EETP 28(2013)2, ISSN 1896-2327

Ján Gunčaga
Catholic University in Ružomberok – Slovakia

Theorien des Erkenntnisprozesses im Mathematikunterricht an der Grundschule

Theories of the process of gaining knowledge in mathematics education for primary level

Einleitung

In diesem Beitrag möchten wir einige Theorien des Erkenntnisprozesses vorstellen, die in der derzeitigen Mathematikdidaktik eine wichtige Rolle spielen. Sie sind mit dem Erkenntnisprozess der Schüler während des Mathematikunterrichts verbunden, in welchem der Lehrer eine Führungs- und Koordinationsrolle spielt.

Bauer[1] definiert die Didaktik der Mathematik als wissenschaftliche Disziplin, die sich mit Problemen des Lehrens und Lernens von Mathematik beschäftigt. Die Didaktik der Mathematik hat folgende Funktionen:

1. Wissenschaftliche Funktion: Beschreibung, Erklärung, Begründung von Lehr- und Lernprozessen (empirische Analyse, theoretische Reflexion), Entwicklung und Erprobung von Technologien (Instrumenten) für das Lehren und Lernen (Handlungsanweisungen, Benutzung von Modellen)
2. Praktische Funktion: Handeln in der Praxis, Planung und Realisation von Unterricht.

[1] L. Bauer, *Planung und Analyse von Mathematikunterricht*, Passau 2009.

Szendrei[2] beschäftigt sich mit der Stellung der Mathematik im Unterricht. Sie formuliert folgende Ziele für den Mathematikunterricht: Mathematik als

– Kulturerbe,
– Form des Nachdenkens,
– Kreative Tätigkeit,
– Quelle für Entdeckungen,
– die Ästhetik und Ordnung in Mustern und Strukturen,
– Wissenschaft,
– Hilfsmittel für andere Wissenschaften,
– Schulfach,

Mittel für die Lösung von Problemen zu realen Situationen.

Für diese Aufgaben des Mathematikunterrichts ist es wichtig, passende Teile aus der Geschichte der Mathematik und realitätsbezogene Aufgaben zu benutzen. Aufgaben mit der graphischen Darstellung helfen uns, Begriffe der Mathematik anschaulich zu untersuchen und Probleme der Realität zu visualisieren.

Ambrus[3] nennt folgende Arten von Begriffen aus dem Mathematikunterricht:

1. Sachliche Begriffe: Klassifikation von realen oder gedanklichen Objekten (Funktion, Graphik der Funktion, Grenzwert).

2. Relationsbegriffe: Sie zeigen Beziehungen zwischen Objekten und Gegenständen auf (Ableitung als Funktion, Stammfunktion).

3. Operationsbegriffe: Sie zeigen die Tätigkeiten und Operationen mit den Objekten und Gegenständen (zusammengesetzte Funktion, Funktion als Summe oder Produkt von mehreren Funktionen).

Ziele des Mathematikunterrichts

Mathematik im Vergleich nach Bauer[4] mit anderen Schulfächern hat spezifische Bedeutungen und Ziele:

Allgemeine Haltungen und Fähigkeiten

1. Der Schüler soll lernen zu argumentieren. Dazu gehört: begründen; logisch einordnen; folgern; überprüfen; voll einsehen; sich an Vereinbarungen (z. B. Definitionen) halten; auf vollständiger Unterrichtung bestehen; Scheinargumente als solche zu entlarven; bereit sein, Gegenargumente anzuhören; bereit sein unwiderlegbare Argumente zu akzeptieren.

2. Der Schüler soll lernen, sich kreativ zu verhalten. Dazu gehört: bereit (und befähigt) sein selbständig Lösungswege zu finden; eine Situation zu

[2] J. Szendrei, *Gondolod, hogy egyre megy?,* Budapest 2005.
[3] A. Ambrus, *Bevezetés a matematikaididaktikában*, Budapest 2004.
[4] L. Bauer, *Didaktik der Rechnens in der Grundschule*, Passau 2010.

variieren; eine Situation fortzusetzen und zu übertragen; bereit sein, Alternativen zu bilden; ein Konstruktionsverfahren auszuschöpfen; durch Kombination (von Begriffen oder Regeln z. B.) neue Möglichkeiten erschließen.

