МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ И МАТЕРИАЛОВ

SIMULATION OF PROCESSES AND MATERIALS

Известия высших учебных заведений. Материалы электронной техники. 2016. Т. 19, № 2. С. 103—107.
ISSN 1609-3577. DOI: 10.17073/1609-3577-2016-2-103-107

УДК 621.315

ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ: ОТ ЭЙКОНАЛЬНОГО К НЕЭЙКОНАЛЬНОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

© *2016 г.* Л. Васкес[1], С. Хименес[2], А. Б. Шварцбург[3]

[1]Dept. Matemática Aplicada, Facultad de Informática, Universidad Complutense de Madrid, 28040, Madrid, Spain

[2]Dept. Matemática Aplicada a las TIC, ETSI Telecomunicación, Universidad Politécnica de Madrid, 30 Complutense Ave., 28040, Madrid, Spain

[3]Объединенный институт высоких температур Российской Академии наук, Институт космических исследований Российской Академии наук, Ижорская ул., д. 13/2, Москва, 125412, Россия

В случае медленного изменения коэффициента преломления на расстояниях порядка длины волны для решения волнового уравнения можно использовать известное эйкональное приближение. Рассмотрена противоположная ситуация, когда коэффициент преломления резко меняется на протяжении одной длины волны, и имеет место так называемый антиэйкональный предел. Антиэйкональный предел оказывается удобным инструментом для моделирования и проектирования новых оптических сред. Кроме того, он позволяет описывать базовое универсальное поведение независимо от реальных значений коэффициента преломления и, следовательно, от параметров самой среды, в случае волновых компонентов с длиной волны, значительно превышающей характерную длину изменения коэффициента преломления.

Ключевые слова: волновое уравнение, коэффициент преломления, антиэйкональный предел

Введение

Ниже рассмотрена проблема распространения волн в неоднородных средах для случая, когда характерные размеры неоднородностей значительно меньше рассматриваемой длины волны. Нарастающий интерес к этой проблеме связан с развитием электромагнитных метаматериалов, содержащих включения субволнового размера, в частности воздушные поры в пластмассах [1], нанорезонаторы [2], метаматериалы с отрицательным преломлением [3], металлические наносферы в диэлектрических матрицах и, наоборот, диэлектрические наносферы в металлических матрицах [4—6]. Сходные проблемы возникают в оптике электромагнитных ударных волн и в динамике локализованных оптических импульсов [7—10]. Однако точные аналитические решения данных проблем могут быть получены только для отдельных распределений коэффициентов преломления в гетерогенных диэлектриках [11]. Следовательно, особое значение приобретает разработка приближенных методов. В отличие от известного эйконального приближения, которое применимо в случае медленного изменения параметров волнового поля или среды в пределах одной длины волны [12], рассмотренные ниже случаи, по–видимому, представляют собой противоположный предел геометрического приближения, или так называемое антиэйкональное приближение.

Для сравнения эйконального и антиэйконального приближений рассмотрим некоторые характерные параметры существующего подхода: для упрощения рассмотрим одномерное волновое уравнение.

Общие положения

Как известно, волновое уравнение выводится из уравнения Максвелла для скалярного по-

Васкес Луис[1] — e–mail: lvazquez@fdi.ucm.es; **Хименес Сальвадор[2]** — e–mail: s.jimenez@upm.es; **Шварцбург Александр Борисович[3]** — e–mail: alex–s–49@ya.ru

тенциала [13]. Рассмотрим одномерный случай, т. е. $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0, \qquad (1)$$

Предположим, что коэффициент преломления n является постоянной величиной. Тогда решения можно выразить как суперпозицию плоских волн в виде

$$\phi(x, t) = \phi_0 e^{\mathrm{i}(\kappa x - \omega t)};\ \kappa = \frac{n\omega}{c}, \qquad (2)$$

где ϕ_0 — константа. Введем длину волны λ вместо волнового числа и, соответственно, новые константы λ_0 и κ_0:

$$\kappa = \frac{2\pi}{\lambda};\quad \kappa_0 = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0}. \qquad (3)$$

