

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ И МАТЕРИАЛОВ

УДК 621.315.592

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ЭКСТРУЗИИ ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

© 2012 г. М. Г. Лаврентьев<sup>1</sup>, М. В. Меженный<sup>2</sup>,  
В. Б. Освенский<sup>1</sup>, А. И. Простомолотов<sup>3</sup>

<sup>1</sup>ОАО «Гиредмет»,

<sup>2</sup>ФГБНУ «Технологический институт сверхтвердых и новых углеродных материалов»,

<sup>3</sup>Учреждение Российской академии наук

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН

Для процесса экструзии композиционного материала предложена математическая модель и на ее основе рассмотрены основные особенности напряженно-деформированного состояния получаемого стержня. Заданы геометрические параметры фильеры и скорость перемещения Пуансона. Расчетная модель основана на совместном использовании приближений упругопластического тела. Численная методика использует конечно-элементную аппроксимацию на лагранжевой сетке, которая меняется во времени с изменением формы образца. Для этого применена адаптивная генерация сеточных узлов в зонах больших напряжений и деформаций образца. Расчеты проведены с использованием комплекса программ Crystmo/Marc. На примере термоэлектрического композита на основе  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$  изучены основные особенности напряженно-деформированного состояния материала, полученного на разных стадиях процесса экструзии.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, экструзия, композиционный материал, теллурид висмута, деформация, напряжения, фильера.

### Введение

Термоэлектрическое преобразование энергии, обладающее целым рядом достоинств, широко используют в различных областях техники, которые можно подразделить на два основных направления:

- создание систем охлаждения и регулирования температуры;
- генерирование электроэнергии.

Основным критерием качества термоэлектрического материала (ТЭМ), определяющим функциональную пригодность и эффективность изготавливаемых на его основе преобразователей энергии, является его добротность (термоэлектрическая эффективность).

При рассмотрении возможностей различных методов получения ТЭМ, представляющих собой твердые растворы халькогенидов висмута и сурьмы, следует учитывать ряд их специфических особенностей, затрудняющих получение материала высокого качества.

Наиболее распространенными методами получения ТЭМ являются методы направленной кристаллизации расплава: метод Чохральского,

зонная плавка (обычно вертикальная) и метод Бриджмена [1].

Другая группа методов получения ТЭМ относится к порошковой металлургии. Полученные прессованием порошка образцы состоят из разориентированных зерен, что снижает значение добротности. По своим термоэлектрическим свойствам эти материалы на основе  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$  существенно уступают материалу, выращенному методом вертикальной зонной плавки [2].

Гораздо более эффективные ТЭМ можно получить методом горячей экструзии [3, 4], поскольку в этом случае, в отличие от обычного прессования, возникает текстура деформации. В экструдированных стержнях благоприятная ориентация зерен может достигать ~50%. В этом случае увеличение термоэлектрической эффективности  $Z$  достигается как за счет текстуры, так и в результате рассеяния фононов на границах зерен. Тем не менее текстура в экструдированном материале выражена слабее, чем в материале, полученном зонной плавкой.

По сравнению с методами кристаллизации из расплава получение материала методом экструзии имеет ряд преимуществ:

- более высокая механическая прочность;
- высокая степень однородности;
- возможность получать стержни различной формы и диаметра сечения;
- высокая производительность;
- отсутствие затрат на использование дорогостоящих кварцевых ампул;
- более низкие потери при последующей резке профилированных кристаллов.