3. Der Schüler soll lernen, Situationen (insbesondere Situationen der Umwelt) zu mathematisieren. Dazu gehört: Situationen erfassen und beschreiben (durch Schematisierung, Tabellierung usw.); Daten gewinnen (zählen, messen, schätzen, ablesen); strukturelle Zusammenhänge in einer Situation aufdecken und formulieren; sachrelevante Fragestellungen aufgreifen bzw. selbst geben; Lösungsverfahren auswählen, Lösung ausführen und situationsadäquat interpretieren; innermathematische (formale) Aussagen interpretativ in reale Sachverhalte umsetzen.

Geistige Grundtechniken

4. Klassifizieren: Dinge nach Vorschriften sortieren (einteilen). Vertreter einer Klasse angeben; kennzeichnende Eigenschaft einer Klasse finden; Klassifikationsvorschrift (Äquivalenzrelation) finden.

5. Ordnen: Dinge nach Vorschrift (linear, zyklisch, tabellarisch, hierarchisch) anordnen; Ordnungsvorschrift (Ordnungsrelation) einer gegebenen Ordnung finden; nummerieren, verschlüsseln.

6. Generalisieren: aus Einzelaussagen Regeln erkennen (vermuten); Hypothesen aufstellen und überprüfen; eine Situation systematisch variieren; Gegenbeispiele suchen.

7. Analogisieren: Zuordnung nach Vorschrift herstellen; Zuordnungsvorschrift erkennen; Entsprechungen finden; Ähnlichkeiten aufspüren.

8. Formalisieren: in Bilder und Zeichen (Symbole) übersetzen; aus symbolischer Notation Information ziehen; Rechenverfahren beherrschen; Variable benutzen.

Rechnen hat im Mathematikunterricht spezifische Grobziele:

Verständnis der Operationsbegriffe (Entwicklung von Grundvorstellungen zu den Rechenoperationen),

Kenntnis und Beherrschung der elementaren Rechensätze und ihrer Umkehrungen (Eigenschaften der Addition, der Subtraktion, der Multiplikation und der Division),

Kenntnis der Rechengesetze und Rechenregeln und Fähigkeit, sie beim Rechnen richtig anzuwenden,

Verständnis struktureller Zusammenhänge im Bereich des Rechnens,

Fertigkeit und Fähigkeit im mündlichen und halbschriftlichen Rechnen,

Fähigkeit im aufgabengerechten, flexiblen Modifizieren von Rechenwegen (Vorteilhaftes Rechnen, Überschlagsrechnen), Verständiges, einsichtsvolles Beherrschen der schriftlichen Normalverfahren,

Fähigkeit, Rechenverfahren bei Sachaufgaben anzuwenden.

Stufen des Erkenntnisprozesses

Es gibt im Mathematikunterricht das formale und oberflächliche Denken bei den Schülern. Das Problem liegt darin, dass sie wichtige Regeln des Erkenntnisprozesses der Lehrer nicht beachten.

M. Hejný[5] gibt 6 Etappen des Erkenntnisprozesses vor:

1. Motivation: Diese Einleitungsphase ist sehr wichtig, weil sie „Motor" des Erkenntnisprozesses ist. Der Schüler ist fähig ein Problem, das für ihn interessant ist, leichter zu lösen. Deshalb entsteht die Sehnsucht nach Erkenntnis und Erfahrung in bestimmten Lernbereichen in der Psyche der Schüler.

2. Die Schaffung „separierter Modelle": Der Schüler löst ein Problem durch verschiedene „separierte Modelle". Dank dieser erwirbt er neue Erfahrungen. Zuerst sieht er keine Zusammenhänge zwischen diesen Erfahrungen. Bei der Arbeit mit den Modellen erreicht er durch Strukturierung und Klassifikation der Erfahrungen ein Universalmodell. Dieses Modell kann die separierten Modelle vertreten oder ersetzen.

3. Das „Universalmodell": Dieses Modell zeigt die wichtigsten Eigenschaften der separierten Modelle und umfasst sie. Durch die Arbeit mit diesen kann der Schüler neue Erkenntnisse entdecken. Dieser Übergang im Bewusstsein des Schülers, im Moment der Entdeckung der Erkenntnis, wird Abstraktionshebung genannt.

