



# **ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO**

## **MODELACIÓN Y CONTROL PREDICTIVO DE UN ROBOT MÓVIL CON CENTRO DE MASA DESPLAZADO**

**GABRIELA MAGDALENA ANDALUZ ORTIZ**

**Trabajo de Titulación modalidad: Proyecto de Investigación y Desarrollo,  
presentado ante el Instituto de Posgrado y Educación Continua de la ESPOCH,  
como requisito para la obtención del grado de:**

**MAGÍSTER EN SISTEMAS DE CONTROL Y  
AUTOMATIZACIÓN INDUSTRIAL**

**Riobamba – Ecuador**

**Marzo 2018**

# ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

## CERTIFICACIÓN

El tribunal del Trabajo de titulación de investigación certifica que:

El trabajo de investigación, titulado “MODELACIÓN Y CONTROL PREDICTIVO DE UN ROBOT MÓVIL CON CENTRO DE MASA DESPLAZADO”, de responsabilidad de la Srta. Gabriela Magdalena Andaluz Ortiz, ha sido prolijamente revisada y se autoriza su presentación.

Tribunal:

Ing. Wilson Zúñiga Vinuesa

-----

**PRESIDENTE**

**FIRMA**

Ing. Milton Fabricio Pérez Gutiérrez, M.Sc.

-----

**DIRECTOR**

**FIRMA**

Ing. Jorge Saúl Sánchez Mosquera, M.Sc.

-----

**MIEMBRO**

**FIRMA**

Ing. David Raimundo Rivas Lalaleo, M.Sc.

-----

**MIEMBRO**

**FIRMA**

Riobamba, marzo de 2018

©2017, Gabriela Magdalena Andaluz Ortiz

Se autoriza la producción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento, siempre y cuando se reconozca el Derecho de autor

## **DERECHOS INTELECTUALES**

Yo, Gabriela Magdalena Andaluz Ortiz, declaro que soy responsable de las ideas doctrinas y resultados expuestos en el presente proyecto de investigación y que el patrimonio intelectual generado por la misma pertenece a la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

-----  
Gabriela Magdalena Andaluz Ortiz

C.I. 1803920386

## DEDICATORIA

A dios por la vida.

A mis papis por todo el cariño, paciencia, apoyo incondicional, abnegación y esfuerzo realizado durante toda mi vida para día a día brindarme la mejor herencia que ha sido la educación y sus enseñanzas; gracias por ser mi guía y ser mi ejemplo de vida.

A mi hermana por estar pendiente día a día y apoyarme siempre.

A mis pequeños sobrinos por alegrar mis días con sus ocurrencias y travesuras.

A mi hermano por ser un ejemplo de que el trabajo con sacrificio y esfuerzo trae sus recompensas si uno persigue sus sueños y su apoyo incondicional.

A mi compañero de vida que me ha apoyado en todo momento con su amor y paciencia en este proceso de formación.

Con todo el cariño del mundo y porque nada de esto hubiese sido posible sin Ustedes en mi vida mi Familia Querida.

Gabita ☺

## **AGRADECIMIENTO**

A Dios por permitirme conseguir un peldaño más en mi vida profesional y a toda mi familia que han sido un pilar fundamental en mi vida.

A todos quiénes de manera directa e indirecta han apoyado a la ejecución proyecto; es así que extendiendo un agradecimiento a la Universidad de las Fuerzas Armadas a través de la Dirección de Investigación y a su grupo de trabajo lideradas acertadamente por el Dr. Víctor Andaluz, quién contribuyó y aportó con sus conocimientos, experiencia y brindó las facilidades para hacer uso del Robot Móvil construido en el proyecto de investigación “Tele-operación Bilateral Cooperativo de Múltiples Manipuladores Móviles”, proyecto ganador de la IX Convocatoria CEDIA\_CEPRA 2015, ejecutado por la Escuela Superior Politécnica del Chimborazo, Universidad Técnica de Ambato, Escuela Politécnica Nacional y la Universidad de las Fuerzas Armadas.

A la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, en especial al Instituto de Posgrados y Educación Continua por su programa de Maestría en Sistemas de Control y Automatización Industrial.

Y de manera especial un agradecimiento a mi tutor y miembros de tribunal, Máster Fabricio Pérez, Máster Jorge Sánchez y Máster Davis Rivas, por su guía, aportes técnicos y tiempo brindado durante la ejecución del presente trabajo de titulación; así como también agradezco a mis compañeros del grupo de viaje y estudio de la Maestría que compartieron un tiempo importante y sumaron su esfuerzo para conseguir la meta en común.

## CONTENIDO

ÍNDICE DE CONTENIDOS.....	vii
ÍNDICE DE TABLAS .....	x
ÍNDICE DE FIGURAS .....	x
RESUMEN .....	xiv
SUMARY .....	xv

### CAPÍTULO I

1. INTRODUCCIÓN .....	1
1.1 Planteamiento del Problema .....	1
1.2 Formulación del Problema.....	2
1.3 Preguntas Directrices.....	2
1.4 Justificación del Problema .....	3
1.5 Objetivos .....	4
1.5.1 <i>Objetivo General</i> .....	4
1.5.2 <i>Objetivos Específicos</i> .....	4
1.6 Hipótesis.....	4
1.6.1 <i>Hipótesis General</i> .....	4
1.7 Publicaciones .....	4

### CAPÍTULO II

2. MARCO TEÓRICO .....	6
2.1 Antecedentes .....	6
2.2 Base Teórica .....	7

<b>2.3</b>	<b>Marco Conceptual .....</b>	<b>9</b>
<b>2.3.1</b>	<b>Robótica .....</b>	<b>9</b>
<b>2.3.2</b>	<b>Robótica de Servicio .....</b>	<b>11</b>
2.3.2.1	<i>Características de los Robots de Servicio .....</i>	12
2.3.2.2	<i>Áreas de aplicación de Robots de Servicio .....</i>	13
2.3.2.2.1	<i>Sectores Productivos.....</i>	13
A.	<i>Edificación .....</i>	14
B.	<i>Agricultura.....</i>	15
C.	<i>Marítimo.....</i>	17
D.	<i>Minería.....</i>	19
E.	<i>Medicina.....</i>	20
F.	<i>Energía y Mantenimiento de Instalaciones.....</i>	23
G.	<i>Seguridad y Vigilancia.....</i>	24
H.	<i>Defensa.....</i>	25
I.	<i>Espacio.....</i>	25
2.3.2.1.2	<i>Sectores de Servicios para Uso Personal .....</i>	26
2.3.2.3	<i>Futuro de los Robots de Servicio .....</i>	29
<b>2.3.3</b>	<b>Robótica Móvil .....</b>	<b>30</b>
2.3.3.1	<i>Sistemas de locomoción .....</i>	30
 <b>CAPÍTULO III</b>		
<b>3.</b>	<b>MODELACIÓN DE ROBOTS MÓVILES .....</b>	<b>33</b>
<b>3.1</b>	<b>Modelación Cinemática .....</b>	<b>34</b>
<b>3.1.1</b>	<b>Características Cinemáticas.....</b>	<b>36</b>
<b>3.2</b>	<b>Modelación Dinámica .....</b>	<b>38</b>



3.2.1	<i>Modelación dinámica con centro de masa desplazado</i> .....	39
3.2.2	<i>Características Dinámicas</i> .....	47
3.3	<b>Identificación y validación</b> .....	48

## CAPÍTULO IV

4.	<b>CONTROL PREDICTIVO BASADO EN MODELOS</b> .....	54
4.1	<b>Estrategias del MPC</b> .....	54
4.2	<b>Estructura básica del MPC</b> .....	55
4.3	<b>Elementos del MPC</b> .....	56
4.4	<b>Modelo lineal no lineal</b> .....	57
4.5	<b>MPC lineal versus MPC no lineal</b> .....	60
4.6	<b>MPC no lineal aplicado a robots móviles</b> .....	62
4.6.1	<i>Algoritmo de optimización secuencial</i> .....	64
4.6.2	<i>Algoritmo de optimización simultáneo</i> .....	65

## CAPÍTULO V

5.	<b>RESULTADOS EXPERIMENTALES Y DISCUSIÓN</b> .....	67
5.1	<b>Enfoque Secuencial</b> .....	69
5.2	<b>Enfoque Simultáneo</b> .....	81
	<b>CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES</b> .....	86
	<b>BIBLIOGRAFÍA</b> .....	89

ANEXO: Artículo Publicado

## ÍNDICE DE TABLAS

<b>Tabla 2.1</b> Tipos de Robots .....	13
--	----

## ÍNDICE DE FIGURAS

<b>Figura 2.1</b> Robótica, áreas multidisciplinaria .....	10
<b>Figura 2.2</b> HADRIAN, robot empleado en la construcción de edificaciones.....	14
<b>Figura 2.3</b> Robot para la inspección de túneles .....	15
<b>Figura 2.4</b> Aplicaciones de robots de servicio en la agricultura.....	17
<b>Figura 2.5</b> Robots Submarinos del tipo AUV.....	18
<b>Figura 2.6</b> Robots Submarinos del tipo ROV .....	18
<b>Figura 2.7</b> Robots aplicados al sector de la minería .....	20
<b>Figura 2.8</b> Robot Médico - Quirúrgico .....	21
<b>Figura 2.9</b> Robots terapéuticos y asistenciales hospitalarios.....	22
<b>Figura 2.10</b> Prótesis robóticas.....	23
<b>Figura 2.11</b> ROBTET, robot para el mantenimiento de líneas de alta tensión (UPM)..	23
<b>Figura 2.12</b> Robot de vigilancia y seguridad .....	24
<b>Figura 2.13</b> Robots de aplicaciones de defensa –militares.....	25
<b>Figura 2.14</b> Robots empleados en el Espacio. ....	26
<b>Figura 2.15</b> Robots educacionales, información y marketing. ....	28

<b>Figura 2.16</b> Robots de servicio personal.....	28
<b>Figura 2.17</b> Estadísticas de los países más robotizados - Número estimado de robots por cada 10mil empleados.....	29
<b>Figura 2.18</b> Realidad virtual aplicada a la terapia robótica para recuperación cardiovascular. ....	30
<b>Figura 2.19</b> Tipos de locomoción .....	32
<b>Figura 3.1</b> robot móvil tipo unicycle .....	35
<b>Figura 3.2</b> Restricción de movimiento de robot .....	37
<b>Figura 3.3</b> Movimiento en su propio eje.....	37
<b>Figura 3.4</b> Velocidad de cada rueda .....	38
<b>Figura 3.5</b> Esquema de robot silla de ruedas autónoma .....	40
<b>Figura 3.6</b> Estimación de aceleración en cada periodo de muestreo .....	50
<b>Figura 3.7</b> Identificación de la velocidad lineal.....	51
<b>Figura 3.8</b> Identificación de la velocidad angular .....	51
<b>Figura 3.9</b> Validación de la velocidad lineal .....	52
<b>Figura 3.10</b> Validación de la velocidad angular .....	52
<b>Figura 3.11</b> robot móvil tipo unicycle .....	53
<b>Figura 4.1</b> Estrategia del MPC.....	55
<b>Figura 4.2</b> Estructura básica del MPC .....	56
<b>Figura 4.3</b> Control MPC lineal .....	61
<b>Figura 4.4</b> Control MPC no lineal .....	62
<b>Figura 5.1</b> AKASHA, robot móvil tipo unicycle .....	68

<b>Figura 5.2</b> Ubicación de los motores inteligentes - Dynamixel Pro .....	69
<b>Figura 5.3</b> Dimensiones de la plataforma móvil.....	69
<b>Figura 5.4</b> Diagrama de flujo del Control Predictivo lineal con restricciones .....	70
<b>Figura 5.5</b> Trayectoria descrita: Circunferencia de radio 1[m] .....	72
<b>Figura 5.6</b> Posición y errores del eje $x$ y $y$ .....	73
<b>Figura 5.7</b> Tiempos de cálculo del algoritmo .....	73
<b>Figura 5.8</b> Trayectoria: Circunferencia de radio 1[m].....	74
<b>Figura 5.9</b> Posición y errores del eje $x$ y $y$ .....	75
<b>Figura 5.10</b> Tiempos de cálculo del algoritmo .....	75
<b>Figura 5.11</b> Trayectoria: Circunferencia de radio 1[m].....	76
<b>Figura 5.12</b> Posición y errores del eje $x$ y $y$ .....	77
<b>Figura 5.13</b> Tiempos de cálculo del algoritmo .....	77
<b>Figura 5.14</b> Trayectoria: en forma de 8 .....	78
<b>Figura 5.15</b> Posición y errores del eje $x$ y $y$ .....	79
<b>Figura 5.16</b> Tiempos de cálculo del algoritmo .....	79
<b>Figura 5.17</b> Trayectoria: Pendiente, $45^\circ$ .....	80
<b>Figura 5.18</b> Posición y errores del eje $x$ y $y$ .....	81
<b>Figura 5.19</b> Tiempos de cálculo del algoritmo .....	81
<b>Figura 5.20</b> Diagrama de flujo del MPC con enfoque simultáneo .....	82
<b>Figura 5.21</b> Trayectoria: Circunferencia de radio 1[m].....	84
<b>Figura 5.22</b> Posición y errores del eje $x$ y $y$ .....	84

<b>Figura 5.23</b> Tiempos de cálculo del algoritmo .....	85
<b>Figura 5.24</b> Trayectoria: Circunferencia de radio 1[m].....	86
<b>Figura 5.25</b> Posición y errores del eje $x$ y $y$ .....	86
<b>Figura 5.26</b> Tiempos de cálculo del algoritmo .....	87

## RESUMEN

En este trabajo se propuso la implementación de seguimiento de trayectorias en el plano  $(X, Y)$  de un robot móvil tipo unicycle a través de la aplicación de la estrategia de Control Predictivo basado en Modelos (MPC), para lo cual fue necesario conocer previamente el modelo cinemático y dinámico considerando un centro de masa desplazado lateralmente del eje que une a las dos ruedas; parámetros que permitieron establecer y formular el esquema de control. Los algoritmos de control fueron implementados en el robot móvil tipo unicycle AKASHA (no comercial), se consideraron velocidades de referencia como señales de control al sistema, como es común en robots comerciales. Además, el modelo tiene una estructura adecuada para el diseño de las leyes de control. Los resultados obtenidos a través de simulaciones y de forma experimental, mostraron que el robot móvil tipo unicycle converge a la trayectoria deseada conforme a los algoritmos del Control Predictivo implementados, reduciendo los errores que se presentan debido a las restricciones y demás factores concurrentes en el movimiento del robot móvil hacia la trayectoria deseada. Como se verá en el presente proyecto no existe una única metodología específica en torno a la implementación de los controladores predictivos; sin embargo, se debe considerar que el modelo dinámico de un robot o planta obtenido previamente a la aplicación de un algoritmo MPC debe ser lo suficientemente preciso para que sea eficiente y represente el mismo comportamiento del sistema real; mientras más inexacto el modelo mayor será el error en el control.

**PALABRAS CLAVES:** <TECNOLOGÍA Y CIENCIAS DE LA INGENIERÍA>, <INTELIGENCIA ARTIFICIAL>, <TECNOLOGÍA DEL CONTROL AUTOMÁTICO>, <ROBÓTICA>; <SISTEMAS DE CONTROL>, <CONTROLADOR CINEMÁTICO>; <CONTROLADOR DINÁMICO>; <ROBOT UNICYCLO>.

## SUMMARY

In this work, the implementation of trajectory tracking in the plane  $(x, y)$  of a unicycle-type mobile robot was proposed through the application of the model-based predictive control strategy (MPC), for which it was necessary to know previously the kinematic and dynamic model considering a centre of mass displaced laterally of the axis that joins the two wheels; parameters that allowed to establish and formulate the control scheme. The control algorithms were implemented in the AKASHA single-cell mobile robot (non-commercial), reference speeds were considered as control signals to the system, as is common in commercial robots. In addition, the model has an adequate structure for the design of control laws. The results obtained through simulations and experimentally, showed that the single-unit mobile robot converges to the desired trajectory according to the Predictive Control algorithms implemented, reducing the errors that arise due to restrictions and other concurrent factors in the movement of the mobile robot towards the desired path. As it will be seen in the present project, there is no single methodology around the implementation of predictive controllers; however, it must be considered that the dynamic model of a robot or plant obtained previously to the application of an MPC algorithm must be sufficiently precise to be efficient and represent the same behaviour of the real system; The more inaccurate the model, the greater the error in control.

KEY WORDS: <TECHNOLOGY AND ENGINEERING SCIENCES>, <ARTIFICIAL INTELLIGENCE>, <AUTOMATIC CONTROL TECHNOLOGY>, <ROBOTICS>, <CONTROL SYSTEMS>, <KINEMATIC CONTROLLER>, <DYNAMIC CONTROLLER>, <UNICYCLE ROBOT>.

# CAPÍTULO I

## 1. INTRODUCCIÓN

### 1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En estos últimos tiempos la investigación en el avance de la robótica se orienta al desarrollo de robots autónomos (Victores et al., 2013), éstos robots son utilizados en la industria en ambientes estructurados o parcialmente estructurados para aplicaciones de producción en masa (Zoltan K,et al., 2007), en soldadura, en corte, en mecanización, calderas (Verdezoto, 2011), marítima (Armada, et al., 2005), entre otras; mientras que en espacios no estructurados en lo que interactúan con el hombre se tiene: aplicaciones espaciales con los robots enviados a explorar marte y el espacio en general (Hossain, 2014); aplicaciones militares con robots móviles terrestres, aéreos y acuáticos para detección de minas, exploración de ambientes hostiles, robots vigías y robots utilizados para el rescate del personal militar (Voth, 2005); aplicaciones agrícolas orientadas a la agricultura de precisión con robots utilizados para: optimizar las cosechas, control y fumigación de plagas, preparación de suelos (Tu Cgunling, 2014), entre otras; aplicaciones médicas consignadas a mejorar la calidad de vida a través de robots orientados a tele-robótica, rehabilitación (Albert C. Lo, 2010), robots de almacenaje y distribución de medicamentos; entre otras aplicaciones.

El desarrollo de un sistema móvil robótico para su inserción en el ámbito industrial, militar, salud y otros, actualmente despierta gran interés en la comunidad científica (Andaluz et al., 2014) (Fareh, 2015). Por esta razón los sistemas de control implementados se diseñan con las mejores alternativas para cumplir los requerimientos del problema. Los algoritmos desarrollados en las investigaciones más actuales permiten realizar las tareas de manera autónoma, con el fin de aprovechar las ventajas de movilidad que ofrece un vehículo autónomo, como es el desplazamiento sobre amplios espacios de trabajo.



Los robots móviles comerciales no son diseñados exclusivamente para cada tarea que se requiera ejecutar, en su forma más general todas tienen un funcionamiento común. En este sentido, la comunidad científica busca ampliar la autonomía de los vehículos autónomos de tal forma que sea lo más funcional para la tarea se realice sin importar propiamente su aplicación específica. Es importante indicar que, las plataformas móviles presenten condiciones dinámicas muy particulares que cambian todo el comportamiento del sistema. En este contexto, este trabajo presenta el control autónomo de un robot móvil basado en el modelo dinámico del sistema. El modelo dinámico del sistema es desarrollado considerando la ubicación del centro de masa originada por todos los elementos físicos del robot.

## **1.2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA**

Las aplicaciones comerciales de robot móviles y de manera especial en el Ecuador no están orientadas a ejecutar tareas de manera autónoma, es decir, no permiten que un robot sea capaz de realizar el seguimiento de una trayectoria de forma independiente sin la intervención de un operador.

## **1.3 PREGUNTAS DIRECTRICES**

En torno al problema planteado surgen las siguientes interrogantes relacionadas a la robótica móvil y al esquema de control a proponer.

¿Cuáles son las características de los Robots de Móviles?

¿Cómo se analiza el modelado matemático de un robot móvil tipo uniclo?

¿Cómo se envía los estados de maniobrabilidad del robot móvil?

¿Cuáles son los métodos de Control Predictivo no lineal?

¿Cómo se implementa un Control Predictivo en MatLab?

¿Cómo controlar un robot móvil utilizando un esquema de Control Predictivo?

## **1.4 JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA**

Si se analiza la planificación estrategia del buen vivir propuesta para el periodo 2017 - 2021 por el actual gobierno ecuatoriano, se observa que se han establecido 03 ejes principales en los cuales se base el mencionado plan, siendo el eje 2 Economía al servicio de la Sociedad, el que abarca el objetivo 05 que señala “impulsar la productividad y competitividad para el crecimiento económico sustentable de manera redistributiva y solidaria” en que se habla de consolidar el cambio a una estructura productiva sofisticada y diversa, con actividades de mayor valor agregado e intensidad tecnológica, llevando de la mano la inversión en talento humano, fortalecimiento de la educación técnica y tecnológica vinculada con los procesos de desarrollo, que permita la innovación y el emprendimiento; es así que se explica de manera más concreta en la Política 5.3 “promover la investigación, la formación, la capacitación, el desarrollo y la transferencia tecnológica, la innovación y el emprendimiento, en articulación con las necesidades sociales, para impulsar el cambio de la matriz productiva”.

Un perfeccionamiento de las técnicas de control para robots móviles impulsa el desarrollo de nuevas aplicaciones industriales, médicas y de servicios. Así tenemos, la exploración autónoma de territorios hostiles, transporte de cargas para agilizar la logística y distribución de materiales, vehículos autónomos para movilizar personas con dificultades físicas de movimiento (Sillas de Ruedas).

Los robots móviles son una parte importante de la robótica de servicio que puede ser aplicada a tareas de asistencia y de servicios. La robótica aplicada a movilidad ha evolucionado en los últimos años destacándose en las diversas áreas debido a los diferentes cambios sociales que exigen dispositivos que logren satisfacer sus necesidades. En el asunto específico del seguimiento de trayectorias se requiere tener la odometría del robot para retroalimentar el sistema de control, así como algunos parámetros para el controlador que definen el movimiento a realizar.

El movimiento autónomo de robots móviles se realiza mediante sistemas de control de alto nivel, los cuales permiten trasladarse hacia un punto específico o recorrer una trayectoria o camino de manera que el beneficiario no intervenga en su funcionamiento. Eso significa que el usuario solicita al robot autónomo moverse a una determinada localización sin preocuparse con el camino a ser seguido y los elementos externo del sistema de control. De hecho, se traslada toda la responsabilidad al sistema de navegación del robot móvil, el cuál debe, sobre todo, garantizar la estabilidad del sistema. Es

fundamental, además, considerar los efectos dinámicos del robot, los cuales pueden derivar en un sistema inestable y por consiguiente impedir que la tarea se realice correctamente. Así también, se debe tener en cuenta las restricciones del robot, como son las velocidades máximas de desplazamiento y las restricciones propias del sistema.

## **1.5 OBJETIVOS**

### **1.5.1 Objetivo General**

Proponer un esquema de Control Predictivo basado en los modelos cinemático y dinámico de un robot móvil tipo unicycle para tareas de seguimiento de trayectorias de manera autónoma.

### **1.5.2 Objetivos Específicos**

- Definir las características cinemáticas y dinámicas de un robot móvil tipo unicycle en el que se considere el centro de masa desplazado, a fin de ser utilizados en esquemas de control avanzados.
- Proponer e implementar un esquema de Control Predictivo basado en los modelos cinemáticos y dinámicos de un robot móvil tipo unicycle, que permita realizar tareas de seguimiento de trayectoria de forma autónoma.
- Evaluar experimentalmente el esquema de control propuesto sobre un robot móvil tipo unicycle, utilizando como señales referenciales la velocidad lineal y la velocidad angular.

## **1.6 HIPÓTESIS**

### **1.6.1 Hipótesis General**

Comprobar que se puede implementar un esquema de Control Predictivo en un robot móvil tipo unicycle para el seguimiento de una trayectoria de manera autónoma.

## **1.7 PUBLICACIONES**

Una aplicación del controlador propuesto en el presente trabajo ha sido publicado durante su etapa de desarrollo.

- Gabriela M. Andaluz O., Víctor H. Andaluz, Héctor C.Terán, et al “Modeling Dynamic of the Human – Wheelchair System Applied to NMPC” International Conference on Intelligent Robotics and Applications - ICIRA 2016: Intelligent Robotics and Applications pp. 179-190, August 2016

## CAPÍTULO II

### 2. MARCO TEÓRICO

#### 2.1. ANTECEDENTES

La robótica desde décadas atrás tiene gran relevancia en el sector industrial con robots que realizaban trabajos repetitivos en ambientes estructurados, muchos de estos fueron conocidos como robots de aprendizaje, en los últimos estudios se menciona que son capaces de trabajar en ambientes no estructurados de forma autónoma o semi-autónoma. En la nueva generación se habla de robots con inteligencia artificial capaces de aprender de su entorno y presentar mejoras en sus sistemas de locomoción, que les permite desenvolverse en ambientes terrestres, aéreos o acuáticos, realizando tareas que suelen ser consideradas como peligrosas para los seres humanos.

En este tenor, a la robótica se la puede clasificar en robots industriales y de servicio, este último es encargado de facilitar la vida a los seres humanos e interactuar de manera directa, no solo brindando comodidad, también ejecutar tareas que ayuden y protejan la seguridad del ser humano. Los robots de servicio tienen como función principal realizar tareas que faciliten la vida al usuario de manera semi o totalmente autónomo; es así que ha sido enfocado mayormente en el área de la medicina, cuyos avances han sido notorios pues va desde robots que ayudan a personas de la tercera edad a realizar tareas simples del hogar hasta robot que realizar intervenciones quirúrgicas. Entre las diferentes arquitecturas de control implementadas para en el controlador de un robot móvil se destacan las siguientes: i) Controlador PID, usualmente implementado en sistemas de control industrial, este se encarga de calcular y corregir el error generado entre la señal de salida y la señal deseada (Ma X., 2012); ii) Control Fuzzy, se considera que se adapta de mejor manera al mundo real debido a los cuantificadores que utiliza, se basa en reglas heurísticas de forma que poseen un antecedente y un consecuente (Locchi L., 2012); iii) Control Predictivo, este control predice el comportamiento futuro del sistema, está

integrado por diversas disciplinas como control estocástico, control con retardo de tiempo, control con restricciones, control multivariable (Howard et al, 2010); entre otros. El objetivo de estos controles es brindar robustez y flexibilidad a los sistemas a maniobrar garantizando estabilidad en su función y movilidad.

## 2.2. BASE TEÓRICA

La aparición del Control Predictivo en la historia se registra por el año de 1970, principalmente el gran aporte en este campo fue dado por Richalet, quién desarrolló el método denominado MPHC (por sus siglas en inglés *Model Predictive Heuristic Control*) y a Cutler y Ramaker que desarrollaron el DMC (por sus siglas en inglés *Dynamic Matrix Control*), ambas investigaciones tenían como finalidad la presentación de un modelo de predicción de las salidas futuras y en el planteamiento de un control óptimo con un horizonte finito como el denominado LRPC (por sus siglas en inglés *Long-Range Predictive Control*).

El algoritmo que es ampliamente aceptado en la actualidad fue propuesto por Clarke en el año de 1980 al que se denominó CPC (por sus siglas en inglés *Generalized Predictive Control*), cuyo aporte es la solución analítica a través de la descripción del sistema mediante la función de transferencia lo que marcó la diferencia de los algoritmos antes propuestos.

En años anteriores, los algoritmos de Control Predictivo han tenido su aplicación directamente en el ámbito industrial; sin embargo, en los últimos años este tipo de control se ha implementado en aplicaciones de la robótica, cuyo objetivo es la navegación autónoma de una trayectoria deseada. A continuación, se describen los principales aportes del Control Predictivo en la investigación:

- Ollero A. y Amidi O., 1991 en su trabajo denominado *Predictive tracking of Mobile Robots*, presentó uno de los métodos propuestos para el seguimiento de caminos cuya aplicación se marcó en vehículos autónomos (NavLab), el mismo que empleó la teoría del Control Predictivo para obtener el ángulo apropiado de dirección teniendo en cuenta la velocidad del vehículo. Para lo cual, consideraron ambos casos de entrada simple y salida simple y la formulación del problema multivariable del Control Predictivo (Ollero A., 1991).

- XieFeng y Rafael Fierro, 2009 en su estudio realizado de *Stabilization of Nonholonomic Robot Formations: A first-state Contractive Model Predictive Control Approach*, establece una investigación para resolver la problemática del seguimiento simultáneo para la formación de robots no holonómicos con capacidad para estabilización en un punto, considerando que el robot líder puede presentar movimientos bruscos provocando el mal funcionamiento del grupo. En tal virtud, motivados por el esquema del MPC de contracción desarrollado en la el trabajo De Oliveira S. at el., 2000, *Contractive model predictive control for constrained nonlinear systems*, propone el algoritmo que garantiza la estabilidad a través de la adición de una limitación de contracción en el primer estado (FSC por sus siglas en inglés *First-State Contractive*) en el inicio del horizonte de predicción. Cuya idea central fue tomar la ventaja del seguimiento simultáneo y la capacidad de estabilización que presentó el algoritmo FSC-MPC propuesto (Feng Xie, at el., 2009).
- Ostafew C. et al, 2015 en su investigación denominada *Learning-based Nonlinear Model Predictive Control to Improve Vision-based Mobile Robot Path Tracking*, plantea un algoritmo de Control Predictivo no lineal basado en el aprendizaje para lograr un rendimiento en el seguimiento de caminos en un ambiente sujeto a cambios a través del aprendizaje. Para lo cual, el algoritmo propuesto debe plantear a priori el modelo del vehículo y de las perturbaciones, éstas últimas son modeladas mediante un proceso Gaussiano en función del estado del sistema, entrada y variables que intervienen. El proceso Gaussiano se actualiza en base a la experiencia recogida durante los ensayos anteriores. La localización del controlador es previsto por una base de visión instalada que permite el mapeo y la habilitación del sistema de navegación operado a gran escala (OstafewC. et al., 2015).
- Zhijun Li at el., 2015, en la publicación denominada *Model Predictive Control of Nonholonomic Chained Systems Using General Projection Neural Networks Optimization*, ostenta una clase de sistema de cadena no holonómicos que se convierten primero en dos subsistemas, un término de decaimiento exponencial explícita se introduce en la entrada del primer subsistema para garantizar su control, para luego realizar una transformación de escala-estado, un Control Predictivo basado en el modelo (MPC) propone para el régimen de un sistema no holonómico encadenado. La propuesta del esquema MPC emplea una red

neuronal de proyección general - GPN (por sus siglas en inglés *General Projection Neuronal*) para resolver iterativamente un problema de programación cuadrática en un horizonte de retroceso finito. El GPN empleado en este estudio sustenta su estabilidad en el sentido de Lyapunov y su convergencia global a la solución óptima que está garantizada por la reformulación de la programación cuadrática (Andaluz, V.H., et al., 2015).

