

УДК 621.315.592

## Нелокальная дисперсия и ультразвуковое туннелирование в материалах с градиентной структурой

© 2018 г. А. Б. Шварцбург<sup>1,2,§</sup>, М. Д. Малинкович<sup>3</sup>, А. М. Кислюк<sup>3</sup><sup>1</sup> *Объединенный институт высоких температур Российской академии наук,  
ул. Ижорская, д. 13/2, Москва, 127412, Россия,*<sup>2</sup> *Институт космических исследований Российской академии наук,  
ул. Профсоюзная, д. 84/32, Москва, 117997, Россия,*<sup>3</sup> *Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС»,  
Ленинский просп., д. 4, Москва, 119049, Россия*

**Аннотация.** Показано, что в материалах с пространственным распределением (градиентом) плотности и/или упругости имеет место нелокальная дисперсия продольных ультразвуковых волн. Эта дисперсия приводит к возникновению ультразвуковых спектров, таких как широкодиапазонное плато полного отражения, туннельные спектральные области и области полного пропускания. В рамках точно решаемых моделей сред с непрерывно распределенными плотностью и упругостью исследованы ультразвуковые волны в градиентных материалах, сформированные интерференцией прямых и обратных волн, а также затухающими и незатухающими модами. Приведены примеры спектров пропускания как для металлических, так и для полупроводниковых градиентных структур, а также рассмотрена общая концепция искусственной нелокальной дисперсии для градиентных композитных материалов. Необходимо заметить, что волновое уравнение для акустических волн в градиентных средах с постоянным модулем упругости и определенным заданным распределением плотности сводится к уравнению, описывающему распространение электромагнитных волн в прозрачных диэлектрических средах. Это формальное сходство свидетельствует о том, что концепция нелокальной дисперсии является общей как для оптических, так и для акустических явлений, что позволяет напрямую использовать разработанные для градиентной оптики физические принципы и точные математические решения при реализации соответствующих акустических задач.

**Ключевые слова:** градиентные материалы, нелокальная дисперсия, пространственные распределения плотности и/или упругости, распространение ультразвуковых волн

### Введение

Для решения ряда практических задач — от обработки сигналов до испытания материалов — необходимо управлять распространением ультразвуковых волн. Для реализации этих процессов важным вопросом является повышение спектральной чувствительности ультразвуковых приборов и поиск подходящих функциональных материалов. Ниже рассмотрены акустические спектры с управляемым отражением/пропусканием в тонких гетерогенных твердых пленках с распределенной упругостью и/или плотностью за счет непрерывного пространственного изменения концентрации компонентов (градиентные пленки). Спектр продольных ультразвуковых волн в пленках определя-

ется их нелокальной дисперсией, возникающей благодаря наличию градиента упругости и плотности. Математический подход к анализу этих спектров основан на точных решениях волнового уравнения акустики для градиентных пленок. Необычные свойства этих сред привлекают внимание из-за проблем распространения звука в слоях неоднородных сплавов [1], композитных материалов [2] и пористых структур [3]. Ранее изучали звуковые поля в некоторых слоистых средах [4], а также исследовали аналогичные проблемы в акустических трактах с медленно изменяющимся сечением [5, 6]. В то же время такие исследования позволяют изучить некоторые механические свойства гетерогенных материалов [7, 8]. Во всех этих случаях продольная скорость звука  $v_l$  принимает значения, находящиеся в промежутке между значениями для компонентов, из которых состоят градиентные структуры. Непрерывные пространственные изменения концентраций компонентов определяют зависимость скорости  $v_l$  от координат внутри слоя,

**Шварцбург Александр Борисович**<sup>1,2,§</sup> — доктор физ.-мат. наук, e-mail: alex-s-49@ya.ru; **Малинкович Михаил Давыдович**<sup>3</sup> — канд. физ.-мат. наук, доцент, e-mail: malinkovich@yandex.ru; **Кислюк Александр Михайлович**<sup>3</sup> — магистрант

§ Автор для переписки

обеспечивая разнообразие его акустических спектров отражения/пропускания.

Изготовление таких материалов, в частности бинарных сплавов и композитов, зависит от взаимной растворимости их компонентов. Нами исследованы слои, состоящие из двух материалов: двух металлов и двух полупроводников; при этом концентрация каждого компонента изменяется в пленке в соответствии с заданными условиями [9].

Рассмотрим два различных случая.

1. В качестве простого примера композитного материала, характеризующегося изменениями одного параметра (модуля Юнга  $E$ ) в зависимости от концентрации, можно привести напыленную пленку, изготовленную из смеси Cu и Ni. Кристаллические структуры Cu и Ni можно представить как гранцентрированные кубические решетки с несколько различающимися параметрами ( $a_{Cu} = 0,3615$  нм и  $a_{Ni} = 0,3524$  нм). Если пространственные решетки двух металлов и их атомные радиусы близки, модуль Юнга их бинарного твердого раствора изменяется как линейная функция атомной концентрации. Диаграмма фазового равновесия системы Cu—Ni представляет собой непрерывную последовательность твердых растворов [10]. Поскольку плотности Cu и Ni близки ( $\rho_{Cu} = 8,920$  г/см<sup>3</sup> и  $\rho_{Ni} = 8,902$  г/см<sup>3</sup>), плотность бинарного твердого раствора Cu—Ni зависит от изменений содержания Cu и Ni незначительно. Более того, коэффициенты Пуассона этих металлов тоже близки ( $\mu_{Cu} = 0,31$  и  $\mu_{Ni} = 0,28$ ). Однако их модули Юнга существенно отличаются:  $E_{Cu} = 103$  ГПа и  $E_{Ni} = 204$  ГПа [11].

2. Более сложным примером композитного материала, демонстрирующим одновременные изменения упругости и плотности, может быть тонкая пленка Ge—Si. В отличие от раствора Cu—Ni, значительно отличаются друг от друга как плотности этих компонентов ( $\rho_{Ge} = 5,327$  г/см<sup>3</sup> и  $\rho_{Si} = 2,328$  г/см<sup>3</sup>), так и их модули Юнга ( $E_{Ge} = 130$  ГПа и  $E_{Si} = 165$  ГПа) [11]. Такие материалы могут быть модельными при исследовании акустических свойств не только полупроводников, но и органических материалов [12], стеклок [13] и гранулированных метаматериалов [14].

На модуль Юнга, который определяется химическими связями между атомами, могут существенно влиять примеси, входящие в твердый раствор в матрице и изменяющие параметр кристаллической решетки. Изменение параметра решетки меняет модуль Юнга и, следовательно, скорость распространения звука. Так, увеличение содержания Ni в сплаве Cu—Ni с 0 до 100 % приводит к увеличению скорости распространения звука  $v_l$  с  $\approx 3800$  до  $\approx 4900$  мс<sup>-1</sup> [11]. Таким образом, за счет изменения содержания компонентов в системе можно создавать материалы, например, пленочные, с управляемым пространственным распределением как скорости акустической волны, так и акустической дисперсии.

