Av) v dv, \tag{2}$$

$$Q_1(v) = \int_0^\infty \frac{W_A(A)}{A} J_0(Av) A dA, \tag{3}$$

где $J_0(\cdot)$ – функция Бесселя нулевого порядка.

Соотношения (2), (3) приняты за основу моделирования стационарных случайных процессов по заданным $w_1(x)$ и $B_x(\tau)$ [3]. При этом предполагается, что функции $w_1(x)$, $W_\omega(\omega)$ и $B_x(\tau)$ являются четными относительно своих аргументов и определенными на бесконечном интервале их значений.

Колебание (1) путем некоторой модификации может быть использовано и для моделирования случайного процесса с заданным двумерным распределением. С этой целью с помощью совокупности значений $\{x_1, x_2\}$ сформируем случайную величину вида

$$R(x_1, x_2) = \left[\left(x_1^2 + x_2^2 - 2\rho_1 x_1 x_2\right)/\left(1 - \rho_1^2\right)\right]^{1/2}, \tag{4}$$

где $\rho_1(\tau)$ является произвольной функцией, удовлетворяющей соотношению $|\rho_1(\tau)| \leq 1$.

С помощью (4) сформируем случайный процесс вида

$$y_1(t) = R(x_1, x_2)\cos(\omega t + \varphi), \tag{5}$$

в котором огибающая $R(x_1, x_2)$ определена по (4). Определим закон распределения случайной величины $R(x_1, x_2)$ для заданной двумерной ПВ. С помощью [4] получим

$$W(R) = R\cos\beta \int_0^{2\pi} w_2\left[R\cos(\theta - \beta), R\sin\theta\right] d\theta, \tag{6}$$

где введено обозначение $\cos\beta = \sqrt{1 - \rho_1^2(\tau)}$.

Выражение (6) может быть преобразовано в эквивалентную форму, если перейти от ПВ $w_2(x_1, x_2)$ к двумерной ХФ $Q_2(v_1, v_2)$, связанной с ПВ преобразованием Фурье [1]:

$$w_2(x_1, x_2) = 1/(2\pi)^2 \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-iv_1 x_1 - iv_2 x_2) Q_2(v_1, v_2) dv_1 dv_2. \tag{7}$$

Подставив (7) в (6), после некоторых математических преобразований с учетом интегрального соотношения [5]:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp\left\{-iR\left[v_1\cos(\theta - \beta) + v_2\sin\theta\right]\right\} d\theta =$$
$$= J_0\left(R\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2\rho_1 v_1 v_2}\right),$$

получим

$$W(R) = R\cos\beta/(2\pi) \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Q_2(v_1, v_2) J_0\left(R\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2\rho_1 v_1 v_2}\right) dv_1 dv_2. \tag{8}$$

На плоскости (v_1, v_2) сделаем также замену переменных по формулам перехода к обобщенным полярным координатам (λ, α), определяемым из соотношений $v_1 = \lambda\cos(\alpha + \beta)$; $v_2 = \lambda\sin\alpha$.

Принимая во внимание соотношения

$$dv_1 dv_2 = \lambda d\lambda d\alpha \cos\beta; \quad v_1^2 + v_2^2 + 2\rho_1 v_1 v_2 = \lambda^2\cos^2\beta,$$

перепишем (8) в виде

$$W(R) = R\int_0^\infty F_1(z) J_0(Rz) z dz, \tag{9}$$

где введено обозначение:

$$F_1(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q_2\left[\frac{z\cos(\alpha + \beta)}{\cos\beta}, \frac{z\sin\alpha}{\cos\beta}\right] d\alpha. \tag{10}$$

Из (9) следует, что функция $W(R)/R$ есть трансформанта Фурье–Бесселя нулевого порядка от функции $F_1(z)$, определенной в соответствии с (10). На этом основании можно заключить, что функция $F_1(z)$ может быть найдена по формуле обратного преобразования Фурье–Бесселя [1]:

$$F_1(z) = \int_0^\infty \frac{W(R)}{R} J_0(Rz) R dR. \tag{11}$$

Сопоставив (2) и (9), можно заключить, что функция $F_1(z)$ играет роль характеристической при условии идентичности распределений:

$$W_A(A) = W(R). \tag{12}$$

Поскольку функция (10) определяется с помощью исходной ХФ $Q_2(v_1, v_2)$, она включает в себя всю информацию, содержащуюся в заданном двумерном распределении.