## **2.3. MARCO CONCEPTUAL**

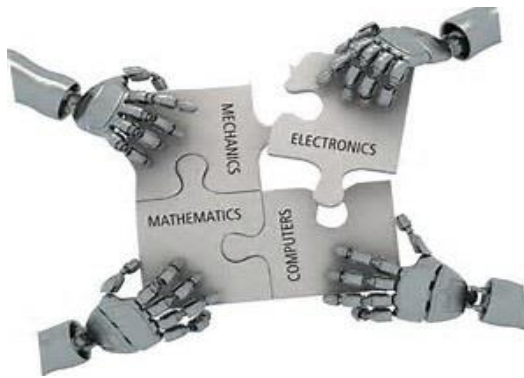
### **2.3.1. Robótica**

Con el transcurso de los años, la robótica se ha profundizado en las raíces culturales, dado que los seres humanos han intentado constantemente buscar sustitutos que pudieran imitar su comportamiento en ambientes circundantes. Diferentes motivaciones han inspirado esta investigación continua, haciendo referencia entre otros a principios filosóficos, económicos, sociales y científicos.

La robótica puede definirse como: El conjunto de conocimientos teóricos y prácticos que permiten concebir, realizar y automatizar sistemas basados en estructuras mecánicas poliarticuladas, dotados de un determinado grado de "inteligencia" y destinados a la producción industrial o a la sustitución del hombre en diversas tareas. Un sistema robótico puede describirse, como "aquel que es capaz de recibir información, de comprender su entorno a través del empleo de modelos, de formular y de ejecutar planes, y de controlar o supervisar su operación" (Andaluz, 2011)

En resumen la Robótica es la ciencia y la tecnología de los robots, que estudia la conexión inteligente entre la percepción y la acción. Además, combina diversas disciplinas como son entre otras: mecánica, electrónica, informática, inteligencia artificial y la ingeniería de control (Figura 2.1). Además, intervienen también áreas importantes en la robótica como el álgebra, los autómatas programables y las máquinas de estado. (Andaluz, 2011).





**Figura 2.1** Robótica, áreas multidisciplinaria  
**Fuente:** Enterprise, s/n

Dado que la Robótica está ligada a los robots, cabe señalar que la palabra Robot proviene de la palabra checa “robota” que significa trabajo. Entre las definiciones que se han dado para este término consta la expuesta por el Instituto de Robótica de América (RIA) que señala: “robot es un manipulador reprogramable y multifuncional diseñado para mover materiales, partes, herramientas o artefactos especializados a través de movimientos variables programados para la realización de una variedad de tareas”.

En el año de 1942 Isacc Asimov fue quién propuso las tres Leyes de la Robótica a través de la publicación de una de sus obras de ciencia ficción, a las cuales se le adicionó la denominada Ley Cero, estas son:

- Ley Cero.- un robot no puede dañar a la humanidad, o través de su inacción, permitir que se dañe a la humanidad.
- Primera Ley.- un robot no debe dañar a un ser humano ni por su pasividad, dejar que un ser sufra daño.
- Segunda Ley.- un robot debe obedecer las órdenes que le son dadas por un ser humano, excepto cuando las órdenes están en oposición con la primera ley.
- Tercera Ley.- un robot debe proteger su propia existencia, siempre y cuando esta protección no esté en conflicto con la primera y segunda ley.

Estas leyes establecieron reglas de comportamiento a considerarse como especificaciones en el diseño de un robot, que desde entonces ha alcanzado la connotación de un producto industrial diseñado por ingenieros o técnicos especialistas (Siciliano, 2009); además, se pretendió dejar por encima la integridad humana frente a la evolución que desde esa época se visionaba para los robots.

Para clasificar a los Robot existen diversas consideraciones; sin embargo, en este trabajo se hará mención a la clasificación de manera general como se muestra en la Tabla 2.1 (Reyes, 2011):

**Tabla 2.1** Tipos de robots

Clasificación de los Robots		
<b>Móviles</b>	Terrestres: ruedas, patas, orugas	
	Submarinos	
	Aeroespaciales	
<b>Humanoides</b>	Diseño complejo	
<b>Industriales</b>	Brazos mecánicos	Robots manipuladores

**Fuente:** Robótica. Control de robots manipuladores

**Realizado por:** Gabriela Andaluz

En este contexto se detalla a continuación de forma general la clasificación de los robots conforme la Tabla 2.1.

- **Móviles:** hace referencia a la capacidad para alcanzar uno o varios objetivos con una intervención pequeña de supervisores humanos.
- **Humanoides:** conocidos también como androides, son máquinas antropomórficas capaces de imitar las funciones básicas del ser humano, tales como hablar, ver, recolectar, trasladar objetos, entre otras; cuyo diseño y estructura resulta ser compleja.
- **Industriales:** son conocidos como brazos robots o brazos mecánicos multipropósito, reprogramable y controlado automáticamente en tres o más ejes; cuya características principal es la de repetitividad de procesos con el mismo tiempo y calidad (Mathia, 2010).

### 2.3.2. Robots de Servicio

Si bien es cierto los robots industriales se consideran como los robots más populares, debido a la importancia que han mantenido en el sector industrial como herramienta clave en la modernización y mejora de producción de las empresa en sus diversas aplicaciones, siendo la fabricación de automóviles una de las expansiones más notorias en el ámbito de la robótica industrial (Tanner, 1979). Sin embargo, en los últimos años ha surgido la necesidad de extender los ámbitos de aplicación de la robótica fuera del sector netamente industrial, tratando de ésta manera que los robots realicen tareas como la demandada en la Robótica de Servicio (Engelberger, 1989);

es así que su empleo en la historia ha ido evolucionando tanto en sus características y maniobrabilidad, para realizar acciones de alto impacto en la sociedad.

Varias definiciones se han impartido en torno a un robot de servicio, es así que la Federación Internacional de Robótica (IFR, por sus siglas en inglés) lo ha definido señalando que “es un robot que opera semi o totalmente autónomo para realizar servicios útiles para el bienestar de los seres humanos y equipos, con exclusión de operaciones de fabricación”. Es decir que, los robots de servicio tienen como función principal realizar tareas que faciliten la vida al usuario, cuyas aplicaciones van desde educación, construcción, vigilancia, sanidad, entretenimiento, realidad virtual, agricultura, entre otras; enfocándose mayormente en el área de la medicina, cuyo alcance va desde robots que ayudan a personas de la tercera edad en realizar tareas simples del hogar hasta robots que realizan intervenciones quirúrgicas de alta complejidad.

#### **2.3.2.1. Características de los Robots de Servicio**

Las características principales que diferencian a los robots de servicio con los industriales, son:

- Aspecto físico: no necesariamente cuentan con brazos de dos o tres grados de libertad como los robots industriales, dependiendo su aplicación un robot pueden tener varios brazos y convertirse en una estructura de diseño compleja; además, se da un mayor énfasis en cuidar la imagen y aspecto del robot ya que estos van desde estructuras muy robustas hasta nano robots de dimensiones extremadamente pequeñas.
- Sistema de locomoción: en su mayoría dejan de ser sistemas estáticos como los robots de ambientes industriales, para adquirir diferentes sistemas de desplazamiento que les permita la evasión de obstáculo, trabajar en ambientes tanto estructurados como no estructurados o espacios muy reducidos según sea su aplicación.
- Tareas complejas a realizar: dado que su aplicación no se limita a una trabajo repetitivo en un entorno industrial establecido, el robot de servicio cumple tareas en: áreas extensas no estructuradas, espacios reducidos, mayor

interacción con el humano dependiendo su aplicación; éstos robots cuentan con un número considerable de sistemas sensoriales de alta precisión en algunos casos que les permite desenvolverse en todo tipo de ambientes y espacios.

- Costos: entre las motivaciones para dar un rol diferente a los robots del sector industrial, fue crear robots de servicio que sean económicamente cada vez más accesibles a la sociedad (robot de entretenimiento); cabe señalar que, dependiendo la aplicación para la cual se ha fabricado un robot los costos están o no a precios accesibles, pues los que se aplican en salud no resultan ser tan económicos.

### **2.3.2.2. Áreas de aplicación de Robots de Servicio**

El Comité Técnico en Robots de Servicio (por sus siglas en inglés *Technical Committee on Service Robots*) creado por la *IEE Robotics and Automation Society*, en el año 2000 definió las áreas de aplicación de los Robots de Servicio, dividiéndolo en dos grandes grupos:

- Sectores productivos no manufactureros, tales como: edificación, agricultura, naval, minería, medicina, etc.
- Sectores de servicios propiamente dichos, tales como: asistencia personal, limpieza, vigilancia, educación, entretenimiento, etc.

#### **2.3.2.2.1. Sectores Productivos**

En este sector, se pueden hacer mención a los robots que están destinados a ejecutar trabajos en el ámbito productivo, en el cual en su mayoría demandan ejecutar tareas que requieren: un gran esfuerzo físico para la consecución de trabajos, acceder a sitios con poca accesibilidad, sitios que ponen en riesgo la vida del operador humano, entre otras. A modo de descripción, a continuación se citará de forma general algunas de las aplicaciones de la robótica de servicio dentro del sector productivo.

## A. Edificación

En los campos de la arquitectura y en el sector de la construcción, la robótica ha ido incursionando de manera paulatina en relación a los demás sectores de aplicación de la robótica de servicio por la poca normalización del producto y sus componentes y en muchas ocasiones débil integración entre las fases del procesos constructivo; sin embargo, en países como Japón, Estados Unidos y ciertos de Europa está intentado innovar en los distintos procesos de diseño, construcción y operación, esto considerando que se estima que el 10 y 20% de las inversiones de un país están destinadas a obras civiles y construcción de edificaciones cuya mano de obra humana cada vez es más escasa, debido a que la población lo ve como una actividad dura, sucia y peligrosa, siendo así poco atractivo para aquellas personas que incursionan en el mundo laboral especialmente los jóvenes.

Japón es uno de los países como se indicó que más recursos e investigaciones ha realizado en este sector, es así que utilizan robots para ejecutar aproximadamente 100 funciones diferentes, tales como: soldadura de vigas y estructuras de acero, inspección ultrasónica de la soldadura, proyección de cemento en suelos, material aislante, inspección de exteriores de edificios, colocación de estructuras exteriores de construcción, entre otros. Un ejemplo es el sistema Hadrian desarrollado por la empresa FastBrick Robotics, que es un prototipo de robot conformado por un sistema que permite la preparación de adhesivo para fijar ladrillos, colocar ladrillos y desplazarse, posicionándose así como una referencia en el sector de la construcción debido a que es capaz de colocar 1.000 ladrillos en una hora, ver Figura 2.2.



**Figura 2.2** HADRIAN, robot empleado en la construcción de edificaciones

Fuente: Revista digital: Robotsia.com



**Figura 2.3** Robot para la inspección de túneles  
Fuente: RoboticLabs UC3M.

## **B. Agricultura**

La caza y cosecha en los inicios de la agricultura realizado por el hombre, ha sufrido varias transformaciones, dando como resultado en la actualidad que en este sector se ha incrementado grandes avances con el empleo de la robótica de servicio, es así que herramientas, máquinas y sistemas tanto mecánicos como manuales y procesos ejecutados completamente por humanos se han ido reemplazando por sistemas automatizados que con lleva la implementación de robots en cada una de las fases y procesos de este sector, con la finalidad de mejorar los procesos de siembra incrementando el rendimiento de los cultivos; sin embargo, es importante señalar que la inversión inicial en este campo resulta ser bastante considerable.

El principal objetivo del empleo de la robótica es conseguir una agricultura de precisión, que permita dar un soporte tecnológico y preciso a las labores como la preparación del suelo, siembra, eliminación de malezas en cultivos, riego, tratamientos tanto agroquímicos como mecánicos, optimización del empleo de químicos, cosecha, etc. para lo cual se realiza el reconocimiento del cultivo en tiempo real mediante adquisición de datos gráficos que son procesados y dependiendo la tarea que se vaya a realizar con alguna plantación, se envían acciones para entre otras aplicar fertilizantes, riego, plaguicidas, recolección, etc. de manera autónoma consiguiendo así grandes áreas de cultivo controlado; datos que a su vez se van almacenando en históricos que servirían como base para un estudio o análisis de un tipo de plantación en post del mejorar el rendimiento de sus cultivos (García).

Los robots que participan dentro de la agricultura principalmente son terrestres y aéreos, tal como se muestra en la Figura 2.4 a, se trata de un dron que realiza la inspección de amplias áreas de cultivo cuya información es transmitida en tiempo real, mientras que la Figura 2.4 b y el cuidado de cultivos como en la Figura 2.4 c, robot aéreo que realiza tareas de dispersión de productos químicos a un cultivo determinado; sin embargo, la robótica también está involucrada no sólo en el proceso de control del cultivo, sino también en la recolección como se muestra en la Figura 2.4 d-e, es así que actualmente la robótica de servicio ha permitido automatizar toda la cadena del proceso que demanda la siembra.



(a) robot aéreo realizando actividades de reconocimiento y adquisición de información.



(b) robot aéreo realizando aplicación de fertilizantes.



(c) Bonibob de la empresa alemana Amazone, realiza la tarea de cuidado de los cultivos.



(d) robot que de cosecha de fresa.



(e) robot terrestre autónomo, realizando la cosecha dentro del cultivo.

**Figura 2.4** Aplicaciones de robots de servicio en la agricultura

**Fuente:** Automatización en la granja: bienvenido a la década de la agricultura robot”, Alex Barredo.

### C. Marítimo

La Robótica Submarina ha avanzado debido al interés de los investigadores por desarrollar y mejorar una tecnología, que permita no sólo la exploración del fondo marítimo sino también se aprovecha en aplicaciones en el sector petrolero para la prevención o mitigación de desastres, toma de muestras geológicas, operaciones de taladro, minería y demás operaciones en aguas profundas, sin la necesidad de que un vehículo submarino deba ser tripulado por un humano poniendo en riesgo su integridad.

Así, a este tipo de vehículos se los puede clasificar en AUV por sus siglas en inglés Vehículos Autónomos Submarinos, son robots no tripulados con navegación autónoma (ver Figura 2.5a, b) y los ROV por sus siglas en inglés Vehículos Operados Remotamente, son robots tripulados de manera remota y en muchos casos con dependencia energética (ver Figura 2.6a, b).

El tipo de aplicación que se dé a un robot submarino está directamente relacionado con la tarea a ejecutar, es decir puede ser de inspección o de manipulación, para éste último deberá contar con un sistema tipo brazo robótico para realizar las intervenciones dentro del espacio acuático, así mismo, serán diseñados sus componentes, tales como: sensores, actuadores, estructura externa, etc., a esta clasificación se le suman los robots planeadores que planean sobre la superficie marina y debajo del mar para mejorar la eficiencia en cuanto al consumo de energía, existiendo también los robots marinos que trabajan en la superficie externa, que



cuentan con mayor autonomía energética porque pueden aprovechar otro tipo de tecnologías en relación a los submarinos.

Además, el parámetro que se debe considerar en los robots submarinos es el sistema de propulsión, pues es el factor que define completamente los tipos de movimientos y maniobras que se pueden realizar, así como las consideraciones para el consumo energético, diseño de la estructura. Este tipo de vehículos pueden ser empleados tanto para aplicaciones comerciales, científicas y militares.



(a) Slocum, robot planeador submarino



(b) Pluto Plus, robot submarino que identifica y destruye minas.

### Figura 2.5 Robots Submarinos del tipo AUV

Fuente: Wikipedia, Glider Submarino – Autonomous underwater vehicle



(a) Hercules robot submarino



(b) Pluto II robot submarino de la marina italiana

### Figura 2.6 Robots Submarinos del tipo ROV

Fuente: Wikipedia, ROV Sumergible – ROV Pluto

## D. Minería

El sector de la minería posee características potenciales que hace que la robótica pueda incluirse en estas aplicaciones, considerando que los trabajos que en éste se desarrollan tienen las particularidades de ser repetitivos, peligrosos, de difícil acceso, ambientes contaminantes, entre otros, que ponen en riesgo la integridad, seguridad y salud de los trabajadores que se desenvuelven en este ámbito ocupacional; sin dejar de lado los costos que representan los salarios del trabajador que en comparación a otras profesiones son altos por estar más expuestos a condiciones laborales arduas y la inversión que se realiza en material y equipo de seguridad. No obstante, no todos los puestos de trabajo en esta área de la minería han sido reemplazados por robots, pues existen actividades que requieren de la intervención de un operador humano.

El tipo de robots que se emplea en la minería no se limita a un típico brazo robótico que realice excavaciones o manipulación de material, se puede encontrar además los vehículos autónomos que recorren rutas de extracción o sirven como exploradores de lugares de difícil acceso, también los vehículos aéreos no tripulados son empleados para extracción y análisis de ambientes, estudio de zonas a ser explotadas, trazado de mapas en 3D de sus yacimientos de minerales, entre otras (ver Figura 2.7a).

En América del Sur uno de los países que está invirtiendo no sólo en la adquisición de este tipo de tecnología sino en la investigación y desarrollo de robots aplicado a la minería es Chile, es así como uno de los logros alcanzados por este país mediante una alianza público privada y el aporte de una de las grandes empresas de robótica alemana KUKA Roboter GmbH, han logrado crear el robot MIRS (por sus siglas *MI Robotic Sampler*) que se emplea para tomar muestras de concentrado de metales como el cobre, molibdeno, plomo, zinc, etc. de manera segura (ver Figura 2.7b).



(a) Dron empleado para trazar mapas en 3D de yacimientos de minerales por la empresa BHP.



(b) MIRS, brazo robótico empleado en la minería chilena.

**Figura 2.7** Robots aplicados al sector de la minería

**Fuente:** (a) Diario la Nación, Drones y robots mejoran la eficiencia de la minería. (b) Revista América economía, La robótica chilena al rescate de la gran industria de la minería.

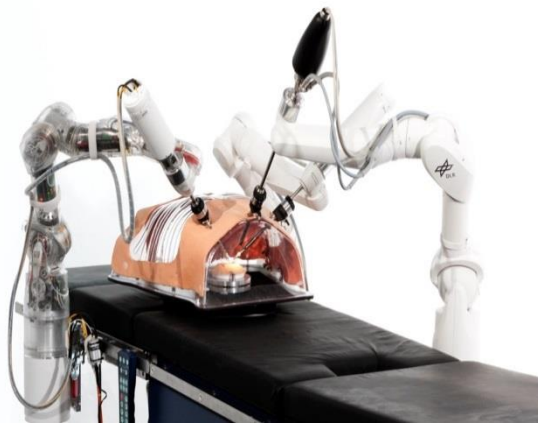
## E. Medicina

La aplicación de grandes asistentes robóticos en la medicina se ha visto limitada al desarrollo económico de los países, debido al costo e inversión para la implementación de este tipo de tecnología, es así que como ejemplo se puede evidenciar que en los países desarrollados como Estados Unidos uno de los sistemas más comercializados en este ámbito es el robot Da Vinci (ver Figura 2.8b) existen alrededor de 1000 ejemplares de este tipo, mientras que en países de Latinoamérica apenas hay 12 sistemas y uno de estos ha sido adquirido por Colombia (María Chaparro, 2016).

Sin embargo, pese a la inversión que significa la implementación de robots en la medicina, las investigaciones y avances continúan con la tendencia de extenderse a la micro y nano tecnología para alcanzar lugares que con las herramientas tradicionales no ha sido factible y a significado mayores riesgos en los pacientes; razón por la que, la aplicación de robots en la medicina ha logrado un alto impacto en la sociedad, quizá por ser una de las áreas que más precisión demanda al momento de la intervención; y consecuentemente con la asistencia de los robots se ha conseguido estos grandes resultados, convirtiéndose en una herramienta de los cirujanos al momento de aportar

al incrementado de seguridad y exactitud en las intervenciones quirúrgicas y demás aplicaciones de la medicina. Los sistemas robóticos se emplean de manera general en:

*Medicina Quirúrgica:* emplea tecnología robótica que permite que los movimientos de la mano del cirujano o especialista sean escalados y traducidos en los movimientos exactos de los instrumentos y sistemas robóticos que están interviniendo en el cuerpo de un paciente en tiempo real con mayor precisión y seguridad. Entre los avances y aplicaciones más destacados está la cirugía mínima invasiva (por sus siglas en inglés MIS), la cirugía endoscópica transluminal por orificios naturales (por sus siglas en inglés NOTES), laparoendoscopia (por sus siglas en inglés LESS), entre otras técnicas que apoyan a que la operación sea lo menos invasiva, dolorosa y puede ser realizada de manera presencial o remota (ver Figura 2.8a, b), sin que esto signifique que estos sistemas robóticos puedan operar de manera autónoma sin la intervención del cirujano (María Chaparro, 2016).



(a) MiroSurge, sistema modular para la tele-cirugía robótica mínimamente invasiva.



(b) Da Vinci, Sistema de cirugía robótico desarrollado por la empresa Intuitive Surgical.

### **Figura 2.8** Robot Médico – Quirúrgico

**Fuente:** (a) Institute of Robotics and Mechatronics, Medical/Healthcare MiroSurge. (b) Intuitive Surgical, Da Vinci.

*Rehabilitación y asistencia hospitalaria:* el empleo de robots en rehabilitación está dirigido a personas que han sufrido una anomalía en alguno de sus miembros o extremidades, que les impiden la movilidad para realizar actividades de locomoción de manera autónoma, cuyo objetivo es apoyar en el suministro de terapia de movimientos tridimensionales personalizados y repetitivos. Entre las ventajas que estos sistemas robóticos presentan está la estimulación y recuperación del control

neurrológico del movimiento, control exacto de la amplitud, velocidad y fuerza para activar zonas y vías nerviosas en el paciente. Uno de los robots de este tipo que ha sido aprobado por la Administración de Alimentos y Medicamentos (por sus siglas en inglés FDA) en Estados Unidos es el LOKOMAT (ver Figura 2.9a).

Los robots de asistencia hospitalaria están destinados a desenvolverse en los ambientes hospitalarios como pasillos evitando obstáculos como el robot HelpMate (ver Figura 2.9b) que puede llevar bandejas de comida, muestras de laboratorio, suministros, registros médicos y se entrega al área correspondiente según la navegación programada previamente (Evans, 1994).



(a) Lokoman Nanos, robot terapéutico.



(b) HelpMate, robot asistente hospitalario.

**Figura 2.9** Robots terapéuticos y asistenciales hospitalarios

Fuente: (a) ELSA, Hocoma Lokomat Nanos. (b) Wikimedia Commons, HelpMate.

*Prótesis y ayuda a personas con discapacidad:* los robots prótesis si emplean hace unos años atrás, logrando un impacto positivo en la sociedad pues ha contribuido a mejorar la calidad de vida de las personas permitiéndoles restituir las partes dañadas de sus sistema de locomoción, es así que, actualmente se pueden encontrar prótesis para discapacidades físicas de extremidades superiores e inferiores en muchos de los casos controlados a través de señales cerebrales, con impulsos eléctricos de tal manera que el sistema nervioso interpreta la percepción táctil, permitiendo acciones como dar apretones de manos, caricias o manejar objetos (ver Figura 2.10a).

Así mismo, se puede encontrar diversas opciones de robots de asistencia para personas con discapacidad locomotora, entre los más comunes están las sillas de rueda autónomas, los exoesqueletos que son máquinas móviles de armazón (ver Figura 2.10b)



(a) Deka Arm, brazo robótico que responde a diversas órdenes del usuario.



(b) EDAN, Sistema de robótica asistida para personas con problemas de deficiencias motoras.

### **Figura 2.10** Prótesis robóticas

**Fuente:** Revista el Seminario, Prótesis robóticas: nueva cura para el ser humano.

## **F. Energía y Mantenimiento de Instalaciones**

Estos robots ejecutan tareas de intervención, manipulación, inspección, mantenimiento en instalaciones, entre otras, que representan un riesgo para el humano al estar expuesto a ambientes contaminantes, corrosivos y peligros.

En el sector eléctrico para mantener la fiabilidad de las operaciones desde la generación hasta la distribución y consumo eléctrico se requieren de ejecutar actividades de mantenimiento periódico que va desde la inspección y detección de daños causados por de laminación, defectos de unión, descargas atmosféricas, etc. (ver Figura 2.11) (Massahi, et.al., 2013).



**Figura 2.11** ROBTET, robot para el mantenimiento de líneas de alta tensión

**Fuente:** Robots de Servicio, Rafael Aracil.

Los componentes que contempla este tipo de robots depende de la aplicación y tarea que vaya a ejecutar, en algunos casos se considera mando remoto para la operación, brazo robótico para la manipulación, cámaras para inspección y visualización, herramientas para actividades de corte, toma de muestras, mediciones, etc., cuya estructura deberá ser elaborada con el material que resista el ambiente al cual se va a exponer durante la ejecución de la misión, sin dejar de lado la autonomía, navegación, planificación y seguridad que debe brindar el robot.

## G. Seguridad y Vigilancia

La seguridad individual y colectiva en todos los sectores militar, industrial, comercial, etc., es un campo en el cual la Robótica se encuentra incursionando, es así que podemos citar algunas de sus aplicaciones que va desde la vigilancia para prevención de catástrofes, vigilancia de fronteras, rescate y protección de personas (ver Figura 2.12b), actividades humanitarias, entre otras; generalmente este tipo de actividades a ser ejecutadas por los robots sean éstos, aéreos, marítimos o terrestres, tienen la funcionalidad de desenvolverse en espacios hostiles de difícil acceso, cuya exposición demanda estructuras especiales en tamaño, diseño y componentes, como por ejemplo los robots desactivadores de minas (ver Figura 2.12a) cuyo tamaño depende de la zona a intervenir, incorpora un sistema de detección y desactivación de minas, con una estructura que permite contar con escudos de anti explosión y un sistema de inspección que garantice que la zona intervenida se encuentra limpia de minas.



(a) Remotec Andros, robot militar diseñado para contrarrestar amenazas de explosivos improvisados.



(b) OFRO, robot móvil de seguridad para vigilancia externa.

### Figura 2.12 Robot de vigilancia y seguridad

**Fuente:** (a) Eugenio Rodríguez, Los 5 mejores robots militares para la desactivación de artefactos explosivos. (b) Azorobotics, *Ofro surveillance robotics from quadratec limited*.

## H. Defensa

Los robots de servicio en aplicaciones de seguridad y defensa representaron en el 2011 el 40% del número total de robots de servicio de uso profesional. Es así que el más popular de los robots en estos sectores resulta ser el vehículo aéreo no tripulado esto considerando que según la IFR sus ventas incrementaron en un 11% a más de 5.000 unidades.

El tipo de robot que se aplica en defensa suele ser aéreo o móvil, que cuentan o no con un sistema para llevar una carga útil (ver Figura 2.13) y asisten o guían al ejército en operaciones especiales.



(a) Big dog, robot cuadrúpedo empleado como mula para atravesar áreas difíciles.



(b) Kingfish UUV, robot submarino no tripulado de aplicación militar.

**Figura 2.13** Robots de aplicaciones de defensa –militares.

**Fuente:** Commons (a) Big dog. (b) *Autonomous underwater vehicle*.

## I. Espacio

Los robots del espacios anteriormente estaban limitados a la exploración extra planetarias, sin embargo, con el avance de las investigaciones ha tratado de que el astronauta se libera del desarrollo de ciertas tareas como desarrollo de experimentos científicos en órbita; es así que, la robótica ha permitido incrementar seguridad, productividad, fiabilidad, flexibilidad e incluso desarrollar actividades que pudieran ser imposibles de realizar por el operador humano como exploración fuera del sistema solar.



Las tareas que realizan los robots en el espacio, pueden ser a través de control remoto, teleoperando al robot desde la tripulación de la nave espacial o desde la estación ubicada en la tierra, siendo ésta última opción una de las maneras más complicadas que demanda mayores aportes en la investigación para mejorar las limitaciones existentes en las comunicaciones. Las características de los robots deben considerar particulares importantes en su construcción como en el caso de Robonaut diseñado y construido por la NASA (Ver Figura 2.14b), que es un robot humanoide que lleva a cabo investigaciones en tecnología robótica a bordo de la Estación Espacial Internacional (por sus siglas en inglés ISS) y puede asumir tareas simples, repetitivas o de alto riesgo en lugares como la ISS, mientras que PUFFER (ver Figura 2.14a) es un robot plegable cuya característica le permite acceder a superficies y espacios entre obstáculos modificando su forma para realizar la exploración.



(a) PUFFER, robot plegable plano de exploración de la NASA.



(b) Robonaut - R2B, robot humanoide, construido por la NASA para explorar el espacio.

**Figura 2.14** Robots empleados en el Espacio.

Fuente: (a) NASA. (b) IFR: Robot History.

#### 2.3.2.2.2. Sectores de Servicio para uso personal

La Robótica de servicios de uso personal y aplicaciones domésticas ha experimentado un crecimiento global con relativamente pocos productos de consumo masivo y de costos accesibles, tales como: limpieza, cortadores de césped y de entretenimiento educativo.

Los productos de hogar apuntan a robots domésticos de mayor sofisticación, capacidad y valor, que permitan ejecutar tareas de manipulación inteligente de objetos domésticos como ordenación de estantes, lavavajilla, etc., que requieren acciones de mayor precisión y seguridad.

