



DOI: 10.32603/1993-8985-2018-21-4-38-46

УДК 621.396.967.2

А. А. Монаков

Санкт-Петербургский государственный университет  
аэрокосмического приборостроения

ул. Большая Морская, д. 67, лит. А, Санкт-Петербург, 190000, Россия

## Алгоритм оценки координат объектов для систем мультилатерации

**Аннотация.** В настоящее время системы мультилатерации приобретают все большее значение в управлении воздушным движением в связи с их существенными преимуществами по сравнению со вторичными радиолокационными комплексами. В настоящей статье синтезирован алгоритм оценки местоположения объекта для системы мультилатерации, работающей в пассивном режиме. Синтезированный алгоритм представляет собой комбинацию процедуры грубой оценки координат наблюдаемого объекта и итерационного алгоритма, уточняющего полученное решение. Грубая оценка является результатом решения системы линейных уравнений. Итерационная процедура уточнения основана на линеаризации уравнений наблюдения и не требует большого количества итераций. В статье дан сравнительный статистический анализ предлагаемого алгоритма и известного алгоритма Банкрофта. Для объективного анализа двух алгоритмов получена граница Крамера–Рао для корреляционной матрицы оценок координат наблюдаемого объекта, которая позволяет определить потенциальную точность решения задачи. Показано, что оба алгоритма позволяют получить оценки, точность которых близка к потенциально достижимой точности оценки местоположения объекта. В отличие от алгоритма Банкрофта получаемая грубая оценка местоположения является однозначной, что сокращает общий объем вычислений при реализации алгоритма и уменьшает вероятность получения аномальных ошибок.

**Ключевые слова:** радионавигация, мультилатерация, оценка местоположения, алгоритм Банкрофта

**Для цитирования:** Монаков А. А. Алгоритм оценки координат объектов для систем мультилатерации // Изв. вузов России. Радиоэлектроника. 2018. № 4. С. 38–46. doi: 10.32603/1993-8985-2018-21-4-38-46

Andrey A. Monakov

Saint Petersburg State University of Aerospace Instrumentation

67, lit. A, Bolshaja Morskaja Str., 190000, S. Petersburg, Russia

### Localization Algorithm for Multilateration Systems

**Abstract:** At present, multilateration systems are becoming increasingly important in air traffic control. This is due to their significant advantages in compare with secondary surveillance radar complexes. This article solves the problem of synthesizing an algorithm for object location estimation for multilateration system operating in passive mode. The synthesized algorithm is a combination of a procedure, the result of which is a rough estimate of the observed object coordinates, and an iterative algorithm specifying the resulting solution. The rough estimate is the result of solving a linear system of equations. The iterative refinement procedure is based on the linearization of the observational equations and does not require a large number of iterations. The paper provides a comparative statistical analysis of the proposed algorithm and the known Bancroft algorithm. For an objective analysis of two algorithms, the paper derives the Cramer-Rao boundary for the correlation matrix of estimates of the observed object coordinates, which makes it possible to determine the potential accuracy of the solution of the problem. It is shown that both algorithms allow obtaining estimates, the accuracy of which is close to the potentially achievable accuracy of the object location estimate. In contrast to the Bancroft algorithm, the rough estimate of the object location is unambiguous. This virtue reduces the total amount of computations during the algorithm implementation and reduces the probability of anomalous errors.

**Key words:** radio navigation, multilateration, position estimation, the Bancroft algorithm

**For citation:** Monakov A. A. Localization Algorithm for Multilateration Systems. Journal of the Russian Universities. Radioelectronics. 2018, no. 4, pp. 38–46. doi: 10.32603/1993-8985-2018-21-4-38-46 (In Russian)

**Введение.** Многопозиционные радионавигационные системы оценки местоположения объектов в пространстве получили в настоящее время широкое распространение и стали серьезными конкурентами радиолокационных комплексов управления воздушным движением (УВД) [1]. Такие системы обладают рядом достоинств: способностью контроля больших областей со сложным рельефом местности; низкой стоимостью оборудования, размещения и эксплуатации; высокой надежностью и помехозащищенностью.

В научно-технической литературе эти системы получили название систем мультilaterации (от англ. multilateration – MLAT). В системах мультilaterации местоположение (МП) объекта определяется на основе оценки расстояний объекта до произвольного числа опорных радионавигационных точек (РНТ), в которых размещены приемники, способные принимать сигналы, излучаемые с борта объекта. Следует различать активный и пассивный режимы работы систем мультilaterации. В активном режиме запрос на борт посылается передатчиком самой системы в одном из форматов A/C/S вторичной радиолокации. В пассивном режиме запрос на борт поступает от стороннего источника, которым может быть один из вторичных радиолокаторов системы УВД. В этом случае, поскольку источник запросного сигнала никак не синхронизирован с системой, приемники опорных РНТ осуществляют прослушивание эфира, обнаружение ответного сигнала с борта и измерение псевдодальностей подобно спутниковым навигационным системам.

В зависимости от масштаба решаемых задач системы мультilaterации делятся на локальные, за которыми в научно-технической литературе закрепилось название MLAT-систем, и глобальные, которые называются WAM-системами (WAM – Wide Area Multilateration) [2]. Первые используются для определения МП объектов в пределах поля аэродрома, вторые решают задачи навигации воздушных судов в области пространства, имеющей протяженность в сотни километров на поверхности Земли и десятки километров над этой поверхностью. Физические принципы работы обеих категорий одинаковы. Пассивный режим работы является основным для WAM-систем.