С их помощью можно записать уравнение плоских волн в следующем виде:

$$\phi(x,t) = \phi_0 e^{i\kappa_0(nx - ct)}. \qquad (4)$$

Если же n не является константой, а изменяется с координатой x, решения всё еще можно получить при помощи формулы (1), формально аналогичной уравнению для плоских волн (2), коэффициенты которых зависят от x:

$$\phi(x,t) = \phi_0(x) e^{i\kappa_0(L(x) - ct)}, \qquad (5)$$

где ϕ_0 зависит от x. Такое предположение допустимо для волновой зоны, значительно удаленной от источников [13]. Функцию $L(x)$ называют оптической длиной пути или координатно–зависящей фазой волны, а также эйкональной функцией. Интересно отметить, что гамильтонова структура, имеющая место в случае постоянного n, сохраняется, и мы можем определить гамильтонов функционал плотности как

$$h = \frac{1}{2}\left|\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|^2 + \frac{1}{2}\frac{n^2}{c^2}\left|\frac{\partial\phi}{\partial t}\right|^2, \qquad (6)$$

который удовлетворяет следующим условиям:

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial x}\Re\left(\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right). \qquad (7)$$

Интегрируя по области Ω определяем гамильтониан как

$$H = \int_\Omega h\,\mathrm{d}x. \qquad (8)$$

В случае приемлемых граничных условий на краях рассматриваемой области Ω, временное изменение H, задаваемое уравнением

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \Re\left[\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right]_{\partial\Omega}, \qquad (9)$$

исчезает, и мы получаем закон сохранения. В отличие от случая постоянного n, здесь не обеспечивается временное постоянство линейного момента. С другой стороны, сохранение положительно определенного функционала H создает условия, при которых изменения $\phi(x, t)$ остаются ограниченными.

Для дальнейшего упрощения уравнений можно выразить функцию $\phi_0(x)$ в экспоненциальном виде с такой амплитудой экспоненты $A(x)$, что

$$\phi(x,t) = e^{A(x)} e^{i\kappa_0(L(x) - ct)}. \qquad (10)$$

Подставляя уравнение (10) в формулу (1) и собирая вместе все члены уравнения, получим

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2A}{\mathrm{d}x^2} + \left(\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x}\right)^2 - \kappa_0^2\left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \kappa_0^2 n^2 + 2i\kappa_0\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x} + i\kappa_0\frac{\mathrm{d}^2L}{\mathrm{d}x^2}\right]\phi = 0. \qquad (11)$$

В предположении ненулевых значений ϕ, разбивая ее на действительную и мнимую части, получим два следующих уравнения:

$$\frac{\mathrm{d}^2A}{\mathrm{d}x^2} + \left(\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \frac{4\pi^2}{\lambda_0^2}\left[n^2 - \left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x}\right)^2\right] = 0; \qquad (12)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2L}{\mathrm{d}x^2} + 2\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x} = 0. \qquad (13)$$

Так называемое эйкональное приближение соответствует случаю, когда $n(x)$ медленно изменяется в пространстве: если значение λ_0 невелико по сравнению с расстоянием, на котором имеет место значительное изменение $n(x)$, и в предположении медленного изменения амплитуды A в уравнении (12) будет присутствовать третий член. Уравнение, соответствующее данному приближению, называется эйкональным

$$\left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x}\right)^2 = n^2(x), \qquad (14)$$

и является базовым уравнением теории линейной оптики.