Sin embargo, es común en países desarrollados encontrarse con robots en museos, aeropuertos y otros sitios, en los cuales los robots dan el servicio de información y/o asistencia a usuarios, uno de este tipo es el Care-O-bot 4 que se vende comercialmente (ver Figura 2.15 c, d). Asimismo, se están empleando los robots educacionales y de entretenimiento dirigidos especialmente al acompañamiento del aprendizaje de niños como es el caso de Maggie, cuya finalidad es ser un robot social que interactúe directamente con los seres humanos sin dejar de lado su estructura, diseño y estética (ver Figura 2.15a).



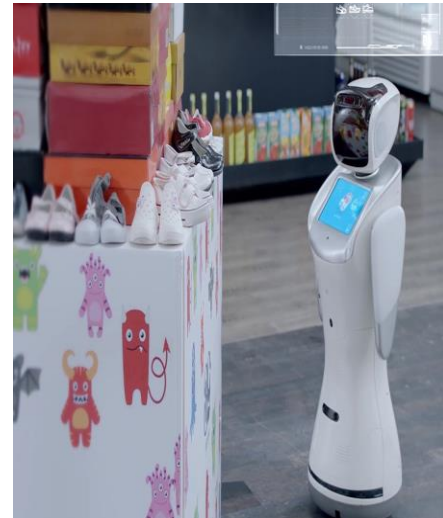
(a) Maggie, robot educacional y de entretenimiento.



(b) Lego Mindstorms, robot de entretenimiento educacional.



(c) Care-O-bot 4, robot de centro de información móvil.



(d) Sanbot Elf, robot promotor de ventas

**Figura 2.15** Robots educativos, información y marketing.

**Fuente:** (a) Robotics lab, Robots (b) Lego Mindstorms.(c) Care-O-bot 4. (d) Sanbot robot.

Las investigaciones de las plataformas de robots individuales día a día abarcan una amplia gama de aplicaciones comparadas con las clásicas como: recolección y entrega de servicios en hogares y oficinas, inspección de seguridad, limpieza, cuidado, espectáculo, exposición, arte, publicidad, ventas, transporte e investigación etc. (ver Figura 2.16), no obstante se ven expuestas a la seguridad de la información, pues cada vez más el internet de las cosas toma más fuerza en las actividades diarias y cotidianas, sin que hayan mejorado los hábitos del usuario u operador humano y de fabricantes para preocuparse en la protección de información y brindar mayores avances en la cultura robótica.



(a) YuMi, robot que toma el rol de conductor de una orquesta, fabricado por la empresa ABB.



(b) Twenty One, robot asistente de hogar.

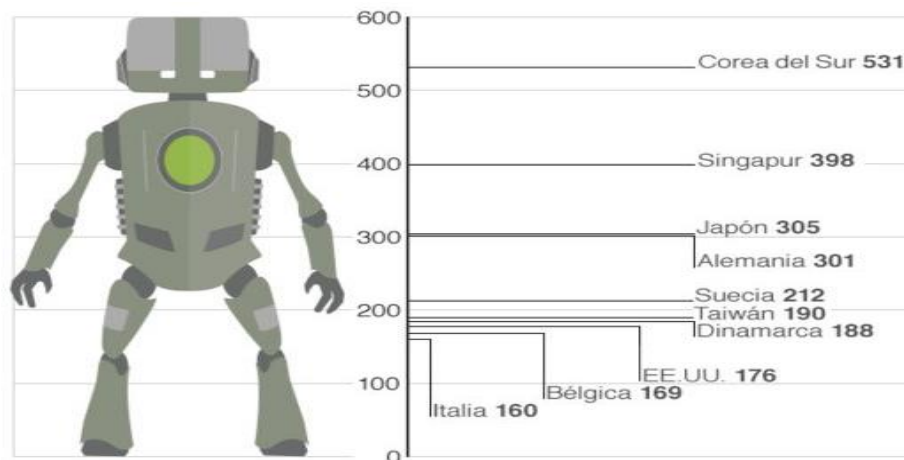
**Figura 2.16** Robots de servicio personal

**Fuente:** (a) New Atlas Robotics: Robots takes on the role of conductor. (b) LunaGate, Twenty One.

### 2.3.2.3. Futuro de los Robots de Servicio

En 1999 los robots de servicio fueron evaluados estadísticamente por la IFR y la Comisión Económica de las Naciones Unidas de Europa (por sus siglas UNECE, Ginebra). Antes de este estudio la sección robótica de servicio de *IFR World Robotics* se ha establecido como la publicación referencia en estadísticas, el análisis de mercado de pronóstico y rentabilidad de las inversiones de robots.

Según los datos proporcionados a BBC Mundo (Max, 2017) por parte de la Federación Internacional de Robótica, actualmente existe 1,63 millones de robots funcionando alrededor del mundo, de los cuáles los países que más emplean autómatas en la industria son Corea del Norte, Singapur y Japón, y en América Latina se destaca México, Argentina y Brasil (ver Figura 2.17). Y se estima que para el año 2019 la cantidad de robots se incremente a 2,6 millones a nivel mundial, confirmando de esta manera que la automatización de la cuarta revolución industrial se está acelerando con el paso de los años.



**Figura 2.17** Estadísticas de los países más robotizados - Número estimado de robots por cada 10mil empleados.

Fuente: BBC Mundo – Federación Internacional de Robótica, 2016.

De la mano de la robótica en los últimos años se encuentran la investigaciones dando mayor énfasis a la realidad virtual, considerando que ésta proporciona un medio de simulación que reproduce de manera similar los fenómenos físicos que se presentan en un entorno dinámico en estudio, para recrear acciones para la toma de decisiones en ambientes incluso que representan peligro para un operador humano; es así que, los robots pueden ser manipulados a través de movimientos de usuarios que se encuentran

conectados a un ambiente simulado por realidad virtual o en aplicaciones comúnmente para entrenar y capacitar al personal que se desenvuelve en campos como la medicina, industrial (petróleo, gas, etc.), aviación o estar más familiarizado con la sociedad con aplicaciones de terapia física (Andaluz., 2016), entretenimiento (videojuegos) y educación (ver Figura 2.18).



**Figura 2.18** Realidad virtual aplicada a la terapia robótica para recuperación cardiovascular.

**Fuente:** Tyrimotion, *Robotic assisted arm-rehabilitation with Diego*.

### 2.3.3. Robótica Móvil

La Robótica móvil es un área de investigación activa donde investigadores de todo el mundo encuentran nuevas tecnologías para mejorar la inteligencia de los robots móviles y las áreas de aplicación. Entre las distintas estructuras de robots, el tipo unicycle es el más utilizado en varias tareas debido a su buena movilidad y configuración simple. Esta estructura del robot se ha utilizado en varias aplicaciones como vigilancia, limpieza de pisos y el transporte de carga industrial que utiliza los vehículos autónomos guiados.

#### 2.3.3.1. Sistemas de Locomoción

Las principales razones que influyen la movilidad y control de un robot móvil están fuertemente ligadas a la relación vehículo – terreno sobre el cual se desplaza. Es por esto que, uno de los principales aspectos a considerar en el diseño de un robot móvil es la estructura mecánica, de manera particular en su sistema de locomoción.

Además, Roland Siegwart *et al*, 2004 en su libro *Introduction to Autonomous Mobile Robots* señala que, la locomoción es el complemento de la manipulación y que ambos comparten los mismos argumentos centrales de:

- Estabilidad: número y geometría de los puntos de contacto; centro de gravedad; estabilidad estática y dinámica; inclinación del terreno.
- Características de contacto: puntos de contacto/tamaño y forma de la trayectoria; ángulo de contacto, fricción.
- Tipos de ambientes: estructura y medio (agua, aire, tierra, etc.)

El análisis teórico de la locomoción tiene como punto de partida a la mecánica y la física, es entonces que se definir formalmente y analizar todo tipo de sistema de locomoción de robot móvil; a modo de clasificación de las más consideradas se tienen los siguientes tipos de locomoción terrestre:

*Locomoción – Ruedas:* son los mecanismos de locomoción más populares en la robótica móvil, permiten obtener buena eficiencia y equilibrio, esto debido a en su diseño se considera casi siempre que existe contacto permanente entre la rueda y el suelo. En diseños de más de tres ruedas se debe considerar un sistema de suspensión que permita mantener siempre contacto de las ruedas con el terreno en superficies irregulares (ver Figura 2.19a).

*Locomoción – Patas:* se caracteriza por poseer al menos un punto de contacto entre el robot y el suelo, cuya ventaja se encuentra en la adaptabilidad y maniobrabilidad en terrenos ásperos, su desventaja radica en la potencia y su complejidad mecánica, debido a que puede incluir diversos grados de libertad sin dejar de lado la capacidad para sostener parte de la totalidad del peso de un robot (ver Figura 2.19b).

*Locomoción – Orugas:* permite mantener una mayor área de contacto con el suelo, obteniendo una buena maniobrabilidad y tracción que las ruedas y una movilidad superior a la locomoción por patas; sin embargo, se presenta como desventaja el consumo de potencia y vibración cuando el piso es irregular (ver Figura 2.19c).



(a) Ruedas

(b) Patas



(c) Oruga

**Figura 2.19** Tipos de locomoción

Elaborado por: Gabriela Andaluz

Sin embargo, ésta clasificación no es cerrada y conforme las investigaciones avanzan pueden aparecer nuevos parámetros y diseños de locomoción que no entren en las categorías antes citadas.

## CAPÍTULO III

### 3. MODELACIÓN DE ROBOTS MÓVILES

La ejecución correcta del movimiento de un robot está confiada al sistema de control que proporcionará a los actuadores del robot las instrucciones apropiadas para la trayectoria de movimiento deseado. El control de movimiento del punto de interés de un robot móvil requiere un análisis preciso de las características de la estructura mecánica, actuadores y sensores. El objetivo de este análisis es la derivación de modelos matemáticos de los componentes del robot. Modelar un robot móvil es por lo tanto una premisa necesaria para encontrar estrategias de control de movimiento.

El modelado de los brazos robóticos se ha explorado durante más de veinte años, y los modelos resultantes - cinemáticos o dinámicos - son genéricos al menos para las cadenas abiertas. Este no es el caso de las plataformas móviles debido a la variedad de estructuras: plataformas de ruedas, sistemas de espacio libre de vuelo, vehículos submarinos, etc. Si sólo se consideran plataformas de ruedas, el número de estructuras posibles sigue siendo grande, por ejemplo, se puede articular o resbalar en el suelo. Hasta donde se conoce, las únicas plataformas de ruedas que han llevado al modelado sistemático son aquellas que se mueven sobre un terreno plano, y se someten a restricciones de deslizamiento sin resbalar. La plataforma, que no puede moverse instantáneamente en ninguna dirección arbitraria, se dice que no es holonómica, *Campion et al.*, 1996; muestra herramientas para el modelado genérico de sistemas robóticos construidos a partir de plataformas móviles con ruedas.

Las ecuaciones de movimiento de un robot móvil pueden ser obtenidas a partir de la ecuación de Euler-Lagrange basada en la función energética de Lagrange. Las ecuaciones diferenciales resultantes describen el movimiento en términos de las variables de la articulación y los parámetros estructurales del robot móvil. Un enfoque alternativo al modelado de la dinámica del brazo robótico es considerar cada enlace como un cuerpo libre y obtener las ecuaciones de movimiento para cada enlace sobre la base de las leyes



de Newton y Euler. Los dos métodos conducen exactamente a las mismas soluciones, es decir, la relación entre un conjunto de coordenadas generalizadas y las correspondientes fuerzas generalizadas, mientras que existen ciertos méritos y deméritos para cada método (Kelly, 2005)(Spong y Vidyasagar, 1989, Yoshikawa, 1990, Sciavicco y Siciliano, 2000). En la literatura, las ecuaciones habituales de movimiento para un robot móvil son las obtenidas usando la formulación de Euler-Lagrange, e introducen la notación para derivar las ecuaciones de movimiento de un robot móvil.

En este capítulo se propone un modelo dinámico para un robot móvil con ruedas, que difiere a trabajos anteriores ya que se toma en cuenta que el centro de masa está desplazado del eje que une las ruedas, y además se considera velocidades de referencia como señales de control al sistema, como es común en robots comerciales. Además, el modelo tiene una estructura adecuada para el diseño de las leyes de control.

### 3.1 MODELACIÓN CINEMÁTICA

Se supone que la plataforma móvil se mueve sobre una superficie plana horizontal. Donde  $\mathcal{R} = (X, Y, Z)$  puede ser cualquier plano de referencia fijo con el eje  $z$  vertical. La localización de la plataforma móvil es determinada por el vector  $\mathbf{q}$  de  $n = 3$  coordenadas el cual define la posición y orientación del robot móvil en  $\mathcal{R}$ . Estas coordenadas son denominadas *coordenadas operacionales*. Las coordenadas se describen como  $\mathbf{q} = [x \ y \ \psi]^T$ , donde  $x$  y  $y$  representa la posición de interés de control del robot móvil en  $\mathcal{R}$  y  $\psi$  es la orientación. El conjunto de todas las variables constituye el espacio operativo de la plataforma, denotado por  $\mathcal{M}$ .

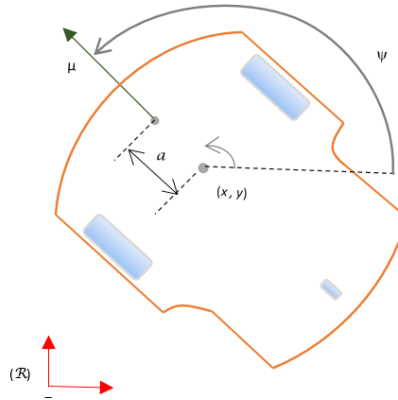
Las plataformas móviles, pueden ser clasificadas en cuatro categorías según el tipo de ruedas que posee (Bayle *et al.*, 2003)

- 1) las *ruedas fijas* para las cuales el eje tiene una dirección fija;
- 2) los *ruedas volantes*, para los cuales el eje de orientación pasa a través del centro de la rueda;
- 3) las *ruedas castor*, para las cuales el eje de orientación no pasa a través del centro de la rueda;

- 4) las *ruedas suecas*, que son similares a las ruedas fijas, con excepción de un parámetro adicional que describe la dirección, con respecto al plano de las ruedas, de la componente cero de la velocidad en el punto de contacto.

Este trabajo se basa en robots móviles tipo unicyclo (también denominado monociclo); un robot móvil monociclo es un robot que puede girar libremente alrededor de su eje. El término monociclo se utiliza a menudo en la robótica para definir un robot que se mueve en un mundo bidimensional, estos robots móviles típicamente están conformados por dos ruedas, las cuales son controladas de manera independiente por dos motores de corriente continua, además, suelen tener una rueda loca para la estabilidad física del robot.

Si el punto de interés del robot móvil tipo monociclo está definido por un punto situado delante del centro del eje de las ruedas como se muestra en la Figura 3.1, entonces



**Figura 3.1** Robot móvil tipo unicyclo  
Elaborado por: Gabriela Andaluz

De la Figura 3.1, es posible obtener el modelo geométrico,

$$\begin{cases} x = x_0 + a \cos(\psi) \\ y = y_0 + a \sin(\psi) \end{cases} \quad (3.1)$$

Derivando (3.1) se obtiene el modelo cinemático instantáneo del robot móvil respecto a marco inercial  $\{R\}$ .

$$\begin{cases} \dot{x} = u \cos(\psi) - a\omega \sin(\psi) \\ \dot{y} = u \sin(\psi) + a\omega \cos(\psi) \\ \dot{\psi} = \omega \end{cases} \quad (3.2)$$

Donde el control de maniobrabilidad del robot móvil está definido por  $\mathbf{v} = [u \ \omega]^T$  en el cual  $u$  y  $\omega$  representan la velocidad lineal y velocidad angular, respectivamente.

El modelo de cinemático (3.2) puede ser representado de forma matricial a fin de ser utilizados en esquemas de control

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -a \sin(\psi) \\ \sin(\psi) & a \cos(\psi) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Representada de forma compacta como

$$\dot{\mathbf{h}}(t) = \mathbf{J}(\psi) \mathbf{v}(t) \quad (3.4)$$

$$\dot{\psi} = \omega \quad (3.5)$$

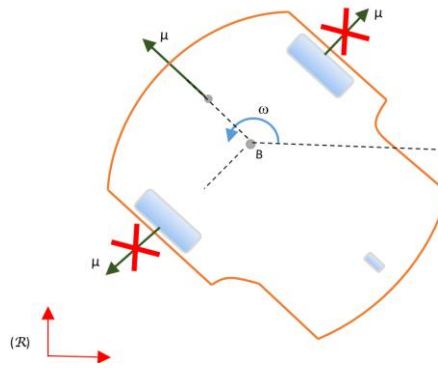
donde,  $\mathbf{v}(t) = [u \ \omega]^T$  es el vector de velocidades del robot móvil y  $\mathbf{J}(\psi)$  representa la matriz Jacobiana, la misma que define un mapeo lineal entre el vector de velocidades del robot móvil  $\mathbf{v}(t)$  y el vector de velocidades de posición  $\dot{\mathbf{h}}(t) = [\dot{x} \ \dot{y}]^T$

### 3.1.1 Características Cinemáticas

En esta subsección se presenta las características cinemáticas más relevantes de un robot móvil tipo unicycle.

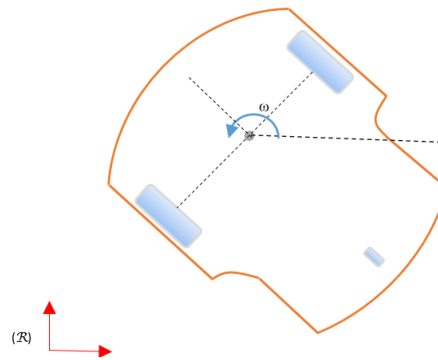
- El robot móvil tipo unicycle se caracteriza por la restricción de velocidad no holonómica que determina el impedimento de moverse paralelo al eje que une las ruedas, y es obtenida a partir de (3.3),

$$\dot{x} \sin(\psi) - \dot{y} \cos(\psi) - a \dot{\theta} = 0 \quad (3.3)$$



**Figura 3.2** Restricción de movimiento de robot  
 Elaborado por: Gabriela Andaluz

- El robot móvil tiene la capacidad de girar en su propio eje, ver Figura 3.3

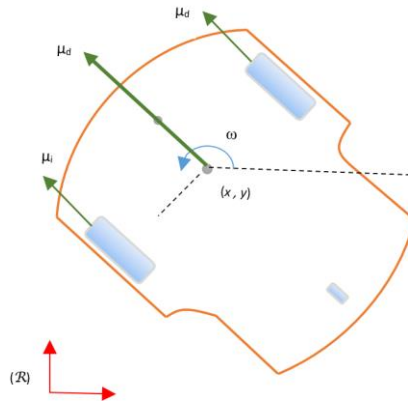


**Figura 3.3** Movimiento en su propio eje  
 Elaborado por: Gabriela Andaluz

- Las velocidades de maniobrabilidad del robot móvil son representadas por la velocidad lineal  $u$  y velocidad angular  $\omega$ : Las velocidades de maniobrabilidad son obtenidas a partir de las velocidades lineales de cada rueda, es decir,  $u_d$  y  $u_i$  son las velocidades lineales la rueda derecha e izquierda, respectivamente, ver Figura 3.4

$$u = \frac{u_d + u_i}{2} \quad (3.4)$$

$$\omega = \frac{u_d - u_i}{2R} \quad (3.5)$$



**Figura 3.4** Velocidad de cada rueda  
 Elaborado por: Gabriela Andaluz

- El modelo cinemático del robot móvil puede ser representado de forma matricial como  $\dot{\mathbf{h}}(t) = \mathbf{J}(\psi) \mathbf{v}(t)$ ; por lo tanto si  $a \neq 0$  entonces existe la inversa de  $\mathbf{J}(\psi)$  es decir,

$$\mathbf{J}^{-1}(\psi) = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) \\ -\frac{1}{a}\sin(\psi) & \frac{1}{a}\cos(\psi) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

de (3.6) se puede concluir que  $|\mathbf{J}(\psi)| = \frac{1}{a}$ ,

### 3.2 MODELACIÓN DINÁMICA

En este trabajo a fin de obtener el modelo dinámico de un robot móvil tipo unicycle con centro de masa desplazado se considera el método Euler-Lagrange. Este método hace un balance de energías de la dinámica, tanto cinética como potencial, para obtener la función lagrangiana del sistema, que se relaciona directamente con las partes de las articulaciones.

El lagrangiano de un sistema mecánico se define como:

$$L = K - P \quad (3.7)$$

donde  $K$  y  $P$  representan, respectivamente, la energía cinética y la potencial del sistema. Las ecuaciones de Lagrange se expresan como:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dL}{dq_n} \right) - \frac{dL}{dq} = \tau_n \quad (3.8)$$

siendo  $n$  el número de variables de las *coordenadas operacionales* del robot móvil. Al elegir estas variables como grados de libertad, las fuerzas generalizadas son equivalentes a los pares aplicados a cada actuador.

**Energía Cinética**, considere un robot móvil con  $n$  *coordenadas operacionales*. Entonces la energía cinética total viene dada por la suma de la energía de los diferentes tramos

$$K = \sum_{n=1}^n K_n \quad (3.9)$$

donde  $K_n$  es la energía cinética producida por la coordenada operacional  $n$ .

**Energía Potencial**, al igual que la energía cinética, la energía potencial del sistema viene dada por la suma de las aportaciones de cada tramo según la ecuación,

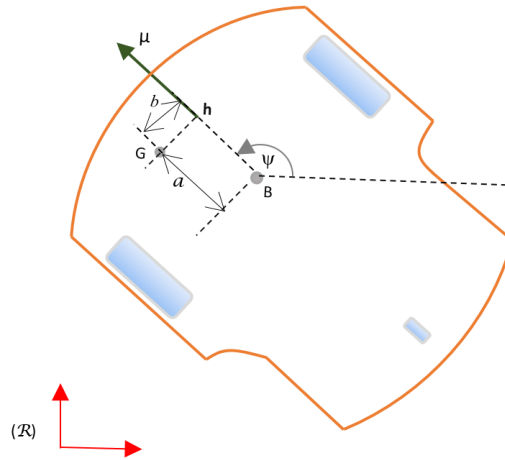
$$U = \sum_{n=1}^n U_n \quad (3.10)$$

donde  $U_n$  es la energía cinética producida por la coordenada operacional  $n$ .

### 3.2.1 Modelación dinámica con centro de masa desplazado

De forma similar que en la modelación cinemática se considera un robot móvil que puede movilizarse sobre superficies planas horizontales, donde  $\mathcal{R} = (\sum_w, X, Y, Z)$  es el marco de referencia fijo con respecto al eje  $Z$ . El control de movimiento del robot tradicionalmente considera que el punto de control para el seguimiento de trayectoria se encuentra ubicado delante del eje virtual y se denota como  $h(x, y)$ ; dicho punto es de interés para el diseño de los diferentes algoritmos de control a ser implementados en el robot móvil, ver Figura 3.5. Sin embargo, para la modelación dinámica se asume que el centro de masa  $G$  está desplazado hacia adelante y de forma lateral del punto central de

la estructura al punto  $B$ , el mismo que se encuentra situado en el centro del eje virtual que une las dos ruedas.



**Figura 3.5** Esquema de robot  
Elaborado por: Gabriela Andaluz

Cabe recalcar, que la desviaciones laterales del centro de masa de un robot móvil puede ser producido por el transporte de carga o por la localización y/o movimiento de la herramienta; por ejemplo, la localización, movimiento y manipulación de un brazo robótico montado sobre un robot móvil puede producir que el centro de la masa del robot móvil no este situada en el centro del eje de los robots. La posición del centro de masa se puede definir como,

$$\begin{cases} x_0 + a \cos(\psi) - b \sin(\psi) \\ y_0 + b \cos(\psi) + a \sin(\psi) \\ \psi \end{cases} \quad (3.11)$$

derivando (3.11) se obtiene las velocidad de las coordenadas generalizadas del centro masa

$$\dot{\zeta} = \begin{bmatrix} \dot{\zeta}_x \\ \dot{\zeta}_y \\ \dot{\zeta}_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} - \omega(b \cos(\psi) + a \sin(\psi)) \\ \dot{y} + \omega(a \cos(\psi) - b \sin(\psi)) \\ \omega \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

De la Figura 3.5 es posible describe la energía cinética del robot móvil mediante

$$K = \frac{1}{2} \dot{\zeta}^T m \dot{\zeta} \quad (3.13)$$

donde  $m$  representa la masa puntual de la plataforma móvil; resolviendo (3.13) se tiene,

$$K = \frac{m\omega^2}{2} + m\left(\zeta_x - \omega(b\cos(\psi) + a\sin(\psi))\right)^{\frac{1}{2}}\left(\zeta_x - \omega(b\cos(\psi) + a\sin(\psi))\right) + \dots \quad (3.14)$$

$$+ m\left(\zeta_y + \omega(a\cos(\psi) - b\sin(\psi))\right)^{\frac{1}{2}}\left(\zeta_y + \omega(a\cos(\psi) - b\sin(\psi))\right)$$

Para el caso de la energía potencial, el robot móvil no posee desplazamientos en el eje  $Z$ , por lo cual

$$P = 0. \quad (3.15)$$

Mediante (3.14) y (3.15) se determina la ecuación del Lagrangeano (3.7) del robot móvil, obteniendo que  $L = K$

$$L = \frac{m\omega^2}{2} + m\left(\zeta_x - \omega(b\cos(\psi) + a\sin(\psi))\right)^{\frac{1}{2}}\left(\zeta_x - \omega(b\cos(\psi) + a\sin(\psi))\right) + \dots \quad (3.16)$$

$$+ m\left(\zeta_y + \omega(a\cos(\psi) - b\sin(\psi))\right)^{\frac{1}{2}}\left(\zeta_y + \omega(a\cos(\psi) - b\sin(\psi))\right)$$

Aplicado el método Euler-Lagrange  $\frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\zeta}}\right) - \frac{dL}{d\zeta}$  en (3.16) se determina las fuerzas y

torque de rotación generados por el robot móvil respecto a  $\mathcal{R} = (\Sigma_w, X, Y, Z)$ . Por lo tanto, la fuerza  $f_{\zeta_x}$  generada sobre el eje  $X$  en el punto de interés  $\zeta$  de la plataforma móvil es:

$$f_{\zeta_x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\zeta}_x}\right) - \frac{dL}{d\zeta_x}$$

$$f_{\zeta_x} = -m\omega^2(a\cos(\psi) - b\sin(\psi)) + m\dot{\zeta}_x - m\omega(b\cos(\psi) + a\sin(\psi)) \quad (3.17)$$

De forma similar a (3.17) se determina la fuerza  $f_{\zeta_y}$  generada sobre el eje  $Y$  en el punto de interés  $\zeta$  de la plataforma móvil.

$$f_{\zeta_y} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dL}{d\dot{\zeta}_y}\right) - \frac{dL}{d\zeta_y}$$



$$f_{\zeta_y} = -m\omega^2 (b\cos(\psi) + a\sin(\psi)) + m\dot{\zeta}_x + \omega \left( \frac{1}{4} (m(acos(\psi) - b\sin(\psi))) + \frac{1}{2} m(acos(\psi) - b\sin(\psi)) \right) \quad (3.18)$$

De manera similar a (3.17) y (3.18) se determina el torque  $\tau_{\zeta_\psi}$  generado sobre la plataforma móvil

$$\tau_{\zeta_\psi} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dL}{d\dot{\zeta}_\psi} \right) - \frac{dL}{d\zeta_\psi}$$

$$\tau_{\zeta_\psi} = m(\dot{\omega} + a^2\dot{\omega} + b^2\dot{\omega} + a\ddot{\zeta}_x \cos(\psi) - b\ddot{\zeta}_x \sin(\psi) - a\ddot{\zeta}_y \sin(\psi) - b\ddot{\zeta}_y \cos(\psi)) \quad (3.19)$$

Reagrupando términos de (3.17), (3.18) y (3.19) se tiene,

$$\begin{bmatrix} f_{\zeta_x} \\ f_{\zeta_y} \\ \tau_{\zeta_\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 & -m(b\cos(\psi) + a\sin(\psi)) \\ 0 & m & m(acos(\psi) - b\sin(\psi)) \\ -m(b\cos(\psi) + a\sin(\psi)) & m(acos(\psi) - b\sin(\psi)) & m(a^2 + b^2 + 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\zeta}_x \\ \ddot{\zeta}_y \\ \ddot{\zeta}_\psi \end{bmatrix} + \dots$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & -m\omega(a\cos(\psi) - b\sin(\psi)) \\ 0 & 0 & -m\omega(b\cos(\psi) + a\sin(\psi)) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\zeta}_x \\ \dot{\zeta}_y \\ \dot{\zeta}_\psi \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_p(t) = \mathbf{M}(\psi)\ddot{\boldsymbol{\zeta}}(t) + \mathbf{C}(\psi, \dot{\psi})\dot{\boldsymbol{\zeta}}(t) \quad (3.20)$$

donde  $\mathbf{M}(\psi)$  representa la matriz de inercia;  $\mathbf{C}(\psi, \dot{\psi})$  representan la matriz de fuerzas centrípetas y centrifugas; y  $\mathbf{f}_p(t)$  son las fuerzas y torques generado en el robot móvil.