Одной из проблем при создании систем мультilaterации является синтез алгоритмов оценки МП объектов в двумерном (MLAT-системы) или трехмерном (WAM-системы) пространстве. Эта проблема не является новой в радионавигации:

ранее она встречалась при разработке систем дальней навигации [3]. В соответствии с [4] принято выделять 3 класса методов оценки МП в системах мультilaterации: статистические (statistical), численные (numerical) и алгебраические (algebraic). Статистические методы [5]–[7] учитывают случайный характер оценок радионавигационных параметров и предполагают синтез оценок МП на основе метода максимального правдоподобия. Эти методы наиболее близки к оптимальным, однако они не позволяют получить прямое решение и требуют применения оптимального поиска экстремума достаточно сложной целевой функции в пространстве, размерность которого равна числу координат объекта. Численные методы [8]–[11] также используют методы оптимального поиска решения некоторой оптимизационной задачи, однако в отличие от статистических методов поиск проходит в пространстве меньшей размерности при простой (как правило, квадратической) целевой функции. Оценки, получаемые этими методами, в общем случае являются смещенными и неоптимальными в статистическом смысле. Алгебраические методы [12]–[15] не учитывают вероятностный характер данных, однако они являются прямыми, поскольку позволяют получить оценки координат объекта решением некоторой линейной, в общем случае переопределенной системы уравнений. Последнее делает указанные методы особенно привлекательными для практического применения, несмотря на то, что методы данной категории не могут претендовать на оптимальность. Как отмечается в [4], алгоритм оценки МП в системах мультilaterации должен быть комбинацией алгоритмов, принадлежащих указанным категориям, что позволит сочетать высокую точность и вычислительную эффективность.

В [16], [17] рассмотрены алгоритмы оценки МП объектов для активного режима работы системы мультilaterации. В этих работах синтезирован комбинированный алгоритм, который для получения грубой оценки МП использует один из наиболее эффективных алгебраических алгоритмов – алгоритм Банкрофта (Bancroft) [12], ранее предложенный для определения МП объекта в спутниковых навигационных системах [13]. Для получения конечной оценки МП используется один из статистических методов – метод линеаризации системы уравнений наблюдения, связывающих координаты объекта и результаты измерений радионавигационных параметров. Привлекательной стороной этого алгоритма является его

простота и малый объем вычислений при реализации, поскольку оценка МП получается в результате решения линейной системы уравнений. Вместе с тем алгоритм Банкрофта имеет существенный недостаток, заключающийся в том, что получаемый результат не является однозначным и требуется специальная процедура для выбора правильного решения.

В настоящей статье представлено определение МП объекта в системе мультилатерации, работающей в пассивном режиме. В статье предложен новый комбинированный алгоритм решения, который также основан на сочетании алгебраического и статистического подходов. Алгебраическая часть строится на решении линейной системы уравнений, но в отличие от алгоритма Банкрофта не требует устранения неоднозначности. Статистическая часть подобна алгоритму, использованному в [16], [17], и позволяет уточнить решение, полученное с помощью алгебраической части алгоритма. Точность оценки МП предлагаемым алгоритмом, как показали исследования, соответствует точности алгоритма Банкрофта.

Статья построена следующим образом. Сначала кратко излагается принцип работы систем мультилатерации в пассивном режиме и анализируется потенциальная точность оценки МП в этих системах. Затем приводится вывод алгоритма Банкрофта и дается анализ его точности методом математического моделирования. Далее описывается синтез нового алгоритма оценки МП объекта, который сочетает в себе простоту вычислений метода Банкрофта и в то же время дает единственное решение. В заключение приведен способ модификации предложенного алгоритма и проанализирована точность получаемой в результате модификации оценки. Статья заканчивается выводами по работе.

**Потенциальная точность оценки МП в системе мультилатерации.** Рассмотрим систему мультилатерации, которая содержит  $J$  опорных приемных станций (РНТ), пространственные координаты которых  $\{x_j, y_j, z_j\}$ ,  $j = \overline{1, J}$ , в некоторой локальной трехмерной системе координат  $XYZ$  (рис. 1) известны с высокой точностью. Пусть запросчик (interrogator), которым может быть один из вторичных радиолокаторов системы УВД, излучает в момент времени  $t$  запросный сигнал. Если МП объекта соответствует радиус-вектор  $\mathbf{r}_{об} = (x_{об}, y_{об}, z_{об})^T$ , а МП запросчика – радиус-вектор  $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)^T$ , то приемник объ-

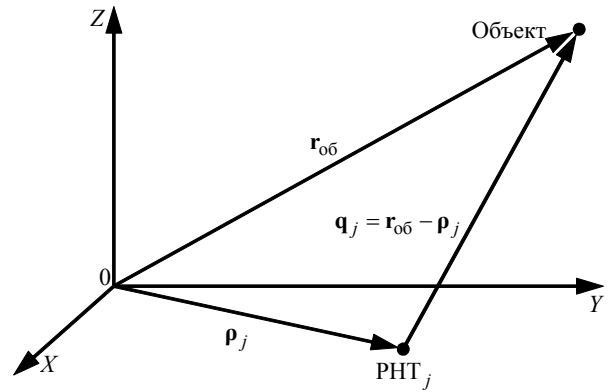


Рис. 1

екта примет запросный сигнал в момент времени  $t + r/c$ , где  $r = \|\mathbf{r}\|$  – длина вектора  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{об} - \mathbf{r}_i$ ;  $c$  – скорость света; "т" – символ транспонирования. Бортовой ответчик затрачивает на обнаружение и дешифрацию запросного сигнала операционное время  $\tau_{оп}$  (обычно 3 мс), после чего излучает ответный сигнал. Этот сигнал придет в точку расположения  $j$ -го РНТ  $\mathbf{r}_j = (x_j, y_j, z_j)^T$  (рис. 1) в момент времени  $t + r/c + \tau_{оп} + q_j/c$ , где  $q_j = \|\mathbf{q}_j\|$  – длина вектора  $\mathbf{q}_j = \mathbf{r}_{об} - \mathbf{r}_j$ . Таким образом, при отсутствии ошибок измерения дальностей и строгом синхронизме часов опорных станций в РНТ будут вычислены псевдодальности  $R_j = r + q_j + c\tau_{оп} + c\tau$ , где  $\tau = t - \hat{t}$  – разность хода часов запросчика и опорных станций ( $\hat{t}$  – предполагаемое в системе РНТ время излучения запросного сигнала). Располагая множеством псевдодальностей  $\{R_j\}$ ,  $j = \overline{1, J}$ , получим систему уравнений вида