4. Entstehung von Kenntnissen: Neue Erkenntnisse, Begriffe, Beziehungen oder Abhängigkeiten zwischen Phänomenen werden dann in sich geschlossen und selbständig. Der Schüler bestätigt die Richtigkeit der neuen Erkenntnisse an den benutzten Modellen.

5. Kristallisierung: Während dieser Etappe bringt der Schüler die neuen Erkenntnisse in eine Erkenntnisstruktur. Außerdem weitet er die Möglichkeiten zu neuen Erkenntnissen aus. Dazu löst er verschiedene Probleme, die mit diesen neuen Erkenntnissen zusammenhängen.

6. Automatisierung: Der Schüler benutzt automatisch seine neuen Kenntnisse bei der Lösung verschiedener Aufgaben und Probleme. In dieser Etappe braucht er keine Modelle mehr aus den vorhergehenden Phasen.

Dieser Mechanismus geht aus dem Schema Motivation? Erfahrungen? Erkenntnis hervor. Im Unterricht zum Thema „Folgen und Reihen" wird dieser Mechanismus oft nicht beachtet. Deshalb existiert bei den

[5] M. Hejný und Koll, *Teória vyučovania matematiky 2*, Bratislava1990.

Schülern ein starker Formalismus, ihre Kreativität wird daher weniger entwickelt.

Dienes[6] analysiert den mathematischen Erkenntnisprozess und fasst die Ergebnisse seiner Untersuchungen in folgenden sechs Stufen zusammen:

1. Freies Spiel

Wir lassen Schüler spielen und mit Gegenständen und Modellen arbeiten, die später für den Erkenntnisprozess verwendet werden. Wichtig sind geeignete Gegenstände und Anlässe für Spiele. In dieser Stufe verwenden die Schüler eigene Sprechmuster.

2. Strukturiertes Spiel

Die Schüler erkennen, dass die Gegenstände Regeln erfüllen. Diese Regeln führen später zu mathematischen Regeln. Der Lehrer hilft den Schülern bei der Entdeckung dieser Regeln.

3. Suche nach gemeinsamen Eigenschaften in einer Struktur

In dieser Phase strukturiert der Schüler seine Kenntnisse und sucht die gemeinsamen Eigenschaften verschiedener Gegenstände. Beispielsweise kann der Schüler die Isomorphismen zwischen mehreren Strukturen sehen. Im Mathematikunterricht kann man die Logarithmusfunktion benutzen, welche die Multiplikation zur Addition transformiert.

4. Abbildung (Repräsentation)

Wenn der Schüler die Isomorphismen zwischen mehreren Strukturen in einer konkreten Form kennt, dann hilft diese Phase bei der Abstraktion. Die Isomorphismen repräsentieren wir mit einem Schema. Dienes benutzt das Beispiel für die Multiplikation der natürlichen Zahlen.

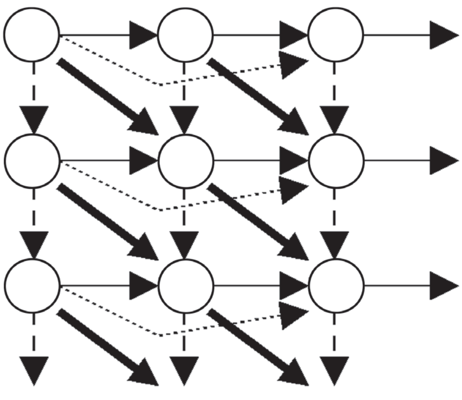

Abbildung 1

[7] Z. Dienes, *Építsük fel a matematikát*, Budapest 1999.

Wenn wir in die Kreise die Zahlen schreiben und der Schüler weiß, dass $\longrightarrow$ „zweimal” bedeutet und $- - \blacktriangleright$ „dreimal” bedeutet, dann kann er entdecken, dass:

a) $\Longrightarrow$ „sechsmal” bedeutet,

b) $\cdots\blacktriangleright$ „viermal” bedeutet.

Ähnlich kann man bei dieser Aufgabe beim Multiplizieren mit anderen Zahlen vorgehen. Der Schüler kann die Kreise sehr leicht bei beliebigen gegebenen Zahlen in der Ecke links oben ausfüllen.