Антиэйкональный предел

Перед тем как рассмотреть противоположный предел, рассмотрим некоторые дополнительные частные случаи из общих положений. В частности, можно подставить уравнение (10) в уравнение (8) для того, чтобы определить значения H и условия сохранения H во времени. В итоге получим

$$H = \frac{1}{2}\int_\Omega\left[\kappa_0^2 n^2 + \left(\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \kappa_0^2\left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]e^{2A}\mathrm{d}x, \qquad (15)$$

а граничные условия, обеспечивающие закон сохранения, будут иметь вид

$$\left[-c\kappa_0^2 e^{2A(x)} \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x}\right]_{\partial\Omega} = 0. \quad (16)$$

Более корректным способом уравнение (13) можно решить, по крайней мере частично, выражая $L(x)$ через $A(x)$:

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x} = \alpha e^{-2A(x)}, \quad (17)$$

где α – константа. Подставляя выражение (17) в уравнение (12), находим

$$\frac{\mathrm{d}^2 A}{\mathrm{d}x^2} + \left(\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \frac{4\pi^2}{\lambda_0^2}\left[n^2 - \alpha e^{-4A(x)}\right] = 0. \quad (18)$$

В результате этой подстановки уравнения (12) и (13) становятся практически несвязанными. Значение постоянной α в уравнении (18) предстоит определить с использованием общих положений или граничных условий.

Для более наглядной иллюстрации того, что собой представляет антиэйкональный предел, примем D за длину значительного изменения $n(x)$. Необходимо установить соотношение между D и λ_0. Для этого рассмотрим новую пространственную переменную, пропорциональную D: $s = Dx$. Вводя обозначения $\hat{A}(s) = A(x)$, $\hat{L}(s) = L(x)$ и $\hat{n}(s) = n(x)$, можем записать уравнение (18) с новой пространственной переменной:

$$\frac{\mathrm{d}^2 \hat{A}}{\mathrm{d}s^2} + \left(\frac{\mathrm{d}\hat{A}}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \frac{4\pi^2 D^2}{\lambda_0^2}\left[\hat{n}^2 - \alpha^2 e^{-4\hat{A}(s)}\right] = 0. \quad (19)$$

Эйкональный предел соответствует случаю $\lambda_0 << 2\pi D$. Рассмотрим противоположный предел – антиэйкональный — для случая

$$\lambda_0 >> 2\pi D. \quad (20)$$

Тогда, предполагая, что n (или в противоположном случае $\hat{n}$), ограничен, получим, что в выражении (19) будут присутствовать первые два члена, а данное уравнение с учетом формулы (17) преобразуется следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 \hat{A}}{\mathrm{d}s^2} + \left(\dfrac{\mathrm{d}\hat{A}}{\mathrm{d}s}\right)^2 = 0; \\ \dfrac{\mathrm{d}\hat{L}}{\mathrm{d}s} = \alpha D e^{-2\hat{A}(s)}, \end{cases} \quad (21)$$

или, после замены переменных на противоположные,

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 A}{\mathrm{d}x^2} + \left(\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x}\right)^2 = 0, \\ \dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x} = \alpha e^{-2A(x)}. \end{cases} \quad (22)$$

Система двух совместных уравнений (22) имеет одно примечательное свойство: она не зависит от $n(x)$ и, следовательно, от параметров среды. В этом смысле она представляет собой «универсальное» свойство пространственно–временно́й области, которое следует проанализировать более подробно. Однако такое описание применимо только к длинам волн порядка λ_0 и более: компоненты с меньшими длинами волн этим методом адекватно аппроксимировать нельзя.

Систему уравнений (22) можно решить, предварительно убедившись в справедливости сделанного предположения, а именно: проверив, может ли третий член формулы (19) стать значимым в случае больших величин s. Это можно установить, проведя стандартный многомасштабный анализ [14, 15]. Такой анализ, а также некоторые численные эксперименты будут представлены в следующих работах.

В заключение отметим несколько моментов.

1. Прежде всего следует отметить, что подобное поведение волн не ограничивается случаем одномерного волнового уравнения. Хотя здесь для ясности приведен упрощенный случай: если волновое уравнение рассматривать для скалярной функции в трехмерном пространстве, получим

$$\Delta\phi - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0. \quad (23)$$

В предположении

$$\phi(\mathbf{x}) = e^{A(\mathbf{x})} e^{i\kappa_0 (L(\mathbf{x}) - ct)}, \quad (24)$$