Ниже рассмотрены не традиционные представления о дисперсии звука в материалах, связанной с эффектами рассеяния [15], а механизм дисперсии, обусловленный гетерогенными непрерывными распределениями модуля Юнга  $E(z)$  и плотности  $\rho(z)$  в твердом слое. Этими нелокальными явлениями определяется акустическая дисперсия, характерная для гетерогенных композитных слоев. Такие слои можно рассматривать как градиентные акустические барьеры по аналогии с потенциальными барьерами в квантовой механике. В отличие от прямоугольных гомогенных акустических барьеров [16], спектры отражения/пропускания градиентных барьеров зависят от пространственных распределений упругости и плотности, которыми можно управлять в процессе изготовления слоев.

Рассмотрим продольную звуковую волну, падающую по нормали на границу  $z = 0$  градиентного слоя толщиной  $d$ , который расположенного между двумя гомогенными упругими слоями. Теоретический анализ распространения звука в упругих средах основан на хорошо известных уравнениях движения, описывающих соотношение смещения частиц среды  $u$  и компонентов тензора напряжений  $\sigma_{ik}$ :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}. \quad (1)$$

Зависимости плотности  $\rho$  и компонентов тензора  $\sigma_{ik}$  в градиентных средах от координаты  $x_k = z$  с безразмерными функциями  $F(z)$  и  $W(z)$  представим в виде

$$\rho(z) = \rho_0 F^2(z); \quad \rho|_{z=0} = \rho_0; \quad F|_{z=0} = 1. \quad (2)$$

$$G(z) = G_0 W^2(z); \quad G_0 = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}; \quad W|_{z=0} = 1. \quad (3)$$

Здесь  $E$  — значение модуля Юнга на границе пленки,  $z = 0$ . Уравнения (2) и (3) применяют для анализа распространения продольной волны со скоростью  $v_l$  со смещением  $u = u_z \exp(-i\omega t)$ . В этом случае правая часть уравнения (1) зависит только от компонента тензора напряжения  $\sigma_{zz}$ , который определяется следующим образом [15]:

$$\sigma_{zz} = G(z) \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (4)$$

Пренебрежем для простоты небольшими изменениями коэффициента Пуассона и зададим для продольного смещения  $u_z = u$ . Тогда уравнение (1) можно представить в виде

$$W^2(z) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{v_0^2} F^2(z) u + 2WW_z \frac{\partial u}{\partial z} = 0; \quad (5)$$

Здесь  $W_z = \frac{\partial W}{\partial z}$ ;  $v_0$  — продольная скорость распространения звука на границе  $z = 0$ ,

$$v_0^2 = \frac{G_0}{\rho_0}. \quad (6)$$

Исследуем уравнение (5), введя новую переменную  $\eta$ :

$$d\eta = \frac{dz}{W^2(z)}; \quad (7)$$

Рассмотрим уравнение (5) с учетом новой переменной ( $\eta$ ):

$$\frac{d^2 u}{d\eta^2} + \frac{\omega^2}{v_0^2} F^2(z) W^2(z) u = 0; \quad (8)$$

Точные решения уравнения (8) соответствуют тому, что в градиентных пленках имеет место акустическая пространственная дисперсия. Поскольку толщина пленки сопоставима с длиной звуковой волны или меньше ее, предположения о малости или медленности изменений параметров звукового поля и/или среды, неприемлемы. Ниже показано, что найденные точные решения применены для расчета спектров пропускания периодических многослойных градиентных структур, содержащих пленки с переменной упругостью, и пленки, в которых упругость и плотность независимо изменяются в пространстве. Рассмотрены эффекты нелокальной дисперсии и полного внутреннего отражения, обусловленные такими зависимостями, а также некоторые аналогии между акустикой и оптикой градиентных сред.

### Спектры отражения/пропускания периодических металлических акустических барьеров с непрерывно распределенной упругостью

Для наглядного представления эффекта гетерогенности  $G(z) = G_0 W^2(z)$  рассмотрим продольную волну внутри градиентной пленки толщиной  $d$ , с постоянной плотностью  $\rho = \rho_0$  и пространственно распределенным модулем упругости  $G(z)$  (3). В результате можем применить простую функцию распределения:

$$W^2(z) = \left(1 + s \frac{z}{L}\right)^2; \quad s = \pm 1; \quad (9)$$

Рассмотрим сначала знак «+» в уравнениях (9); подстановка уравнения (9) в формулу (7) дает явные выражения для переменной и распределения (9), выраженные через:

$$\eta = z \left(1 + \frac{z}{L}\right)^{-1}; \quad W^2(z) = W^2(\eta) = \left(1 + \frac{\eta}{L}\right)^{-2};$$

$$\eta = z \left(1 + \frac{z}{L}\right)^{-1}; \quad W^2(z) = W^2(\eta) = \left(1 - \frac{\eta}{L}\right)^{-2}; \quad (10)$$

При использовании уравнения (10) функцию  $W^2(z)$  можно исключить из уравнения (8), которое теперь выглядит следующим образом:

$$\frac{d^2 u}{d\eta^2} + \frac{\omega^2}{v_0^2} W^2(\eta) u = 0. \quad (11)$$

Решение уравнения (11) можно записать двумя разными способами с учетом соотношения между частотой волны  $\omega$  и характеристической частотой  $\Omega$  в зависимости от скорости  $v_0$  и геометрического параметра  $L$ :

$$\Omega^2 = \frac{v_0^2}{4L^2}. \quad (12)$$

Рассматривая сначала высокочастотный случай  $\omega > \Omega$  и введя новую переменную  $\tau$

$$\tau = \int_0^\eta W(\eta_1) d\eta_1 = -L \ln \left(1 - \frac{\eta}{L}\right), \quad (13)$$

представим точное аналитическое решение уравнения (11) в виде

$$u = A \sqrt{1 - \frac{\eta}{L}} \left[ \exp(iq\tau) + Q \exp(-iq\tau) \right]; \quad (14)$$

$$q = \frac{\omega}{v_0} N_+; \quad N_+ = \sqrt{1 - \zeta^2}; \quad \zeta \leq 1; \quad \zeta = \frac{\Omega}{L} \text{sign}(s), \quad (15)$$

где  $A$  — нормировочная постоянная.

Следует обратить внимание, что волны, соответствующие уравнению (14), являются синусоидальными только в математическом  $\tau$ -пространстве, а не в реальном пространстве. Выражение в квадратных скобках можно рассматривать как результат интерференции прямых и обратных волн, перемещающихся вдоль «оси»  $\tau$ , где закон подобия  $Q$  описывает вклад обратной волны в общее поле. Обратим внимание, что волновые числа  $q$ , рассчитанные по уравнению (15), обладают плазмopodobной дисперсией, при этом характеристическая частота  $\Omega$  подобна частоте плазмы. Эта нелокальная дисперсия, определяемая градиентной шкалой  $L$ , затухает с увеличением масштаба; в предельном случае  $L \rightarrow \infty, \Omega \rightarrow 0$  выражение (14) преобразуется в стандартное решение для гомогенного барьера:  $u = \exp(i\omega z/v_0) + Q \exp(-i\omega z/v_0)$ .