$$q_j + b_{об} = R_j, \quad j = \overline{1, J},$$

где  $b_{об} = r + c(\tau_{оп} + \tau)$ . Решение этой системы относительно четырех неизвестных  $x_{об}$ ,  $y_{об}$ ,  $z_{об}$ ,  $b_{об}$  позволит оценить МП объекта.

В действительности измерения псевдодальностей сопровождаются ошибками, в результате которых формируется система уравнений

$$q_j + b_{об} = \hat{R}_j, \quad j = \overline{1, J}, \quad (1)$$

где  $\hat{R}_j = R_j + \delta R_j + c\delta\tau_j$ , причем  $\delta R_j$  – ошибка измерения дальности по ответному сигналу, возникающая в измерителе РНТ  $j$ ;  $\delta\tau_j$  – уход внутренних часов РНТ  $j$  относительно системного

времени. Существование указанных ошибок приводит к ошибкам оценки МП объекта.

Определим статистические характеристики этих ошибок. Пусть полный вектор ошибки оценки МП равен  $(\delta \mathbf{r}_{0\delta}^T, \delta b_{0\delta})^T$ . Тогда система уравнений (1) может быть записана в виде

$$\|\mathbf{q}_j + \delta \mathbf{r}_{0\delta}\| + b_{0\delta} + \delta b_{0\delta} = R_j + \Delta R_j, \quad j = \overline{1, J},$$

где  $\Delta R_j = \delta R_j + c\delta\tau_j$  – полная ошибка измерения псевдодальности. Считая, что ошибка оценки МП мала по сравнению с расстоянием  $q_j$ :  $\|\delta \mathbf{r}_{0\delta}\| \ll \|\mathbf{q}_j\|$ ,  $j = \overline{1, J}$ , получим следующую упрощенную систему:

$$\hat{\mathbf{q}}_j^T \delta \mathbf{r}_{0\delta} + \delta b_{0\delta} = [R_j - q_j - b_{0\delta}] + \Delta R_j, \quad j = \overline{1, J}, \quad (2)$$

где  $\hat{\mathbf{q}}_j = \mathbf{q}_j / q_j$  – единичные векторы в направлениях  $\mathbf{q}_j$ .

Учитывая, что  $R_j = q_j + b_{0\delta}$ ,  $j = \overline{1, J}$ , систему уравнений (2) можно записать в матричном виде:

$$A^T \begin{pmatrix} \delta \mathbf{r}_{0\delta} \\ \delta b_{0\delta} \end{pmatrix} = \Delta \mathbf{R}, \quad (3)$$

где  $A = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{q}}_1 & \dots & \hat{\mathbf{q}}_J \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$  – матрица с размерами  $4 \times J$ ;  $\Delta \mathbf{R} = \{\Delta R_j\}$ ,  $j = \overline{1, J}$ , – вектор длины  $J$ .

Умножив правую и левую части уравнения (3) на соответствующие им транспонированные величины, после усреднения по случайным переменным получим

$$A^T C A = C_{\mathbf{R}},$$

где

$$C = \left\langle \begin{pmatrix} \delta \mathbf{r}_{0\delta}^T & \delta b_{0\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \mathbf{r}_{0\delta} \\ \delta b_{0\delta} \end{pmatrix} \right\rangle$$

– корреляционная матрица ошибок оценки МП;  $C_{\mathbf{R}} = \langle \delta \mathbf{R} \cdot \delta \mathbf{R}^T \rangle$  – корреляционная матрица оценок псевдодальностей;  $\langle \cdot \rangle$  – символ статистического усреднения. Тогда

$$C = (A A^T)^{-1} A C_{\mathbf{R}} A^T (A A^T)^{-1}.$$

Если считать ошибки измерения псевдодальностей статистически независимыми и одинаково распределенными случайными величинами, то

$C_{\mathbf{R}} = (\sigma_R^2 + c^2 \sigma_\tau^2) I$ , где  $\sigma_R$ ,  $\sigma_\tau$  – среднеквадратические отклонения ошибок оценивания дальностей и часов РНТ соответственно;  $I$  – единичная матрица. Окончательно получим следующее уравнение для корреляционной матрицы ошибок оценки МП объекта:

$$C = (\sigma_R^2 + c^2 \sigma_\tau^2) (A A^T)^{-1}. \quad (4)$$

Поскольку для вывода (4) использовался метод малого параметра, то, как показано в [18], полученное выражение является нижней границей Крамера–Рао для корреляционной матрицы ошибок.