Ahora, a fin de expresar el modelo dinámico del robot móvil en función de las velocidades lineal y angular, se considera la siguiente expresión

$$\ddot{\boldsymbol{\zeta}}(t) = \mathbf{S}(\psi)\dot{\mathbf{v}}(t) + \dot{\mathbf{S}}(\psi, \dot{\psi})\mathbf{v}(t) \quad (3.21)$$

donde,  $\mathbf{S}(\psi)$  se obtiene a partir de

$$\mathbf{S}(\psi) = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -a \sin(\psi) - b \cos(\psi) \\ \sin(\psi) & a \cos(\psi) - b \sin(\psi) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Por lo tanto

$$\dot{\mathbf{S}}(\psi, \dot{\psi}) = \begin{bmatrix} -\omega \sin(\psi) & -\omega(a \cos(\psi) - b \sin(\psi)) \\ \omega \cos(\psi) & -\omega(b \cos(\psi) + a \sin(\psi)) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

y  $\dot{\mathbf{v}}(t) = [\dot{u} \quad \dot{\omega}]^T$  es el vector de aceleraciones lineal y angular del robot móvil.

Sustituyendo (3.22) y (3.23) en (3.21), se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(t) &= \mathbf{M}(\mathbf{S}\dot{\mathbf{v}} + \dot{\mathbf{S}}\mathbf{v}) + \mathbf{C}\mathbf{S}\mathbf{v} \\ \mathbf{f}_p(t) &= \mathbf{M}\mathbf{S}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{M}\dot{\mathbf{S}}\mathbf{v} + \mathbf{C}\mathbf{S}\mathbf{v} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Paralelamente es posible describir las fuerzas y torque del robot móvil respecto a  $\{\mathcal{R}\}$  mediante la distribución de momento sobre las ruedas derecha e izquierda, respectivamente  $\tau_d$  y  $\tau_i$ ,

$$\begin{aligned} f_{\zeta_x} &= \frac{1}{r}(\tau_d + \tau_i) \cos(\psi) \\ f_{\zeta_y} &= \frac{1}{r}(\tau_d + \tau_i) \sin(\psi) \\ \tau_{\zeta_\psi} &= \frac{1}{r}(\tau_d - \tau_i) R \end{aligned}$$

donde  $r$  es el radio de las ruedas del robot móvil. Agrupando términos de forma compacta se tiene

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} f_{\zeta_x} \\ f_{\zeta_y} \\ \tau_{\zeta_\psi} \end{bmatrix} &= \frac{1}{r} \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \cos(\psi) \\ \sin(\psi) & \sin(\psi) \\ R & -R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_d \\ \tau_i \end{bmatrix} \\ \mathbf{f}(t) &= \mathbf{B}(\psi) \boldsymbol{\tau}(t) \end{aligned} \quad (3.25)$$

El torque generado en cada rueda del robot móvil puede ser representado a través de los modelos simplificados eléctricos-mecánicos de un motor de corriente continua,

$$\tau_d = \frac{k_a (v_d - k_b \omega_d)}{R_a} \quad (3.26)$$

$$\tau_i = \frac{k_a (v_i - k_b \omega_i)}{R_a} \quad (3.27)$$

donde,  $v_d$  y  $v_i$  son los voltajes de entrada aplicada a los motores derecho e izquierdo, respectivamente;  $k_a$  es la constante de torque multiplicado por la constante de reducción;  $k_b$  es el producto de la constante contra electromotriz y la constante de reducción;  $R_a$  es la resistencia eléctrica del motor; y  $\omega_d$ ,  $\omega_i$  son las velocidades angulares de la rueda derecha e izquierda, respectivamente. Además  $\omega_d$ ,  $\omega_i$  pueden ser descritas en función del movimiento general del robot móvil según,

$$\omega_d = \frac{1}{r} (u + \omega R) \quad (3.28)$$

$$\omega_i = \frac{1}{r} (u - \omega R) \quad (3.29)$$

Además considerando las ecuaciones de tensión para la velocidad lineal y angular en función de la distribución de voltaje en cada motor se plantea

$$v_u = \frac{1}{2} (v_d + v_i) \quad (3.29)$$

$$v_\omega = \frac{1}{2} (v_d - v_i) \quad (3.30)$$

Combinando (3.28)-(3.30) en (3.26) y (3.27) se tiene

$$\tau_d = \frac{k_a}{R_a} (v_u + v_\omega) - \frac{k_a k_b}{r R_a} (u + \omega R) \quad (3.31)$$

$$\tau_i = \frac{k_a}{R_a}(\nu_u - \nu_\omega) - \frac{k_a k_b}{r R_a}(u - \omega R) \quad (3.32)$$

Colocando de forma matricial (3.31) y (3.32) se tiene,

$$\begin{bmatrix} \tau_d \\ \tau_i \end{bmatrix} = \frac{K_a}{R_a} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_u \\ \nu_\omega \end{bmatrix} - \frac{K_a K_b}{r R_a} \begin{bmatrix} 1 & R \\ 1 & -R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \mathbf{D}\mathbf{v}(t) - \mathbf{E}\mathbf{v}(t) \quad (3.33)$$

donde  $\mathbf{v}_p(t)$  son los voltajes de alimentación para la velocidad lineal y angular; y  $\mathbf{D}_p$ ,  $\mathbf{E}_p$  son matrices constantes.

Es necesario considerar las velocidades de referencia de rotación y traslación como señales de entrada para poder expresar el modelo del móvil de una manera adecuada. Los robots móviles comerciales constan de controladores PID de bajo nivel, las cuales se restringen a la velocidad de referencia ingresada teniendo como inconveniente principal no permitir manipular la velocidad de ingreso a los motores. En este tenor la implementación de controladores de velocidad son incluidos en el modelo dinámico del robot, para que el mismo no resulte complejo se considera controladores de velocidad tipo PD de referencia de velocidades constantes como se describe a continuación (Andaluz, 2011).

$$\nu_u = K_{PT}(u_{ref} - u) - \dot{u}K_{DT}$$

$$\nu_\omega = K_{PR}(\omega_{ref} - \omega) - \dot{\omega}K_{DR}$$

donde,  $u_{ref}$  y  $\omega_{ref}$  representan los valores de referencia para la velocidad lineal y angular del controlador PD;  $K_{PT}$  y  $K_{DT}$  son las constantes proporcional y derivativa de traslación del robot móvil;  $K_{PR}$  y  $K_{DR}$  son las constantes proporcional y derivativa de rotación del robot móvil. Colocando de forma matricial los controladores tipo PD se tiene,

$$\begin{bmatrix} \nu_u \\ \nu_\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{PT} & 0 \\ 0 & K_{PR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{ref} \\ \omega_{ref} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{PT} & 0 \\ 0 & K_{PR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{DT} & 0 \\ 0 & K_{DR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_p(t) = \mathbf{K}_p \mathbf{v}_{\text{ref}} - \mathbf{K}_p \mathbf{v} - \mathbf{K}_D \dot{\mathbf{v}} \quad (3.34)$$

donde  $\mathbf{v}_{\text{ref}}(t)$  son las velocidades de referencia lineal y angular del robot móvil; y  $\mathbf{K}_p$  es la matriz de ganancia proporcional; y  $\mathbf{K}_D$  es la matriz de constantes de ganancia derivativa.

Agrupando (3.34) y (3.33) en (3.25), se determina

$$\mathbf{f}_p(t) = \mathbf{B}(\mathbf{D}(\mathbf{K}_p \mathbf{v}_{\text{ref}} - \mathbf{K}_p \mathbf{v} - \mathbf{K}_D \dot{\mathbf{v}}) - \mathbf{E}\mathbf{v}) \quad (3.35)$$

Igualando las (3.24) y (3.35) se tiene,

$$\dot{\mathbf{S}}\mathbf{B}(\mathbf{D}(\mathbf{K}_p \mathbf{v}_{\text{ref}} - \mathbf{K}_p \mathbf{v} - \mathbf{K}_D \dot{\mathbf{v}}) - \mathbf{E}\mathbf{v}) = \dot{\mathbf{S}}\mathbf{M}\dot{\mathbf{S}}\mathbf{v} + \dot{\mathbf{S}}\mathbf{M}\dot{\mathbf{S}}\mathbf{v} + \dot{\mathbf{S}}\mathbf{C}\mathbf{S}\mathbf{v} \quad (3.36)$$

Agrupando término de (3.36) se obtiene el modelo dinámico compacto del robot móvil con centro de masa desplazado; el modelo obtenido tiene como entradas las velocidades de referencia del robot

$$\mathbf{v}_{\text{refp}}(t) = \mathbf{K}_p^{-1} \left( \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{S}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{S}^T \mathbf{M} \mathbf{S} + \mathbf{K}_D \right) \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{K}_p^{-1} \left( \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{S}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{S}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{S}} + \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{S}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{S}^T \mathbf{C} \mathbf{S} + \mathbf{D}^{-1} \mathbf{E} + \mathbf{K}_p \right) \mathbf{v}$$

$$\mathbf{v}_{\text{ref}}(t) = \mathbf{H}\dot{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\eta}\mathbf{v}, \quad (3.37)$$

donde,

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{2K_a K_{DT} + mrR_a}{2K_a K_{PT}} & -m \frac{rbR_a}{K_a K_{PT}} \\ -m \frac{rbR_a}{2K_a K_{PR} R} & \frac{4R_a mra^2 + 2R_a mrb^2 + 2K_a K_{DR} R + R_a mr}{2K_a K_{PR} R} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{K_b}{rK_{PT}} & -\omega \frac{amrR_a}{K_a K_{PT}} \\ \omega \frac{amrR_a}{K_a K_{PR} R} & 1 + \frac{K_a K_b R^2 - \omega R_a abmr^2}{K_a K_{PR} Rr} \end{bmatrix}$$

De la expresión anterior es posible determinar los parámetros dinámicos del robot móvil con centro de masa desplazado  $\Omega = [\Omega_1 \ \Omega_2 \ \Omega_3 \ \Omega_4 \ \Omega_5 \ \Omega_6 \ \Omega_7 \ \Omega_8 \ \Omega_9]^T$ , es decir,

$$\Omega_1 = \frac{K_{DT}}{K_{PT}} + \frac{mrR_a}{2K_a K_{PT}} ; \quad \Omega_2 = \frac{4R_a mra^2 + 2R_a mrb^2 + 2K_a K_{DR} R + R_a mr}{2K_a K_{PR} R}$$

$$\Omega_3 = m \frac{rbR_a}{K_a K_{PT}} ; \quad \Omega_4 = m \frac{rbR_a}{2K_a K_{PR} R}$$

$$\Omega_5 = \frac{amrR_a}{K_a K_{PT}} ; \quad \Omega_6 = 1 + \frac{K_b}{rK_{PT}} ; \quad \Omega_7 = \frac{amrR_a}{K_a K_{PR} R}$$

$$\Omega_8 = 1 + \frac{K_b R}{K_{PR} r} \quad \text{y} \quad \Omega_9 = mr \frac{abR_a}{K_a K_{PR} R}$$

$$\begin{bmatrix} u_{ref} \\ \omega_{ref} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_1 & -\Omega_3 \\ -\Omega_4 & \Omega_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Omega_6 & -\omega\Omega_5 \\ \omega\Omega_7 & \Omega_8 - \omega\Omega_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Por lo tanto  $\mathbf{v}_{ref}(t) = \mathbf{H}\dot{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\eta}\mathbf{v}$  es determinada como:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \Omega_1 & -\Omega_3 \\ -\Omega_4 & \Omega_2 \end{bmatrix} ; \quad \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \Omega_6 & -\omega\Omega_5 \\ \omega\Omega_7 & \Omega_8 - \omega\Omega_9 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v}_{ref} = \begin{bmatrix} u_{ref} \\ \omega_{ref} \end{bmatrix} ; \quad \dot{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix}$$

### 3.2.2 Características Dinámicas

En esta subsección se presenta las características dinámicas del modelo del robot móvil tipo unicycle expresado en (3.38). Estas características pueden ser consideradas para diseño de controladores en donde se tome en cuenta la dinámica del robot:

- El modelo presentado propuesto considera con entradas la velocidad lineal y angular, no pares ni voltajes como el resto de los modelos típicos encontrados en la literatura.
- La matriz  $\mathbf{H}$  es simétrica y definida positiva, o sea

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^T > \mathbf{0} ;$$

- La inversa de  $\mathbf{H}$  existe y también es definida positiva, o sea

$$\exists \mathbf{H}^{-1} > \mathbf{0}$$

- La matriz  $\boldsymbol{\eta}$  es anti-simétrica.
- El mapeo  $\mathbf{v}_{ref} \rightarrow \mathbf{v}$ , es simétricamente positivo de salida.
- El modelo dinámico del robot móvil puede ser representado por

$$\mathbf{H}\dot{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\eta}\mathbf{v} = \boldsymbol{\chi}\boldsymbol{\Omega} \quad (3.39)$$

donde,  $\boldsymbol{\chi} \in \mathfrak{R}^{n \times l}$  y  $\boldsymbol{\Omega} = [\Omega_1 \ \Omega_2 \ \dots \ \Omega_l]^T \in \mathfrak{R}^l$  con  $l = 9$  representa el vector de los parámetros dinámicos del robot móvil, *i.e.*, de la masa del robot, los parámetros físicos del robot, de los motores, las velocidades lineales, las velocidades angulares entre otros.

Resolviendo las operaciones de las matrices de (3.39) se obtiene

$$\begin{bmatrix} \Omega_1 \dot{u} - \Omega_3 \dot{\omega} + \Omega_6 u - \Omega_5 \omega^2 \\ -\Omega_4 \dot{u} + \Omega_2 \dot{\omega} + \Omega_7 u \omega + \Omega_8 \omega - \Omega_9 \omega^2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{\chi}\boldsymbol{\Omega} \quad (3.40)$$

Agrupando los parámetros dinámicos se obtiene la parametrización lineal

$$\begin{bmatrix} \dot{u} & 0 & -\dot{\omega} & 0 & -\omega^2 & u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\omega} & 0 & \dot{u} & 0 & 0 & u\omega & \omega & -\omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \vdots \\ \Omega_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{ref} \\ \omega_{ref} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

### 3.3 IDENTIFICACIÓN Y VALIDACIÓN

La identificación y validación del modelo dinámico obtenido en (3.37) tiene como objetivo determinar los parámetros dinámicos de (3.38) a través de datos experimentales; los cuales permiten describir el comportamiento real del robot móvil durante un intervalo de tiempo, para lo cual, no se consideran las leyes internas que gobiernan los componentes del sistema.

El proceso de identificación de los parámetros dinámicos del robot móvil se basa principalmente en tres etapas: *i) Excitación del robot*, esta etapa se realiza on-line, para lo cual la excitación del robot se realiza a través de las señales de controlabilidad, es decir, velocidad lineal y velocidad angular de referencia del robot. El objetivo de esta etapa es

que conocer el valor de las velocidades de salidas ante un valor de excitación predeterminado, la diferencia entre estas señales ilustra la dinámica del robot. *ii) Algoritmo de identificación*, esta etapa se realiza off-line y tiene como objetivo la implementación de algún algoritmo que permita identificar los parámetros dinámicos en base a los valores obtenidos en la primera etapa; y finalmente *iii) validación* esta etapa es la encargada de evaluar si los valores de los parámetros dinámicos obtenidos son los correctos, para lo cual, se utiliza la estructura del modelo dinámico del robot obtenido teóricamente.

En este trabajo para estimar los parámetros dinámicos que mejor se ajuste al modelo dinámico del robot, se debe implementar el método de Mínimos Cuadrados, puesto que brinda mayor aproximación al sistema real, mismo que se define a través de la minimización de una función de costo que considera el error cuadrático medio, en cada período de muestreo, entre las velocidad de referencia y las velocidades de salida, es decir que los parámetros dinámicos estimados se obtienen a partir de

$$\mathbf{\Omega}^* = \left[ \mathbf{\zeta}_{\text{FP}}^T \mathbf{\zeta}_{\text{FP}} \right]^{-1} \mathbf{\zeta}_{\text{FP}}^T \mathbf{v}_{\text{ref\_FP}} \quad (3.42)$$

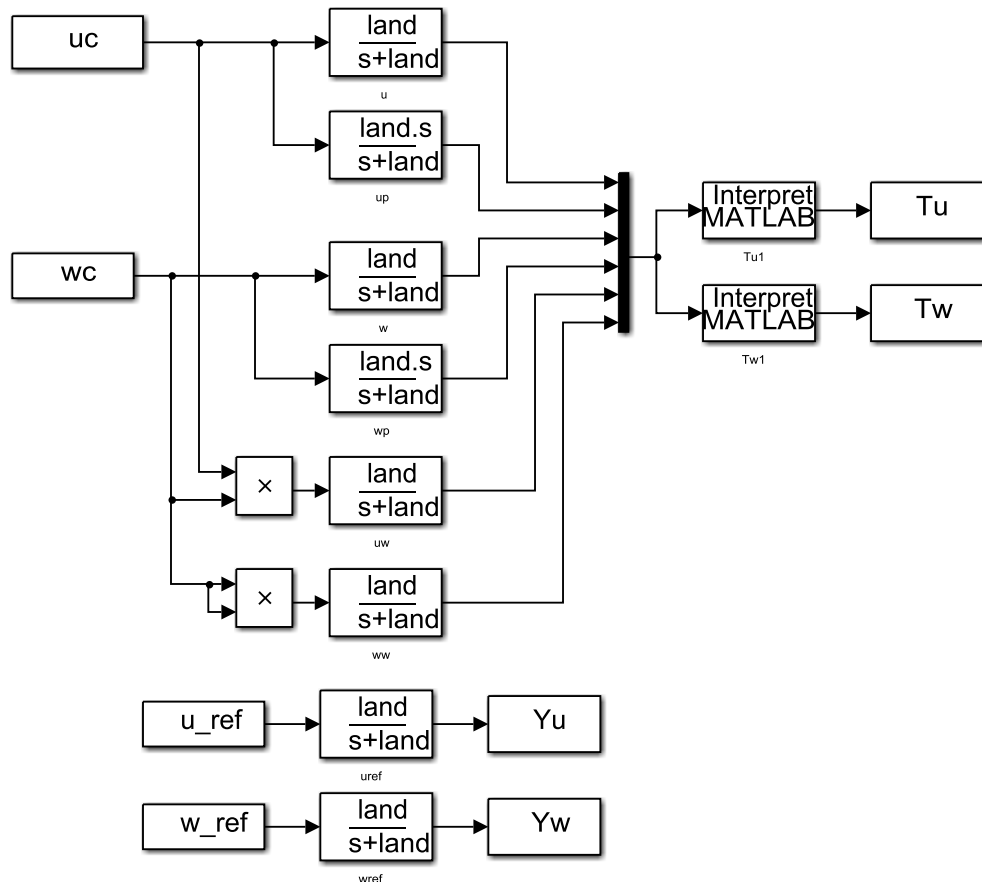
donde,  $\mathbf{\Omega}^*$  representa los valores de los parámetros dinámicos estimados del robot móvil.

Para la identificación y validación del modelo dinámico del robot móvil se implementó en Simulink de MatLab la (3.42), considerando un filtro de primer orden cuya función de transferencia está dado por

$$f(s) = \frac{\lambda}{(s + \lambda)} \quad (3.43)$$

donde,  $\lambda > 0$  y  $s$  representan el operador diferencial. El objetivo de implementar (3.43) es estimar las aceleraciones lineales y angulares a partir de las velocidades medidas, necesarias para implementar de (3.41). La Figura 3.6 muestra la implementación de (3.43) en (3.41).



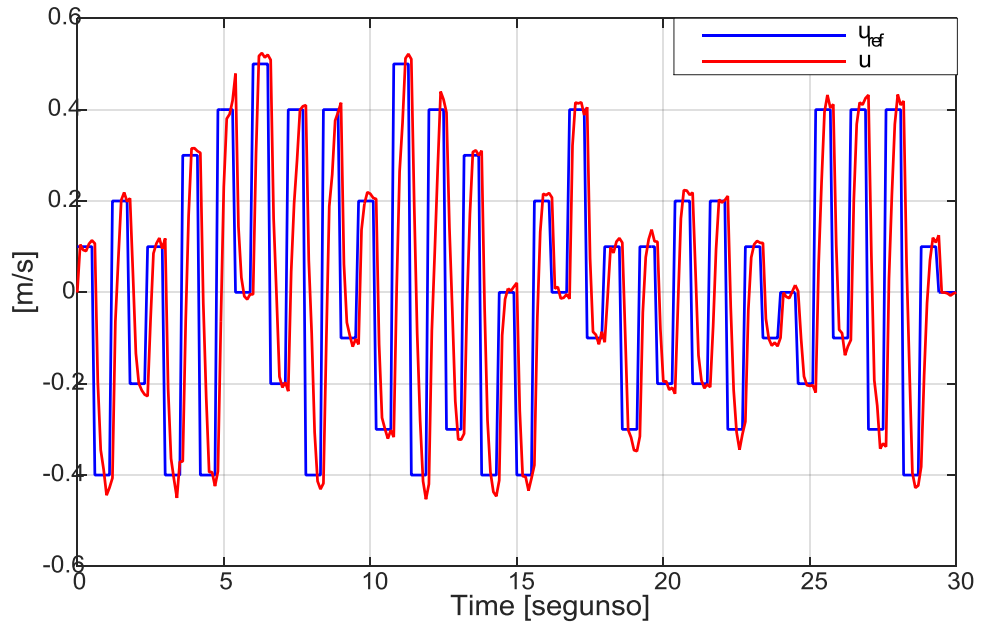


**Figura 3.6** Estimación de aceleración en cada periodo de muestreo  
**Fuente:** Script elaborado en Matlab

A partir de los vectores de salida de la Figura 3.6 se implementa en el Script de Matlab la (3.42), con lo cual se obtiene que los parámetros dinámicos estimados del robot móvil y son:

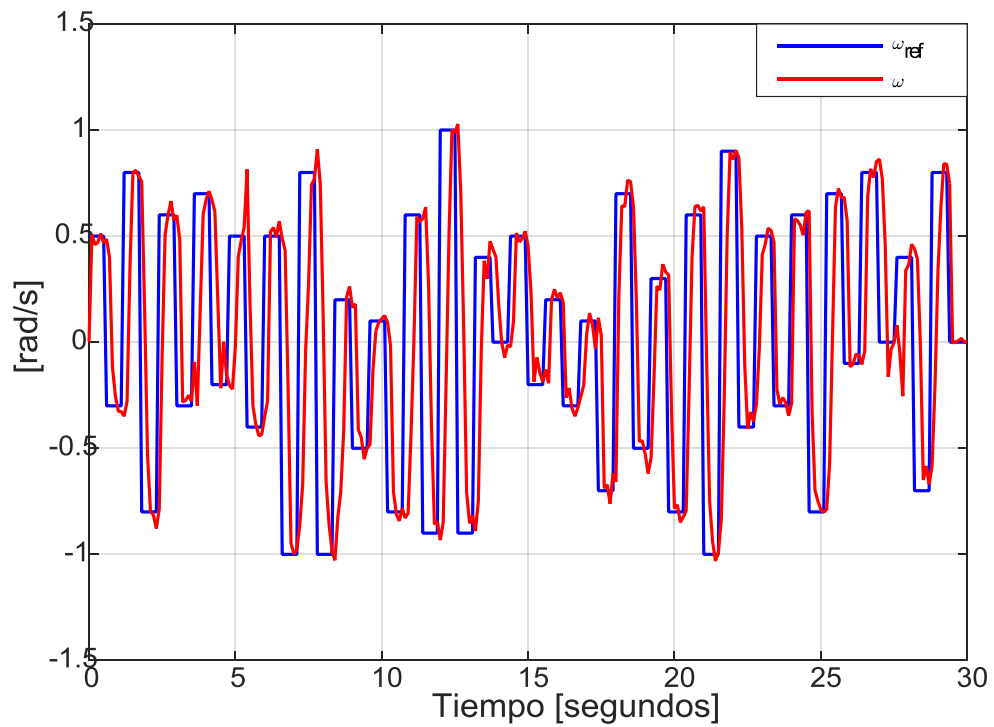
$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_1 = 0.1757 \\ \Omega_2 = 0.1279 \\ \Omega_3 = 0.0047 \\ \Omega_4 = -0.1730 \\ \Omega_5 = -0.0082 \\ \Omega_6 = 0.9710 \\ \Omega_7 = -0.1543 \\ \Omega_8 = 0.9510 \\ \Omega_9 = -0.0647 \end{array} \right. \quad (3.44)$$

A través de la fase I de excitación del robot móvil previo a la obtención de los valores estimados de los parámetros dinámicos, se consideró como referencia a las señales de control tanto de velocidad lineal y velocidad angular, según muestra las Figuras 3.7 -3.8



**Figura 3.7** Identificación de la velocidad lineal

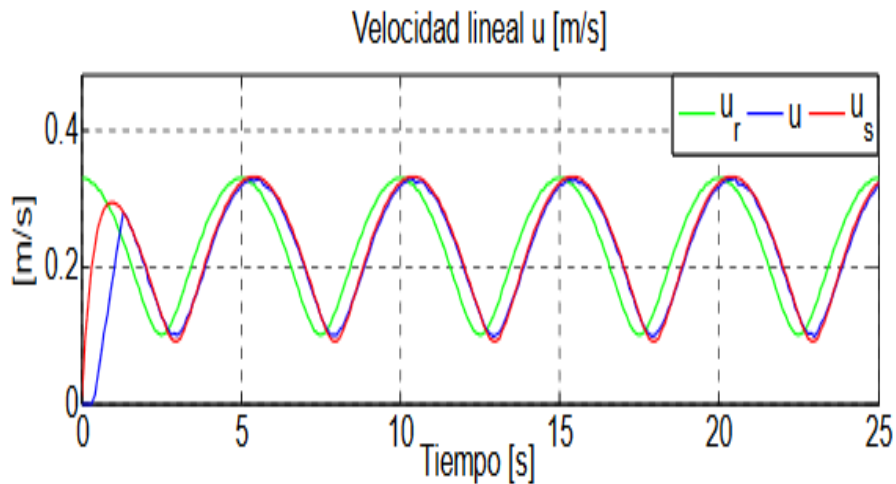
Fuente: Datos experimentales obtenidos



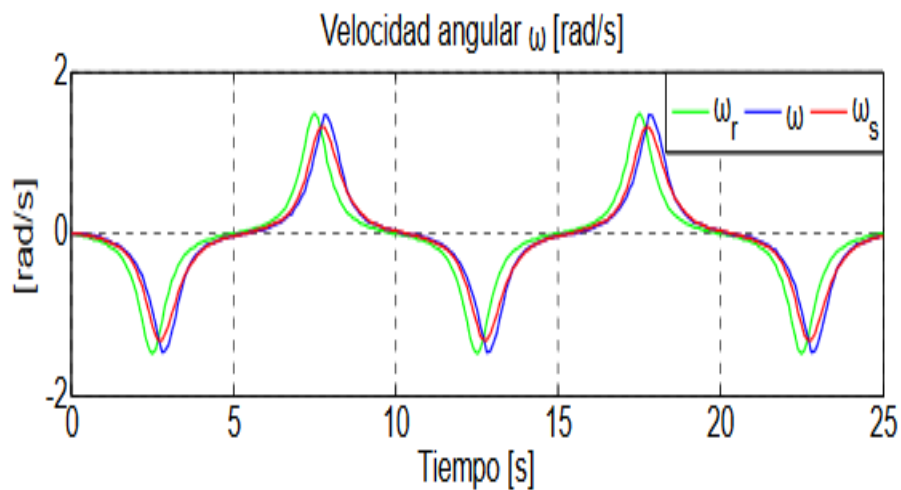
**Figura 3.8** Identificación de la velocidad angular

Fuente: Datos experimentales obtenidos

Mientras que las Figuras 3.9-3.10 ilustran la validación del modelo dinámico obtenido (3.38) una vez que el algoritmo de mínimos cuadrados fue implementado, empleando los valores estimados obtenidos experimentalmente de los parámetros dinámicos del robot móvil (3.44).



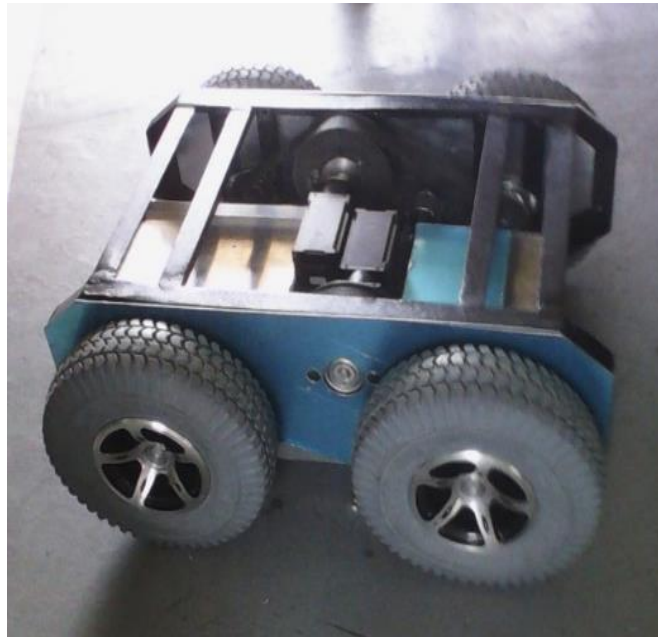
**Figura 3.9** Validación de la velocidad lineal  
Fuente: Datos experimentales obtenidos



**Figura 3.10** Validación de la velocidad angular  
Fuente: Datos experimentales obtenidos

En las Figuras 3.9-3.10 se puede observar que las salidas del modelo dinámico tanto para la velocidad lineal como angular (líneas rojas) siguen a las velocidades de salida reales de robot móvil (líneas azules); es así que se puede concluir que el modelo dinámico (3.38) y los parámetros dinámicos estimados (3.44) emulan el comportamiento del robot móvil

en el cual se consideró el centro de masa con desviación lateral según muestra la Figura 3.11 del robot móvil.