Чтобы найти спектр отражения для продольной волны, выходящей из упругой среды 1 в другую упругую среду 2 через градиентный слой, обозначим параметры упругости и плотности этих сред как  $G_1, G_2, G_0$  и  $\rho_1, \rho_2, \rho_0$  соответственно. Условия непрерывности для смещения  $u$  и напряжения  $\sigma_{zz}$  для нормального падения волны из среды 1 на границе градиентного слоя  $z = 0$  выглядят следующим образом:

$$u|_{z=+0} = u|_{z=-0}; \quad \sigma_{zz}|_{z=-0} = \sigma_{zz}|_{z=+0}. \quad (16)$$

Напряжение  $\sigma_1$  в падающей волне, распространяющейся со скоростью  $v_1$ , можно найти подстановкой смещения  $u_1$  в уравнение (4):

$$u_1 = A_1 \exp\left(\frac{i\omega z}{v_1}\right); \quad \sigma_1 = iA_1\omega\sqrt{G_1\rho_1} \exp\left(\frac{i\omega z}{v_1}\right). \quad (17)$$

Таким же образом напряжение  $\sigma$  для градиентного слоя определяется через смещение  $u$ , задаваемое уравнением (14).

Наконец, замена этих величин в граничные условия (уравнение (16)) дает уравнение, связывающее комплексный коэффициент отражения  $R$  с упругостью и плотностью граничных сред и с неизвестным параметром  $Q$ , характеризующим обратную волну (уравнение (14)):

$$\frac{1+R}{1-R} = \frac{\alpha_{10}}{-i\zeta + N_+\Lambda}; \quad (18)$$

$$\alpha_{10} = \sqrt{\frac{G_1\rho_1}{G_0\rho_0}}; \quad \Lambda = \frac{1-Q}{1+Q}. \quad (19)$$

Для того чтобы найти неизвестный параметр  $Q$ , связанный с отражением на границе градиентного слоя со средой 2 ( $z = d$ ), рассмотрим сначала простейший пример структуры, содержащей один градиентный слой. Учитывая значения  $\eta$ ,  $\tau$  и  $W$  в плоскости  $z = d$ , запишем

$$\eta|_{z=d} = d\left(1 + \frac{d}{L}\right)^{-1}; \quad \tau|_{z=d} = \tau_0 = L \ln\left(1 + \frac{d}{L}\right);$$

$$W|_{z=d} = W_0 = 1 + \frac{d}{L}; \quad (20)$$

и снова с помощью условий непрерывности в этой плоскости, определим параметр  $Q$

$$Q = -\frac{(\alpha_{20} + i\zeta W_0 - N_+ W_0) \exp(2iq\tau_0)}{\alpha_{20} + i\zeta W_0 + N_+ W_0};$$

$$\alpha_{20} = \sqrt{\frac{G_2\rho_2}{G_0\rho_0}}. \quad (21)$$

Для того чтобы завершить вычисление комплексного коэффициента отражения  $R$ , необходимо найти параметр  $\Lambda$  (см. уравнение (19)). Замена уравнения (21) на уравнение (19) дает значение  $\Lambda$  для одного слоя ( $\Lambda = \Lambda_1$ ):

$$\Lambda_1 = \frac{\alpha_{20} + iW_0(\zeta - N_+ t_+)}{W_0(N_+ + \zeta t_+) - i\alpha_{20} t_+}; \quad t_+ = \operatorname{tg}(\theta_+);$$

$$\theta_+ = \frac{N_+}{2\zeta} \ln W_0. \quad (22)$$

Значения  $\zeta$  и  $N_+$  были определены в уравнении (15). В результате изменения уравнения (22) с учетом формулы (18) получим уравнение для определения комплексного коэффициента отражения для отдельного градиентного слоя.

Для распространения такого подхода на случай повторяющихся структур, содержащих  $m > 1$  градиентных слоев, необходимо использовать условия непрерывности на границе между двумя слоями. Задав число  $m = 1$  для первого слоя на дальнейшей стороне структуры, можно записать рекуррентное уравнение, связывающее значения  $\Lambda_{m-1}$  и  $\Lambda_m$  для любого  $m \geq 2$ :

$$\Lambda_m = \frac{N_+ \Lambda_{m-1} + i[\zeta(W_0 - 1) - t_+ N_+ W_0]}{N_+ W_0 + t_+ [\zeta(W_0 - 1) - iN_+ \Lambda_{m-1}]}; \quad m \geq 2; \quad (23)$$

Таким образом, возвращаясь к уравнению (18) и используя значение  $\Lambda_m$  (уравнение 23), можно представить комплексный коэффициент отражения для периодической структуры, содержащей любое число  $m$  градиентных слоев с непрерывно распределенной упругостью (уравнение (9)):

$$R_m = \frac{\alpha_{10} + i\zeta - N_+ \Lambda_m}{\alpha_{10} - i\zeta + N_+ \Lambda_m}. \quad (24)$$

Спектры пропускания для описанной структуры определяются следующим соотношением:

$$|T_m|^2 = 1 - |R_m|^2. \quad (25)$$

Длина волны, относящаяся к характеристической частоте  $\Omega$  (см. уравнение (12)), равна  $\Lambda_c = 4\pi L$ . Таким образом, уравнения (24) и (25) описывают спектры отражения/пропускания для «коротких» волн  $\Lambda \leq \Lambda_c$ .

В противоположном случае, т. е. при  $\Lambda \geq \Lambda_c$  ( $\zeta^2 \geq 1$ ), для вычисления спектров отражения/пропускания необходимо решение уравнения (11) представить не в виде уравнения (14), а с учетом интерференции затухающей и незатухающей мод, перемещающихся вдоль оси  $\tau$ , в виде

$$u = A\sqrt{1 - \frac{\eta}{L}} [\exp(-p\tau) + Q \exp(p\tau)];$$

$$p = \frac{\omega}{v_0} \sqrt{\zeta^2 - 1}. \quad (26)$$

Стоит отметить, что спектры отражения/пропускания можно найти напрямую из уравнений (22)—(24), выполнив следующие подстановки:

$$N_+ \rightarrow iN_-; \quad \operatorname{tg}(\theta_+) \rightarrow i\operatorname{th}(\theta_-);$$

$$N_- = \sqrt{\zeta^2 - 1}; \quad \theta_- = -\frac{N_-}{2\zeta} \ln W_0. \quad (27)$$

В частном случае вблизи  $\zeta = 1$  значения  $R$  (см. уравнение (24)), вычисленные для  $\zeta^2 \leq 1$  и  $\zeta^2 \geq 1$ , схожи.