Хотя использованный метод расчета границы Крамера–Рао дает верный результат, с помощью (4) сложно получить аналитические выражения для элементов корреляционной матрицы ошибок. Поэтому при необходимости иметь эти выражения можно использовать традиционный подход, связанный с вычислением информационной матрицы Фишера  $F$ . Несложно показать, что элементы матрицы Фишера при сделанных допущениях о статистике ошибок определяются следующим образом:

$$F_{11} = \frac{J'}{\sigma_R^2} \left[ \frac{1}{J'} \sum_j \left( \frac{x_{0\delta} - x_j}{q_j} \right)^2 - \left( \frac{1}{J'} \sum_j \frac{x_{0\delta} - x_j}{q_j} \right)^2 \right];$$

$$F_{12} = \frac{J'}{\sigma_R^2} \left[ \frac{1}{J'} \sum_j \left( \frac{x_{0\delta} - x_j}{q_j} \right) \left( \frac{y_{0\delta} - y_j}{q_j} \right) - \left( \frac{1}{J'} \sum_j \frac{x_{0\delta} - x_j}{q_j} \right) \left( \frac{1}{J'} \sum_j \frac{y_{0\delta} - y_j}{q_j} \right) \right];$$

$$F_{13} = \frac{J' - J}{J' \sigma_R^2} \sum_j \frac{x_{0\delta} - x_j}{q_j};$$

$$F_{22} = \frac{J'}{\sigma_R^2} \left[ \frac{1}{J'} \sum_j \left( \frac{y_{0\delta} - y_j}{q_j} \right)^2 - \left( \frac{1}{J'} \sum_j \frac{y_{0\delta} - y_j}{q_j} \right)^2 \right];$$

$$F_{23} = \frac{J' - J}{J' \sigma_R^2} \sum_j \frac{y_{0\delta} - y_j}{q_j};$$

$$F_{33} = \frac{J(J' - J)}{(J')^2 \sigma_R^2},$$

где  $J' = J + [\sigma_R / (c\sigma_\tau)]^2$ .

**Алгоритм Банкрофта оценки МП объекта.**  
Перепишем систему уравнений (1) в виде

$$\|\mathbf{r}_{0\delta} - \mathbf{p}_j\| + b_{0\delta} = \hat{R}_j, \quad j = \overline{1, J}, \quad (1)$$

где  $\hat{R}_j$  – оценка псевдодальности. В системе (5) неизвестными являются радиус-вектор МП объекта  $\mathbf{r}_{об} = (x_{об}, y_{об}, z_{об})^T$  и параметр  $b_{об}$ .

Перенеся  $b_{об}$  в правую часть уравнений (5) и возведя в квадрат обе части, систему представим в виде

$$2(\mathbf{p}_j^T \mathbf{r}_{об}) - 2\hat{R}_j b_{об} = (\|\mathbf{r}\|^2 - b_{об}^2) + (\|\mathbf{p}_j\|^2 - \hat{R}_j^2), j = \overline{1, J}. \quad (6)$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= (\mathbf{r}_{об}^T \quad b_{об})^T; \quad \boldsymbol{\beta}_j = (\mathbf{p}_j^T \quad -\hat{R}_j)^T; \\ \mathbf{B}^T &= (\boldsymbol{\beta}_1 \quad \dots \quad \boldsymbol{\beta}_J); \quad \lambda = (1/2)\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle; \\ \mathbf{b} &= (1/2)(\langle \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1 \rangle \quad \dots \quad \langle \boldsymbol{\beta}_J, \boldsymbol{\beta}_J \rangle)^T; \\ \mathbf{e} &= (1 \quad \dots \quad 1)^T, \end{aligned}$$

где

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle = \|\mathbf{r}_{об}\|^2 - b_{об}^2, \quad \langle \boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{\beta}_j \rangle = \|\mathbf{p}_j\|^2 - \hat{R}_j^2$$

– скалярные произведения Лоренца [13]. Для векторов  $\mathbf{u} = (u_x \quad u_y \quad u_z \quad ct_u)^T$  и  $\mathbf{v} = (v_x \quad v_y \quad v_z \quad ct_v)^T$ , имеющих действительные члены, это произведение определяется как

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z - c^2 t_u t_v.$$

С учетом введенных обозначений перепишем (6) в матричном виде:

$$\mathbf{Bz} = \lambda \mathbf{e} + \mathbf{b}. \quad (7)$$

Уравнение (7) связывает неизвестный вектор  $\mathbf{z}$  и скалярный параметр  $\lambda = (1/2)\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle$ , поэтому вектор  $\mathbf{z}$  является суммой двух векторов:

$$\mathbf{z} = \lambda \mathbf{B}^\# \mathbf{e} + \mathbf{B}^\# \mathbf{b} = \lambda \mathbf{c} + \mathbf{d}, \quad (8)$$

где  $\mathbf{B}^\# = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T$  – левая псевдообратная матрица матрицы  $\mathbf{B}$ ;  $\mathbf{c} = \mathbf{B}^\# \mathbf{e}$ ;  $\mathbf{d} = \mathbf{B}^\# \mathbf{b}$ . Учитывая, что  $\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle = 2\lambda$ , из (8) получим квадратное уравнение для  $\lambda$ :

$$\langle \mathbf{c}, \mathbf{c} \rangle \lambda^2 + 2[\langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle - 1]\lambda + \langle \mathbf{d}, \mathbf{d} \rangle = 0,$$

которое имеет 2 корня

$$\lambda_{1,2} = -\frac{[\langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle - 1]}{\langle \mathbf{c}, \mathbf{c} \rangle} \pm \frac{\sqrt{[\langle \mathbf{c}, \mathbf{d} \rangle - 1]^2 - \langle \mathbf{c}, \mathbf{c} \rangle \langle \mathbf{d}, \mathbf{d} \rangle}}{\langle \mathbf{c}, \mathbf{c} \rangle},$$

один из которых соответствует истинному решению системы, а второй – ложному. Корень, соответствующий истинному решению, можно выбрать на основании обратной подстановки  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  в систему (7). Таким образом, задача по определению МП объекта решена.