По совокупности термоэлектрических и механических свойств ТЭМ, полученный методом экструзии, обладает высоким потребительским потенциалом. Технология горячей экструзии является достаточно известным и практически важным процессом получения термоэлектрических материалов на основе теллурида висмута. Однако в связи с необходимостью увеличения производительности этого процесса и повышением качества производимых изделий требуются постоянные усовершенствования как геометрических параметров фильеры, так и режимных технологических параметров, в частности скорости выдавливания образца через фильеру. Это обуславливает проведение затратных экспериментальных работ по изготовлению тестовых фильер и образцов, а также по анализу свойств получаемых изделий. Для снижения этих затрат и создания теоретических основ такой технологии весьма перспективным является математическое моделирование процесса горячей экструзии. В отличие от ряда зарубежных работ [5, 6], посвященных аналогичному моделированию и использующих известные промышленные пакеты программ без соответствующего методического обоснования, ниже изложен исчерпывающий методический подход и на его основе приведены практически важные результаты моделирования. В отечественной литературе публикации, аналогичные работам [5, 6] и представленной ниже работе, отсутствуют.

Цель работы — разработка математической модели процесса горячей экструзии термоэлектрического материала на основе  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$  и проведение расчетов виртуального процесса горячей экструзии

### Постановка задачи

Рассмотрим процесс экструзии, заключающийся в продавливании через пресс-форму (фильеру) пластического материала. Будем использовать математическую модель на основе совместного применения приближений упругопластического тела и рассмотрим основные особенности процесса горячей экструзии (ГЭ) материала на основе  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$ .

В процессе ГЭ спрессованная при комнатной температуре из порошка цилиндрическая пресс-заготовка выдавливается при температуре  $T = 420^\circ\text{C}$  через фильеру. Схема процесса показана на рис. 1. Согласно этой схеме, были заданы геометрические параметры, соответствующие используемому в ОАО «Гиредмет» процессу ГЭ:

- $D = 85$  мм,  $L = 26$  мм — диаметр и длина обрабатываемой заготовки соответственно;
- $\theta = 60^\circ$  — угол скругления фильеры;
- $l = 10$  мм,  $d = 20$  мм — длина и диаметр цилиндрической части на выходе из фильеры.

Задается также скорость перемещения Пуансона  $V = 0,1$  мм/с. Коэффициент экструзии, определяемый отношением  $D^2/d^2$ , характеризующий эффективность процесса ГЭ, в рассматриваемом случае составляет 18.

Физико-механические параметры выбраны согласно работе [5]:  $E = 40$  ГПа — модуль Юнга,  $\nu = 0,3$  — коэффициент Пуассона. Критическое напряжение перехода из упругого в пластическое состояние при температуре ГЭ  $\sigma_0 = 102$  МПа определено из установленной авторами экспериментальной зависимости «напряжение—деформация».

По данным работы [5], коэффициент трения образца и фильеры  $f$  равен 0,04. В модели это трение учтено, но расчеты были проведены без его учета, так как в рассматриваемом процессе ГЭ использовали графитовую прокладку, обеспечивающую проскальзывание образца.

### Математическая модель

Методический подход был основан на совместном использовании приближений упругого и пластического твердого тела, согласно основным положениям теории упругости и пластичности [7]. Для процесса ГЭ в первом приближении термическими напряжениями можно пренебречь.

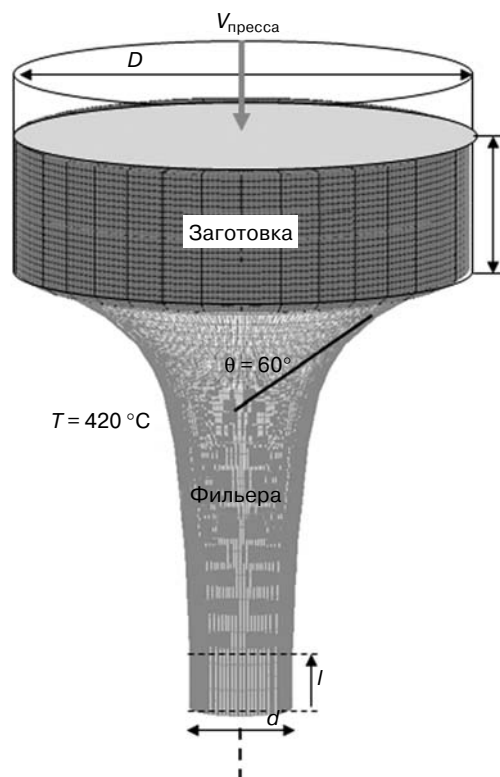


Рис. 1. Схема процесса ГЭ

Подробное обоснование для выбора такого приближения содержится в обзоре [8]. Данные об альтернативном подходе на основе механики реологической жидкости изложены в работе [7] для процесса холодной экструзии высокопластичных материалов. Рассмотрим основы упругопластического приближения, используемого ниже.