получим

$$\Delta A + \left(\vec{\nabla} A\right)^2 + \frac{4\pi^2}{\lambda_0^2}\left[n^2 - \left(\vec{\nabla} L\right)^2\right] = 0; \quad (25)$$

$$\Delta L + 2\vec{\nabla} A \cdot \vec{\nabla} L = 0, \quad (26)$$

где, как и ранее, $\lambda_0 = 2\pi/\kappa_0$. В антиэйкональном пределе, полагая, что n изменяется в пространстве быстро и равномерно во всех направлениях и значительно меньше, чем λ_0, поведение волн можно задать универсальной системой совместных уравнений:

$$\begin{cases} \Delta A + \left(\vec{\nabla} A\right)^2 = 0; \\ \Delta L + 2\vec{\nabla} A \cdot \vec{\nabla} L = 0. \end{cases} \quad (27)$$

Вывод этих уравнений из уравнений Максвелла по аналогии с ранее сделанным выводом в эйкональном приближении [13] будет представлен в следующих работах.

2. Аналогичное универсальное описание может быть применимо и в других случаях, когда рассматривается противоположный эйкональному предел или приближение ВКБ, например в акустике или при квантовой формулировке не зависящего от времени уравнения Шредингера [16].

3. Эйкональный и антиэйкональный пределы характеризуются значительным отличием длин волн и характерных длин изменения коэффициен-

та преломления $n(\vec{x})$. Можно рассмотреть особые случаи, когда оба этих предела одновременно становятся неприменимыми, например как в случае волн, взаимодействующих со слоем самоподобных фракталов, поскольку в такой среде характерные масштабы могут варьироваться от крайне малых до очень больших [15].

Заключение

Представлен случай, противоположный классическому эйкональному приближению, — антиэйкональный предел. Получено универсальное описание, дающее удобное приближение для больших длин волн.

Библиографический список

1. **Kennedy, S. R.** Porous broadband antireflection coating by glancing angle deposition / S. R. Kennedy, M. J. Brett // Applied Optics. – 2003. – V. 42, N 22. – P. 4573—4579. DOI: 10.1364/AO.42.004573
2. **O'Brien, S.** Magnetic activity at infrared frequencies in structured metallic photonic crystals / S. O'Brien, J. P. Pendry // J. Physics: Condensed Matter. – 2002. – V. 14, N 25. – P. 6383—6394. DOI: 10.1088/0953-8984/14/25/307
3. **Alù, A.** Negative effective permeability and left–handed materials at optical frequencies / A. Alù, A. Salandrino, N. Engheta // Optics Express. – 2006. – V. 14, N 4. – P. 1557—1567. DOI: 10.1364/OE.14.001557
4. **Zhao, Q.** Mie resonance–based dielectric metamaterials / Q. Zhao, J. Zhou, J. Zhang, F. Lippens // Materials Today. – 2009. – V. 12, N 12. – P. 60—69. DOI: 10.1016/S1369-7021(09)70318-9
5. **Borisov, A. G.** Role of electromagnetic trapped modes in extraordinary transmission in nanostructured materials / A. G. Borisov, F. J. García de Abajo, S. V. Shabanov // Phys. Rev. B. – 2005. – V. 71. – P. 075408. DOI: 10.1103/PhysRevB.71.075408
6. **García de Abajo, F. J.** Tunneling Mechanism of light transmission through metallic films / F. J. García de Abajo, G. Gómez–Santos, L. A. Blanco, A. G. Borisov, S. V. Shabanov // Phys. Rev. Lett. – 2005. – V. 95. – P. 067403. DOI: 10.1103/PhysRevLett.95.067403
7. **Gilles, L.** Electromagnetic shocks on the optical cycle of ultrashort pulses in triple–resonance Lorentz dielectric media with subfemtosecond nonlinear electronic Debye relaxation / L. Gilles, J. V. Moloney, L. Vázquez // Phys. Rev. E. – 1999. – V. 60, N 1. – P. 1051—1059. DOI: 10.1103/PhysRevE.60.1051
8. **Porras, M. A.** Creation of localized optical waves that do not obey the radiation condition at infinity / M. A. Porras, F. Salazar–Bloise, L. Vázquez // Phys. Rev. Lett. – 2000. – V. 85, N 10. – P. 2104—2107. DOI: 10.1103/PhysRevLett.85.2104
9. **Porras, M. A.** Focusing properties of shocking optical pulses / M. A. Porras, F. Salazar–Bloise, L. Vázquez // Optics Lett. – 2001. – V. 26, N 6. – P. 376—378. DOI: 10.1364/OL.26.000376
10. В период 2004—2012 гг. и в ходе работы «Access to Research Infrastructures» Европейская лаборатория нелинейной спектроскопии (LENS), Флоренция, предоставляла экспериментальную базу для нашего теоретического исследования образования и характеристик электромагнитных ударных волн в рамках проектов LENS000242 (2004): http://www.laserlabeurope.eu/transnational-access/access-facilities/access-projects-lens, LENS001677 (2012): https://laserlab.mbi-berlin.de/access/publish/listAccessProjects.jsf
11. **Shvartsburg, A. B.** Waves in gradient metamaterials / A. B. Shvartsburg, A. A. Maradudin. – Hackensack (NJ) ; London : World Scientific Pub. Co., 2013. – 328 p.
12. **Kravtsov, Yu. A.** Geometric optics in engineering physics / Yu. A. Kravtsov. – Harrow (UK) : Alpha Science International, 2005.
13. **Born, M.** Principles of optics / M. Born, E. Wolf. – Cambridge (UK) : Cambridge University Press, 1998.
14. **Bender, C. M.** Advanced mathematical methods for scientists and engineers / C. M. Bender, S. A. Orzag. – New York : Springer–Verlag, 1999.
15. **Konotop, V. V.** Wave interaction with a fractal layer / V. V. Konotop, Fei Zhang, L. Vázquez // Phys. Rev. E. – 1993. – V. 48, N 5. – P. 4044—4048. DOI: 10.1103/PhysRevE.48.4044
16. **Rañada, A. F.** Quantum mechanics of nonlinear classical fields / A. F. Rañada, L. Vázquez // Anales de Física – 1980. – V. 76. – P. 139—141. DOI: 10.1007/BF01807613