5. Symbolisierung

Die Eigenschaften in einer Struktur werden vom Schüler symbolisch ausgedrückt. Die Schüler entdecken zum Beispiel, dass die Operationen $\longrightarrow$ $- - \blacktriangleright$ und $- - \blacktriangleright$ $\longrightarrow$ äquivalent sind. Auch die Operationen $- - \blacktriangleright$ $\cdots\blacktriangleright$ und $\Longrightarrow$ $\longrightarrow$ sind äquivalent. In dieser Phase können die Schüler die Abbildung beschreiben. Deshalb nennen wir diese Beschreibungsphase auch die Einführungsphase zur mathematischen Bezeichnung.

6. Formalisierung

In dieser letzten Phase suchen wir die Regel für die entdeckten Beschreibungen und wir versuchen, diese Regel zum ersten Mal in einer formalen Form zu schreiben. Diese Formalisierung führt zur abstrakten Ebene. Die Grundeigenschaften der Struktur nennen wir Axiome und ausgehend von diesen Axiomen können wir Sätze beweisen und Grundideen entwickeln.

Jetzt stellen wir das Stufenmodell des Erkenntnisprozesses an einem konkreten Beispiel vor.

Algorithmus der Division

a) Motivation und separierte Modelle

Als Motivation können wir den Schülern einige Sachaufgaben geben, die in die Division einführen. Wir benutzen bei der Lösung dieser Aufgaben passende Bilder und Schemata.

Eine mögliche Aufgabe ist folgende:

Aufgabe 1 Wir haben ein Fass, in dem 24 Liter Wasser ist. Wie oft müssen wir mit einem 4 Liter-Eimer Wasser ausgießen, bis das Fass leer ist?

Hier können wir ausnutzen, dass die Division eine Spur von Spur Subtraktion ist.

24	20	16	12	8	4
-4	-4	-4	-4	-4	-4
20	16	12	8	4	0

Deshalb ist 24:4 = 6.

Aufgabe 2 Großmutter hat 106 Setzlinge von Tomaten gekauft. Sie möchte sie in 8 Reihen im Garten setzen. Wie viele der Setzlinge kann sie in eine Reihe setzen, wenn ins in jeder Reihe die gleiche Anzahl von Setzlingen sein muss? Bleiben noch Setzlinge übrig? Wie viel Reihen bekommen wir im Garten?

Die Schüler können diese Aufgabe mit einem Schema lösen, in welches sie 8 Reihen notieren.

Dann können Sie mit Punkten die Setzlinge zeichnen. Nach ihrem Ordnen in die Reihen rechnen wir mit der Subtraktion die Anzahl der Setzlinge, welche übrig bleiben. Diese Teilung der Setzlinge in die Reihen kann solange wiederholt werden, bis alle Reihen aufgefüllt sind und eine Restanzahl übrig bleibt. Eine mögliche Lösung an der Abbildung 2 ist.

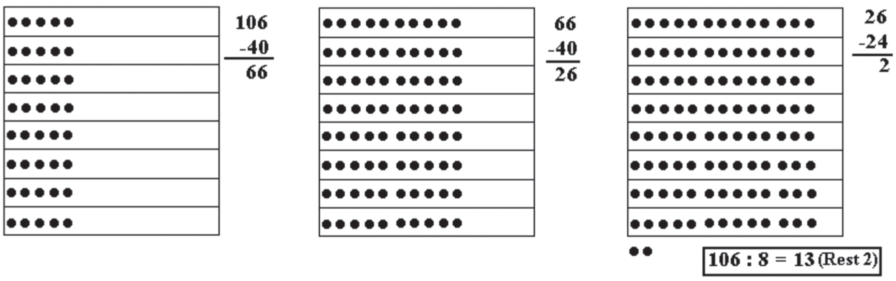

Abbildung 2

Der Lehrer kann hier eine Frage stellen, ob es eine schnellere Lösung gibt. Wenn die Schüler das Einmaleins wissen, dann können sie 2 übrige Setzlinge von der Abbildung 1 zusammenstellen: 66-64=2. Es gibt die Möglichkeit, den Algorithmus zu ändern, wenn wir den ersten Spur ändern. Den Algorithmus der Division können wir einführen, wenn wir mit den folgenden 2 Schritten beginnen: „106 – 80 = 26", „26 – 24 = 2".

Das Modell „Geld" ist benutzbar, wenn wir die Division von größeren Zahlen realisieren wollen. Das zeigen wir in folgendem Beispiel:

Aufgabe 3 Drei Brüder Adam, Boris und Cyril sparen zusammen 4323 Euro. Sie haben miteinander vereinbart, dass sie das Geld zu drei gleichen Teilen teilen. Wie viel Euro bekommt jeder von ihnen?