Если  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  и  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  являются главными напряжениями и деформациями соответственно, то, считая их отнесенными к главным осям, можно установить зависимости между ними для упругого изотропного тела:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= (\lambda + 2G) \varepsilon_1 + \lambda \varepsilon_2 + \lambda \varepsilon_3; \\ \sigma_2 &= \lambda \varepsilon_1 + (\lambda + 2G) \varepsilon_2 + \lambda \varepsilon_3; \\ \sigma_3 &= \lambda \varepsilon_1 + \lambda \varepsilon_2 + (\lambda + 2G) \varepsilon_3,\end{aligned}\quad (1)$$

где  $\lambda$  — коэффициент Ляме;  $G$  — модуль сдвига.

Модуль Юнга  $E$  определяет отношение напряжения при растяжении к относительному удлинению:

$$E = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} = \frac{G(3\lambda + 2G)}{\lambda + G}.\quad (2)$$

Коэффициент Пуассона  $\nu$  определяет отношение поперечной деформации к продольной:

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + G)}.\quad (3)$$

Уравнение неразрывности деформации имеет вид

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y},\quad (4)$$

где  $\gamma$  — тангенциальная составляющая тензора деформаций.

Уравнения равновесия в напряжениях можно записать как

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho X &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho Y &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho Z &= 0,\end{aligned}\quad (5)$$

где  $\tau$  — тангенциальные составляющие тензора деформации;  $\rho$  — плотность материала.

Инварианты имеют вид

$$\begin{aligned}I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z; \\ I_2 &= -(\sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x + \sigma_x \sigma_y) + \tau_{yx}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2; \\ I_3 &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{yx} \tau_{zx} \tau_{xy} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2.\end{aligned}$$

При рассмотрении условия пластичности гидростатическое давление исключают из общей системы напряжений, называя оставшуюся часть девиатором напряжений. Считают, что эта величина определяет момент начала пластичности и что только через нее можно выразить условие пластичности. Среднее напряжение задается выражением

$$s = \frac{(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)}{3} = \frac{(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)}{3},\quad (6)$$

которое является инвариантной величиной. Девиатор напряжения определяется компонентами  $s_x, s_y, s_z, s_{yz}, s_{zx}, s_{xy}$  согласно формулам:

$$\begin{aligned}s_x &= \sigma_x - s; \quad s_y = \sigma_y - s; \quad s_z = \sigma_z - s; \\ s_{yz} &= \tau_{yz}; \quad s_{zx} = \tau_{zx}; \quad s_{xy} = \tau_{xy}.\end{aligned}\quad (7)$$

Компоненты деформации определяют среднюю деформацию

$$e = \frac{(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)}{3} = \frac{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)}{3}.\quad (8)$$

Тогда компоненты девиатора деформации  $e_x, e_y, e_z, e_{yz}, e_{zx}, e_{xy}$  определяются выражениями:

$$\begin{aligned}e_x &= \varepsilon_x - e; \quad e_y = \varepsilon_y - e; \quad e_z = \varepsilon_z - e; \\ e_{yz} &= \gamma_{yz}; \quad e_{zx} = \gamma_{zx}; \quad e_{xy} = \gamma_{xy}.\end{aligned}\quad (9)$$

Математическая запись условия пластичности вытекает из условия Треска о наибольших касательных напряжениях, которое устанавливает, что пластическая деформация начинается в точке, где наибольшие касательные напряжения достигают величины  $\sigma_0/2$ , являющейся константой материала. Так как максимальные касательные напряжения равны  $(\sigma_1 - \sigma_3)/2$ , то условие Треска записывается в виде

$$(\sigma_1 - \sigma_3) = (s_1 - s_3) = \sigma_0.\quad (10)$$

Это условие определяет одинаковые величины предела текучести  $\sigma_0$  при одноосном растяжении и сжатии.