**Figura 3.11** robot móvil tipo unicycle  
Fuente: Robot móvil Akasha del Dpto. de Investigación ESPE

## **CAPÍTULO IV**

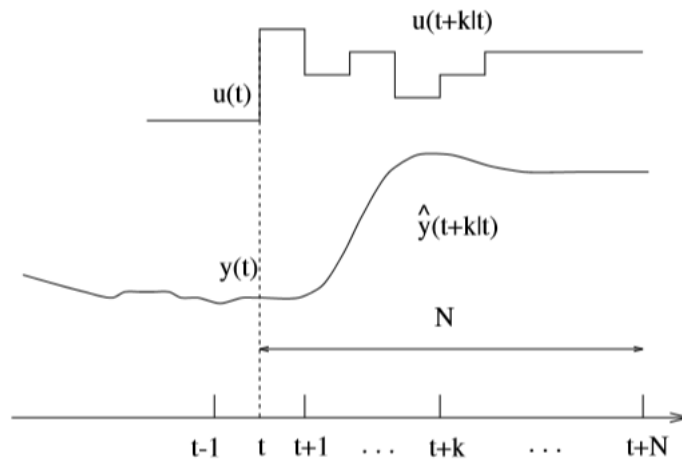
### **4. CONTROL PREDICTIVO BASADO EN MODELOS**

Modelo Predictivo de Control (por sus siglas en inglés MPC) corresponde a una clase de algoritmos de control computacional, haciendo uso explícito de un modelo del proceso para optimizar el comportamiento futuro previsto de una planta, se le conoce como horizonte deslizante, es decir, que en cada instante la predicción se va desplazando hacia el futuro.

Además, el MPC no considera una estrategia específica, sino que integra varias disciplinas, es así que, este algoritmo de control se ha venido empleando muchos años atrás con gran aceptación en el sector industrial, debido a que los objetivos de control y las restricciones operativas pueden ser integrados explícitamente en el problema de optimización que se resuelve a cada instante. El cálculo de una secuencia de control minimiza una función objetivo y el uso de la estrategia de retroceso. (Camacho F. et al, 2007).

#### **4.1 ESTRATEGIAS DEL MPC**

La metodología de todo controlador perteneciente a la familia de MPC se caracteriza por la siguiente estrategia, representada en la Figura 4.1



**Figura 4.1** Estrategia del MPC  
**Fuente:** Camacho, Model Predictive Control.

- El futuro de la salida para una determinado horizonte  $N$ , llamado el horizonte de la predicción, son predecibles en cada instante de  $t$  usando el modelo del proceso. Estas predicciones de las salidas  $y(t+k|t)^1$  para  $k = 1 \dots N$ , (donde  $k$  y  $N$  representan el movimiento y número de movimientos) dependiendo de los valores conocidos hasta el instante  $t$  (entradas y salidas pasadas) y de las futuras señales de control  $u(t+k|t), k = 0 \dots N-1$ , las cuales son enviados al sistema y calculadas.
- El conjunto de las futuras señales de control son calculadas por optimización de un criterio determinado, manteniendo el proceso lo más cercano posible a la trayectoria de referencia o deseada  $\omega(t+k)$  (que podría ser el punto de referencia en sí o estar lo más cercano posible a este). Este criterio usualmente, toma la forma de una función cuadrática de los errores entre la señal de salida predicha y el valor de la trayectoria referencial o deseada (*setpoint*), el cual es punto o conjunto de puntos en los que la señal de salida o variable controlada se establece bajos ciertos parámetros deseados. El esfuerzo del control está incluido en la función objetivo en la mayoría de los casos. Una solución explícita puede ser obtenida, si el criterio es cuadrático el modelo es lineal y no hay constantes, de otra manera se debe utilizar un método de optimización repetido. Algunas presunciones a cerca de la estructura de la ley del control futuro también se realizan en algunos casos, como que este fuese una constante desde un instante dado.

- La señal de control  $u(t|t)$  es enviada al proceso, mientras que las siguientes señales de control calculadas son rechazadas, porque en el siguiente instante de muestreo  $y(t + 1)$  es ya conocido y se repite el paso inicial con este nuevo valor y se actualizan todas las secuencias. Así la  $u(t + 1|t + 1)$  es calculada (que en principio podría ser diferente desde la  $u(t + 1|t)$  porque la nueva información está disponible) utilizando el concepto de horizonte de retroceso.

## 4.2 ESTRUCTURA BÁSICA DEL MPC

Acorde a la implementación de la estrategia señalada por Camacho F. et al, 2007, la complementa con la estructura básica del MPC mostrado en la Figura 4.2.

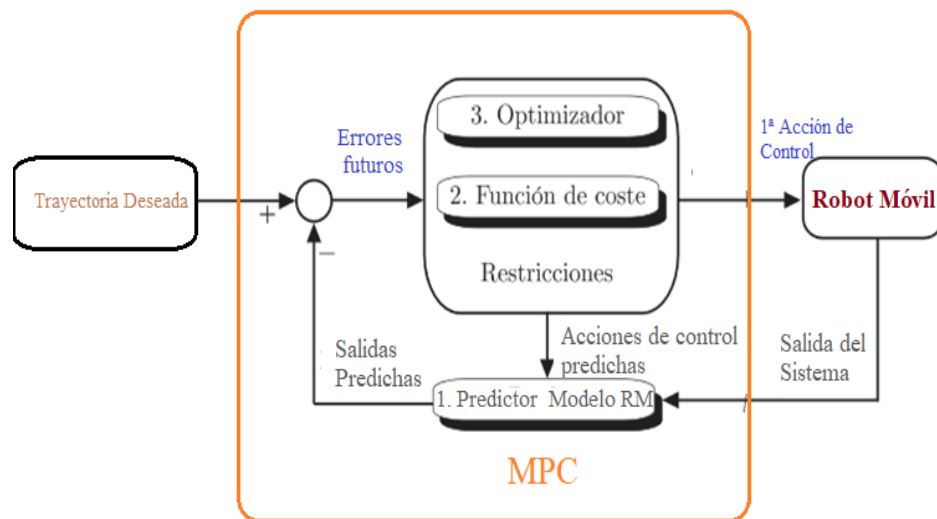


Figura 4.2 Estructura básica del MPC  
Elaborado por: Gabriela Andaluz.

El modelo es usado para predecir las salidas futuras de una planta, basado en los valores pasados y de restricciones y sobre las futuras acciones óptimas de control propuestas. Estas acciones son calculadas por el optimizador teniendo en cuenta la función de costo (donde el error de futuro de la trayectoria es considerado) así como las restricciones. El papel del modelo del proceso, tiene un rol decisivo en el desempeño del controlador; la elección del modelo deberá ser la captura de la dinámica del proceso para predecir con precisión las salidas futuras que sean de fácil implementación y entendimiento. Por lo

tanto, el MPC no tiene una única técnica pero más bien combina diferentes metodologías, por lo que hay varios tipos de modelos utilizados en diversas formulaciones.

### 4.3 ELEMENTOS DEL MPC

Todos los algoritmos del MPC poseen elementos comunes, y pueden elegir varias opciones para cada elemento dando lugar a diferentes algoritmos. Estos elementos son:

- **Modelo de predicción:** se refiere a un diseño completo que debe incluir los mecanismos necesarios para obtener en lo posible el mejor modelo, capaz de capturar al máximo la dinámica presente en un proceso real; además, de ser capaz de permitir el cálculo de las predicciones y al mismo tiempo ser intuitivo para desarrollar el análisis teórico respectivo. El modelo de predicción es necesario para el cálculo de las salidas  $y(t + k|t)$  en instantes futuros.

Las distintas estrategias del MPC emplean varios modelos para representar la relación entre las salidas y entradas medidas, algunas de las cuales son variables manipuladas y otras pueden ser consideradas como perturbaciones medidas que pueden compensarse mediante una acción de retroalimentación. El modelo de predicción puede ser dividido en dos partes: el modelo del proceso actual y las perturbaciones del modelo; ambas necesarias para la acción de la predicción.

La obtención del modelo puede darse a través de distintas formas como: respuesta impulsiva, respuesta escalón, función de transferencia y espacios de estado.

- **Función Objetivo:** los diversos algoritmos MPC proponen diferentes funciones de costo para obtener la ley de control. El objetivo general es que las salidas futuras ( $y$ ) en un horizonte considerado sigan una trayectoria determinada ( $w$ ) y, al mismo tiempo, seleccionar el esfuerzo de control necesario ( $\Delta u$ ) para que esta tarea se cumpla. La expresión general de la función objetivo se considera como:

$$J(N_1, N_2, N_3) = \sum_{j=N_1}^{N_2} \delta(j) [\hat{y}(t + j|t) - w(t + j)]^2 + \dots$$



$$+ \sum_{j=1}^{N_u} \lambda(j) [\Delta u(t+j-1)]^2 \quad (4.1)$$

- **Parámetros:**  $N_1, N_2$  corresponden a los horizontes de predicción máximo y mínimo, y  $N_u$  es el horizonte de control, donde no necesariamente debe coincidir con el horizonte máximo. El significado de los horizontes de predicción  $N_1, N_2$  es intuitivo, marcan el límite de los instantes en los cuales es deseado para las salidas seguir las referencias, para originar unas respuestas suaves del proceso.

Los coeficientes  $\delta(j), \lambda(j)$  son secuencias que consideran el comportamiento futuro, por lo general se consideran valores constantes o secuencias exponenciales.

- **Restricciones:** todos los procesos son sujetos a restricciones, estas definen las condiciones operativas, siendo necesario su introducción en la función que va a ser minimizada. Los límites en la amplitud, la velocidad de subida de la señal de control y de las señales de las salidas, son consideradas de la siguiente manera:

$$u_{min} \leq u(t) \leq u_{max} \quad (4.2)$$

$$du_{min} \leq u(t) - u(t-1) \leq du_{max} \quad (4.3)$$

$$y_{min} \leq y(t) \leq y_{max} \quad (4.4)$$

donde, las expresiones (4.2) – (4.4) representan los límites de las variables manipuladas, la velocidad de cambio de las variables manipuladas y los límites de las variables controladas o de salida, respectivamente. La función objetivo minimización se hace más compleja por la adición de estas restricciones, de modo que la solución no se puede obtener de forma explícita como fuese el caso de no emplear dichas restricciones.

- **Obtención de la ley de control:** con el fin de obtener los valores de  $u(t+k|t)$  es necesario minimizar la función  $J$  de la ecuación (4.1) para esto es necesario calcular los valores de las salidas predichas  $\hat{y}(t+k|t)$  como una función de los valores anteriores de las entradas y salidas, y las futuras señales de control haciendo uso del modelo seleccionado y reemplazado en la función costo.

La estructura de la ley de control es algunas veces impuesta por el uso del concepto de horizonte de control ( $N_u$ ). El mismo considera que después de cierto intervalo  $N_u < N_2$  donde no hay una variación en las señales de control propuestas:

$$\Delta u(t + j - 1) = 0 \quad j > N_u \quad (4.5)$$

El extremo del caso puede ser considerado como  $N_u = 1$  en donde futuras acciones de control pueden ser igual a  $u(t)$ .

#### 4.4 MODELO LINEAL Y NO LINEAL

En general, los procesos industriales no son lineales, pero, como se ha mencionado anteriormente muchas de las aplicaciones del MPC están basadas en el uso de modelos lineales. Hay dos razones principales para esto, la identificación de los datos de un proceso basado en el modelo lineal es relativamente fácil, y por otro lado, los modelos lineales proveen buenos resultados cuando las plantas están operando cerca del punto de referencia de operación o deseado. En los procesos industriales, donde el MPC lineal está muy extendido, el objetivo es mantener el proceso alrededor del estado estacionario en lugar de realizar cambios frecuentes de un punto de operación a otro y, por lo tanto, un modelo lineal preciso es suficiente. Además, el uso del modelo lineal junto con la función objetivo cuadrático da lugar a un problema convexo cuyas soluciones son estudiadas en muchos productos comerciales disponibles. La existencia de algoritmos que puedan garantizar una solución convergente en un tiempo más corto que el tiempo de muestreo es crucial en procesos donde existe gran número de variables.

Sin embargo, las respuestas dinámicas de los controladores lineales resultantes no son aceptadas cuando se aplican a procesos que no son lineales a grados variables de gravedad. Aunque en muchas situaciones el proceso estará operado cerca de punto de referencia, por lo tanto una representación lineal podría ser adecuada, hay algunas situaciones importantes donde esto no ocurre. Por un lado, hay procesos para los cuales las no linealidades son severas (incluso en la vecindad de los estados estacionarios) y tan crucial para la estabilidad de lazo cerrado que un modelo lineal no es suficiente. Por otro lado, existen algunos procesos que permiten continuar con las transacciones continuas (arranques, partidas, etc.) y pasan mucho tiempo alejados de una región operativa de

estado estacionario o incluso en procesos que nunca están en funcionamiento en estado estacionario, como es el caso de los procesos de procesamiento, donde la operación se realiza en modo transitorio. Para estos procesos una ley de control no lineal podría no ser muy efectiva, por lo que el controlador no lineal podría ser esencial para mejorar el rendimiento y operación estable.

No obstante, el número de aplicaciones del Control Predictivo No Lineal (por sus siglas NMPC) es una herramienta muy limitada, su potencial es grande debido a que el NMPC tiene que avanzar a aquellas áreas donde las no linealidades del proceso son fuertes y el mercado exige cambios frecuentes en los regímenes de operación.

#### **4.5 MPC NO LINEAL VERSUS MPC LINEAL**

La principal ventaja que el NMPC presenta respecto al MPC es la posibilidad de tratar con la dinámica no lineal. Como nuevas herramientas que facilitan el logro y la representación de modelos no lineales, a partir de los primeros principios o datos experimentales, aparecen en el mercado, el interés en el uso de NMPC.

No hay nada en los conceptos básicos del MPC contra el uso de un modelo lineal. Por lo tanto, la extensión del MPC a procesos no lineales es sencilla, al menos conceptualmente. Sin embargo, esto no es un asunto fácil, pues presenta muchas dificultades derivadas del uso de este tipo de modelos, tales como:

- La disponibilidad de modelos no lineales a partir de datos experimentales es una cuestión abierta. Existe una falta de técnicas y por tanto falencias para la identificación de los procesos no lineales. El uso de redes neuronales u otras técnicas no parece resolver el problema de una forma general. Por otra parte, el logro de los modelos a partir de los primeros principios (balances de masa y energía) no siempre es factible.
- El problema de optimización no es convexo. Los problemas relativos al óptimo local aparecen, no solo influyen en la calidad, pero también derivan en los problemas de estabilidad.

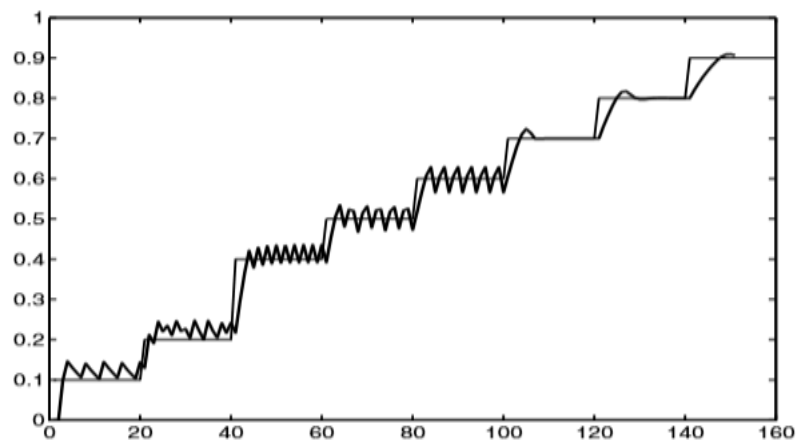
- Las dificultades de los problemas de optimización se trasladan en un importante incremento en el tiempo computacional de procesamiento. Se observa la utilización de la técnica para retardar los procesos.
- El estudio de temas como la estabilidad y robustez es más complejo en casos de sistemas no lineales. Constituyéndose en un gran campo para la investigación.

Algunos de estos problemas han sido parcialmente resueltos, y el NMPC se está convirtiendo en un campo de investigación intensa y se hará más común a medida que los usuarios demanden un mayor rendimiento.

Un ejemplo de un sistema no lineal, se presenta a continuación:

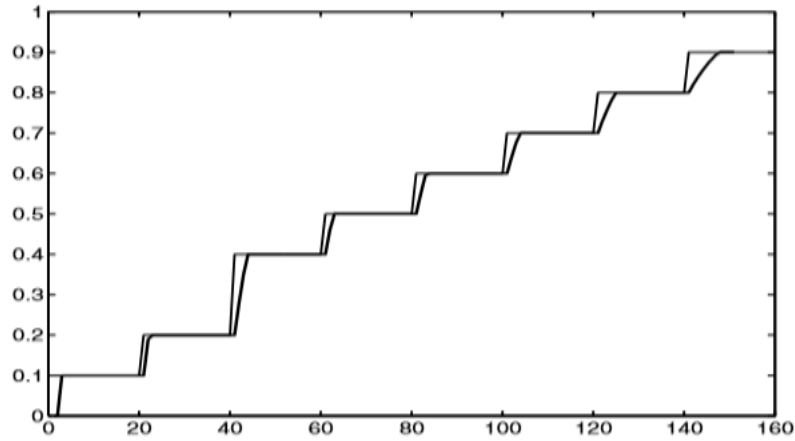
$$y(t + 1) = 0.9y(t) + u(t)^{1/4} \quad \text{con} \quad 0 \leq u(t) \leq 1$$

Las Figuras 4.3-4.4 muestran la respuesta obtenida de un controlador con MPC lineal y un MPC no lineal cuando  $\lambda = 0$  y  $N = 10$ .



**Figura 4.3** Control MPC lineal

Fuente: (Lars Grune, et al., 2016)



**Figura 4.4 Control MPC no lineal**

Fuente: (Lars Grune, et al., 2016)

Para el caso lineal, el sistema está representado por el siguiente modelo lineal:

$$y(t + 1) = 0.9y(t) + u(t)$$

En el caso del no lineal este puede verse fácilmente reemplazado por  $v(t) = u(t)^{1/4}$ , obteniendo así un sistema lineal y este puede ser resuelto obteniendo cualquier herramienta del MPC lineal con esta nueva variable manipulable  $v(t)$ <sup>1</sup>.

Como se pudo observar, la respuesta obtenida con el MPC lineal oscila para valores bajos del punto de referencia (*setpoint*) mientras que la respuesta obtenida con el MPC no lineal es buena para todos los cambios del punto de referencia (*setpoint*).

#### 4.6 MPC NO LINEAL APLICADO A ROBOTS MÓVILES

Un modelo no lineal determinístico general en tiempo discreto de un sistema puede expresarse como,

$$\mathbf{x}(k+1) = f(\mathbf{x}(k), \mathbf{v}(k)) \quad (4.6)$$

$$\mathbf{y}(k) = h(\mathbf{x}(k)) \quad (4.7)$$

donde,  $\mathbf{x}(k)$ ,  $\mathbf{v}(k)$  y  $\mathbf{y}(k)$  son los vectores de estado, de entrada de control y de salida, respectivamente.

Por lo tanto el modelo cinemático (3.3) y el modelo dinámico (3.38) se puede describir en forma compacta como,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\psi} \\ \dot{u} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \cos(\psi) - a\omega \sin(\psi) \\ u \sin(\psi) + a\omega \cos(\psi) \\ \omega \\ \frac{\Omega_3}{\Omega_1} \omega^2 - \frac{\Omega_4}{\Omega_1} u \\ -\frac{\Omega_5}{\Omega_2} u\omega - \frac{\Omega_6}{\Omega_2} \omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{\Omega_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\Omega_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{ref} \\ \omega_{ref} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{g}(\mathbf{v}(t)) \quad (4.8)$$

donde,  $\mathbf{x}(t) = [x \ y \ \psi \ u \ \omega]^T$  es el vector de estado del sistema,  $\mathbf{v}(t) = [u_{ref} \ \omega_{ref}]^T$  es el vector de control.

El modelo dinámico del robot móvil puede ser discretizado mediante cualquier método de aproximación numérica, *e.g.*, la aproximación de Euler,

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + To[\mathbf{f}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{g}(\mathbf{v}_k)] \quad (4.9)$$

donde,  $To$  es el periodo de muestreo y el vector de condiciones iniciales está dado por,

$$\mathbf{x}_0(t) = [x_0 \ y_0 \ \psi_0 \ u_0 \ \omega_0]^T \quad (4.10)$$

La ecuación de salida del sistema está dada por,

$$\mathbf{y}(k) = h(\mathbf{x}(k)) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \quad (4.11)$$

donde,  $\mathbf{C}$  es una matriz de dimensión *oe* (*o* es el número de estados controlados del sistema). En el presente trabajo se considera la siguiente ecuación de salida,

$$\mathbf{y}(k) = [x(k) \ y(k) \ \psi(k)]^T \quad (4.12)$$

Por otro lado, la mayoría de los métodos de MPC están basados en un esquema común (Ramírez *et,al.*, 1999). Se define un funcional de coste o costo  $J$ , el cual es a menudo una función cuadrática de la suma de la norma de los errores futuros de seguimiento de la trayectoria,

$$\mathbf{e}(k+i|k) = \mathbf{y}(k+i|k) - \mathbf{y}_d(k+i) \quad (4.13)$$

predichos sobre un horizonte de predicción  $N$  más la suma de la norma de los incrementos predichos en la acción de control, sobre un horizonte de control  $N_u$ ,

$$J = \sum_{i=1}^N \delta_i \|\mathbf{e}(k+i|k)\|_{\mathbf{Q}}^2 + \sum_{i=1}^{N_u} \lambda_i \|\Delta \mathbf{v}(k+i-1|k)\|_{\mathbf{R}}^2 \quad (4.14)$$

$$\Delta \mathbf{v}(k+i|k) = \mathbf{v}(k+i|k) - \mathbf{v}(k+i-1|k)$$

donde,  $\delta_i$  y  $\lambda_i$  son secuencias de penalización que usualmente se eligen como constantes,  $\mathbf{y}_d(k+i)$  es la salida deseada y la notación  $\mathbf{y}(k+i|k)$  indica que  $\mathbf{y}(k+i)$  se calcula con la información conocida en el instante  $k$ . Las salidas futuras del sistema  $\mathbf{y}(k+i|k)$  para  $i = 1, \dots, N$ , son predichas mediante un modelo del proceso a partir de las salidas y entradas anteriores al instante  $k$ , y a partir de las acciones de control futuras predichas,  $\mathbf{v}(k+i|k)$  para  $i = 0, \dots, N_u-1$ , las cuales son las que se pretende calcular. Además, se tiene que  $\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{Q}}^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$  y  $\mathbf{Q} > 0$

De esta manera  $J$  se puede expresar como una función dependiente sólo de las acciones de control futuras. El objetivo del Control Predictivo es obtener una secuencia de acciones de control futuras  $[\mathbf{v}(k), \mathbf{v}(k+1|k), \dots, \mathbf{v}(k+N_u-1|k)]$ , de tal manera que las salidas predichas usando el modelo del sistema  $\mathbf{y}(k+i|k)$ , estén tan cerca de la referencia  $\mathbf{y}_d(k+i|k)$  como sea posible, a lo largo del horizonte de predicción. Esto se consigue mediante la minimización de  $J$  respecto a las variables de control. Luego de que se obtiene esta secuencia, se emplea una estrategia de *horizonte deslizante*, que consiste en aplicar únicamente la primera acción de control  $\mathbf{v}(k)$  calculada. Este proceso se repite en cada tiempo de muestreo.

Cuando se utilizan modelos no lineales, el MPC depende de encontrar la solución a un problema de programación no lineal en cada paso de muestreo. Para resolver esto, es necesario realizar la optimización y solucionar el modelo del sistema. Estos dos problemas pueden implementarse de dos maneras diferentes: en forma secuencial o simultáneamente (Peña M, 2002).

#### 4.6.1 Algoritmo de optimización secuencial

Para la implementación secuencial, se encuentra una solución en cada iteración de la rutina de optimización. Los controles son las variables de decisión que ingresan al algoritmo, el cual calcula la solución para el modelo. Luego, se usa esta solución para evaluar la función objetivo y el valor calculado se entrega al programa de optimización. Entonces, la variable de optimización toma la forma,

$$\mathbf{z} = [\mathbf{v}(k) \quad \mathbf{v}(k+1|k) \quad \dots \quad \mathbf{v}(k+N_u-1|k)]^T \quad (4.15)$$

La función que calcula el funcional, debe resolver primero el modelo del sistema con los valores del vector  $\mathbf{z}$  y con el estado actual  $\mathbf{x}(k)$  aplicando  $N$  veces la (4.8). De este modo se obtiene la secuencia de vectores  $[\mathbf{x}(k+1|k) \quad \mathbf{x}(k+2|k) \quad \dots \quad \mathbf{x}(k+N|k)]$ . Con la (4.12) se establece los valores de la secuencia  $[\mathbf{y}(k+1|k) \quad \mathbf{y}(k+2|k) \quad \dots \quad \mathbf{y}(k+N|k)]$  de la salida y con estos valores se evalúa el funcional de costo dado en (4.14).

El funcional de costo  $J$  depende de las salidas predichas, las cuales a su vez son función del vector de estados y éste de las acciones de control (variables de optimización). Por tanto, resulta que, para obtener el gradiente del funcional, deben derivarse las salidas respecto a las acciones de control desde  $k$  hasta  $(k+N_u-1)$ . Esto resulta complicado y no siempre se tiene solución. Por esto, en la resolución secuencial no se tiene la información del gradiente y debe obtenerse a través de la diferenciación numérica, lo que es computacionalmente negativo, debido a que se genera un mayor costo de cálculo y problemas de convergencia.

#### 4.6.2 Algoritmo de optimización simultáneo

A diferencia de la solución secuencial, la solución y optimización simultánea, incluyen los estados y controles del modelo como variables de decisión. Las ecuaciones del modelo se añaden al problema de optimización como ecuaciones de restricción. Entonces, la variable de optimización resulta,

$$\mathbf{z} = [\mathbf{x}(k+1) \quad \mathbf{x}(k+1|k) \quad \dots \quad \mathbf{x}(k+N|k) \quad \mathbf{v}(k) \quad \mathbf{v}(k+1|k) \quad \dots \quad \mathbf{v}(k+N_u-1|k)]^T \quad (4.16)$$

es decir, se consideran los estados y las acciones de control como variables de optimización. La dimensión de este vector es de  $(eN + pN_u)$ , que es mayor a la que resulta en la propuesta secuencial  $(pN_u)$ , donde  $e$  y  $p$  son los tamaños de los vectores de estado y



entrada de control, respectivamente. Esto conlleva un incremento considerable en el tamaño de la variable de optimización en relación a la propuesta secuencial.

Las ecuaciones del modelo aparecen como restricciones de igualdad como se muestra a continuación,

$$\mathbf{R} = \begin{cases} \mathbf{x}(k+1|k) = f(\mathbf{x}(k), \mathbf{v}(k)) \\ \mathbf{x}(k+2|k) = f(\mathbf{x}(k+1), \mathbf{v}(k+1)) \\ \vdots \\ \mathbf{x}(k+N|k) = f(\mathbf{x}(k+N-1), \mathbf{v}(k+N_u)) \end{cases} \quad (4.17)$$

En esta propuesta, la obtención del gradiente en forma analítica es más sencilla, por lo que se puede incorporar en forma explícita el algoritmo de optimización. Para el caso del funcional (4.14) resulta,

$$\nabla J = \begin{bmatrix} 2\delta_1 \mathbf{G}_{\mathbf{x}_{k+1}}^T \mathbf{Q} [\mathbf{h}(\mathbf{x}(k+1|k)) - \mathbf{y}_d(k+1)] \\ 2\delta_2 \mathbf{G}_{\mathbf{x}_{k+2}}^T \mathbf{Q} [\mathbf{h}(\mathbf{x}(k+2|k)) - \mathbf{y}_d(k+2)] \\ \vdots \\ 2\delta_N \mathbf{G}_{\mathbf{x}_{k+N}}^T \mathbf{Q} [\mathbf{h}(\mathbf{x}(k+N|k)) - \mathbf{y}_d(k+N)] \\ 2\lambda_1 \mathbf{R} \Delta \mathbf{v}(k) - 2\lambda_2 \mathbf{R} \Delta \mathbf{v}(k+1) \\ 2\lambda_2 \mathbf{R} \Delta \mathbf{v}(k+1) - 2\lambda_3 \mathbf{R} \Delta \mathbf{v}(k+2) \\ \vdots \\ 2\lambda_{N_u} \mathbf{R} \Delta \mathbf{v}(k+N_u-1) \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

con

$$\mathbf{G}_{\mathbf{x}_i}^T = \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}(k), \mathbf{v}(k))}{\partial \mathbf{x}(k)} \right|_{k=i}$$

El gradiente de las restricciones de igualdad es una matriz dispersa y toma la forma de,

$$\nabla \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{e \times e} & -\mathbf{F}\mathbf{x}(k+1) & \cdots & 0_{e \times e} & 0_{e \times e} \\ 0_{e \times e} & \mathbf{I}_{e \times e} & \cdots & 0_{e \times e} & 0_{e \times e} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_{e \times e} & 0_{e \times e} & \cdots & \mathbf{I}_{e \times e} & -\mathbf{F}\mathbf{x}(k+N-1) \\ 0_{e \times e} & 0_{e \times e} & \cdots & 0_{e \times e} & \mathbf{I}_{e \times e} \\ -\mathbf{F}\mathbf{v}(k) & 0_{e \times e} & \cdots & 0_{e \times e} & 0_{e \times e} \\ 0_{e \times e} & -\mathbf{F}\mathbf{v}(k+1) & \cdots & 0_{e \times e} & 0_{e \times e} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_{e \times e} & 0_{e \times e} & \cdots & 0_{e \times e} & -\mathbf{F}\mathbf{v}(k+N_u-1) \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

donde,

$$\mathbf{F}_{\mathbf{x}_{k+i}} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{v}(k))}{\partial \mathbf{x}(k)} \right|_{k=i} ;$$

$$\mathbf{F}_{\mathbf{v}_{k+i}} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}(k), \mathbf{v}(k))}{\partial \mathbf{v}(k)} \right|_{k=i} ;$$

$\mathbf{I}_{exe}$  es la matriz identidad de dimensión  $e$  y  $\mathbf{0}_{pxe}$  es una matriz nula con dimensión  $pxe$ .