Ниже эти выводы проиллюстрированы спектрами пропускания для распространения ультразвуковых волн из медных пластин в никелевые через наборы градиентных нанопленок, характери-



зующихся пространственно изменяющейся упругостью, которая обусловлена зависящим от координат содержанием Cu и Ni. Рассмотрим два противоположных случая, относящихся к разным градиентным структурам пленок, исходя из предположения, что волны распространяются по каждой пленке от границы  $z = 0$  к границе  $z = d$ :

1. Волна перемещается в направлении возрастания упругости в соответствии с ростом содержания Ni в каждой пленке с нуля при  $z = 0$  до 100 % при  $z = d$  и снижением содержания Cu со 100 % при  $z = 0$  до нуля при  $z = d$ . Характеристическая частота  $\Omega$  (см. уравнение (12)), связанная со скоростью ультразвуковой волны, равной в этой геометрии  $v_0 = 3,8 \cdot 10^5$  см/с [11], составляет  $\Omega = 7,72 \cdot 10^8$  рад/с, нормированная частота  $\zeta$  (см. уравнение (15)) при этом

является положительной (рис. 1, а). Спектры пропускания для периодических структур (кривая 2) в диапазоне коротких волн  $0,2 \leq \zeta < 0,5$  содержат серии пиков, относящихся к общему пропусканию, которые разделены минимумами с увеличивающейся глубиной, и широкополосным плато с предельно низким пропусканием ( $|T_m|^2 \leq 0,01$ ) в спектральном диапазоне  $\zeta \geq 0,5$ . Результаты вычислений на основе уравнений (26) и (27) показали, что это плато распространяется до диапазона  $\zeta \geq 1$ .

2. В противоположность первому случаю волна распространяется в направлении уменьшения упругости в каждой пленке (содержание Ni уменьшается в каждой пленке с 100 % при  $z = 0$  до нуля при  $z = d$ , а содержание Cu соответствующим образом растет). В отличие от первого случая,  $v_0 = 4,9 \cdot 10^8$  см/с [11],  $\Omega = 7,1 \cdot 10^8$  рад/с и  $\zeta < 0$ ; эта геометрия относится к значению  $s = -1$  в уравнении (9). Спектр пропускания для переходного слоя, содержащего 10 нанопленок, полученный в этом случае (см. рис. 1, б, кривая 2) из уравнений (22)—(24) путем замен  $L \rightarrow -L$ ,  $\zeta \rightarrow -\zeta$ , кардинально отличается от спектра 2 на рис. 1, а в коротковолновом диапазоне. В то же время широкополосное плато в диапазоне  $|\zeta| \geq 0,7$ , аналогично спектру 2 на рис. 1, а, относится к полному отражению. Таким образом, в зависимости от направления распространения волны с учетом градиента упругости, модель (см. уравнение (9)) демонстрирует разные характеристические частоты  $\Omega$  (см. уравнение (12)) и спектры пропускания  $|T_m|^2$ .

Примечательно, что до настоящего момента толщина нанопленок  $d$  нами никогда не определялась. Например, рассматривая изменение содержания в пленке меди со 100 % и никеля с 0 % при  $z = 0$  и наоборот — меди с 0 % и никеля со 100 % при  $z = d$ , мы описывали изменение модуля упругости композита  $G$  в соответствии с уравнением (9) как  $G_{Ni} = G_{Cu}W_0^2$ . Следует обратить внимание, что коэффициент пропускания  $|T|^2$ , показанный на рис. 1 как функция  $\zeta$ , остается неизменным для любых  $d$  и  $L$ , которые связаны постоянным отношением  $d/L$ , определенным через  $W_0$  из модели (см. уравнение (9)) как  $d/L = |W_0 - 1|$ . Таким образом, один из этих параметров может быть выбран произвольно. Считая общую толщину мультислоя пропускания равной  $D = md$  и воспользовавшись уравнением (15), можно выразить толщину  $D$  через длину ультразвуковой волны  $\Lambda$ :

$$\lambda = 4\pi L\zeta; \quad \frac{D}{\lambda} = \frac{m|W_0 - 1|}{4\pi\zeta}. \quad (28)$$

Уравнение (28), справедливое для обоих случаев (1 и 2), позволяет вычислить геоме-

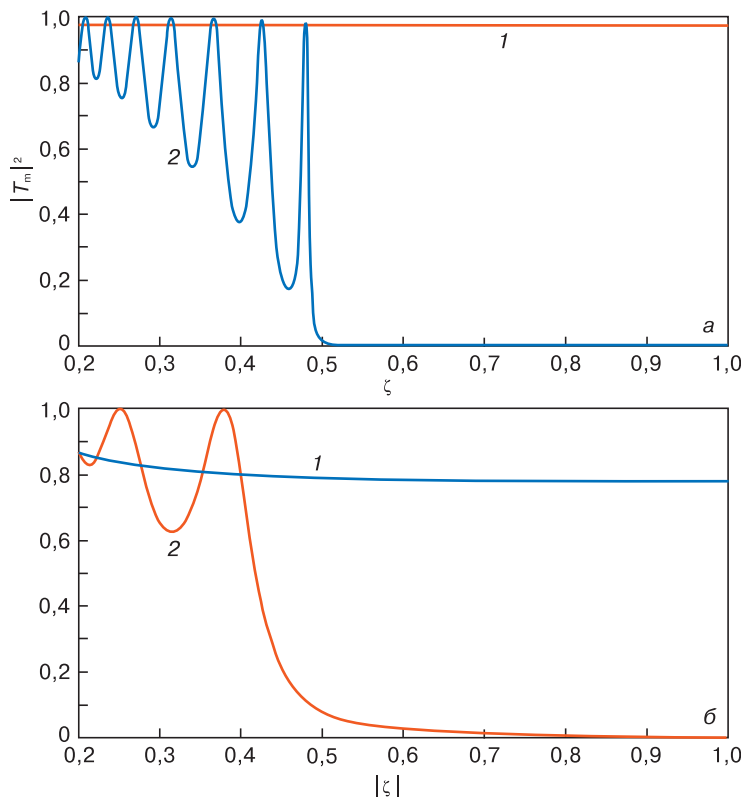


Рис. 1. Ультразвуковые спектры пропускания  $|T_m|^2$  структуры (1, 2), содержащей помещенные между пластинами Cu и Ni градиентные пленки  $m$  с распределенной упругостью (9). Продольные звуковые волны нормально падают на структуру с медной пластины. Показаны спектры, соответствующие распространению волн через каждую градиентную пленку в направлениях роста и снижения упругости. Приведенные различия говорят о том, что представленные спектры обладают разными значениями нормализованного импеданса  $\alpha_{10}$  и  $\alpha_{20}$  и распределений  $W_0$  (формула (9)): а:  $\alpha_{10} = 1$ ,  $\alpha_{20} = 1,407$  и  $W_0 = 1,407$ ; б:  $\alpha_{10} = 0,71$ ,  $\alpha_{20} = 1$  и  $W_0 = 0,71$  ( $1 - m = 1$ ;  $2 - m = 10$ )

Fig. 1. Ultrasonic transmission spectra  $|T_m|^2$  of a structure containing  $m$  gradient films with distributed elasticity (Eq. (9)) placed between Cu and Ni plates. The longitudinal ultrasonic waves are incident normally on the structure from the Cu plate, and  $\zeta$  is the normalized frequency (Eq. (15)). The spectra corresponding to wave propagation through each gradient film in the directions of growth and decrease of the elasticity are shown in Fig. 1a and б respectively. According to this difference the presented spectra have different values of normalized impedance  $\alpha_{10}$  and  $\alpha_{20}$  and  $W_0$  distributions (Eq. (9)):  $\alpha_{10} = 1$ ,  $\alpha_{20} = 1.407$  and  $W_0 = 1.407$  (Fig. 1a);  $\alpha_{10} = 0.71$ ,  $\alpha_{20} = 1$  and  $W_0 = 0.71$  (Fig. 1б). Spectral curves 1 and 2 relate to different numbers of gradient films  $m = 1$  and  $m = 10$ , respectively