Одно из требований, предъявляемых к условию пластичности, — его инвариантность относительно координатных осей. Кроме того, предполагают, что среднее нормальное напряжение не влияет на пластичность, и, таким образом, условие может быть выражено лишь в компонентах девиатора напряжения. Это приводит к тому, что нужно исследовать инварианты девиатора напряжения. Инварианты девиатора напряжения  $J_1, J_2, J_3$  вводятся формально аналогично инвариантам напряжения  $I_1, I_2, I_3$ :

$$J_1 = s_x + s_y + s_z;$$

$$J_2 = -(s_y s_z + s_z s_x + s_x s_y) + s_{yx}^2 + s_{zx}^2 + s_{xy}^2; \quad (11)$$

$$J_3 = s_x s_y s_z + 2s_{yx} s_{zx} s_{xy} - s_x s_{yz}^2 - s_y s_{xz}^2 - s_z s_{xy}^2.$$

Наиболее простой случай соответствует  $J_2$ , принимаемой постоянной, и называется условием Мизеса:

$$2J_2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = \frac{2\sigma_0^2}{3}$$

или

$$(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 = 2\sigma_0^2, \quad (12)$$

где  $\sigma_0$  — константа материала.

Согласно условию Мизеса, текучесть наступает тогда, когда энергия упругой деформации изменения формы достигает величины, характерной для данного материала. Для чистого сдвига:  $\sigma_3 = -\sigma_1$ ;  $\sigma_2 = 0$ , что дает напряжение текучести:  $\sigma_0/3^{1/2}$ .

Пренебрегая упругими деформациями, рассмотрим пластическое течение в двухмерном случае. Главное напряжение в направлении оси  $z$  составляет  $(\sigma_1 + \sigma_2)/2$ , где  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  — главные напряжения в плоскости  $(x, y)$ . В этом случае условие пластичности Мизеса принимает вид

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2k, \quad (13)$$

где  $k = \sigma_0/3^{1/2}$ .

Для компонент напряжения по осям  $x$  и  $y$  это выражение принимает следующий вид:

$$\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \partial\tau_{xy}^2 = k^2. \quad (14)$$

В двухмерном случае уравнения равновесия в напряжениях (5) имеют вид

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} = 0. \quad (15)$$

Дифференцируя формулу (15) вторично и вычитая, получим с учетом (14):

$$\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial y^2} = \pm 2\partial^2\sqrt{(k^2 - \tau_{xy}^2)}. \quad (16)$$

Уравнение (16) решаем относительно  $\tau_{xy}$ . По найденным напряжениям можно определить скорости деформации:  $s_x = 2\phi'_x$ ;  $s_y = 2\phi'_y$ ;  $s_{xy} = 2\phi'_{xy}$ .

Тангенциальное напряжение трения связано с напряжением по нормали к поверхности следующим соотношением:

$$\sigma_t = -\mu\sigma_n t, \quad (17)$$

или для действующих сил:

$$f_t = -\mu f_n t, \quad (18)$$

где  $f_t$  — тангенциальная сила трения;  $f_n$  — сила по нормали;  $\sigma_t$  — тангенциальное напряжение трения;  $\sigma_n$  — напряжение по нормали;  $\mu$  — коэффициент трения;  $t$  — тангенциальный вектор в направлении скорости.

Для моделирования процесса ГЭ был использован конечно-элементный комплекс Crystmo/Marc [9].