Para problemas pequeños con pocos estados y un horizonte de predicción pequeño, el método secuencial es probablemente más efectivo (Peña M, 2002). Para problemas grandes generalmente la propuesta simultánea es más robusta, ya que es menos probable que falle. En la propuesta secuencial la adición de restricciones sobre los estados o las salidas es más complicada. Además de las restricciones que surgen del modelo, se pueden agregar restricciones en la acción de control, en el estado estacionario, etc.

## CAPÍTULO V

### 5. RESULTADOS EXPERIMENTALES Y DISCUSIÓN

En este Capítulo se muestran los análisis y discusión de los resultados experimentales obtenidos de la implementación de seguimiento de trayectorias de un robot móvil a través del Control Predictivo basado en Modelos; para lo cual, se considera el modelo cinemático (3.3) y el modelo dinámico con centro de masa desplazado lateralmente (3.38), desarrollado en la Sección III.

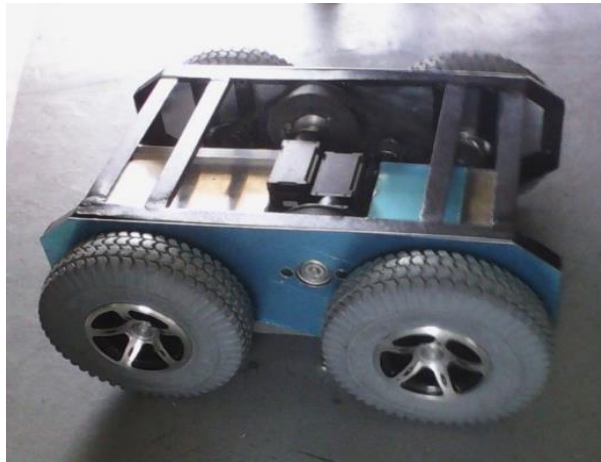
Para las pruebas experimentales se utiliza el robot móvil tipo uniciclo (ver Figura 5.1) construido en el proyecto de investigación *Tele-operación bilateral cooperativo de múltiples manipuladores móviles*, proyecto ganador de la novena convocatoria CEDIA-CEPRA. El proyecto es ejecutado por la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, Universidad Técnica de Ambato, Escuela Politécnica Nacional y la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE.



**Figura 5.1** AKASHA, robot móvil tipo uniciclo

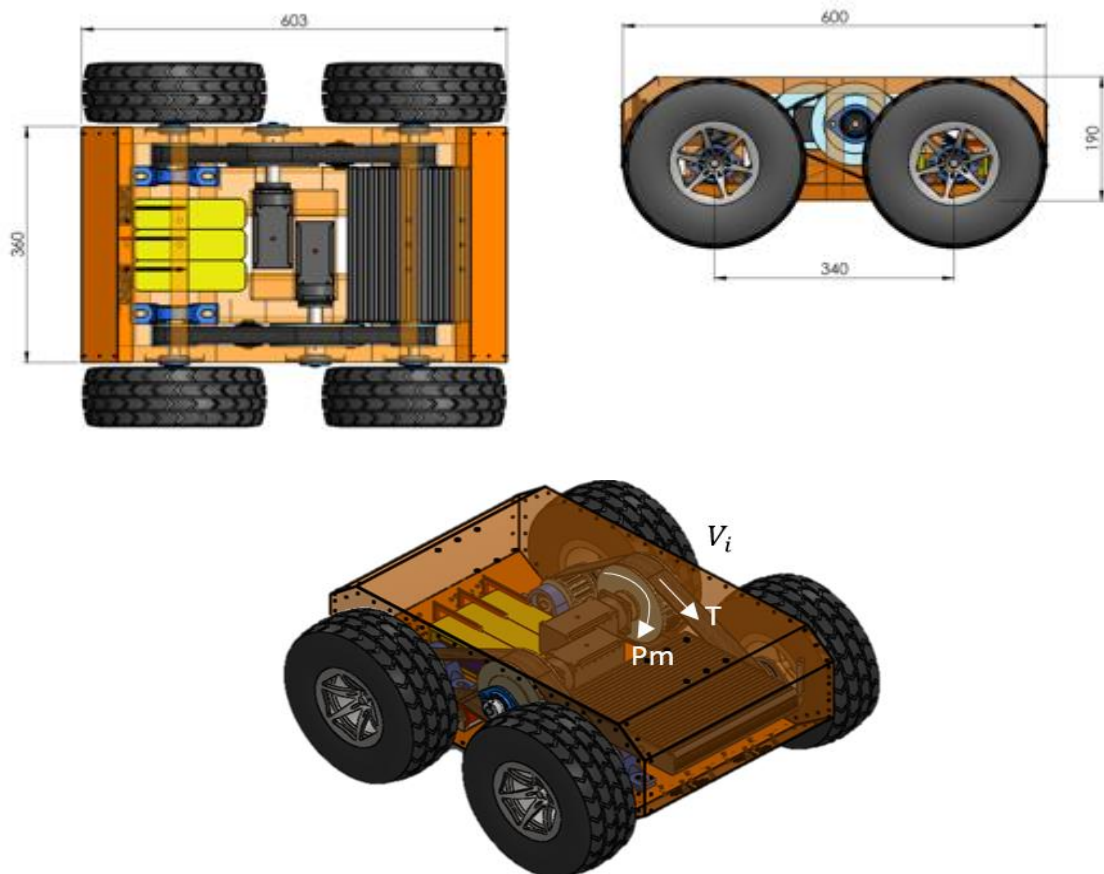
Fuente: Laboratorio de Investigación -ESPE

El robot móvil AKASHA es una plataforma móvil tipo uniciclo conformada de cuatro ruedas y dos motores dynamixel pro de 200 W controlados de manera independiente; cada motor controla dos ruedas que se encuentran ubicadas lateralmente al robot, según muestra la Figura 5.2



**Figura 5.2** Ubicación de los motores inteligentes - Dynamixel Pro  
**Fuente:** Laboratorio de Investigación ESPE

Los dos motores Dynamixel se comunican con un computador mediante el protocolo RS-485, el CPU es un computador industrial de marca quatom con memoria RAM de 8 Gb, procesador 2.1 Ghz y 1 TB de Disco duro; y es alimentado por tres baterías de 7 celdas

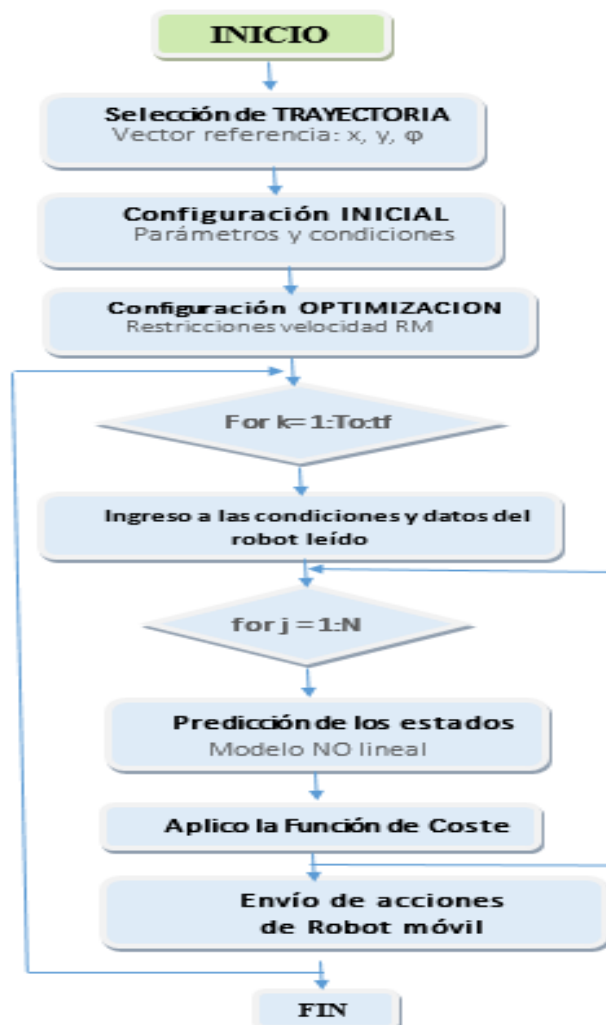


**Figura 5.3** Dimensiones de la plataforma móvil  
**Fuente:** Laboratorio de Investigación ESPE

Los valores absolutos máximos y mínimos de las velocidades de referencia lineal y angular del robot móvil AKASHA son  $u_{\min} \leq u_{ref}(t) \leq u_{\max}$  y  $\omega_{\min} \leq \omega_{ref}(t) \leq \omega_{\max}$ , respectivamente. Para todas pruebas experimentales se consideró un tiempo de muestreo de  $T_o = 0.1$  [s].

## 5.2 Enfoque Secuencial

Para la implementación del MPC con enfoque secuencial se considera a la variable de optimización (4.15). La función que calcula el funcional, debe resolver primero el modelo del sistema con los valores del vector  $z$  y con el estado actual  $x(k)$  aplicando  $N$  veces la (4.8). El algoritmo que se implementó para realizar el controlador predictivo no lineal con restricciones con enfoque secuencial es el que se indica en la Figura 5.4.



**Figura 5.4** Diagrama de flujo del Control Predictivo lineal con restricciones  
Fuente: Gabriela Andaluz

donde,  $T_0$  es el periodo de muestreo,  $N$  es el horizonte de predicción,  $t_{fin}$  es el tiempo de experimentación  $J_x = \delta_j \left\| y_{k+j|k} - y_{ref} \right\|_Q^2$ ,  $J_v = \lambda_j \left\| \Delta u_{k+j|k} \right\|_R^2$ . La función de costo  $J$  es la que se planteó en (4.14).

A continuación, se presenta los resultados de la implementación del controlador predictivo no lineal con restricciones con enfoque secuencial para diferentes parámetros.

### ➤ Seguimiento de trayectoria Circular

#### **Trayectoria a seguir**

- Circunferencia de radio 1[m].
- Sentido de giro: horario

#### **Condiciones iniciales**

- Posición en el eje x = 0[m]
- Posición en el eje y = 0[m]
- Ángulo del robot móvil =  $0^\circ$
- Velocidad lineal u = 0[m/s]
- Velocidad angular w = 0 [rad/s]

#### **Constantes de Experimentación**

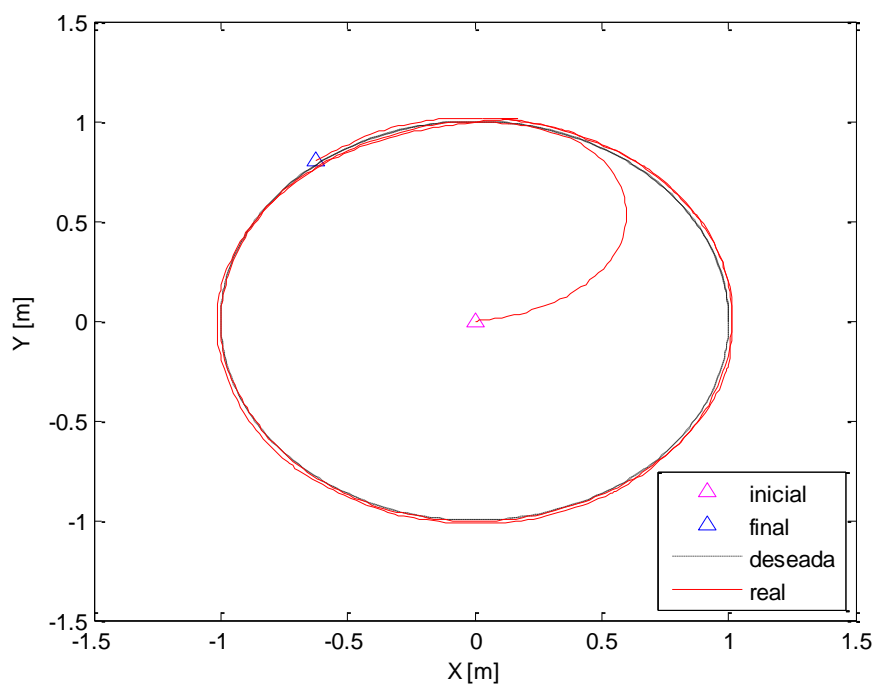
- Periodo de muestreo  $T_0 = 0.1$ [s]
- Tiempo de Experimentación = 60[s]
- Velocidad lineal máxima  $u_{max} = 0,25$ [m/s]
- Velocidad angular máxima  $w_{max} = 0,56$ [rad/s]

#### **Parámetros del controlador**

- Estados controlados o = 3
- Acciones de control p = 2
- Horizonte de predicción N = 7

- Horizonte de control  $N = 7$
- Peso de la predicción de las salidas  $\delta = 92$
- Peso de la predicción de las acciones de control  $\lambda = 0.8$
- Peso de los estado s de salida  $Q = \text{diag}([3 \ 3 \ 3])$
- Peso de las acciones de control  $R = \text{diag}([2 \ 2])$

Resultados de la implementación del controlador.

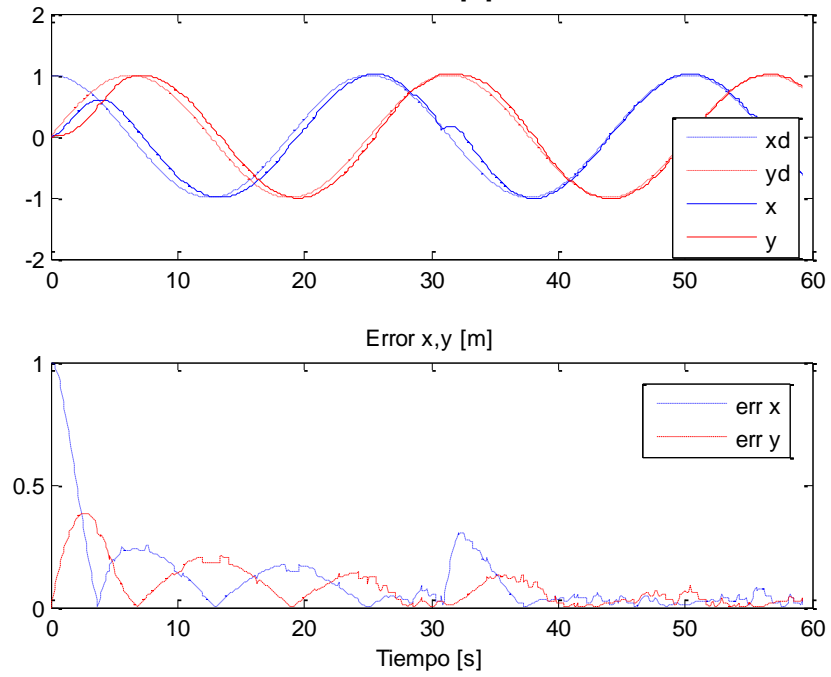


**Figura 5.5** Trayectoria descrita: Circunferencia de radio 1[m]

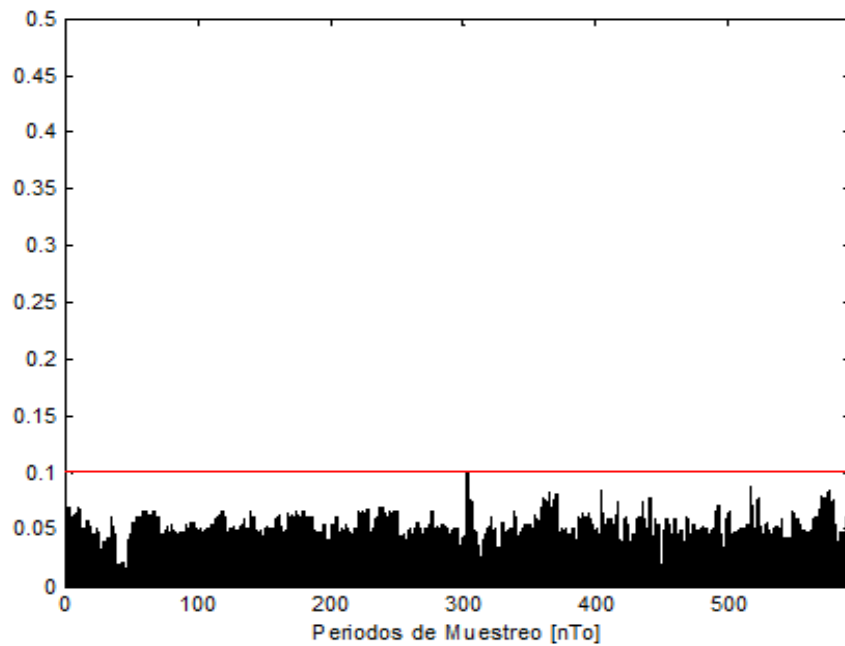
**Fuente:** Datos experimentales obtenidos

En la Figura 5.5, se puede notar que el robot móvil sigue correctamente a la referencia; tanto el robot móvil como la referencia a seguir dan 2 vueltas respectivamente.

En la Figura 5.6 se puede notar que los errores tanto en el eje  $x$  como en el eje  $y$  son muy pequeños y estos tienden a cero; por lo cual, a través del cálculo de la media aritmética aplicado a los errores resultantes se tiene que el promedio del error es de 14,2 cm con una desviación de 10 cm.



**Figura 5.6** Posición y errores del eje  $x$  y  $y$   
Fuente: Datos experimentales obtenidos



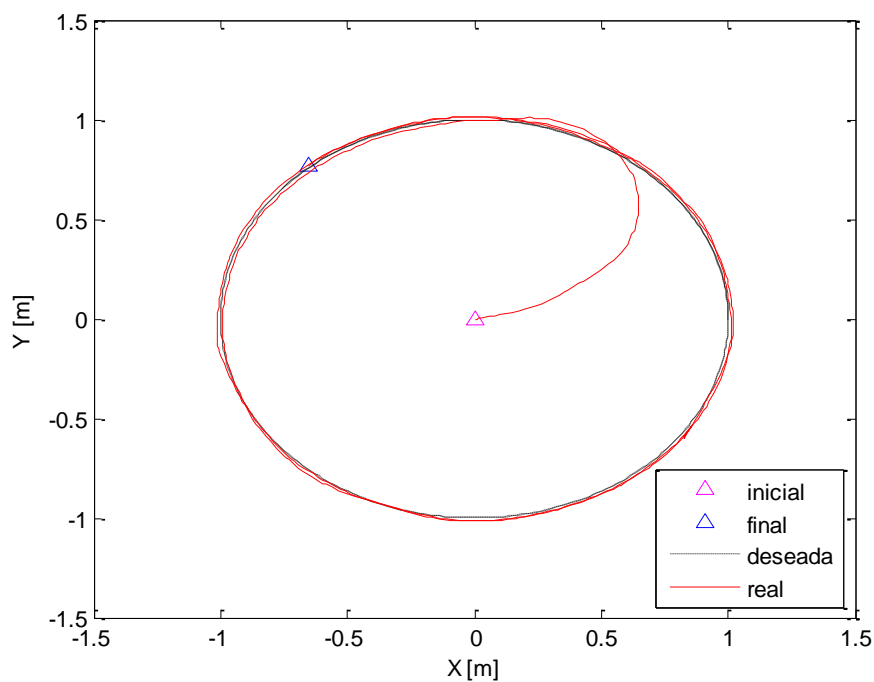
**Figura 5.7** Tiempos de cálculo del algoritmo  
Fuente: Datos experimentales obtenidos

Los tiempos de cálculo del algoritmo son menores que el periodo de muestreo del robot, según muestra la Figura 5.7 con un promedio de 0.06 [s].



Para la siguiente prueba experimental se mantiene los siguientes parámetros que el caso anterior: trayectoria a seguir, condiciones iniciales y constantes de simulación. Mientras que el parámetro del controlador que se modificó es el Horizonte de predicción con  $N = 4$  que es igual al horizonte de control  $N_u$ .

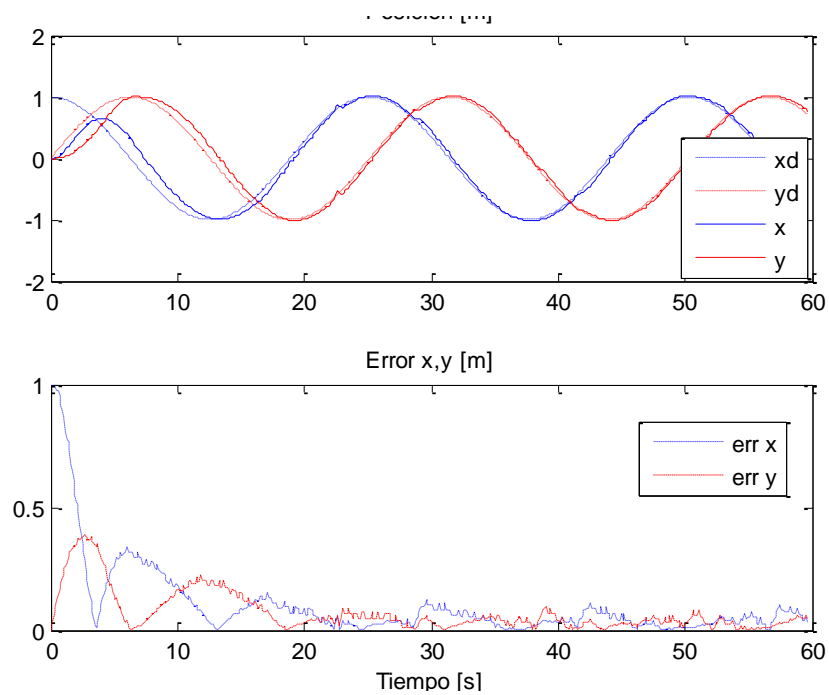
La Figura 5.8, muestra que el robot móvil sigue correctamente a la referencia, en esta gráfica se puede notar que las condiciones iniciales de la referencia y del robot móvil son diferentes, el número de vueltas que da la referencia y el robot es de 2 vueltas respectivamente.



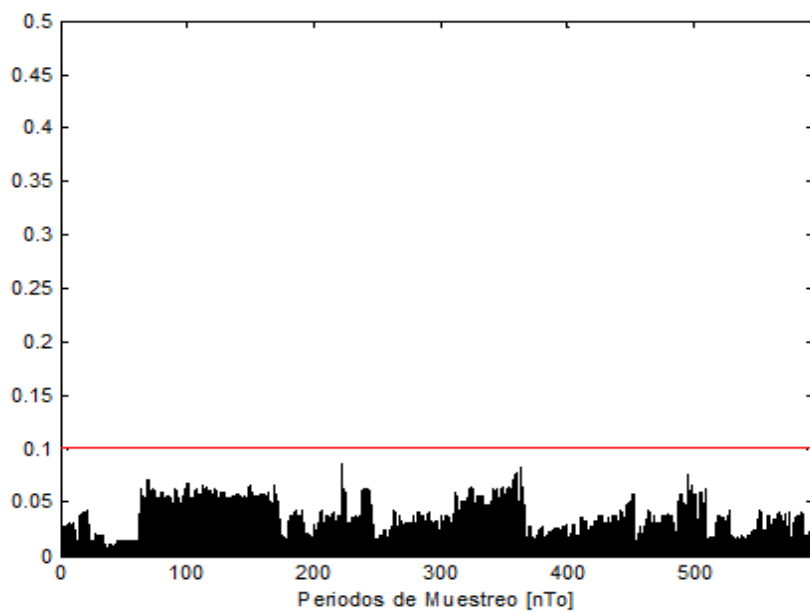
**Figura 5.8** Trayectoria: Circunferencia de radio 1[m]

Fuente: Datos experimentales obtenidos

En la Figura 5.9 se puede notar que los errores tanto en el eje  $x$  como en el eje  $y$  son muy pequeños y estos tienden a cero; por lo cual, a través del cálculo de la media aritmética de los errores resultantes se obtiene el valor promedio del error de 13,92 cm con una desviación de 6,93 cm., comprobando que estos errores son menores en comparación a los obtenidos en la Figura 5.6 debido a que se realizó una disminución del valor del horizonte de predicción  $N$ .



**Figura 5.9** Posición y errores del eje  $x$  y  $y$   
Fuente: Datos experimentales obtenidos



**Figura 5.10** Tiempos de cálculo del algoritmo  
Fuente: Datos experimentales obtenidos

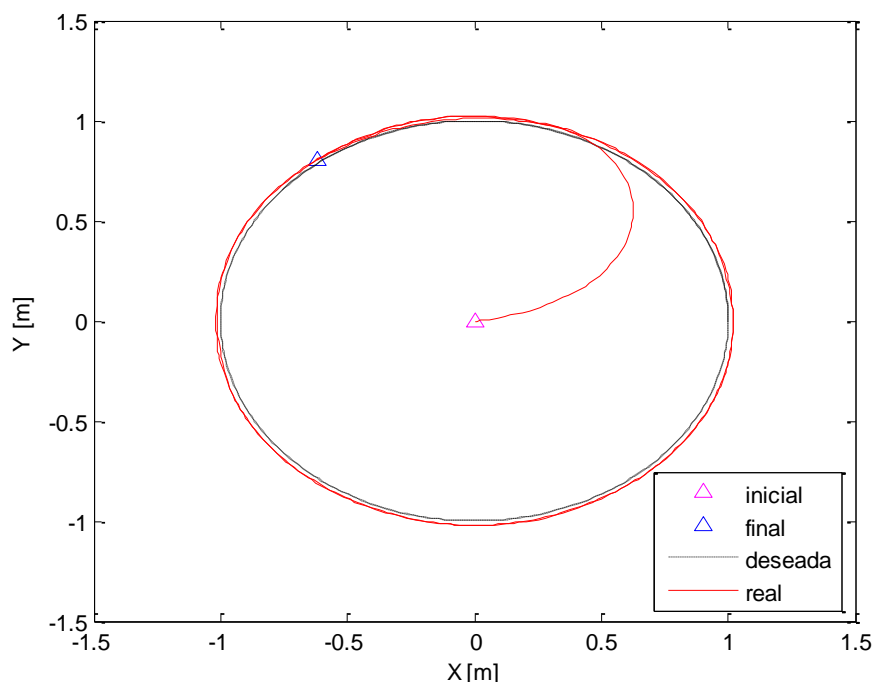
Los tiempos de cálculo del algoritmo son menores que el periodo de muestreo del robot, según ilustra la Figura 5.10 con un promedio de 0.045 [s]; estos tiempos son menores en comparación a la Figura 5.7.

Finalmente, para esta trayectoria circular se mantiene los siguientes parámetros que el caso anterior: trayectoria a seguir, condiciones iniciales y constantes de experimentación.

Mientras que de los parámetros del controlador que se modificaron son las siguientes variables:

### Parámetros del controlador

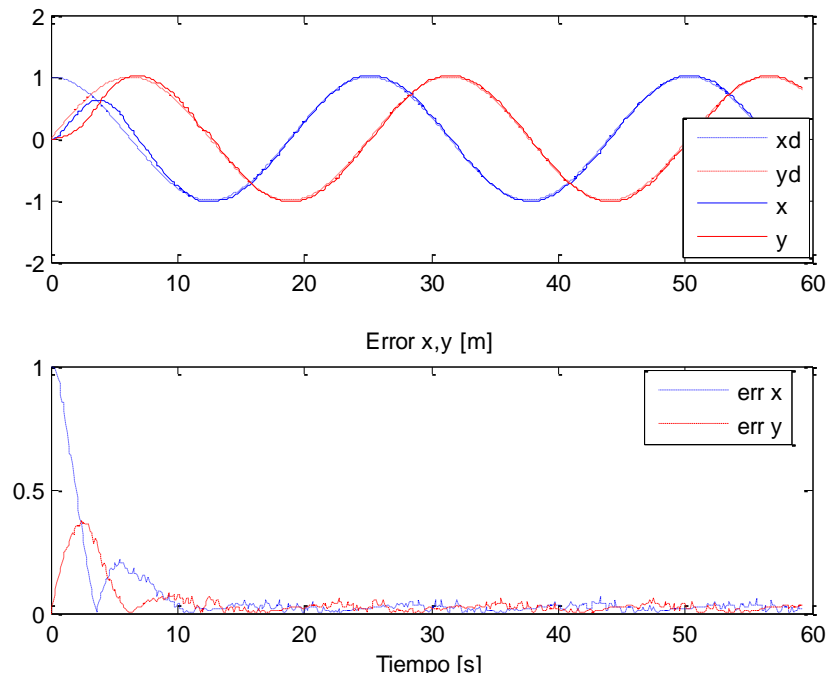
- Horizonte de predicción  $N = 4$
- Peso de la predicción de las salidas  $\delta = 100$ ;
- Peso de la predicción de las acciones de control  $\lambda = 0,8$
- Peso de los estados de salida  $Q = \text{diag}([3 \ 3 \ 3])$
- Peso de las acciones de control  $R = \text{diag}([2 \ 2])$



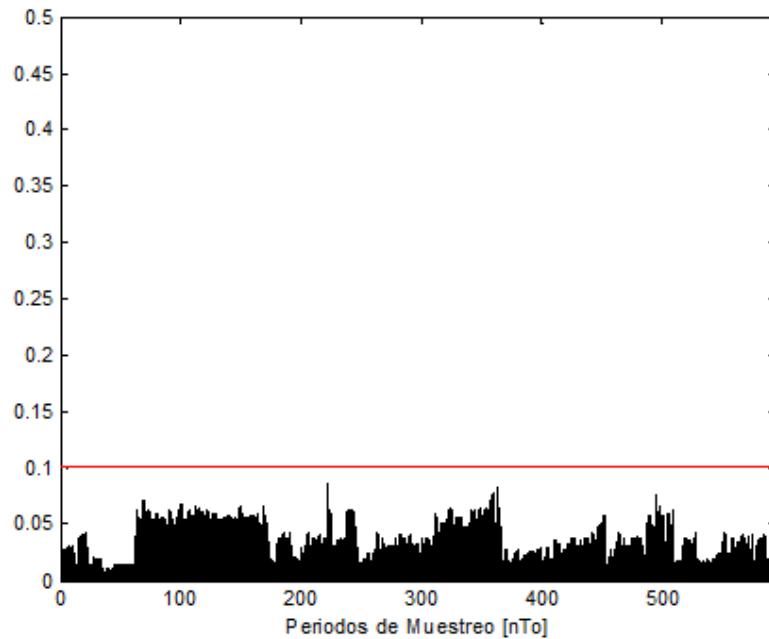
**Figura 5.11** Trayectoria: Circunferencia de radio 1[m]

Fuente: Datos experimentales obtenidos

Para esta prueba en comparación al caso anterior se dio mayor peso a las acciones de predicción, con lo que se obtuvo que los errores cometidos sean muy pequeños los cuales están en un promedio de 10,52 [cm] cuya desviación está dada por 5,24cm, errores que se ilustran en las Figuras. 5.11-5.12.