трический масштаб переходного мультислоя. Таким образом, приняв для случая 1 значения  $G_{N1}$  и  $G_{Cu}$ , рассчитанные по уравнению (3), находим, что  $W_0 = 1,407$  и  $d/L = 0,407$ ; выбрав, например, толщину пленки  $d = 1$  мкм, получим  $L = 2,46$  мкм. С помощью уравнения (28) найдем длины волн для любых значений параметра  $\zeta$ . Например, приняв  $\zeta = 0,5$ , можно увидеть из спектра 2 на рис. 1, а, что пропускание для длины волны  $\Lambda = 15,42$  мкм составит 1%. В этом случае общая толщина переходного слоя  $D$  будет меньше длины волны  $\Lambda$  ( $D/\Lambda = 0,65$ ). Следовательно, переходный слой, с учетом почти полного отражения, оказывается субволновым. Подобный анализ можно провести и для спектров, представленных на рис. 1, б.

**Спектры отражения/пропускания градиентных акустических барьеров с непрерывно распределенными плотностью и упругостью**

Ниже обобщен подход, описанный выше, для более сложных акустических барьеров, характеризующихся пространственными распределениями как плотности, так и упругости. Суммарное действие этих факторов приводит к возникновению конкурирующих эффектов дисперсии в ультразвуковых спектрах отражения/пропускания градиентных барьеров, согласно уравнению (8). Описав распределения  $W^2(z)$  и  $F^2(z)$  внутри барьера шириной  $d$  через характеристические длины  $l_1$  и  $l_2$

$$W(z) = 1 + \frac{z}{l_1}, \quad F(z) = \left(1 + \frac{z}{l_2}\right)^{-1}, \quad (29)$$

можно в общем виде исследовать эффекты, вызванные увеличением или уменьшением параметров плотности и упругости внутри двойного барьера, рассматривая отдельно положительные и отрицательные значения длин  $l_1$  и  $l_2$ .

Следует обратить внимание, что распределение  $W(z)$  (см. уравнение (29)) после замены  $l_1 \rightarrow L$  будет подобно функции  $W(z)$  (см. уравнение (9)). Целесообразно снова воспользоваться переменной  $\eta$  (уравнение (7)), которая теперь имеет вид  $\eta = z(1 + z/l_1)^{-1}$ . Применение переменной  $\eta$  дает явное выражение произведения  $W(z)$  и  $F(z)$  в уравнении (8) как функции  $\eta$ :

$$F(z)W(z) = U(\eta) = \left(1 + \frac{\eta}{l}\right)^{-1}. \quad (30)$$

Здесь  $l$  — некая характеристическая длина, которая может быть или положительной, или отрицательной

$$l = \frac{l_1 l_2}{l_1 - l_2}. \quad (31)$$

Длина  $l$  слоя с постоянной толщиной  $d$  зависит от изменений модуля упругости  $G$  и плотности в

слое. Так, для градиентного слоя, характеризующегося изменениями этих параметров с  $G_0$  и  $\rho_0$  при  $z = 0$  до  $G_1$  и  $\rho_1$  при  $z = d$  в соответствии с распределениями (29), можно вычислить отношения  $\zeta_1 = d/l_1$  и  $\zeta_2 = d/l_2$ , в которых характеристическая длина  $l$  (см. уравнение (31)) напрямую связана с этими изменениями:

$$l = \frac{d}{\zeta_2 - \zeta_1}. \quad (32)$$

Подставив уравнение (29) в уравнение (8) и заменив  $W(\eta) \rightarrow U(\eta)$ , получим  $\eta$ -пространственный вид этого уравнения, которое подобно уравнению (11). Функция  $U(\eta)$  определена согласно уравнению (30). Следуя порядку решения уравнения (11), введем переменную  $\tau$  (см. уравнение (13)), которая теперь имеет вид

$$\tau = \int_0^\eta U(\eta_1) d\eta_1 = l \ln \left[ \frac{l_1(z+l_2)}{l_2(z+l_1)} \right]. \quad (33)$$

Теперь можно воспользоваться решением уравнения (11), заданного выражением (14). Волновое число  $q$  в выражении (14) рассчитано в (15); характеристическая частота  $\Omega$  в (15) через параметр  $l$  зависит от пространственных изменений плотности и упругих свойств  $l_1$  и  $l_2$ :

$$\Omega = \frac{v_0}{2|l|}; \quad \zeta = \frac{\Omega}{\omega} \text{sign}(l). \quad (34)$$

Нормализованная частота  $\zeta$  в формуле (34) в зависимости от знака  $l$  может быть положительной или отрицательной.

Действуя аналогичным образом, можно найти уравнение, описывающее коэффициент отражения  $R$ , в виде, близком к тому, что приведен в выражении (24), при этом необходимо учесть новое значение отношения  $\zeta$  (34). Для того, чтобы найти параметр  $\Lambda_m$ , воспользуемся соотношениями, которые следуют из распределений в уравнениях (7) и (33):

$$\frac{d\eta}{dz} = \frac{1}{W^2(z)}; \quad \frac{d\tau}{dz} = \frac{F(z)}{W(z)}, \quad (35)$$

и определим значения переменных  $\eta$  и  $\tau$ , а также функции  $U(\eta)$  на границе  $z = d$ :

$$\eta_0 = \eta(d) = d \left(1 + \frac{d}{l_1}\right)^{-1}; \quad \tau|_{z=d} = \tau_0 = -\ln U_0;$$

$$U_0 = U(d) = \frac{l_2(d+l_1)}{l_1(d+l_2)}. \quad (36)$$

Здесь значения  $Q$ ,  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_m$  определяются выражениями (21), (22) и (23) соответственно путем замены в них множителя  $W_0$  на  $U_0$  (см. управление (36)). В частном случае, когда гетерогенность плотности ничтожно мала, из уравнения (36) получаем  $W_0 = \lim_{l_2 \rightarrow \infty} U_0|_{l_2 \rightarrow \infty}$ .