### Результаты моделирования

Разработанная математическая модель позволила провести виртуальный процесс экструзии, в результате которого был выдавлен цилиндрический образец диаметром 20 мм и длиной ~ 220 мм. В процессе расчета происходит изменение расчетной (лагранжевой) сетки и формы образца от времени на различных временных шагах в ходе процесса экструзии, из которого следует, что уже через 140 с начинается выход образца из фильеры.

Рассмотрим стадию начала выхода образца из фильеры. На рис. 2 показаны основные зоны напряженно-деформированного состояния образца, которые отвечают за его прочность (зона высокого сжатия I) и качество (зона формирования структуры II и зона, где могут возникать продольные трещины III).

Из распределений изолиний скорости пластического течения  $V$ , приведенных на рис. 3 (вторая стр. обложки), видно, что в начале процесса ( $t = 60$  с) скорость у стенки фильеры больше. Это объясняется тем, что более существенный вклад дает боковое выдавливание материала к центру из зоны I (см. рис. 2), где имеется наибольшее сжатие. Однако на стадии выхода образца из фильеры ( $t = 150$  с) радиальный профиль течения меняется так, что скорость течения в центре становится больше, чем вблизи стенки фильеры.

Для дальнейшего анализа напряженно-деформированного состояния образца наиболее важным является момент времени ( $t = 150$  с), соответствующий началу его выхода из фильеры, рассмотренный ниже.

Для анализа напряженно-деформированного состояния образца используют главные максимальные напряжения  $\sigma$  и суммарные максимальные деформации  $s$ , возникающие в образце в процессе экструзии. На рис. 4 (вторая стр. обложки) показаны изолинии  $\sigma$  и  $s$  при выходе образца из фильеры при  $t = 150$  с. Из распределения напряжений видно (см. рис. 4, а), что в горловине фильеры от боковой метки 2 до 11 их значения отрицательные и меняются от -450 до -57 МПа, что соответствует снижению напряжения сжатия при удалении от контейнера. Да-

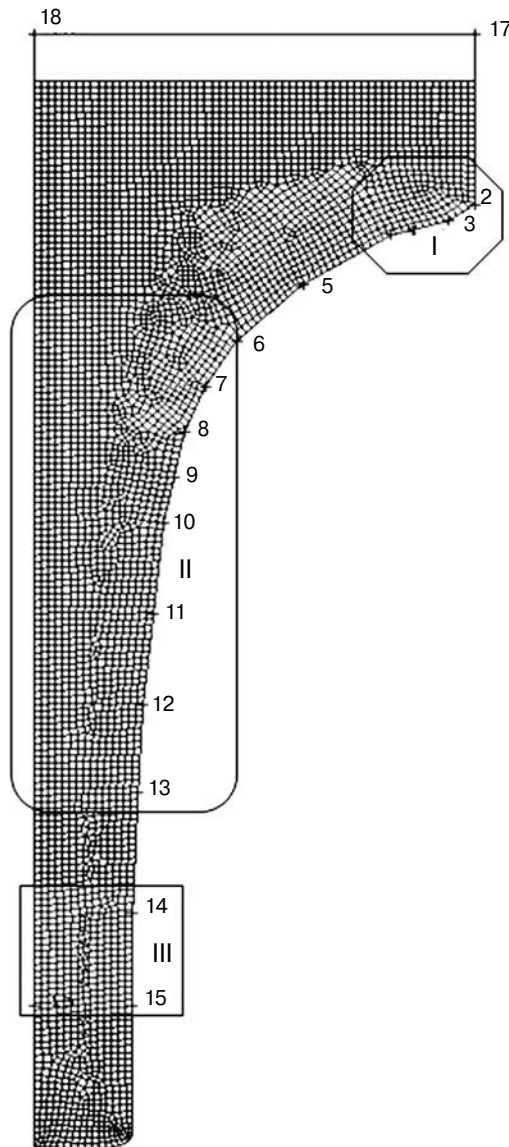


Рис. 2. Основные зоны напряженно-деформированного состояния образца:  
I — высокое сжатие; II — формирование структуры; III — зона, где могут возникать продольные трещины