4
-4
0

Das Modell „Geld" ist können wir gut an dieser Stelle benutzen. 4323 Euro können wir schreiben in Form von: 4323 = 4.100 + 3.100 + 2.10 + 3.

Eine Möglichkeit ist, jedem Bruder 1000 Euro zu geben. Es bleiben übrig 1323 Euro.

Wenn wir 1000 Euro auf 10 mal 100 Euro wechseln, bekommen wir 13. 100 + 2.10 + 3 Euro. Jetzt geben wir jedem Bruder 4 mal 100 Euro und es bleibt uns 1.100 + 2.10 + 3 Euro. Jetzt wechseln wir 100 Euro auf 10 mal 10 Euro aus und bekommen wir 12.10 + 3 Euro. Zum Schluss jeder Bruder bekommt 4.10 +1 Euro.

An dieser Stelle ist es wichtig, dass die Schüler lernen, die Subtraktion Schritt für Schritt zu beschreiben.

4323		
-3000	3. 1000, jeder Bruder bekommt	1000 Euro
1323		
-1200	3. 400, jeder Bruder bekommt	400 Euro
123		
-120	3.40, jeder Bruder bekommt	40 Euro
3		
-3	3 .1, jeder Bruder bekommt	1 Euro
0	jeder Bruder bekommt	1441 Euro

b) Das „Universalmodell" und Entstehung der Kenntnisse

In dieser Phase kann der Lehrer den Schülern mehr abstrakte und kalkülorientierte Aufgaben geben. Sie lernen die Subtraktion Schritt für Schritt und es ist möglich, in dieser Phase den Algorithmus der schriftlichen Division einzuführen.

Aufgabe 4 Dividiere: 12 321: 8 =

Lösung:

12 321	
-8 000	8. 1000
4 321	
-4 000	8. 500
321	
-320	8. 40
1	

12 321 : 8 = 1540 (Rest 1)

Die Schüler können die Subtraktion anders realisieren, aber zum Algorithmus der schriftlichen Division kann der Lehrer die Schüler in Form „einer rationalisierten Subtraktion" führen. Deshalb können wir die Lösung auch in folgender Form schreiben:

12 321 : 8 = 1540	oder	12 321: 8 = 1540
-8		43
43		32
-40		01
32		1
-32		
01		
-0		
1		

Die Schüler haben oft Schwierigkeiten bei den Zahlen, wo die Ziffer Null an jeder zweiten Stelle ist. Hier hilft die Schritt für Schritt Subtraktion:

9152 : 3 = 350 (falsche Lösung) die Schritt für Schritt Subtraktion: 9152

-9	-9000	3. 3000
15	152	
02	-150	3. 50
	2	
	9152: 3 = 3050 (Rest 2)	

Zusammenhang

Wenn wir den Algorithmus der schriftlichen Division nicht mit den Modellen einführen, dann können wir bei Schwierigkeiten des Schülers einen Schritt „zurück" machen.

Deshalb ist es notwendig, die Stufen des Erkenntnisprozesses im Mathematikunterricht an der Grundschule zu respektieren.

Im Unterrichtsprozess hat der Lehrer eine hervorgehobene Bedeutung. Deshalb möchten wir diesen Beitrag mit den Prinzipien für die Arbeit des Lehrers beschließen, die Polya[1] formuliert hat. Der Lehrer soll

[7] G. Pólya, *A problémamegoldás iskolája*, Budapest 1971.

1. sich für Fachinhalte des Unterrichts interessieren.

2. die Fachinhalte des Unterrichts gut kennen.

3. Lernstoff kennen und wissen, dass der beste Weg derjenige ist, den der Lehrer selbst entdeckt.

4. Vorstellungen der Schüler kennen: Was erwarten sie? Was ist für sie schwierig?

5. nicht nur Fachkenntnisse an die Schüler weitergeben, sondern auch allgemeine Arbeitsfertigkeiten und Arbeitsfähigkeiten bei den Schülern entwickeln (z. B. Ordnung und korrektes Verhalten).

6. die Schüler lehren, miteinander zu diskutieren.

7. die Schüler beweisen lehren.