Эти выводы можно наглядно продемонстрировать с помощью спектров пропускания ультра-

звуковых волн, распространяющихся через две однородные металлические медные пластины и многослойные полупроводниковые градиентные структуры, расположенные между этими пластинами. В отличие от металлических пленок с градиентными распределениями упругости и неизменной плотностью (см. рис. 1), рассматриваемые пленки характеризуются пространственными распределениями как упругости, так и плотности. В этих пленках содержание полупроводников Si и Ge зависит от координат: доля Si снижается с 100 % на одной стороне пленки ( $z = 0$ ) до 70 % на противоположной стороне ( $z = d$ ), при этом доля Ge растет с 0 % при  $z = 0$  до 30 % при  $z = d$ . Пространственные распределения плотности  $\rho$  и модуля Юнга  $E$  в пленке описываются формулами (2), (3) и (29). Предполагается, что волна проходит со стороны  $z = 0$  ( $\rho|_{z=0} = 2,328 \text{ г/см}^3$  и  $E|_{z=0} = 165 \text{ ГПа}$ ) на сторону  $z = d$  ( $\rho|_{z=d} = 3,3 \text{ г/см}^3$  и  $E|_{z=d} = 154 \text{ ГПа}$ ) [17]. Подставив эти значения в формулы (2) и (3), получим отношения  $d/l_1$  и  $d/l_2$ ; здесь характеристический масштаб  $l$  (см. уравнение (32)) оказывается отрицательным ( $l = -7,83d$ ) и, таким образом,  $\zeta < 0$  (формула (34)).

Спектры пропускания периодических структур, содержащих нанопленки ( $m = 5$  и  $m = 30$ ), приведены на рис. 2. Показано возникновение сильной нелокальной дисперсии в высокочастотном диапазоне ( $0,6 < |\zeta| < 1$ ) спектра 2 в «толстой» структуре ( $m = 30$ ). Следует обратить внимание, что в диапазоне  $0,2 < |\zeta| < 0,5$  пропускание этой структуры стремится к нулю. В этом диапазоне описываемую структуру можно рассматривать как широкопо-

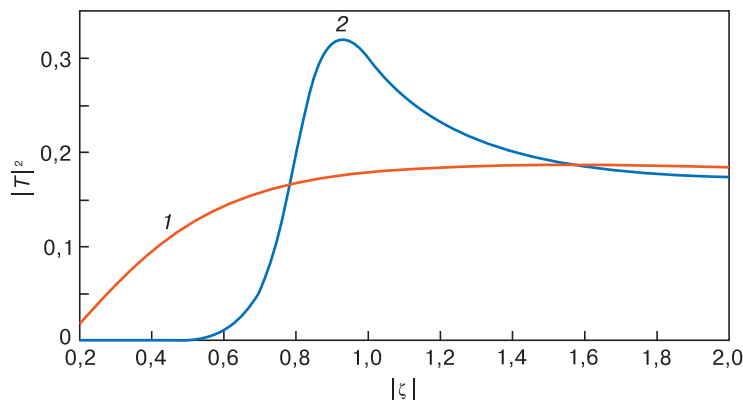


Рис. 2. Спектры пропускания ультразвуковых волн, проходящих через периодическую градиентную полупроводниковую структуру с пространственно изменяемым содержанием Si и Ge: 1 — число градиентных пленок  $m = 5$ ; 2 —  $m = 30$ . Нормализованные импедансы составляют  $\alpha_{10} = \alpha_{20} = 0,868$ . Функция  $U_0$  (см. формулу (36)), характеризующая влияние пространственных распределений упругости и плотности, составляет  $U_0 = 1,152$ . Пропускание в диапазоне  $|\zeta| \geq 1$  осуществляется за счет ультразвуковой туннельной моды

Fig. 2. Transmittance spectra of ultrasonic waves travelling through a periodical gradient semiconductor structure with spatially variable Si and Ge contents; the normalized impedances are  $\alpha_{10} = \alpha_{20} = 0.868$ . The function  $U_0$  (Eq. (36)) characterizing the influence of the spatial distributions of the elasticity and density is  $U_0 = 1.152$ . Spectral curves 1 and 2 relate to the numbers of gradient films  $m = 5$  and  $m = 30$ , respectively. The transmittance in the range  $|\zeta| \geq 1$  is provided by the ultrasonic tunneling mode

лосный ультразвуковой отражатель. Пропускание в диапазоне  $|\zeta| \geq 1$  обеспечивается интерференцией затухающей и незатухающей мод (туннельная мода), при этом в диапазоне  $|\zeta| > 1,5$  пропускание практически не зависит от числа пленок в структуре, т. е. от толщины набора.

Важно заметить, что общая толщина этой градиентной структуры с учетом эффективной нелокальной дисперсии и полного отражения может быть меньше длины ультразвуковой волны. Таким образом, с помощью скорости распространения ультразвуковых волн  $v_0 = 8,42 \cdot 10^3 \text{ м/с}$  в Si [11] и градиентного масштаба  $l = -7,83d$ , относящегося в упомянутой выше полупроводниковой пленке, можно обнаружить, что характеристическая частота (см. выражение (12)) для пленки толщиной  $d = 1 \text{ мкм}$  составит  $\Omega = 5,375 \cdot 10^8 \text{ рад/с}$ . Здесь диапазон длин волн, который ограничивает спектральный диапазон высокого отражения  $0,2 < |\zeta| < 0,5$  и представлен спектром 2 на рис. 2, составляет  $19,7 \text{ мкм} < \Lambda < 49,2 \text{ мкм}$ . Толщина набора, дающая такое широкополосное отражение, составляет  $D = 30d = 30 \text{ мкм}$ . Таким образом, толщина ультразвукового градиентного отражателя сравнима с длинами отраженных волн. Заметим, длины волн, соответствующие диапазону сильной дисперсии ( $0,6 < |\zeta| < 1,60 \text{ мкм} < \Lambda < 100 \text{ мкм}$ ), превышают толщину градиентного набора  $D = 30 \text{ мкм}$ .

В заключение продемонстрируем гибкость спектров отражения/пропускания ультразвуковых волн, проходящих через градиентные твердые пленки. Эта гибкость основана на нелокальной дисперсии, обусловленной непрерывными пространственными распределениями упругости и плотности в градиентной пленке.

Необходимо подчеркнуть некоторые ярко выраженные свойства ультразвукового распространения в этих градиентных средах, описанные точно решаемыми моделями.

1. Для того чтобы сравнить и сопоставить пропускание, которое обусловлено градиентными пленками, установленными между двумя однородными материалами, и скачкообразное изменение акустических параметров на резкой границе между смежными материалами, рассмотрим нормальное падение продольной звуковой волны на этой резкой границе. Коэффициент пропускания звуковой волны в этом случае выглядит следующим образом [15]:

$$|T|^2 = \frac{4\alpha_{12}}{(1 + \alpha_{12})^2}; \quad \alpha_{12} = \sqrt{\frac{G_1 \rho_1}{G_2 \rho_2}}. \quad (37)$$

Здесь  $G_{1,2}$  и  $\rho_{1,2}$  — модуль упругости и плотность смежных сред 1 и 2. Например, применив эти значения для Cu и Ni, как показано выше, можно вычислить  $|T|^2 = 0,97$ . Этот коэф-

коэффициент пропускания, независящий от частоты, не включает ни спектральные диапазоны с полным отражением, ни высокодисперсные диапазоны, характерные для спектров, представленных на рис. 1 и 2.

Показано, что туннельная мода полей ультразвуковых волн, сформированная затухающей и незатухающей модами в низкочастотном спектральном диапазоне  $|\zeta| \geq 1$  (см. рис. 2), обусловлена нелокальной дисперсией. Таким образом, благодаря использованию градиентных акустических структур, значительно расширяются возможности управления ультразвуковыми полями.