**Figura 5.12** Posición y errores del eje  $x$  y  $y$   
**Fuente:** Datos experimentales obtenidos



**Figura 5.13** Tiempos de cálculo del algoritmo  
**Fuente:** Datos experimentales obtenidos

Los tiempos de cálculo están dentro del tiempo de muestreo del robot, pero en varias interacciones del algoritmo de control dicho tiempo de cálculo no llega a superar el periodo de muestreo, según ilustra la Figura 5.13 teniendo un tiempo promedio de  $0,045[s]$ .

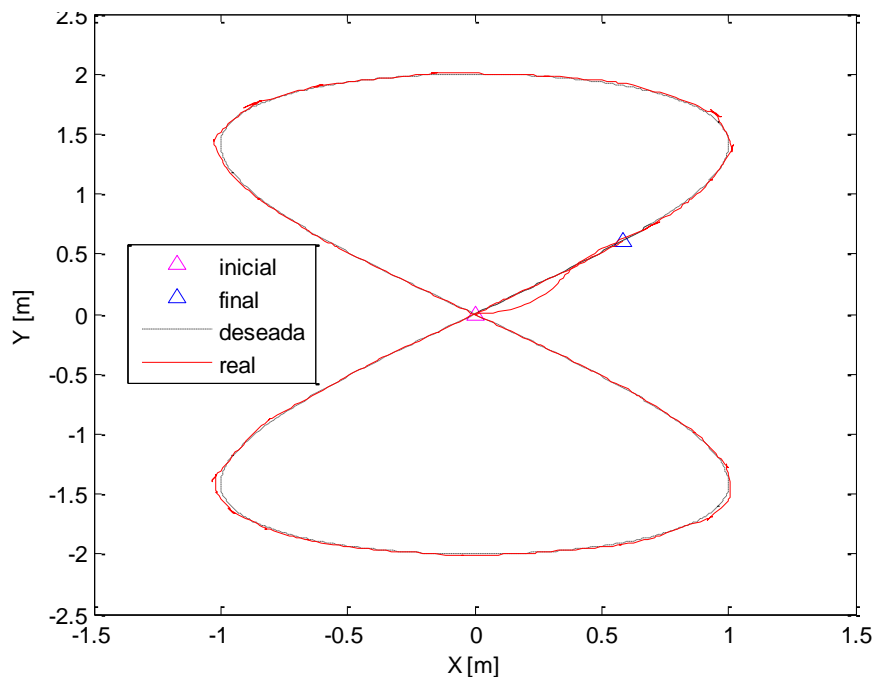
### ➤ Seguimiento de Trayectoria en forma de 8

Para esta prueba se mantiene los siguientes parámetros que el caso anterior: trayectoria a seguir, condiciones iniciales y constantes de simulación. Mientras que de los parámetros del controlador que se modificaron son las siguientes variables:

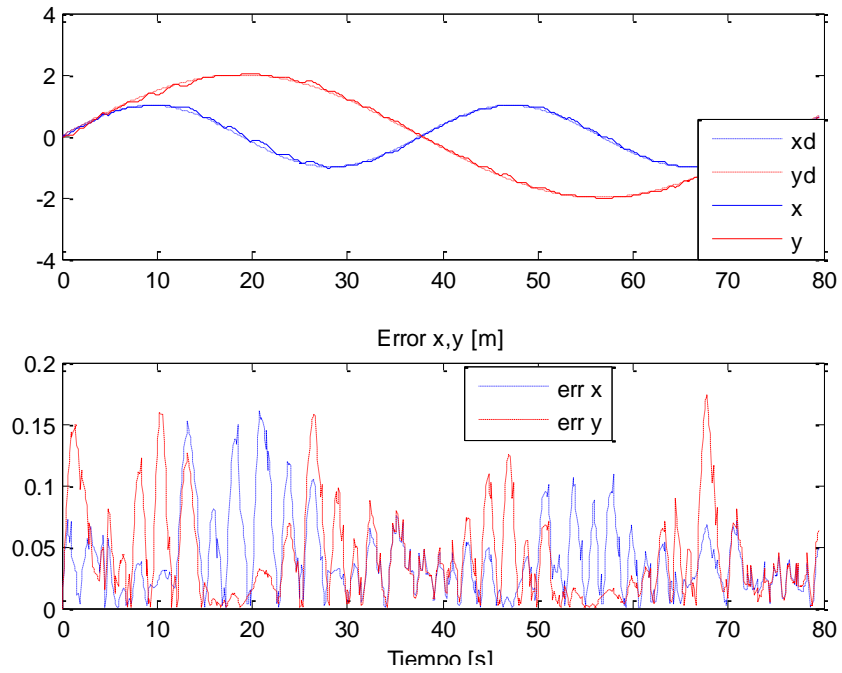
#### Parámetros del controlador

- Horizonte de predicción  $N = 5$
- Horizonte de control  $N_u = 5$
- Peso de la predicción de las salidas  $\delta = 92$
- Peso de la predicción de las acciones de control  $\lambda = 0,8$
- Peso de los estados de salida  $Q = \text{diag}([3 \ 3 \ 3])$
- Peso de las acciones de control  $R = \text{diag}([2 \ 2])$

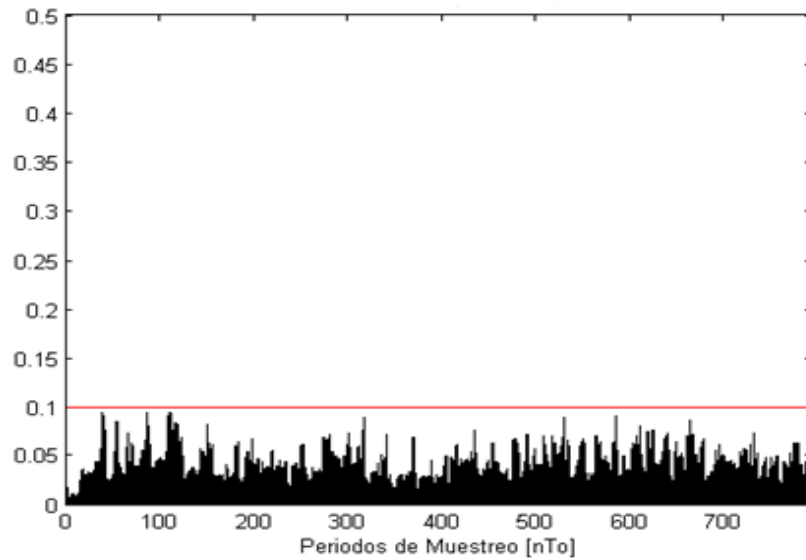
Los resultados experimentales de esta prueba se muestran en las Figuras 5.14 a las 5.16.



**Figura 5.14** Trayectoria: en forma de 8  
Fuente: Datos experimentales obtenidos



**Figura 5.15** Posición y errores del eje x y y  
**Fuente:** Datos experimentales obtenidos

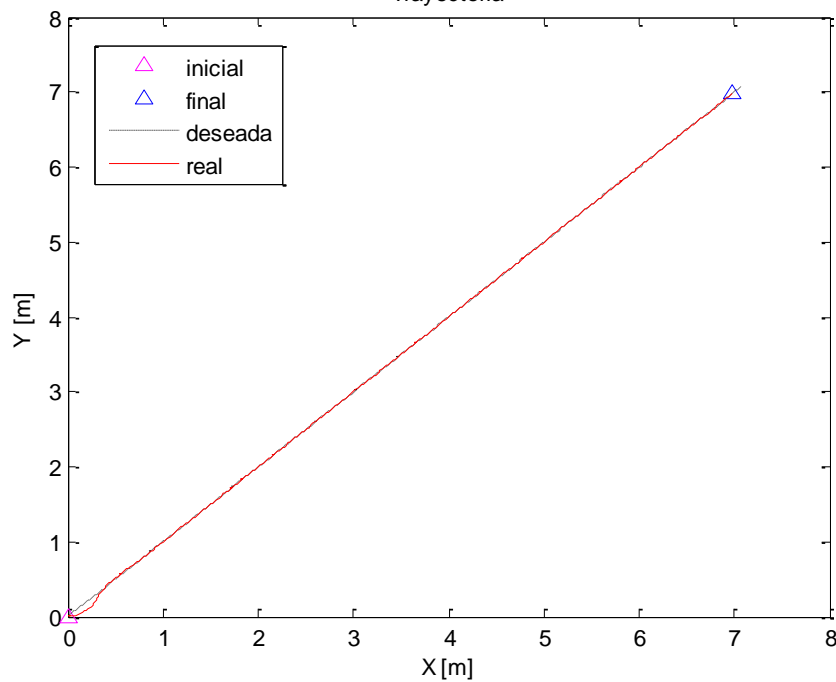


**Figura 5.16** Tiempos de cálculo del algoritmo  
**Fuente:** Datos experimentales obtenidos

Para esta prueba la referencia a seguir fue una trayectoria en forma de un *número ocho*; en la Figura 5.14 se muestra que el robot describe la trayectoria deseada por la referencia, con tiempos de cálculo menores al periodo de muestreo, ver Figura 5.16. La media aritmética de los errores de control llega a un valor promedio de 8,72 [cm] con una desviación de 4,22[cm]; estos errores se debe a que se escogió como salidas únicamente la posición del robot pero no la velocidad lineal y angular, lo que produce que el robot móvil se adelante y se retrase en ciertos intervalos de la trayectoria a seguir.

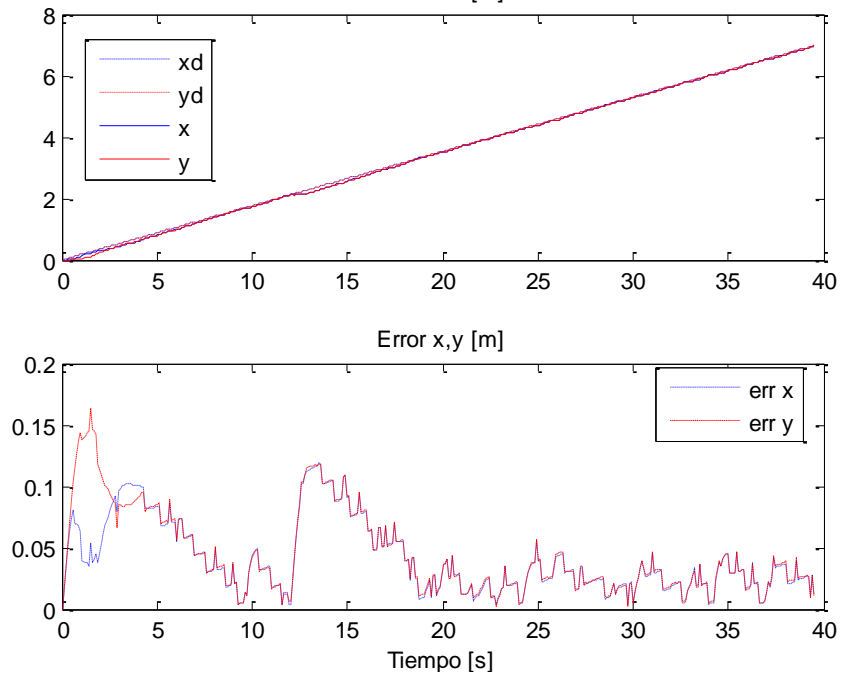
### ➤ Seguimiento de Trayectoria lineales

Para esta prueba se mantiene los siguientes parámetros que el caso anterior: trayectoria a seguir, condiciones iniciales, constantes de simulación y los parámetros del controlador, con un tiempo de experimentación de  $t_{fin} = 40[s]$ .

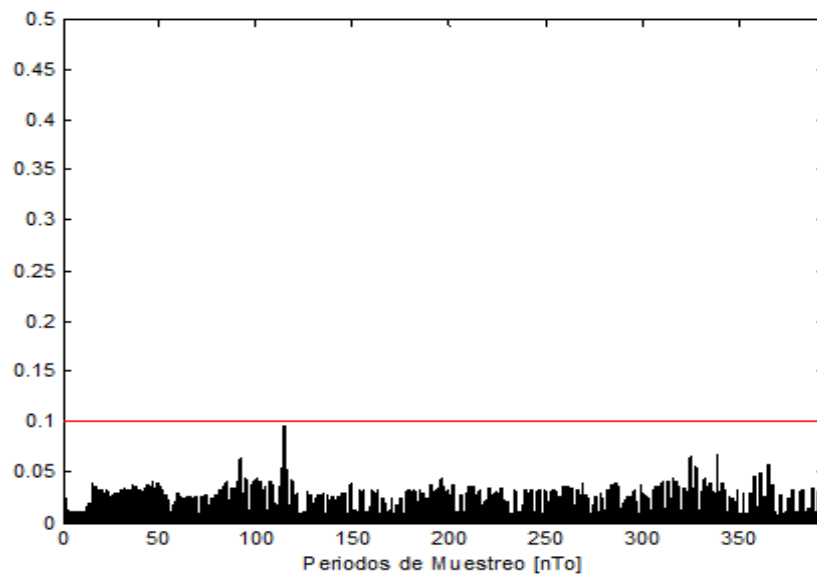


**Figura 5.17** Trayectoria: Pendiente, 45°  
**Fuente:** Datos experimentales obtenidos

La Figura 5.17, muestra que el robot móvil describe la trayectoria deseada por la referencia. Los tiempos de cálculo del algoritmo son menores que el tiempo de muestreo, ver Figura 5.19. Mientras que la Figura 5.18 muestra, que el robot móvil cuando alcanza a la referencia el error promedio es de 7,23[cm] y su desviación del error de 4,01[cm].



**Figura 5.18** Posición y errores del eje x y y  
**Fuente:** Datos experimentales obtenidos



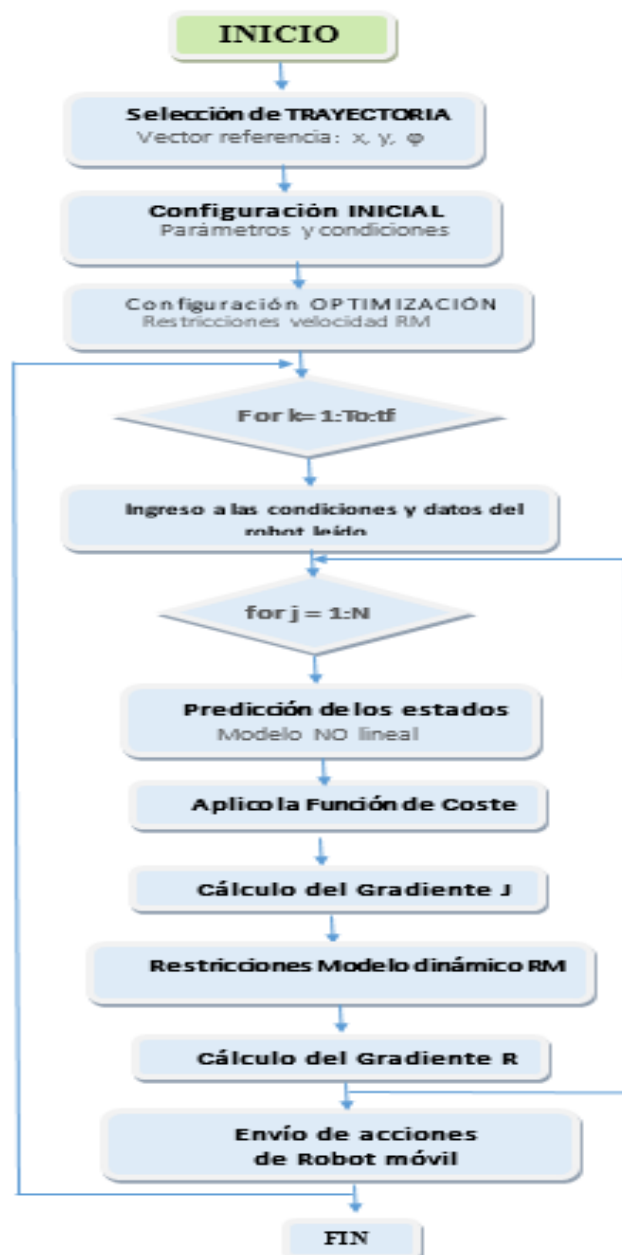
**Figura 5.19** Tiempos de cálculo del algoritmo  
**Fuente:** Datos experimentales obtenidos

Como se ha demostrado de manera experimental el robot móvil ha seguido las trayectorias deseadas de manera autónoma a través de la aplicación del esquema del controlador predictivo, demostrándose de ésta manera la hipótesis planteada y comprobada a través del cálculo estadístico del promedio de los errores encontrados, mismos que son despreciables una vez que el robot móvil alcanza la trayectoria deseada tendiendo a cero.



### 5.3 ENFOQUE SIMULTÁNEO

A diferencia de la solución secuencial, la solución y optimización simultánea, incluyen los estados y controles del modelo como variables de decisión. Las ecuaciones del modelo se añaden al problema de optimización como ecuaciones de restricción. Entonces, la variable de optimización que se implementa es (4.16), información detallada en la Subsección 4.5.2. El algoritmo que se implementó para realizar el controlador predictivo no lineal con restricciones con enfoque simultáneo es el que se indica en la Figura 5.20.



**Figura 5.20** Diagrama de flujo del MPC con enfoque simultáneo  
Elaborado por: Gabriela Andaluz

donde,  $T_0$  es el período de muestra,  $N$  es el horizonte de predicción,  $t_{fin}$  es el tiempo de experimentación  $J_x = \delta_j \left\| y_{k+j|k} - y_{ref} \right\|_Q^2$ ,  $J_v = \lambda_j \left\| \Delta u_{k+j|k} \right\|_R^2$ . La función de costo  $J$  es la que se planteó en (4.14).

### ➤ Seguimiento de Trayectoria Circular

#### **Trayectoria a seguir**

- Circunferencia de radio 1[m].
- Sentido de giro: horario

#### **Condiciones iniciales**

- Posición en el eje x = 0[m]
- Posición en el eje y = 0[m]
- Ángulo del robot móvil = 0°
- Velocidad lineal u = 0[m/s]
- Velocidad angular w = 0 [rad/s]

#### **Constantes de Simulación**

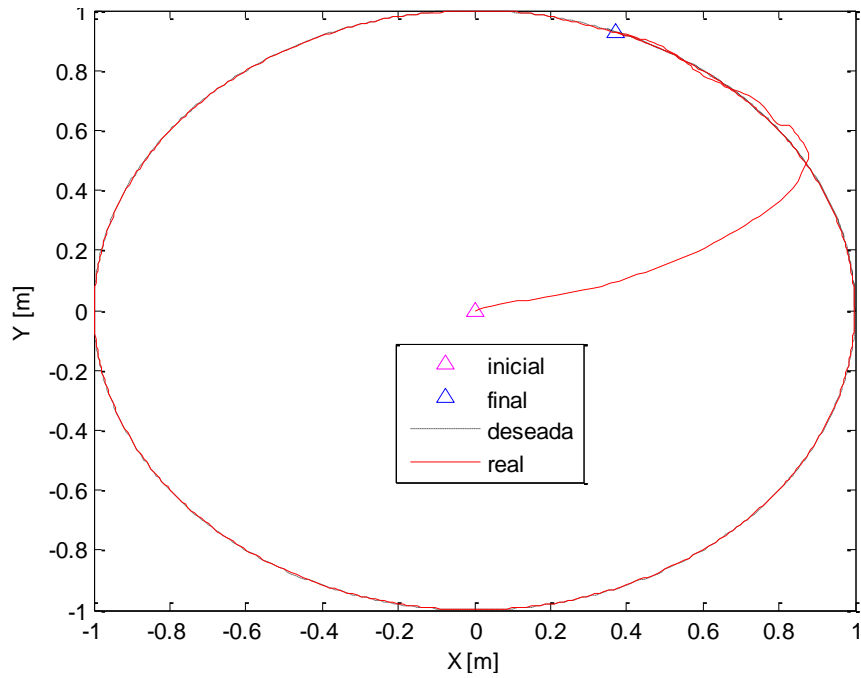
- Período de muestreo  $T_0 = 0.1$ [s]
- Tiempo de simulación  $t_{fin} = 60$ [s]
- Velocidad lineal máxima  $u_{max} = 0,25$ [m/s]
- Velocidad angular máxima  $w_{max} = 0,56$ [rad/s]

#### **Parámetros del controlador**

- Estados controlados  $o = 3$
- Acciones de control  $p = 2$
- Horizonte de predicción  $N = 3$
- Peso de la predicción de las salidas  $\delta = 120$
- Peso de la predicción de las acciones de control  $\lambda = 3$

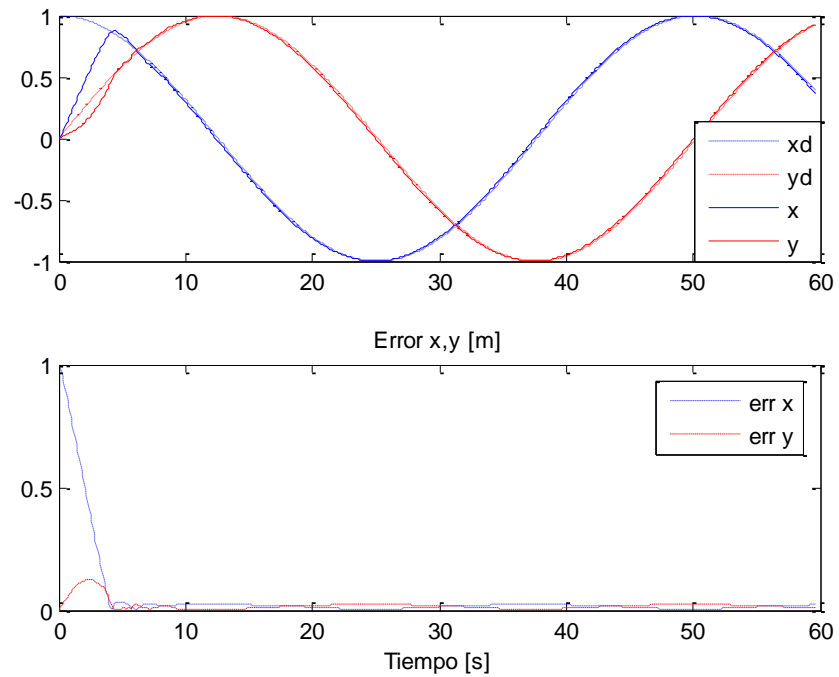
- Peso de los estados de salida  $Q = \text{diag}([3 \ 3 \ 3])$
- Peso de las acciones de control  $R = \text{diag}([2 \ 2])$

Los resultados experimentales de esta prueba se muestran en las Figuras 5.21 a las 5.23.



**Figura 5.21** Trayectoria: Circunferencia de radio 1[m]

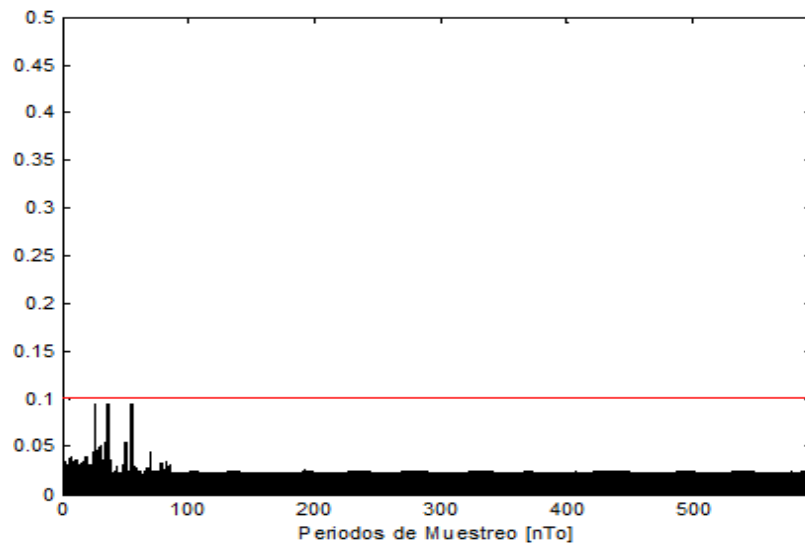
Fuente: Datos experimentales obtenidos



**Figura 5.22** Posición y errores del eje  $x$  y  $y$

Fuente: Datos experimentales obtenidos

La Figura 5.21 muestra que el robot móvil sigue correctamente a la referencia deseada; mientras que en la Figura 5.22 se puede observar que una vez el robot móvil alcanzó a la referencia el error en el eje 'x' y en 'y' cuyo valor promedio del error es 6,92 [cm], cuya desviación es de 2,97 [cm].

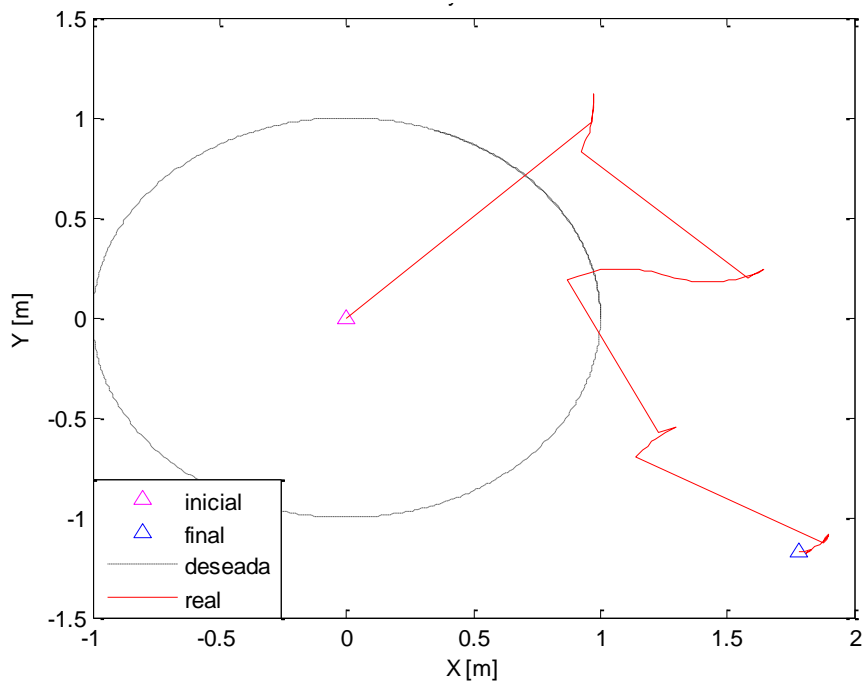


**Figura 5.23** Tiempos de cálculo del algoritmo

Fuente: Datos experimentales obtenidos

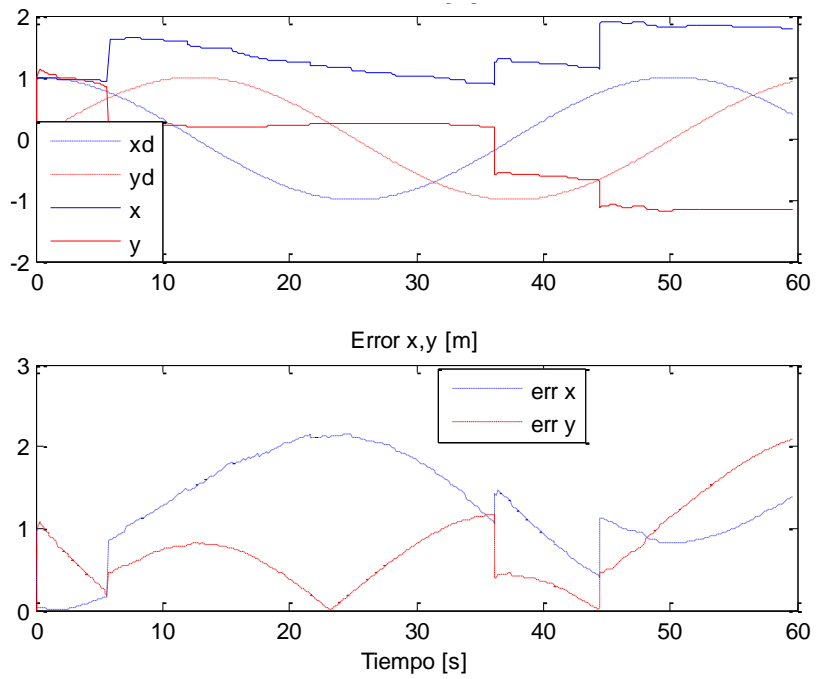
Los tiempos de cálculo a pesar de que su mayoría fueron menores que el periodo de muestreo hay intervalos en los que se acercan de forma significativa al  $T_0$  sin llegar a superarlo, teniendo así un valor promedio de 0,029 [s]

Finalmente, para esta trayectoria se implementó el controlador con los mismos parámetros con el único cambio en el horizonte de predicción igual a  $N=7$  y  $Nu=7$ . Lo resultados obtenidos se muestran en las Figuras 5.24 a la 5.26; la Figura 5.24, muestra la trayectoria descrita por el robot móvil la cual no sigue la referencia deseada, esto se debe a que los tiempos de cálculo del algoritmo de control son muy altos, razón por la cual en la Figura 5.25 se observa que los errores tanto en el eje 'x' con en 'y' son muy altos ya que en ningún momento el robot sigue a la referencia deseada teniendo un valor promedio del error de 1,56[m], con una desviación de 97,8[cm].