В [2] показано, что случайный процесс в форме (5) имеет заданное двумерное распределение, если оно относится к специальному классу эллиптически симметричных (ЭС) распределений [6], а также в том случае, когда произвольная функция $\rho_1(\tau)$ удовлетворяет соотношению $\rho_1(\tau) = \rho_x(\tau)$, где $\rho_x(\tau)$ – нормированная КФ рассматриваемого случайного процесса.

Этот факт вытекает из того, что для класса ЭС-распределений наблюдается идентичность функций (12). Во всех остальных случаях моделирование процесса в форме (5) обеспечивает двумерное распределение с тем или с иным приближением к порождающему распределению.

Рассмотрим некоторые примеры расчетов по (10), (11). Пусть задан центрированный гауссовский случайный процесс с параметрами s^2, $r_1 = r_1(\tau)$, ХФ функция которого имеет вид [1]

$$Q_2(v_1, v_2) = \exp\left[-\frac{\sigma^2}{2}\left(v_1^2 + v_2^2 + 2r_1 v_1 v_2\right)\right]. \quad (13)$$

Подставив (13) в (10), после интегрирования с учетом [5] получим

$$F_1(z) = \exp\left(-\frac{\sigma^2 z^2}{2}\frac{1-\rho_1 r_1}{1-\rho_1^2}\right) I_0\left(\frac{\sigma^2 z^2}{2}\frac{\rho_1 - r_1}{1-\rho_1^2}\right), \quad (14)$$

где $I_0(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

С помощью (9) можно найти распределение $W(R)$ случайной величины (4). Подставив (14) в (9), имеем:

$$W(R) = \frac{R}{\sigma^2}\sqrt{\frac{1-\rho_1^2}{1-r_1^2}} \exp\left[-\frac{R^2(1-\rho_1 r_1)}{2\sigma^2\left(1-r_1^2\right)}\right] \times$$

$$\times I_0\left[\frac{R^2(\rho_1 - r_1)}{2\sigma^2\left(1-r_1^2\right)}\right]. \quad (15)$$

Выражение (15) совпадает с аналогичным выражением, приведенным в [4]. При $\rho_1 = r_1$ (14) и (15) соответствуют аналогичным значениям для гауссовского процесса с рэлеевским распределением огибающей.

Рассмотрим далее негауссовский процесс в виде квазидетерминированного ГК

$$y_0(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \Psi), \quad (16)$$

где A_0, ω_0 – фиксированные величины; Ψ – случайная величина, равномерно распределенная на интервале $[0,\ 2\pi]$.

ХФ процесса (16) определяется [1] выражением

$$Q_{2y}(v_1,\ v_2) = J_0\left(A_0\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos\omega_0\tau}\right), \quad (17)$$

а нормированная КФ $\rho_0(\tau) = \cos\omega_0\tau$.

Подставив (17) в (10), после математических преобразований с учетом [5] получим

$$F_1(z) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} J_0\left\{A_0 z\left[\frac{1-\rho_1\rho_0 - (\rho_1 - \rho_0)\cos 2t}{1-\rho_1^2}\right]\right\} dt. \quad (18)$$

При $\rho_1 = \rho_0$ из формулы (18) получим ХФ в форме $F_1(z) = J_0(A_0 z)$, соответствующей аналогичной функции из [1] для процесса (16).