Описанный алгоритм решения впервые предложен С. Банкрофтом для оценки МП объектов в спутниковых навигационных системах [13]. Алгоритм прост для реализации, так как главной сложностью является вычисление псевдообратной матрицы и определение истинного решения.

Оценим точностные характеристики алгоритма и сравним их с потенциально достижимой точностью, определенной ранее. Прodelать эти вычисления аналитически вряд ли возможно, поэтому воспользуемся методом математического моделирования. В ходе работы над статьей был сделан машинный эксперимент на следующей модели. Десять ( $J = 10$ ) РНТ случайным образом располагались на окружности диаметром 10 км. В центре окружности помещался запросчик. Объект случайным образом размещался внутри окружности. Расстояния измерялись с ошибками, статистические характеристики которых соответствовали  $\sigma_R = 10$  м и  $\sigma_\tau = 5$  нс. Результаты оценки МП по  $K = 1000$  испытаний приведены на рис. 2. Здесь же штрихпунктирной линией представлен эллипс ошибок (ЭО), построенный по результатам оценки корреляционной матрицы ошибок и соответствующий вероятности попадания отметки объекта вовнутрь эллипса  $P = 0.99$ . Штриховой кривой показан аналогичный эллипс для потенциальной точности оценки, построенный на основании (4).

Представленные на рис. 2 результаты свидетельствуют о том, что в целом алгоритм Банкрофта позволяет решить задачу оценки МП объекта. Однако точность полученной оценки несколько ниже потенциально достижимой.

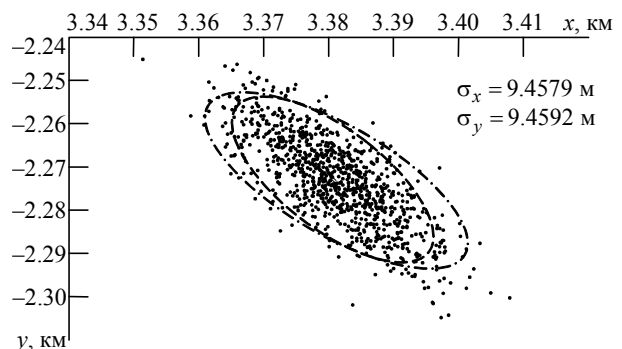


Рис. 2

**Суммарно-разностный алгоритм.** Вернемся к системе уравнений (2). Вычтем и сложим уравнения с номерами  $j = \overline{2, J}$  с первым уравнением системы:

$$\begin{cases} \|\mathbf{r}_{06} - \mathbf{p}_j\| - \|\mathbf{r}_{06} - \mathbf{p}_1\| = \hat{R}_j - \hat{R}_1, \\ \|\mathbf{r}_{06} - \mathbf{p}_j\| + \|\mathbf{r}_{06} - \mathbf{p}_1\| = \hat{R}_j + \hat{R}_1 - 2b_{06}, \end{cases} \quad (9)$$

$$j = \overline{2, J}.$$

После перемножения уравнений получим систему

$$\|\mathbf{r}_{06} - \mathbf{p}_j\|^2 - \|\mathbf{r}_{06} - \mathbf{p}_1\|^2 = (\hat{R}_j - \hat{R}_1)(\hat{R}_j + \hat{R}_1 - 2b_{06}), \quad (10)$$

$$j = \overline{2, J}.$$

Система (10) является основанием для синтеза предлагаемого алгоритма. Поскольку в основе системы (10) лежат уравнения (9), назовем предлагаемый алгоритм суммарно-разностным (СР). Учитывая, что

$$\|\mathbf{r}_{06} - \mathbf{p}_j\|^2 = \|\mathbf{r}_{06}\|^2 - 2(\mathbf{p}_j^T \mathbf{r}_{06}) + \|\mathbf{p}_j\|^2, \quad j = \overline{2, J},$$

система (10) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} & (\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_1)^T \mathbf{r}_{06} - (\hat{R}_j - \hat{R}_1)b_{06} - \\ & = \frac{1}{2}(\|\mathbf{p}_j\|^2 - \hat{R}_j^2) - \frac{1}{2}(\|\mathbf{p}_1\|^2 - \hat{R}_1^2), \end{aligned} \quad (11)$$

$$j = \overline{2, J}.$$

Система уравнений (11) линейна относительно вектора  $\mathbf{z}_{06} = (\mathbf{r}_{06}^T \quad b_{06})^T$ :

$$G\mathbf{z}_{06} = \mathbf{g},$$

где

$$G^T = (\gamma_2 \quad \dots \quad \gamma_J);$$

$$\mathbf{g} = \frac{1}{2}(\langle \beta_2, \beta_2 \rangle - \langle \beta_1, \beta_1 \rangle \quad \dots \quad \langle \beta_J, \beta_J \rangle - \langle \beta_1, \beta_1 \rangle)^T,$$

причем

$$\gamma_j = \left( [\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_1]^T - [\hat{R}_j - \hat{R}_1] \right)^T;$$

$$\langle \beta_j, \beta_j \rangle = \|\mathbf{p}_j\|^2 - \hat{R}_j^2$$

– скалярные произведения Лоренца.

Решение системы (11) имеет вид

$$\mathbf{z}_{06} = G^\# \mathbf{g}, \quad (12)$$

где  $G^\#$  – левая псевдообратная матрица матрицы  $G$ . В отличие от алгоритма Банкрофта решение (12) единственно.