лее вниз от метки 12 до 14 их значения меняют знак, и соответствующее значение напряжений растяжения достигает примерно 74 МПа. От метки 14 до 15 (на цилиндрическом участке фильеры) и далее от метки 15 (в свободном образце) наблюдается радиальная неоднородность напряжения: от 140 МПа (растяжение, на стенке фильеры) до -57 МПа (сжатие, в центре образца). Такая радиальная неоднородность может быть причиной возникновения продольных трещин, когда эти значения превысят соответствующие критические значения. В данной работе образование и распространение трещин не моделировали.

Из распределения деформации видно (см. рис. 4, б), что ее наибольшее значение 4,5 достигается в угловой точке фильеры (метка 2). От метки 3 до 10 происходит снижение деформации до значения 1,8. Между метками 10—13 можно видеть широкую зо-

ну практически постоянной деформации 2,3. Вниз от метки 13 (на цилиндрическом участке фильеры) и далее от метки 15 (в свободном образце) заметно снижение деформации до 0,92. На этом участке наблюдается радиальная неоднородность деформации, соответствующая аналогичным изменениям напряженного состояния на этом участке образца.

Для сравнения интересно рассмотреть особенности напряженно-деформированного состояния образца (изолинии  $\sigma$  и  $s$ ) на конечной стадии процесса ( $t = 51$  мин), приведенные на рис. 5 (вторая стр. обложки). Из распределения напряжений видно, что в фильере от боковой метки 2 до 10 их значения отрицательные и меняются от -436 до -75 МПа, что соответствует снижению напряжения сжатия при удалении от контейнера. Далее вниз от метки 10 до 14 существует широкая зона очень малых напряжений сжатия приблизительно -3 МПа. На свободном участке образца (вне фильеры) проходит вертикальная граница между очень малым отрицательным по величине напряжением сжатия в центре -3 МПа и положительным по величине напряжением растяжения 69 МПа.

Из распределения деформации видно, что ее наибольшее значение 4,7 достигается вблизи и вдоль стенки фильеры до некоторого удаления от выходного отверстия. На большей длине образца деформация изменяется незначительно 2,6—3,4. Только в самой нижней части образца заметно уменьшение деформации до 0,4.

### Заключение

Разработана расчетная модель процесса горячей экструзии термоэлектрического материала на основе  $\text{Bi}_2\text{Te}_3$ , в основу которой положено приближение упругопластического тела: приведены уравнения, критерии, параметры процесса и расчетные величины, определяющие механические свойства изготавливаемого образца. Показано, что наиболее эффективным способом для учета изменения формы образца в процессе экструзии является применение конечно-элементной аппроксимации на лагранжевой сетке.

Показаны особенности напряженно-деформированного состояния в характерных областях образца на разных временных стадиях процесса экструзии ( $t = 1, 2, 5$  и 51 мин), состоящие в следующем.

По представленным исходным данным о геометрии фильеры и пресс-заготовки, скорости перемещения Пуансона, а также по литературным данным о физико-механических параметрах теллурида висмута, проведены расчеты, позволившие проанализировать особенности конкретного виртуального процесса горячей экструзии.

### Библиографический список

1. Сабо, Е. П. Технология халькогенидных термоэлементов. Физические основы / Е. П. Сабо // Термоэлектричество. - 2004. - № 1. - С. 58—72.

2. Булат, Л. П. Термоэлектрическое охлаждение. / Л. П. Булат – СПб. : СПбГУНиПТ, 2002. – 147 с.
3. Сабо, Е. П. Технология халькогенидных термоэлементов. Физические основы / Е. П. Сабо // Термоэлектричество. – 2006. – № 1. – С. 45–66.
4. Sabo, Ye. P. Technology of chalcogen thermoelements. physical foundations / Ye. P. Sabo // J. Thermoelectricity. – 2005. – N 3. – P. 52–68.
5. Yang, J. Microstructure control and thermoelectric properties improvement to  $n$ -type bismuth telluride based materials by hot extrusion / J. Yang, R. Chen, X. Fan, W. Zhu, S. Bao, X. Duan // J. Allows and Compounds. – 2007. – V. 429. – P. 156–162.