Авторы выражают благодарность за поддержку Instituto de Investigaciones Económicas y Sociales Francisco de Vitoria (2016).

ISSN 1609–3577 Izvestiya vuzov. Materialy elektronnoi tekhniki = Materials of Electronic Technics. 2016, vol. 19, no. 2, pp. 103—107.

The wave equation: from eikonal to anti-eikonal approximation

L. Vázquez[1], S. Jiménez[2], A. B. Shvartsburg[3]

[1]***Dept. Matemática Aplicada, Facultad de Informática, Universidad Complutense de Madrid,***
28040-Madrid, Spain

[2]***Dept. Matemática Aplicada a las TIC, ETSI Telecomunicación, Universidad Politécnica de Madrid,***
30 Complutense Ave., 28040-Madrid, Spain

[3]***Joint Institute for High Temperatures Russian Academy of Sciences,***
Institute for Space Researches Russian Academy of Sciences,
13/2 Izhorskaya Str., Moscow 125412, Russia

Abstract. When the refractive index changes very slowly compared to the wave–length we may use the eikonal approximation to the wave equation. In the opposite case, when the refractive index highly variates over the distance of one wave–length, we have what can be termed as the anti–eikonal limit. This situation is addressed in this work. The anti–eikonal limit seems to be a relevant tool in the modelling and design of new optical media. Besides, it describes a basic universal behaviour, independent of the actual values of the refractive index and, thus, of the media, for the components of a wave with wave–length much greater than the characteristic scale of the refractive index.