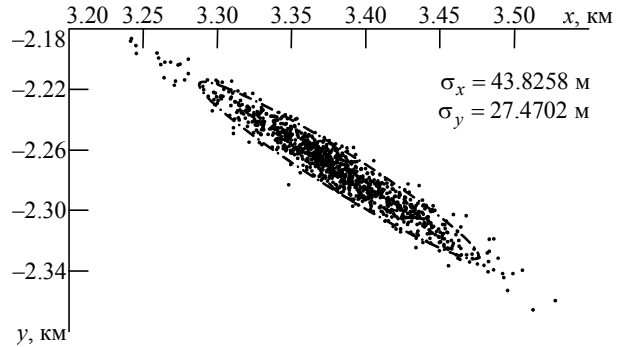


Рис. 3

Анализ СР-алгоритма производился математическим моделированием. Модель для математического эксперимента была той же, что и при исследовании точности оценок алгоритма Банкрофта. Результаты эксперимента приведены на рис. 3.

Видно, что полученная оценка значительно уступает по точности алгоритму Банкрофта, поэтому без улучшения качества оценивания этот алгоритм не может быть рекомендован к использованию. Однако существует способ модификации СР-алгоритма, который позволяет получить оценку МП с точностью, равной точности оценки по алгоритму Банкрофта.

**Модификация СР-алгоритма.** Несмотря на сравнительно большую ошибку, СР-алгоритм может быть использован для грубого оценивания МП объекта. Для уточнения оценки можно использовать метод малого параметра (метод возмущений). Этим малым параметром будет оценка вектора ошибки  $\delta \mathbf{r}_{06} = \mathbf{r}_{06} - \hat{\mathbf{r}}_{\text{СР}}$ , где  $\hat{\mathbf{r}}_{\text{СР}}$  – СР-оценка. В этом и состоит смысл предлагаемой модификации.

Вернемся к системе уравнений (2), которую перепишем в виде

$$(\hat{\mathbf{q}}_j^T \delta \mathbf{r}_{06}) + \delta b_{06} = \Delta \hat{R}_j, \quad j = \overline{1, J},$$

где  $\hat{\mathbf{q}}_j$  – орты;  $\Delta \hat{R}_j$  – оценки ошибок измерения псевдодальности, которые могут быть оценены, используя оценку  $\|\hat{\mathbf{r}}_{\text{СР}}\|$ , полученную СР-алгоритмом:

$$\hat{\mathbf{q}}_j = (\hat{\mathbf{r}}_{\text{СР}} - \mathbf{p}_j) / \|\hat{\mathbf{r}}_{\text{СР}} - \mathbf{p}_j\|, \quad j = \overline{1, J};$$

$$\Delta \hat{R}_j = \hat{R}_j - \hat{R}_{j\text{СР}} = \hat{R}_j - (\|\hat{\mathbf{r}}_{\text{СР}} - \mathbf{p}_j\| + b_{\text{СР}}), \quad j = \overline{1, J}.$$

Тогда методом наименьших квадратов получим следующую оценку вектора  $\delta \mathbf{z}_{06} = (\delta \mathbf{r}_{06}^T \quad \delta b_{06})^T$ :

$$\delta \hat{\mathbf{z}}_{06} = Q^\# \Delta \hat{\mathbf{R}},$$

где  $Q^\# = (Q^T Q)^{-1} Q^T$  – левая псевдообратная матрица матрицы  $Q = \begin{pmatrix} \hat{q}_1 & \dots & \hat{q}_J \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ .

Окончательное решение получается в результате суммирования:

$$\hat{\mathbf{r}}_{об} = \hat{\mathbf{r}}_{СР} + \delta \hat{\mathbf{r}}_{об}.$$

Полученная оценка может быть использована как следующее приближение к решению, т. е. предлагаемый алгоритм является итерационным.

На рис. 4 приведены результаты математического эксперимента с использованием рассмотренной модификации. Моделирование проведено на модели, использованной при анализе алгоритма Банкрофта и СР-алгоритмов. Моделирование показало, что дополнительные итерации положительно сказываются на точности оценивания, но с каждой итерацией выигрыш уменьшается, поэтому количество итераций было выбрано равным  $M = 2$ . Штрихпунктирная линия соответствует эллипсу ошибок, построенному по результатам оценки корреляционной матрицы ошибок. Рисунок доказывает правомерность предлагаемой модификации: результаты отдельных оценок оказались в ЭО, размер которого примерно равен размеру ЭО алгоритма Банкрофта. Цена, которую приходится платить за модификацию СР-алгоритма, невелика. Усложнение заключается в необходимости вычислить псевдообратную матрицу  $Q^\#$ . В то же время среднеквадратическое отклонение (СКО) оценок уменьшается в 3–4 ра-

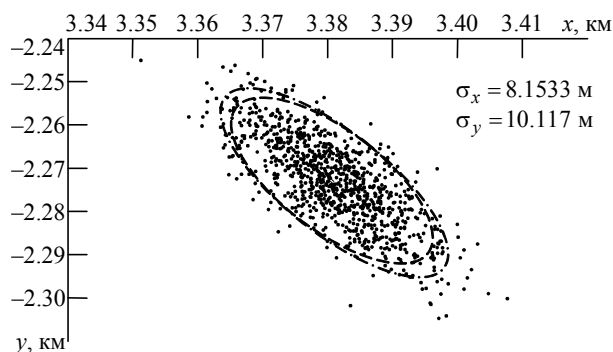


Рис. 4

за. Так, в рассмотренном машинном эксперименте СКО ошибок от значений  $\sigma_x \approx 44$  м,  $\sigma_y \approx 27.5$  м уменьшилось до значений 8/21 и 10.1 м соответственно.