Рассмотрим далее процесс вычислений по (10) для случайного процесса в виде суммы:

$$x(t) = y_0(t) + n(t), \quad (19)$$

где $y_0(t)$ – колебание вида (16); $n(t)$ – гауссовский шум (ГШ) с дисперсией σ^2 и коэффициентом корреляции $r_1(t)$. Случайные процессы $y_0(t)$ и $n(t)$ будем считать стационарными и независимыми, поэтому ХФ суммы (19) равна произведению ХФ слагаемых:

$$Q_{2x}(v_1, v_2) = Q_{2y}(v_1, v_2) Q_{2n}(v_1, v_2), \quad (20)$$

где $Q_{2y}(v_1, v_2)$ и $Q_{2n}(v_1, v_2)$ определяются формулами (17) и (12) соответственно.

Заметим, что расчеты по (9) с учетом (20) для суммы (19) выполнены в общем виде в [4]. Поэтому функция $F_1(z)$ из (10) может быть найдена по формуле (11) при подстановке в нее функции $W(R)/R$, определенной в [4]. Для упрощения математических выкладок рассмотрим два крайних случая задания произвольной функции $\rho_1(\tau)$, входящей в (4):

$$\rho_1(\tau) = \cos\omega_0\tau; \quad \rho_1(\tau) = r_1(\tau). \quad (21)$$

Подставив (20) в (10), с учетом (12), (17) и первого равенства в (21) после вычисления интеграла с помощью [5] получим

$$F_1(z) = \exp\left(-\frac{\sigma^2 z^2}{2}\frac{1-\rho_1 r_1}{1-\rho_1^2}\right) \times$$

$$\times I_0\left(\frac{\sigma^2 z^2}{2}\frac{\rho_1 - r_1}{1-\rho_1^2}\right) J_0(A_0 z). \quad (22)$$

Выполнив аналогичные выкладки с учетом второго равенства (21), найдем:

$$F_1(z) = \exp\left(-\frac{\sigma^2 z^2}{2}\right) \times$$

$$\times \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} J_0\left[A_0 z\sqrt{\frac{1-\rho_1\rho_0-(\rho_1-\rho_0)\cos 2t}{1-\rho_1^2}}\right]dt. \quad (23)$$

Полученные результаты (22), (23) соответствуют ранее найденным формулам (14), (18) и сводятся к ним при соответствующих значениях параметров ρ_1 и A_0.

На основании изложенного можно заключить, что моделирование случайного процесса в форме (5) может обеспечить идентичность двумерных распределений для класса ЭС-распределений. В остальных случаях моделирование по (5) заключается в предварительном определении функции $F_1(z)$ по (10) и дальнейшем определении преобразования Фурье–Бесселя по (9) на основании найденной функции. Соответствие двумерных распределений процесса (5) и заданной ПВ может быть оценено с помощью информационного критерия, введенного в [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. М.: Радио и связь, 1982. 624 с.

2. Данилов В. А. Вероятностное моделирование стационарных случайных процессов с применением квазидетерминированного гармонического колебания // Радиотехника и электроника. 1992. Т. 37, № 2. С. 270–277.

3. Данилов В. А. Вероятностное моделирование негауссовских случайных процессов со спектром узкополосного типа // Радиотехника и электроника. 1996. Т. 41, № 8. С. 946–950.

4. Данилов В. А. Вероятностные характеристики модуля радиус-вектора точки с коррелированными негауссовскими компонентами // Радиотехника и электроника. 1991. Т. 36, № 11. С. 2120–2124.

5. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.

6. Mc Graw D.K., Wagner J. F. Elliptically Symmetric Distributions // IEEE Trans. on Inf. Tech. 1968. Vol. IT-14, № 1. P. 110–120.

V. A. Danilov

North Caucasian Branch of the Moscow Technical University of Communications and Informatics (Rostov-on-Don)

L. V. Danilova

Rostov State University of Transport Communications

The Connection of Distribution of Envelope of Quasi-Harmonic Stochastic Process with Basic Two-Dimensional Distribution

The method of modeling of stationary stochastic process with given two-dimensional distribution is considered. The using of modeling of quasi-deterministic harmonic oscillation with given parameters underlies. By the instrumentality of modification the connection of characteristic function with given two-dimensional distribution is determined.

Harmonic oscillation, probabilistic modeling, basic distribution, characteristic function

Статья поступила в редакцию 8 мая 2016 г.