6. Егер, Дж. К. Упругость, прочность и текучесть / Дж. К. Егер – М. : Машгиз, 1961. – 170 с.
7. Horrobin, D. J. Die entry pressure drops in paste extrusion / D. J. Horrobin, R. M. Nedderman // Chemical Eng. sci. – 1998. – V. 53, N 18. – P. 3215–3225.
8. Tiernan, P. Modelling of cold extrusion with experimental verification / P. Tiernan, M. T. Hillery, B. Graganescu, M. Gheorghie // J. Materials Processing Technology. – 2005. – V. 168. – P. 360–366.
9. Простомолотов, А. И. Программа «CRYSTMO/MARC» для сопряженного теплового моделирования / А. И. Простомолотов, Н. А. Везуб, Х. Х. Ильясов // Программы для ЭВМ. RU ОБПБТ. – 2009. – № 4. – С. 110.

*Работа выполнена при поддержке ОАО «Росатом» (Госконтракт № Н.46.44.90.12.1080) и РФФИ (грант № 12-02-90027-Бел).*

УДК 621.315.592

## К ВОПРОСУ О МЕХАНИЗМЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ САМООРГАНИЗАЦИИ СВОБОДНЫХ НОСИТЕЛЕЙ ТОКА В СИЛЬНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОЛЯХ

© 2012 г. В. С. Кузнецов, П. А. Кузнецов  
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

### Введение

В настоящее время одна из широко исследуемых наноструктурированных систем — пористый кремний. Структуры на пористом кремнии обладают большой адсорбционной способностью электромагнитного излучения, что является важной составляющей конструкций фотовольтаических ячеек. Современные исследования демонстрируют, что перспективна ячейка на основе  $p-i-n$ -структуры. Таким образом, возникает необходимость проектирования эффективно работающих фотовольтаических ячеек в широком диапазоне длин волн излучения как на основе пористых структур, так и при наличии более эффективной системы разделения фотостимулированных носителей заряда. В связи с этим становится актуальной проблема моделирования подобных систем с целью определения оптимальных параметров для минимизации технологических затрат. Процесс анодного травления кремния для создания пористого кремния представляет собой сложный, далекий от равно-

весия синергетический процесс, объяснение которого возможно лишь при комплексном подходе с учетом явлений, происходящих в области пространственного заряда кремния, в растворе и на границе кремний—электролит. Причин возникновения неустойчивости в приповерхностной области довольно много: зависимость ширины запрещенной зоны от температуры и концентрации носителей тока, взаимодействие акустических и тепловых волн на поверхности, растекание тока, генерационно-рекомбинационная неустойчивость в области сильных электрических полей. В обратно смещенных  $p-i-n$ -переходах уже при малой плотности лавинного тока экспериментально наблюдаются участки с отрицательной дифференциальной проводимостью и образование микроплазмы в виде областей размером 1 мкм с очень высокой плотностью лавинного тока [1]. В работе [2] образование микроплазмы объясняют растеканием тока по квазинейтральным областям  $p-n$ -перехода и возрастающей зависимостью коэффициента лавинного умножения от концентрации свободных носителей в  $i$ -области

Рассмотрен поиск аналитического решения стационарной задачи поведения лавинного тока в сильных электрических полях при наличии центров генерации и рекомбинации. Представлены вольт-амперные характеристики для  $p-i-n$ -структуры. Полученные результаты объясняют образование пространственных структур и гистерезис в сильных электрических полях.

**Ключевые слова:** лавинный пробой, рекомбинация, глубокие уровни.