8. bei den Schülern heuristische Methoden für das Lösen von Aufgaben und Problemen entwickeln und ihnen in konkreten Situationen eine verborgene allgemeine Struktur aufzeigen.

9. nicht jede Problemlösung zeigen, sondern Schüler selbst entdecken lassen, was ihre Denkfähigkeiten fördert.

10. die Schüler nicht mit Lernstoff voll stopfen, sondern sie zu verstehensorientiertem Lernen ermutigen.

Bemerkung: Dieser Beitrag wurde unterstützt mit dem Grant VEGA Nr. 1/0534/11

Literatur

Ambrus A., *Bevezetés a matematikaididaktikába*, ELTE, Budapest 2004.

Bauer L., *Planung und Analyse von Mathematikunterricht*, Universität Passau, Passau 2009.

Bauer L., *Didaktik der Rechnens in der Grundschule*, Universität Passau, Passau 2010.

Billich M., *The use of geometric place in problem solving*, „Teaching Mathematics: Innovation, New Trends, Research" 2008, p. 7-14.

Dienes Z., *Építsük fel a matematikát*, SHL Hungary, Kft., Budapest 1999.

Gábor B.A., *Educational scientific relevance of textbook revision research*, „Hungarian Educatioanl Research Journal", 2012, nr. 3, http://herj.hu/2012/11/gabor-b-albert-educational-scientific-relevance-of-textbook-revision-research/

Hejný M. und Koll., *Teória vyučovania matematiky 2*, SPN, Bratislava 1990.

Krech I., *Stochastický graf jako hrací plátno k náhodné hre a jako prostredek matematické argumentace*, Acta Universitatis Palackianae Olomucensis, Matematika 3, Olomouc 2008, p. 155-159.

Lengyelfalussy T., Pitoňáková S., Horváth P., *Ciel'om vyučovania matematiky je šťastný človek*, ŽU, Žilina 2011.

Nóbik A., *Teacher's conceptions of children: a theoretical framework, IVth International Conference of PHD Students. Humanities*, University of Miskolc, Miskolc: 2003, p. 353–358.

Partová E., *Vyučovanie matematiky pomocou moderných technológií*, UK, Bratislava, 2011.

Pólya G., *A problémamegoldás iskolája, Tankönyvkiadó*, Budapest 1971.

Pusztai G., Tóth Z., Csépes I., *Current Research in the field of disciplinary didactics*. HERJ Special issue, HERA, Budapest 2012.

Rochovská I., Akimjaková B., Kopáčová J., Kožuchová M., Krajčíriková L'., *Umiejętności przyrodnicze a edukacja przyrodnicza w pedagogice przedszkolnej i wczesnoszkolnej*, Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa w Chełmie, Chełm 2012.

Szendrei J., *Gondolod, hogy egyre megy?*, Typotex Kiadó, Budapest 2005.

Takáč Z., *Klasifikácia dôkazov*, CU in Ružomberok, Ružomberok 2003.

Žilková, K., *Potenciál prostredia* IKT v školskej matematike, UK, Bratislava 2009.

Zusammenfassung

Wir zeigen in diesem Beitrag einige Theorien des Erkenntnisprozesses im Mathematikunterricht an der Grundschule. Wir präsentieren Ziele des Mathematikunterrichts in Bereichen Allgemeine Haltungen und Fähigkeiten, Geistige Grundtechniken. Theorien des Erkenntnisprozesses demonstrieren wir am Beispiel Algorithmus der Division. Wir benutzen passenden universalen und separierten Modellen für die Grundschule.

Schlussworte: Theorien des Erkenntnisprozesses, universalen und separierten Modellen, Algorithmus der Division, Mathematikunterricht an der Grundschule.

Theories of the process of gaining knowledge in mathematics education for primary level

Summary

In this article we describe some theories of the process of gaining knowledge in mathematics education for primary level. We show some aims and goals for different topics of mathematics education. For demonstration of using theories of the process of gaining knowledge we use the algorithm of division. We show some teaching methods and models suitable for primary level.

Keywords: the process of gaining knowledge, generic models, algorithm of division, mathematics education at primary level.

Adres do kontaktu
Katholische Universität in Ružomberok
Pädagogische Fakultät
Hrabovská 1
034 01 Ružomberok
Slowakei

e-mail: jan.guncaga@ku.sk