Keywords: wave equation, refractive index, anti–eikonal

Information about authors:
Luis Vázquez[1] — (lvazquez@fdi.ucm.es); **Salvador Jiménez[2,*)]** — (s.jimenez@upm.es); **Alexander B. Shvartsburg[3]** — (alex–s–49@ya.ru)

*) Corresponding author

References

1. Kennedy S. R., Brett M. J. Porous broadband antireflection coating by glancing angle deposition. *Applied Optics*. 2003, vol. 42, no. 22, pp. 4573—4579. DOI: 10.1364/AO.42.004573
2. O'Brien S., Pendry J. P. Magnetic activity at infrared frequencies in structured metallic photonic crystals. *J. Physics: Condensed Matter*, 2002, vol. 14, no. 25, pp. 6383—6394. DOI: 10.1088/0953-8984/14/25/307
3. Alù A., Salandrino A., Engheta N. Negative effective permeability and left–handed materials at optical frequencies. *Optics Ex-*

press, 2006, vol. 14, no. 4, pp. 1557—1567. DOI: 10.1364/OE.14.001557

4. Zhao Q., Zhou J., Zhang J., Lippens F. Mie resonance–based dielectric metamaterials. *Materials Today*, 2009, vol. 12, no. 12, pp. 60—69. DOI: 10.1016/S1369-7021(09)70318-9

5. Borisov A. G., García de Abajo F. J., Shabanov S. V. Role of electromagnetic trapped modes in extraordinary transmission in nanostructured materials. *Phys. Rev. B.,* 2005, vol. 71, pp. 075408. DOI: 10.1103/PhysRevB.71.075408

6. García de Abajo F. J., Gómez–Santos G., Blanco L. A., Borisov A. G., Shabanov S. V. Tunneling Mechanism of light transmission through metallic films. *Phys. Rev. Lett.,* 2005, vol. 95, pp. 067403. DOI: 10.1103/PhysRevLett.95.067403

7. Gilles L., Moloney J. V., Vázquez L. Electromagnetic shocks on the optical cycle of ultrashort pulses in triple–resonance Lorentz dielectric media with subfemtosecond nonlinear electronic Debye relaxation. *Phys. Rev. E.*, 1999, vol. 60, no. 1, pp. 1051—1059. DOI: 10.1103/PhysRevE.60.1051

8. Porras M. A., Salazar–Bloise F., Vázquez L. Creation of localized optical waves that do not obey the radiation condition at infinity. *Phys. Rev. Lett.*, 2000, vol. 85, no. 10, pp. 2104—2107. DOI: 10.1103/PhysRevLett.85.2104

9. Porras M. A., Salazar–Bloise F., Vázquez L. Focusing properties of shocking optical pulses. *Optics Lett.*, 2001, vol. 26, no. 6, pp. 376—378. DOI: 10.1364/OL.26.000376

10. In the period 2004—2012 and through the «Access to Research Infrastructures» the European Laboratory for Nonlinear Spectroscopy (LENS), in Firenze, provided the experimental support to detect the generation and properties of electromagnetic shock waves that we studied numerically. The projects were LENS000242 (2004): http://www.laserlabeurope.eu/transnational-access/access-facilities/access-projects-lens, and LENS001677 (2012): https://laser-lab.mbi-berlin.de/access/publish/listAccessProjects.jsf

11. Shvartsburg A. B., Maradudin A. A. Waves in gradient metamaterials. Hackensack (NJ) ; London : World Scientific Pub. Co., 2013. 328 p.

12. Kravtsov Yu. A. Geometric optics in engineering physics. Harrow (UK): Alpha Science International, 2005.

13. Born M., Wolf E. Principles of optics. Cambridge (UK): Cambridge University Press, 1998.

14. Bender C. M., Orzag S. A. Advanced mathematical methods for scientists and engineers. New York: Springer–Verlag, 1999.

15. Konotop V. V., Fei Zhang, Vázquez L. Wave interaction with a fractal layer. *Phys. Rev. E.*, 1993, vol. 48, no. 5, pp. 4044—4048. DOI: 10.1103/PhysRevE.48.4044

16. Rañada A. F., Vázquez L. Quantum mechanics of nonlinear classical fields. *Anales de Física*, 1980, vol. 76, pp. 139—141. DOI: 10.1007/BF01807613

Acknowledgments. *The authors thank the support of the Instituto de Investigaciones Económicas y Sociales Francisco de Vitoria (2016).*