Следует заметить, что основное уравнение (5) в ограниченном случае сред с постоянным модулем упругости ( $W = 1$ ) и пространственно распределенной плотностью (см. формулу (2)) сводится к уравнению, описывающему распространение электромагнитной волны в прозрачном диэлектрике [18]. Другое проявление этого акустооптического сходства для структурированных сред можно наблюдать в ходе экспериментов с градиентными линзами для изгибных волн в упругих пластинах, схожими с линзами Максвелла типа «рыбий глаз», которые широко применяют в оптике [19]. Формальное сходство распространения акустических и оптических волн в градиентных средах, описанного уравнением (11), позволяет напрямую использовать физическую концепцию и точные математические решения, разработанные для градиентной оптики [20], для решения соответствующих акустических задач [21, 22]. В качестве примера универсальности такой теории «двойного назначения» можно привести концепцию нелокальной дисперсии, управляемой пространственными распределениями параметров композитных материалов.

### Заключение

В настоящей работе внимание уделено ультразвуковым волнам, тем не менее сходный анализ на основе точно решаемых моделей градиентных сред может быть применен к продольным звуковым волнам в других спектральных диапазонах. Более того, те же решения можно использовать для описания поперечных звуковых волн, проходящих в направлении пространственных изменений плотности и/или упругости. В сочетании с возможностью заранее задавать акустические спектры отражения/пропускания этот подход может стать перспективным при разработке широкополосных субволновых отражателей, частотноизбирательных покрытий и функциональных материалов на основе градиентных акустических структур.

### Библиографический список

1. Su-Jae Lee, Seung Eon Moon, Han-Cheol Ryu, Min-Hwan Kwak, Young-Tae Kim, Seok-Kil Han. Microwave properties of compositionally graded (Ba, Sr) TiO<sub>3</sub> thin films according to the direction of the composition gradient for tunable microwave applications // *Appl. Phys. Lett.* 2003. V. 82, N 13. P. 2133—2135. DOI: 10.1063/1.1565705
2. Barabash R., Ice G. Strain and dislocation gradients from diffraction: spatially-resolved local structure and defects. *World Scientific*, 2014. 465 p.
3. Chakraborty A. Prediction of negative dispersion by a nonlocal poroelastic theory // *J. Acoust. Soc. Am.* 2008. V. 123, N 1. P. 56—67. DOI: 10.1121/1.2816576
4. Erofeev V. I. Wave processes in solids with microstructure. *World Scientific*, 2003. V. 8. 255 p.
5. Brekhovskikh L. M., Godin O. A. Plane-wave reflection from the boundaries of solids. *Acoustics of layered media I*. Berlin; Heidelberg: Springer, 1990. P. 87—112. DOI: 10.1007/978-3-642-52369-4\_4
6. Martin P. A. On Webster's horn equation and some generalizations // *J. Acoust. Soc. Am.* 2004. V. 116, N 3. P. 1381—1388. DOI: 10.1121/1.1775272
7. Mercier J.-F., Maurel A. Acoustic propagation in non-uniform waveguides: revisiting Webster equation using evanescent boundary modes // *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 2013. V. 469, N. 2156. DOI: 10.1098/rspa.2013.0186
8. Zhou Y. L., Niinomi M., Akaori T. Dynamic Young's modulus and mechanical properties of Ti-Hf alloys // *Materials Transactions*. 2004. V. 45, N 5. P. 1549—1554. DOI: 10.2320/matertrans.45.1549
9. Clyne T. W., Withers P. J. An introduction to metal matrix composites. Cambridge University Press, 1995. 514 p.
10. Predel B. Phase Equilibria, Crystallographic and Thermodynamic Data of Binary Alloys. V. 5A. Landolt-Börnstein, 1991. DOI: 10.1007/b20007
11. Haynes W. M. CRC handbook of chemistry and physics. CRC Press, 2014. 1775 p.
12. Schoenberg M., Sen P. N. Properties of a periodically stratified acoustic half-space and its relation to a Biot fluid // *J. Acoust. Soc. Am.* 1983. V. 73, N 1. P. 61—67. DOI: 10.1121/1.388724
13. Granato A. V. Self-interstitials as basic structural units of liquids and glasses // *J. Phys. Chem. Solids*. 1994. V. 55, N 10. P. 931—939. DOI: 10.1016/0022-3697(94)90112-0
14. Aleshin V., Gusev V., Tournat V. Acoustic modes propagating along the free surface of granular media // *J. Acoust. Soc. Am.* 2007. V. 121, N 5. P. 2600—2611. DOI: 10.1121/1.2714923
15. Landau L. D., Lifshitz E. M. Theory of Elasticity. Oxford: Pergamon Press, 1986. 187 p.
16. Forbes B. J., Pike E. R., Sharp D. B. The acoustical Klein-Gordon equation: The wave-mechanical step and barrier potential functions // *J. Acoust. Soc. Am.* 2003. V. 114, N 3. P. 1291—1302. DOI: 10.1121/1.1590314
17. Shackelford J. F., Alexander W. CRC Materials Science and Engineering Handbook. Boca Raton (FL): CRC Press, 1991. 625 p.
18. Shkatula S. V., Volpian O. D., Shvartsburg A. B., Obod Y. A. Artificial dispersion of all-dielectric gradient nanostructures: Frequency-selective interfaces and tunneling-assisted broadband antireflection coatings // *J. Appl. Phys.* 2015. V. 117, N 24. P. 245302. DOI: 10.1063/1.4922975
19. Lefebvre G., Dubois M., Beauvais R., Achaoui Y., Ing R. K., Guenneau S., Sebbah P. Experiments on Maxwell's fish-eye dynamics in elastic planes // *Appl. Phys. Lett.* 2014. V. 106. P. 024101. DOI: 10.1063/1.4905730
20. Shvartsburg A. B., Obod Yu. A., Volpian O. D. Tunneling of electromagnetic waves in all-dielectric gradient metamaterials // *Progress in Optics*. 2015. V. 60. P. 489—563. DOI: 10.1016/bs.po.2015.02.006
21. Yang S., Page J. H., Liu Z., Cowan M. L., Chan C. T., Sheng P. Ultrasound tunneling through 3D phononic crystals // *Phys. Rev. Lett.* 2002. V. 88, N 10. P. 104301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.88.104301
22. Norris A. N., Haberman M. R. Acoustic Metamaterials // *Phys. Today*. 2016. V. 69, N 6. P. 42—48. DOI: 10.1121/1.4948773

Авторы выражают признательность за чрезвычайно полезные обсуждения профессорам Н. Энгете и О. Руденко.