**Выводы.** В системах мультilaterации для оценки МП объектов используется алгоритм Банкрофта. Этот алгоритм позволяет прямым способом получить оценку МП и не требует значительных вычислительных затрат. Это выгодно отличает его от алгоритмов, работающих на основе решения оптимизационных задач. Результаты математического моделирования показывают, что точность получаемых с помощью алгоритма оценок близка к потенциально достижимой. Однако реализация алгоритма требует процедуры разрешения неоднозначности. В статье предложен новый алгоритм оценки МП объектов, который имеет одинаковую с алгоритмом Банкрофта точность, и в то же время получаемые оценки являются однозначными. Оба алгоритма имеют примерно одинаковую вычислительную сложность.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. URL: <https://en.wikipedia.org/wiki/Trilateration> (дата обращения 12.08.2018).
2. Multilateration (MLAT) Concept of Use. Edition. 1.0–September 2007. ICAO Asia and Pacific Office. URL: [https://www.icao.int/APAC/Documents/edocs/mlat\\_concept.pdf](https://www.icao.int/APAC/Documents/edocs/mlat_concept.pdf) (дата обращения 12.08.2018).
3. Torrieri D. J. Statistical theory of passive location systems // IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems. 1984. Vol. AES-20, № 3. P. 183–198. doi: 10.1109/TAES.1984.310439.
4. Localization algorithms for multilateration (MLAT) systems in airport surface surveillance / I. A. Mantilla-Gaviria, M. Leonardi, G. Galati, J. V. Balbastre-Tejedor // Signal, Image and Video Processing. 2015. Vol. 9, iss. 7. P. 1549–1558. doi: 10.1007/s11760-013-0608-1.
5. Foy W. H. Position-location solutions by Taylor series estimation // IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems. 1976. Vol. AES-12, № 3. P. 187–194. doi: 10.1109/TAES.1976.308294.
6. Efficient location strategy for airport surveillance using mode-s multilateration systems / I. A. Mantilla-Gaviria, M. Leonardi, G. Galati, J. V. Balbastre-Tejedor, E. D. L. Reyes // Intern. J. of Microwave and Wireless Technologies. 2012. Vol. 4, iss. 2. P. 209–216. doi: 10.1017/S1759078712000104.
7. On the application of singular value decomposition and Tikhonov regularization to ill-posed problems in hyperbolic passive location / I. A. Mantilla-Gaviria, M. Leonardi, J. V. Balbastre-Tejedor, E. D. L. Reyes // Mathematical and Computer Modelling. 2013. Vol. 57, № 7–8. P. 1999–2006. doi: 10.1016/j.mcm.2012.03.004.
8. Smith J. O., Abel J. S. The spherical interpolation method of source localization // IEEE J. of Oceanic Engineering. 1987. Vol. OE-12, № 1. P. 246–252. doi: 10.1109/JOE.1987.1145217.
9. Friedlander B. A passive algorithm and its accuracy analysis // IEEE J. of Oceanic Engineering. 1987. Vol. OE-12, № 1. P. 234–245. doi: 10.1109/JOE.1987.1145216.

10. Schau H. C., Robinson A. Z. Passive source localization employing intersecting spherical surfaces from time-of-arrival differences // IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing. 1987. Vol. ASSP-35, № 8. P. 1223–1225. doi: 0.1109/TASSP.1987.1165266.
11. Chan Y. T., Ho K. C. A simple and efficient estimator for hyperbolic location // IEEE Trans. Signal Processing. 1994. Vol. SP-42, № 8. P. 1905–1915. doi: 10.1109/78.301830.
12. Geyer M., Daskalakis A. Solving passive multilateration equations using Bancroft's algorithm // 17th DASC. AIAA/IEEE/SAE. Digital Avionics Systems Conf., Bellevue, 31 Oct.–7 Nov. 1998, WA, USA, Proc. Piscataway: IEEE, 1998. Vol. 2. P. F41/41-F41/48. doi: 10.1007/s11760-013-0608.
13. Bancroft S. An Algebraic Solution of the GPS Aerospace and Electronic Systems // IEEE Trans. Aerospace & Electronic Systems. 1985. Vol. AES-21, № 11. P. 56–59. doi: 10.1109/TAES.1985.310538.
14. Bakhoun E. G. Closed-Form Solution of Hyperbolic Geolocation Equations // IEEE Trans. Aerospace and Electronics Systems. 2006. Vol. AES-42, № 10. P. 1396–1404. doi: 10.1109/TAES.2006.314580.
15. Leonardi M., Mathias A., Galati G. Two Efficient Localization Algorithms for Multilateration // Intern. J. of Microwave and Wireless Technologies. 2009. Vol. 1, № 3. P. 223–229. doi: 10.1017/S1759078709000245.
16. Монаков А. А. Алгоритм оценки местоположения объекта в активных системах мультilaterации // XXIV Междунар. науч.-техн. конф. "Радиолокация, навигация, связь", Воронеж, 17–19 апр. 2018 г. / АО «Концерн "Созвездие"», Воронеж, 2018. Т. 3. С. 134–142.
17. Монаков А. А. Модифицированный алгоритм Банкрофта для систем мультilaterации // Изв. вузов России. Радиоэлектроника. 2018. № 1. С. 50–55.
18. Тихонов В. И. Оптимальный прием сигналов. М.: Радио и связь, 1983. 320 с.

Статья поступила в редакцию 05 июля 2018 г.