*Izvestiya vuzov. Materialy elektronnoi tekhniki = Materials of Electronics Engineering*. 2018, vol. 21, no. 1, pp. 54–62.  
DOI: 10.17073/1609-3577-2018-1-54-62

## Non-local dispersion and ultrasonic tunneling in concentrationally graded solids

A. B. Shvartsburg<sup>1,2,§</sup>, M. D. Malinkovich<sup>3</sup>, A. M. Kislyuk<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *Joint Institute for High Temperatures Russian Academy of Sciences, 13/2 Izhorskaya Str., Moscow 127412, Russia*

<sup>2</sup> *Space Researches Institute Russian Academy of Sciences, 84/32 Profsovnaya Str., Moscow 117997, Russia*

<sup>3</sup> *National University of Science and Technology MISiS, 4 Leninsky Prospekt, Moscow 119049, Russia*

**Abstract.** The non-local dispersion of longitudinal ultrasonic waves is shown to appear in the heterogeneous solids due to continuous spatial distributions of their density and/or elasticity (gradient solids). This dispersion gives rise to the diversity of ultrasonic transmittance spectra, including the broadband total reflectance plateau, total transmission and tunneling spectral ranges. The ultrasonic wave fields in gradient solids, formed by interference of forward and backward travelling waves as well as by evanescent and antievanescence modes are examined in the framework of exactly solvable models of media with continuously distributed density and elasticity. Examples of transmittance spectra for both metal and semiconductor gradient structures are presented, and the generality of concept of artificial non-local dispersion for gradient composite materials is considered. It should also be noted that the wave equation for acoustic waves in gradient media with a constant elasticity modulus and a certain predetermined density distribution reduces to an equation describing the electromagnetic wave propagation in transparent dielectric media. This formal similarity shows that the concept of nonlocal dispersion is common for both optical and acoustic phenomena, which opens the way to the direct use of physical concepts and exact mathematical solutions, developed for gradient optics, to solve the corresponding acoustic problems.

**Keywords:** gradient solids, non-local dispersion, spatial distributions of density and/or elasticity, ultrasound propagation

### References

1. Su-Jae Lee, Seung Eon Moon, Han-Cheol Ryu, Min-Hwan Kwak, Young-Tae Kim, Seok-Kil Han. Microwave properties of compositionally graded (Ba, Sr) TiO<sub>3</sub> thin films according to the direction of the composition gradient for tunable microwave applications. *Appl. Phys. Lett.*, 2003, vol. 82, no. 13, pp. 2133–2135. DOI: 10.1063/1.1565705
2. Barabash R., Ice G. Strain and dislocation gradients from diffraction: Spatially-resolved local structure and defects. World Scientific, 2014, 465 p.
3. Chakraborty A. Prediction of negative dispersion by a nonlocal poroelastic theory. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2008, vol. 123, no. 1, pp. 56–67. DOI: 10.1121/1.2816576
4. Erofeev V. I. Wave processes in solids with microstructure. World Scientific, 2003, vol. 8, 255 p.
5. Brekhovskikh L. M., Godin O. A. Plane-wave reflection from the boundaries of solids. Acoustics of layered media I. Berlin; Heidelberg: Springer, 1990, pp. 87–112. DOI: 10.1007/978-3-642-52369-4\_4
6. Martin P. A. On Webster's horn equation and some generalizations. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2004, vol. 116, no. 3, pp. 1381–1388. DOI: 10.1121/1.1775272
7. Mercier J.-F., Maurel A. Acoustic propagation in non-uniform waveguides: revisiting Webster equation using evanescent boundary modes. *Proc. R. Soc. A*, 2013, vol. 469, no. 2156. DOI: 10.1098/rspa.2013.0186
8. Zhou Y. L., Niinomi M., Akahori T. Dynamic Young's modulus and mechanical properties of Ti-Hf alloys. *Materials Transactions*. 2004, vol. 45, no. 5, pp. 1549–1554. DOI: 10.2320/matrans.45.1549
9. Clyne T. W., Withers P. J. An introduction to metal matrix composites. Cambridge: Cambridge University Press, 1995. 514 p.
10. Predel B. Phase Equilibria, Crystallographic and Thermodynamic Data of Binary Alloys. Vol. 5A. Landolt-Börnstein, 1991. DOI: 10.1007/b20007
11. Haynes W. M. CRC handbook of chemistry and physics. CRC press, 2014, 1775 p.
12. Schoenberg M., Sen P. N. Properties of a periodically stratified acoustic half-space and its relation to a Biot fluid. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1983, vol. 73, no. 1, pp. 61–67. DOI: 10.1121/1.388724
13. Granato A. V. Self-interstitials as basic structural units of liquids and glasses. *J. Phys. Chem. Solids*, 1994, vol. 55, no. 10, pp. 931–939. DOI: 10.1016/0022-3697(94)90112-0
14. Aleshin V., Gusev V., Tournat V. Acoustic modes propagating along the free surface of granular media. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2007, vol. 121, no. 5, pp. 2600–2611. DOI: 10.1121/1.2714923
15. Landau L. D., Lifshitz E. M. Theory of Elasticity. Oxford: Pergamon Press, 1986, 187 p.
16. Forbes B. J., Pike E. R., Sharp D. B. The acoustical Klein-Gordon equation: The wave-mechanical step and barrier potential functions. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2003, vol. 114, no. 3, pp. 1291–1302. DOI: 10.1121/1.1590314
17. Shackelford J. F., Alexander W. CRC Materials Science and Engineering Handbook. Boca Raton (FL): CRC Press, 1991. 625 p.
18. Shkatula S. V., Volpian O. D., Shvartsburg A. B., Obod Y. A. Artificial dispersion of all-dielectric gradient nanostructures: Frequency-selective interfaces and tunneling-assisted broadband antireflection coatings. *J. Appl. Phys.*, 2015, vol. 117, no. 24, pp. 245302. DOI: 10.1063/1.4922975
19. Lefebvre G., Dubois M., Beauvais R., Achaoui Y., Ing R. K., Guenneau S., Sebbah P. Experiments on Maxwell's fish-eye dynamics in elastic planes. *Appl. Phys. Lett.*, 2014, vol. 106, pp. 024101. DOI: 10.1063/1.4905730
20. Shvartsburg A. B., Obod Yu. A., Volpian O. D. Tunneling of electromagnetic waves in all-dielectric gradient metamaterials. *Progress in Optics*, 2015, vol. 60, pp. 489–563. DOI: 10.1016/bs.po.2015.02.006
21. Yang S., Page J. H., Liu Z., Cowan M. L., Chan C. T., Sheng P. Ultrasound tunneling through 3D phononic crystals. *Phys. Rev. Lett.*, 2002, vol. 88, no. 10, pp. 104301. DOI: 10.1103/PhysRevLett.88.104301
22. Norris A. N., Haberman M. R. Acoustic metamaterials. *Physics Today*. 2016, vol. 69, no. 6, pp. 42–48. DOI: 10.1121/1.4948773

### Information about authors:

**Alexander B. Shvartsburg**<sup>1,2,§</sup>: Dr. Sci. (Phys.–Math.) (alex-s-49@ya.ru); **Mikhail D. Malinkovich**<sup>3</sup> — Cand. Sci. (Phys.–Math.), Associate Professor (malinkovich@yandex.ru); **Alexander M. Kislyuk**<sup>3</sup>: Master Student

§ Corresponding author

**Acknowledgments.** We appreciate the valuable discussions with Prof. N. Engheta and Prof. O. Rudenko.

Received June 27, 2017