**Монаков Андрей Алексеевич** – доктор технических наук (2000), профессор (2005) кафедры радиотехнических систем Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения. Почетный машиностроитель РФ (2005), почетный работник высшего профессионального образования РФ (2006). Автор более 150 научных работ. Сфера научных интересов – цифровая обработка сигналов; радиолокация; исследование природных сред радиотехническими методами; управление воздушным движением. E-mail: a\_monakov@mail.ru

## REFERENCES

1. Available at: <https://en.wikipedia.org/wiki/Trilateration> (accessed: 02.09.2018).
2. "Multilateration (MLAT) Concept of Use", Edition 1, ICAO Asia and Pacific Office, September 2007. Available at: [https://www.icao.int/APAC/Documents/edocs/mlat\\_concept.pdf](https://www.icao.int/APAC/Documents/edocs/mlat_concept.pdf) (accessed: 12.08.2018).
3. Torrieri D. J. Statistical Theory of Passive Location Systems. IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems. 1984, vol. AES-20, no. 3, pp. 183–198. doi:10.1109/TAES.1984.310439.
4. Mantilla-Gaviria I. A., Leonardi M., Galati G., Balbastre-Tejedor J. V. Localization Algorithms for Multilateration (MLAT) Systems in Airport Surface Surveillance. Signal, Image and Video Processing. 2015, vol. 9, no. 7, pp. 1549–1558. doi: 10.1007/s11760-013-0608-1.
5. Foy W. H. Position-Location Solutions by Taylor Series Estimation. IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems. 1976, vol. AES-12, no. 3, pp. 187–194. doi: 10.1109/TAES.1976.308294.
6. Mantilla-Gaviria I. A., Leonardi M., Galati G., Balbastre-Tejedor J. V., Reyes E. D. L. Efficient Location Strategy for Airport Surveillance Using Mode-S Multilateration Systems. Intern. J. of Microwave and Wireless Technologies. 2012, vol. 4, no. 2, pp. 209–216. doi: 10.1017/S1759078712000104.
7. Mantilla-Gaviria I. A., Leonardi M., Balbastre-Tejedor J. V., Reyes E. D. L. On The Application of Singular Value Decomposition and Tikhonov Regularization to Ill-Posed Problems in Hyperbolic Passive Location. Mathematical and Computer Modelling. 2013, vol. 57, no. 7–8, pp. 1999–2006. doi:10.1016/j.mcm.2012.03.004.
8. Smith J. O., Abel J. S. The Spherical Interpolation Method of Source Localization. IEEE J. of Oceanic Engineering. 1987, vol. OE-12, no. 1, pp. 246–252. doi: 10.1109/JOE.1987.1145217.
9. Friedlander B. A Passive Algorithm and Its Accuracy Analysis. IEEE J. of Oceanic Engineering. 1987, vol. OE-12, no. 1, pp. 234–245. doi: 10.1109/JOE.1987.1145216.
10. Schau H. C., Robinson A. Z. Passive Source Localization Employing Intersecting Spherical Surfaces From Time-of-Arrival Differences. IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing. 1987, vol. ASSP-35, no. 8, pp. 1223–1225. doi: 0.1109/TASSP.1987.1165266.
11. Chan Y. T., Ho K. C. A Simple and Efficient Estimator for Hyperbolic Location. IEEE Trans. Signal Processing. 1994, vol. SP-42, no. 8, pp. 1905–1915. doi: 10.1109/78.301830.
12. Geyer M., Daskalakis A. Solving Passive Multilateration Equations Using Bancroft's Algorithm. 17th DASC. AIAA/IEEE/SAE. Digital Avionics Systems Conf., Bellevue, 31 Oct.–7 Nov. 1998, WA, USA, Proc. Piscataway: IEEE, 1998, vol. 2, pp. F41/41-F41/48. doi: 10.1007/s11760-013-0608.
13. Bancroft S. An Algebraic Solution of the GPS Aerospace and Electronic Systems. IEEE Trans. Aerospace & Electronic Systems. 1985, vol. AES-21, no. 11, pp. 56–59. doi: 10.1109/TAES.1985.310538.



14. Bakhom E. G. Closed-Form Solution of Hyperbolic Geolocation Equations. *IEEE Trans. Aerospace and Electronics Systems*. 2006, vol. AES-42, no. 10, pp. 1396–1404. doi: 10.1109/TAES.2006.314580.

15. Leonardi M., Mathias A., Galati G. Two Efficient Localization Algorithms for Multilateration. *Intern. J. of Microwave and Wireless Technologies*. 2009, vol. 1, no. 3, pp. 223–229. doi: 10.1017/S1759078709000245.

16. Monakov A. A. Position Estimation Algorithm For Active Multilateration Systems. *XXIV mezhdunarodnaya nauchno tekhnicheskaya konferenciya Radiolocaciya, Navi-*

*gaciya, Svyaz* [XXIV Intern. Scient. Conf. "Radiolocation, Navigation, Communication"]. 2018, vol. 3, pp. 134–142. (in Russian)

17. Monakov A. A. Modified Bancroft Algorithm for Multilateration System. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii Rossii. Radioelectronika* [Journal of Russian Universities. Radioelectronics]. 2018, no. 1, pp. 50–55. (in Russian)

18. Tikhonov V. K. *Optimal'nyi priem signalov* [Optimal Receiving of Signals]. Moscow, *Radio i Svyaz'*, 1983. (in Russian)

Received July, 05, 2018

---

**Andrey A. Monakov** – D.Sc. in Engineering (2000), Professor (2005) of the Department of radio equipment systems of the Saint Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, Honorable Mechanical Engineer of the Russian Federation (2005), Honorable Worker of Higher Professional Education of the Russian Federation (2006). The author of more than 150 scientific publications. Area of expertise: digital signal processing; radar theory; microwave remote sensing; air traffic control.

E-mail: a\_monakov@mail.ru

---