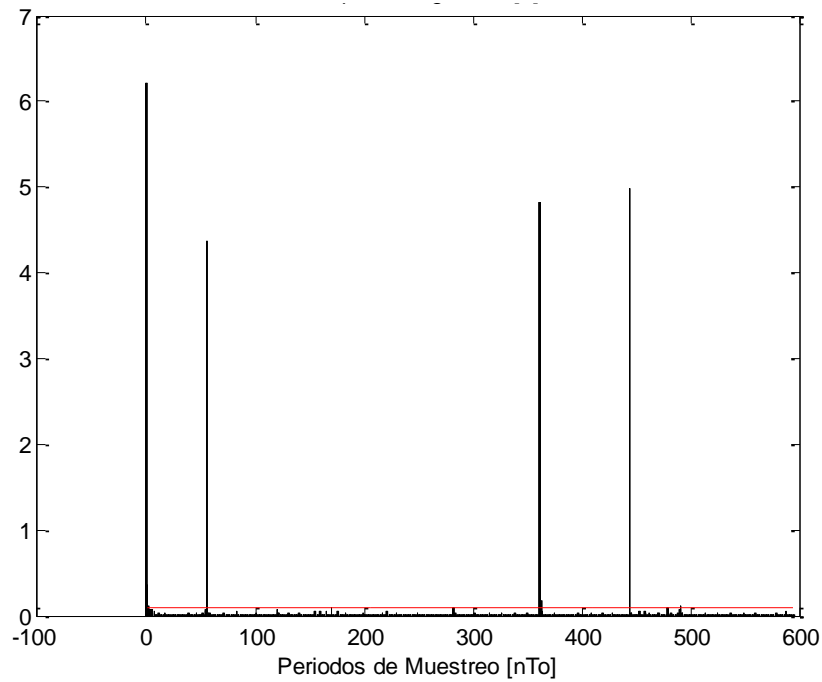
**Figura 5.24** Trayectoria: Circunferencia de radio 1[m]

Fuente: Datos experimentales obtenidos



**Figura 5.25** Posición y errores del eje x y y

Fuente: Datos experimentales obtenidos



**Figura 5.26** Tiempos de cálculo del algoritmo  
**Fuente:** Datos experimentales obtenidos

La Figura 5.26 muestra que el tiempo de cómputo sobrepasa en gran escala al valor del tiempo de muestreo considerado llegando incluso a un valor de hasta 6 [s], provocando como se mostró en el Figura 5.24 que el robot móvil no logra seguir la trayectoria deseada.

Como se ha evidenciado de manera experimental el robot móvil ha seguido las trayectorias deseadas de manera autónoma a través de la aplicación del esquema del controlador predictivo, demostrándose de ésta manera la hipótesis planteada y comprobada a través del cálculo estadístico del promedio de los errores encontrados, mismos que son despreciables una vez que el robot móvil alcanza la trayectoria deseada tendiendo a cero.

## CONCLUSIONES

El desarrollo de esta tesis se enfocó principalmente en: *i) Modelación dinámica* de un robot móvil tipo unicycle en el que se consideró la desviación del centro de masa; *ii) Control Autónomo* a través de la técnica de control de predictivo basado en modelos no lineales, en el controlador se consideró la cinemática y dinámica del robot; y finalmente; *iii) Evaluación experimental* tanto del modelo dinámico obtenido, como a su vez del control autónomo propuesto; para lo cual se utilizó en las pruebas experimentales el robot móvil AKASHA construido en el proyecto de investigación *Tele-operación Bilateral Cooperativo de Múltiples Manipuladores Móviles*, proyecto ganador de la IX Convocatoria CEDIA-CEPRA.

Las conclusiones y recomendaciones más importantes de esta tesis son:

- Existen diferentes métodos para obtener el modelo dinámico de un robot, ya sea a partir de la correlación de datos entrada/salida o mediante el uso de principios físicos. En este trabajo se consideró el método de principios físicos a través de las ecuaciones de Euler-Lagrange que se basan en el equilibrio de energía cinética y potencial. El modelo obtenido tiene velocidades de referencia como señales de control del robot; además, el modelo propuesto tiene una estructura apropiada para el diseño de diferentes técnicas de control.
- Las diferentes técnicas de control que se basan en el modelo de un robot deben considerar el tipo de aplicación que se vaya a ejecutar, *i.e.*, para tareas de baja velocidad se puede utilizar únicamente el modelo cinemático del robot; mientras que, en tareas de alta velocidad es indispensable la implementación del modelo dinámico del robot. Esto se debe a que en bajas velocidades se puede considerar que, las velocidades de referencia son iguales a las velocidades de salida, *i.e.*,  $\mathbf{u}_{ref} \cong \mathbf{u}$  y  $\boldsymbol{\omega}_{ref} \cong \boldsymbol{\omega}$ , lo que no sucede a velocidades altas  $\mathbf{u}_{ref} \neq \mathbf{u}$  y  $\boldsymbol{\omega}_{ref} \neq \boldsymbol{\omega}$
- El Control Predictivo basado en el Modelo -MPC- permite controlar sistemas lineales y no lineales, mono-variables y multi-variables utilizando la misma estructura del controlador. Sin embargo, la principal desventaja de un MPC es que el modelo implementado en el algoritmo no sea lo suficientemente preciso, *i.e.*,

que el modelo matemático no represente el mismo comportamiento del sistema real; mientras más inexacto sea el modelo matemático el error de control se incrementa.

- En el Control Predictivo sin restricciones, las acciones de control  $u_{ref}$  y  $\omega_{ref}$  pueden tomar valores muy grandes lo que produce que el robot móvil pase a la referencia, para corregir dicha posición retrocede a una velocidad muy elevada por lo que para alcanzar nuevamente a la referencia, al robot se le aplica una velocidad muy grande por lo que hace que el móvil vuelva a pasar a la referencia, esto se produce a lo largo de todo el tiempo de simulación en que el robot intenta seguir a la referencia. Dicho comportamiento no ocurre con en el controlador predictivo con restricciones, ya que la velocidad lineal y velocidad angular están restringidas, *i.e.*,  $u_{min} \leq u_{ref}(t) \leq u_{max}$  y  $\omega_{min} \leq \omega_{ref}(t) \leq \omega_{max}$ , respectivamente.



## RECOMENDACIONES

- Para la implementación de un algoritmo de MPC en aplicaciones robóticas se debe considerar que los tiempos de cómputo (tiempo que se dispone para realizar los cálculos del algoritmo) debe ser menores al tiempo de muestreo del robot, a fin de que los errores de control converjan a cero. Es importante considerar que para aplicaciones que requieran una alta velocidad el período de muestreo debe disminuir; por lo tanto, el tiempo de cómputo también debe disminuir, esto hace que la implementación del MPC para sistemas rápidos sea complicada.
- Como recomendación cabe indicar que antes de realizar las pruebas experimentales se debe considerar los valores mínimos y máximos de las velocidades de referencia del robot,  $u_{ref}$  y  $\omega_{ref}$ , a fin de no saturar por hardware los voltajes de entrada a los motores.
- Aumentar el horizonte de predicción en el MPC no asegura que los errores de control converjan a cero; ya que mientras más grande sea el horizonte de predicción mayor será el tiempo computacional, por lo tanto, los puntos de equilibrio del sistema se pueden hacer inestable.

## BIBLIOGRAFÍA

1. Andaluz Víctor.; (diciembre de 2016). *Virtual Reality Integration with Force Feedback in Upper Limb Rehabilitation. International Symposium on Visual Computing*, 259-268.
2. Andaluz, Gabriela (octubre de 2011). Modelación, Identificación y Control de Robots Móviles. *Tesis de Pregrado*. Escuela Politécnica Nacional, Quito.
3. Andaluz Víctor, Canseco Paúl., Varela José, Ortiz Jessica, Perez M. Morales Vicente. Roberti Flavio. Carelli Ricardo. (2015). *Modeling and control of a wheelchair considering center of mass lateral displacements. IEEE Transactions on System, Man and Cybernetics: Systems*, 45, 254-270.
4. Armada M, Prieto M., Akiénfiev T. Fernández R. (2005). "On the design and development of climbing and walking robots for the maritime industries." *Journal of Maritime Research*, 9-32.
5. Camacho E., Bordons C.I. (2007). *Model Predictive Control* (2nd ed.). Springer.
6. Engelberger, J. (1989). *Robotics in Service*. Springer.
7. Evans, J. (1994). *HelpMate: An Autonomous Mobile Robot Courier for Hospitals. Intelligent Robots and Systems '94. Advanced Robotics Systems and Real World*. Germany.
8. Xie F., Fierro R (2009). *Stabilization Nonholonomic Robot Formation: A First-state Contractive Model Control Approach. Journal of computing and information technology*, 17, 37-50.
9. Howard TM., Green CJ., Kelly A. (2010). *Receding Horizon Model - Predictive Control for Mobile Robot Navigation of Intricate Paths. Field and Service Robotics*, 69 - 78.
10. Kelly, R., Santibáñez V. Loría A. (2005). *Control of Robot Manipulators in Joint Space*. London: Springer - Verlag .

11. Lars Grune, Pannek Jurgen (2016). *Nonlinear Model Predictive Control*. Springer.
12. Locchi R (2012). *Domestics Service Robots in the Real Word. Journal of Intelligent Conference on Robotics and Automation*, 1416-1422.
13. Ma X., G. S. (2012). *Development of Novel Robotic Catheter Manipulating System with Fuzzy PID Control. Intelligent Mechatronics and robotics*, 44-49.
14. María Chaparro, O. V. (Junio de 2016). Robótica quirúrgica, desde los grandes asistentess hasta la nanotecnología. *Scientia et Technica*, 21(2), 182-190.
15. Maddahi Y., Zareinia K., Olson T. (2013). *Live-line maintenance training using robotics technology. IEEE World Haptics Conference* (págs. 587-592). España: IEEE.
16. Mathia, K. (2010). *Robotics for Electronics Manufacturing: Principles and Applications in Cleanroom Automation*. EEUU: Cambridge.
17. Max, S. (17 de marzo de 2017). BBC Mundo. Qué países tienen más robots en sus fábricas y cuán cierto es que nos están robando puestos de trabajo.
18. Ollero A., Amidi O. (1991). *Predictive tracking of Mobile Robots. IEEE 50TH International Conference On Advance Robotics*, 1081-1086.
19. Ostafew CJ., Schoelling AP., Barfoot TD. (2015). *Learning-based Nonlinear Model Predictive Control to Improve Vision-based Mobile Robot Path Tracking. Journal of Field Robotics*, 133-152.
20. Peña M. (2002). Control basado en Modelos Borrosos. Tesis Doctoral. San Juan, Argentina: INAUT - UNSJ.
21. Ramírez (1999). *Model based predictive control using genetic algorithms. Application to pilot plan. Preceedings of the 1999 European Control Conference*. Karlsruhe.
22. Reyes, F. (2011). Robótica - control de robots manipuladores. México: Alfaomega Grupo Editor
23. Siciliano, B. S. (2009). *Robotics: Modelling, Planing and Control*. Springer -Verlag London.

24. Tanner, W. (1979). *Industrial Robots. Applications* (Vol. 2). Canadá.
25. Victores JG., Morante S., González M. (2013). *Augmented reality and social interaction platform through multirobot design*. Madrid: Universidad Carlos III de Madrid - Robotic Lab.
26. Zoltan K, et al. (2007). *Evaluation study an efficient output feedback nonlinear model predictive control dor temperature tracking in an industrial batch reactor*. *ScienceDirect*, 839-850.

## ANEXO

### Modelación y Control Predictivo de un Robot Móvil con Centro de Masa Desplazado

Gabriela M. Andaluz, Fabricio Pérez, Jorge S. Sánchez, David R. Rivas

**Abstract**— En este trabajo se propone la implementación de seguimiento de trayectorias en el plano (X,Y) de un robot móvil tipo unicycle a través de la aplicación de la estrategia de Control Predictivo basado en Modelos - MPC, para lo cual fue necesario conocer previamente el modelo cinemático y dinámico considerando un centro de masa desplazado lateralmente del eje que une a las dos ruedas; parámetros que permitieron establecer y formular el esquema de control. Los algoritmos de control fueron implementados en el robot móvil tipo unicycle AKASHA (no comercial), se consideró velocidades de referencia como señales de control al sistema, como es común en robots comerciales. Además, el modelo tiene una estructura adecuada para el diseño de las leyes de control. Los resultados realizados a través de simulaciones y de forma experimental, muestran que el robot móvil tipo unicycle converge a la trayectoria deseada conforme a los algoritmos del control predictivo implementados, reduciendo los errores que se presentan debido a las restricciones y demás factores concurrentes en el movimiento del robot móvil hacia la trayectoria deseada.

#### I. INTRODUCCIÓN

Un perfeccionamiento de las técnicas de control para robots móviles impulsa el desarrollo de nuevas aplicaciones industriales, médicas, y de servicios. Así tenemos, la exploración autónoma de territorios hostiles, transporte de cargas para agilizar la logística y distribución de materiales, vehículos autónomos para movilizar personas con dificultades físicas de movimiento (Sillas de Ruedas).

Los robots móviles son una parte importante de la robótica móvil que puede ser aplicada a tareas de asistencia y de servicios. La robótica aplicada a movilidad ha evolucionado en los últimos años destacándose en las diferentes áreas debido a los diferentes cambios sociales que exigen dispositivos que logren satisfacer sus necesidades. En el asunto específico del seguimiento de trayectorias se requiere tener la odometría del robot para retroalimentar el sistema de control, así como algunos parámetros para el controlador que definen el movimiento a realizar.

El movimiento autónomo de robots móviles se realiza mediante sistemas de control de alto nivel, los cuales permiten trasladarse hacia un punto específico o recorrer una trayectoria o camino de manera que el beneficiario no intervenga en su funcionamiento. Eso significa que el usuario solicita al robot autónomo moverse a una determinada localización sin preocuparse con el camino a ser seguido y los elementos externos del sistema de control. De hecho, se traslada toda la responsabilidad al sistema de navegación del robot móvil, el cual debe, sobre todo, garantizar la estabilidad del sistema. Es fundamental, además, considerar los efectos dinámicos del robot, los cuales pueden volver el sistema inestable y por lo

tanto impedir que la tarea se realice correctamente. Así también, se debe tener en cuenta las restricciones del robot, como son las velocidades máximas de desplazamiento y las restricciones propias del sistema.

#### II. ROBÓTICA DE SERVICIO

##### A. Características

Las características principales que diferencian a los robots de servicio con los industriales, son:

- **Aspecto físico:** no necesariamente cuentan con brazos de dos o tres grados de libertad como los robots industriales, dependiendo su aplicación un robot pueden tener varios brazos y convertirse en una estructura de diseño compleja.
- **Sistema de locomoción:** en su mayoría dejan de ser sistemas estáticos como los robots de ambientes industriales, para adquirir diferentes sistemas de desplazamiento que les permita la evasión de obstáculo, trabajar en ambientes tanto estructurados como no estructurados.
- **Tareas complejas a realizar:** el robot de servicio cumple tareas en: áreas extensas no estructuradas, espacios reducidos, mayor interacción con el humano dependiendo su aplicación; cuentan con un número considerable de sistemas sensoriales de alta precisión.
- **Costos:** entre las motivaciones para dar un rol diferente a los robots del sector industrial, fue crear robots de servicio que sean económicamente cada vez más accesibles a la sociedad dependiendo de su aplicación.

##### B. Áreas de aplicación

El Comité Técnico en Robots de Servicio (por sus siglas en inglés Technical Committee on Service Robots) creado por la IEE Robotics and Automation Society, en el año 2000 definió las áreas de aplicación de los Robots de Servicio, dividiéndolo en dos grandes grupos:

- **Sectores productivos no manufactureros,** tales como: edificación, agricultura, naval, minería, medicina, etc.
- **Sectores de servicios propiamente dichos,** tales como: asistencia personal, limpieza, vigilancia, educación, entretenimiento, etc.

### III. MODELACIÓN DEL ROBOT MÓVIL

#### A. Modelación Cinemática

Se supone que la plataforma móvil se mueve sobre una superficie plana horizontal. Donde  $\mathcal{R} = (\Sigma_w, X, Y, Z)$  puede ser cualquier plano de referencia fijo con el eje  $Z$  vertical. La localización de la plataforma móvil es determinada por el vector  $\mathbf{q}$  de  $n-3$  coordenadas el cual define la posición y orientación del robot móvil en  $\mathcal{R}$ . Estas coordenadas son denominadas *coordenadas operacionales*. Las coordenadas se describen como  $\mathbf{q} = [x \ y \ \psi]^T$ , donde  $x$  y  $y$  representa la posición de interés de control del robot móvil en  $\mathcal{R}$  y  $\psi$  es la orientación. El conjunto de todas las variables constituye el espacio operativo de la plataforma, denotado por  $\mathcal{M}$ .

Las plataformas móviles, pueden ser clasificadas en cuatro categorías según el tipo de ruedas que posee (Bayle *et al.*, 2003)

- 1) las *ruedas fijas* para las cuales el eje tiene una dirección fija;
- 2) los *ruedas volantes*, para los cuales el eje de orientación pasa a través del centro de la rueda;
- 3) las *ruedas castor*, para las cuales el eje de orientación no pasa a través del centro de la rueda;
- 4) las *ruedas suecas*, que son similares a las ruedas fijas, con excepción de un parámetro adicional que describe la dirección, con respecto al plano de las ruedas, de la componente cero de la velocidad en el punto de contacto.

Este trabajo se basa en Robots Móviles tipo Uniciclo (también denominado monociclo); un robot móvil monociclo es un robot que puede girar libremente alrededor de su eje. El término monociclo se utiliza a menudo en la robótica para definir un robot que se mueve en un mundo bidimensional, estos robots móviles típicamente están conformados por dos ruedas, las cuales son controladas de manera independiente por dos motores de corriente continua, además suelen tener una rueda loca para la estabilidad física del robot. Si el punto de interés del robot móvil tipo monociclo está definido por un punto situado delante del centro del eje de las ruedas como se muestra en la Figura 1, entonces

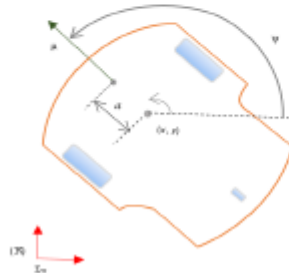


Figura 1. Robot Móvil tipo Uniciclo

De la Figura 1, es posible obtener el modelo geométrico,

$$\begin{cases} x = x_0 + a \cos(\psi) \\ y = y_0 + a \sin(\psi) \end{cases} \quad (1)$$

Derivando (1) se obtiene el modelo cinemático instantáneo del robot móvil respecto a marco inercial  $\{\mathcal{R}\}$ .

$$\begin{cases} \dot{x} = u \cos(\psi) - a\omega \sin(\psi) \\ \dot{y} = u \sin(\psi) + a\omega \cos(\psi) \\ \dot{\psi} = \omega \end{cases} \quad (2)$$

Donde el control de maniobrabilidad del robot móvil está definido por  $\mathbf{v} = [u \ \omega]^T$  en el cual  $u$  y  $\omega$  representan la velocidad lineal y velocidad angular, respectivamente.

El modelo de cinemático (2) puede ser representado de forma matricial a fin de ser utilizados en esquemas de control

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -a \sin(\psi) \\ \sin(\psi) & a \cos(\psi) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix} \quad (3)$$

Representada de forma compacta como

$$\dot{\mathbf{h}}(t) = \mathbf{J}(\psi) \mathbf{v}(t) \quad (4)$$

$$\dot{\psi} = \omega \quad (5)$$

donde,  $\mathbf{v}(t) = [u \ \omega]^T$  es el vector de velocidades del robot móvil y  $\mathbf{J}(\psi)$  representa la matriz Jacobiana, la misma que define un mapeo lineal entre el vector de velocidades del robot móvil  $\mathbf{v}(t)$  y el vector de velocidades de posición  $\dot{\mathbf{h}}(t) = [\dot{x} \ \dot{y}]^T$

#### B. Modelación Dinámica

De forma similar que en la modelación cinemática se considera un robot móvil que puede movilizar sobre superficies planas horizontales, donde  $\mathcal{R} = (\Sigma_w, X, Y, Z)$  es el marco de referencia fijo con respecto al eje  $Z$ . El control de movimiento del robot tradicionalmente considera que el punto de control para el seguimiento de camino se encuentra ubicado adelante del eje virtual y se denota como  $h(x, y)$ ; dicho punto es de interés para el diseño de los diferentes algoritmos de control a ser implementados en el robot móvil, ver Figura 5. Sin embargo, para la modelación dinámica se considera que el centro de masa  $G$  que está desplazado hacia adelante y de forma lateral del punto central de la estructura al punto  $B$  el mismo que se encuentra situado en el centro del eje virtual que une las dos ruedas.

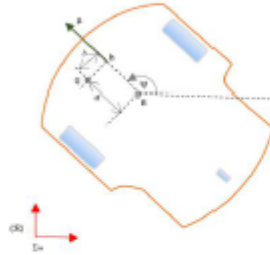


Figura 2. Esquema de robot silla de ruedas autónoma

Cabe recalcar, que la desviaciones laterales del centro de masa de un robot móvil puede ser producido por el transporte de carga o por la localización y/o movimiento de la herramienta; por ejemplo, la localización, movimiento y manipulación de un brazo robótico montado sobre un robot móvil puede producir que el centro de la masa del robot móvil no estaba situada en el centro del eje de los robots. La posición del centro de masa se puede definir como,

$$\begin{cases} x_0 + a \cos(\psi) - b \sin(\psi) \\ y_0 + b \cos(\psi) + a \sin(\psi) \\ \psi \end{cases} \quad (6)$$

derivando (6) se obtiene las velocidad de las coordenadas generalizadas del centro masa

$$\dot{\zeta} = \begin{bmatrix} \dot{\zeta}_x \\ \dot{\zeta}_y \\ \dot{\zeta}_\psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} - \omega(b \cos(\psi) + a \sin(\psi)) \\ \dot{y} + \omega(a \cos(\psi) - b \sin(\psi)) \\ \omega \end{bmatrix} \quad (7)$$

De la Figura 2 es posible describe la energía cinética del robot móvil mediante

$$K = \frac{1}{2} \dot{\zeta}^T m \dot{\zeta} \quad (8)$$

donde  $m$  representa la masa puntual de la plataforma móvil; resolviendo (8) se tiene,

$$K = \frac{m}{2} + m(\dot{\zeta}_x - \psi(b \cos(\psi) + a \sin(\psi)))^2 + (\dot{\zeta}_y + \psi(a \cos(\psi) - b \sin(\psi)))^2 + m(\dot{\zeta}_\psi + \psi(\dot{\alpha} \cos(\psi) - \dot{\beta} \sin(\psi)))^2 \quad (9)$$

Para el caso de la energía potencial, el robot móvil no posee desplazamientos en el eje  $Z$ , por lo cual  $P = 0$ . (10)

Mediante (9) y (10) se determina la ecuación del Lagrangeano  $L = K - P$  del robot móvil, obteniendo que  $L = K$

$$L = \frac{m}{2} + m(\dot{\zeta}_x - \psi(b \cos(\psi) + a \sin(\psi)))^2 + (\dot{\zeta}_y + \psi(a \cos(\psi) - b \sin(\psi)))^2 + m(\dot{\zeta}_\psi + \psi(\dot{\alpha} \cos(\psi) - \dot{\beta} \sin(\psi)))^2 \quad (11)$$

Aplicado el método Euler-Lagrange  $\frac{d}{dt} \left( \frac{dL}{d\dot{\zeta}_x} \right) - \frac{dL}{d\zeta_x}$  en (11) se determina las fuerzas y torque de rotación generados por el robot móvil respecto a  $\mathcal{R} = (\Sigma_w, X, Y, Z)$ . Por lo tanto, la fuerza  $f_{\zeta_x}$  generada sobre el eje  $X$  en el punto de interés  $\zeta$  de la plataforma móvil es:

$$f_{\zeta_x} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dL}{d\dot{\zeta}_x} \right) - \frac{dL}{d\zeta_x}$$

$$f_{\zeta_x} = -m\dot{\psi}^2 (a \cos(\psi) - b \sin(\psi)) + m\dot{\zeta}_x - m\omega(b \cos(\psi) + a \sin(\psi)) \quad (12)$$

De forma similar a (12) se determina la fuerza  $f_{\zeta_y}$  generada sobre el eje  $Y$  en el punto de interés  $\zeta$  de la plataforma móvil.

$$f_{\zeta_y} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dL}{d\dot{\zeta}_y} \right) - \frac{dL}{d\zeta_y}$$

$$f_{\zeta_y} = -m\dot{\psi}^2 (b \cos(\psi) + a \sin(\psi)) + m\dot{\zeta}_y + \omega^2 (m(a \cos(\psi) - b \sin(\psi))) + m(a \cos(\psi) - b \sin(\psi)) \quad (13)$$

De manera similar a (12) y (13) se determina el torque  $\tau_{\zeta_\psi}$  generado sobre la plataforma móvil

$$\tau_{\zeta_\psi} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dL}{d\dot{\zeta}_\psi} \right) - \frac{dL}{d\zeta_\psi}$$

$$\tau_{\zeta_\psi} = m(\dot{\psi} + a^2 \dot{\psi} + b^2 \dot{\psi} + a^2 \dot{\zeta}_x \cos(\psi) - b^2 \dot{\zeta}_y \cos(\psi) - a^2 \dot{\zeta}_x \sin(\psi) - b^2 \dot{\zeta}_y \sin(\psi)) \quad (14)$$

Reagrupando términos de (12), (13) y (14) se tiene,

$$\begin{bmatrix} f_{\zeta_x} \\ f_{\zeta_y} \\ \tau_{\zeta_\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 & -m(b \cos(\psi) + a \sin(\psi)) \\ 0 & m & m(a \cos(\psi) - b \sin(\psi)) \\ -m(b \cos(\psi) + a \sin(\psi)) & m(a \cos(\psi) - b \sin(\psi)) & m(a^2 + b^2 + 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\zeta}_x \\ \dot{\zeta}_y \\ \dot{\zeta}_\psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -m\omega(a \cos(\psi) - b \sin(\psi)) \\ 0 & 0 & -m\omega(b \cos(\psi) + a \sin(\psi)) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\zeta}_x \\ \dot{\zeta}_y \\ \dot{\zeta}_\psi \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}_\zeta(t) = \mathbf{M}(\psi) \dot{\zeta}(t) + \mathbf{C}(\psi, \dot{\psi}) \zeta(t) \quad (15)$$

El torque generado en cada rueda del robot móvil puede ser representado a través de los modelos simplificados eléctricos-mecánicos de un motor de corriente continua,

$$\tau_d = \frac{k_t (u_d - k_b \omega_d)}{R_d} \quad (16)$$

$$\tau_r = \frac{k_t (u_r - k_b \omega_r)}{R_r} \quad (17)$$

Es necesario considerar las velocidades de referencia de rotación y traslación como señales de entrada para poder expresar el modelo del móvil de una manera adecuada; es así que la implementación de controladores de velocidad son incluidos en el modelo dinámico del robot, para que el mismo no resulte complejo se considera controladores de velocidad tipo PD de referencia de velocidades constantes como se describe a continuación (Andaluz, 2011).

$$u_d = K_{PT} (u_{d,r} - u) - \dot{u} K_{DT}$$

$$\dot{v}_a = K_{PR}(\omega_{ref} - \omega) - \dot{\omega}K_{DR} \quad (18)$$

donde,  $u_{ref}$  y  $\omega_{ref}$  representan los valores de referencia para la velocidad lineal y angular del controlador PD;  $K_{PR}$  y  $K_{DR}$  son las constantes proporcional y derivativa de traslación del robot móvil;  $K_{PR}$  y  $K_{DR}$  son las constantes proporcional y derivativa de rotación del robot móvil, en forma matricial se obtiene el controlador PD

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{PR} & 0 \\ 0 & K_{PR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{ref} \\ \omega_{ref} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{DR} & 0 \\ 0 & K_{DR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{DR} & 0 \\ 0 & K_{DR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix}$$

$$\dot{v}_p(t) = K_p v_{ref} - K_p v - K_D \dot{v} \quad (19)$$

donde  $v_{ref}(t)$  son las velocidades de referencia lineal y angular del robot móvil; y  $K_p$  es la matriz de ganancia proporcional; y  $K_D$  es la matriz de constantes de ganancia derivativa.

Resolviendo el controlador PD (19) se obtiene el modelo dinámico compacto del robot móvil con centro de masa desplazado; que tiene como entradas las velocidades de referencia del robot

$$v_{ref}(t) = K_v \left( D^1 (s^1 B)^1 s^1 M B + K_v \right) v + K_v \left( D^1 (s^1 B)^1 s^1 M B + D^1 (s^1 B)^1 s^1 C S + D^1 E + K_v \right) \dot{v}$$

$$\dot{v}_{ref}(t) = H \dot{v} + \eta v \quad (20)$$

De la expresión anterior es posible determinar los parámetros dinámicos del robot móvil con centro de masa desplazado

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 & \Omega_4 & \Omega_5 & \Omega_6 & \Omega_7 & \Omega_8 & \Omega_9 & \Omega_{10} \end{bmatrix}^T$$

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_{ref} \\ \dot{\omega}_{ref} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_1 & -\Omega_2 \\ -\Omega_4 & \Omega_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Omega_6 & -\Omega_7 \\ \Omega_8 & -\Omega_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \omega \end{bmatrix} \quad (21)$$

### C. Identificación y Validación

La identificación y validación del modelo dinámico obtenido en (20) tiene como objetivo determinar los parámetros dinámicos de (21) a través de datos experimentales; los cuales permiten describir el comportamiento real del robot móvil durante un intervalo de tiempo, para lo cual no se consideran las leyes internas que gobiernan los componentes del sistema.

El proceso de identificación de los parámetros dinámicos del robot móvil se basa principalmente en tres etapas: i) *Excitación del robot*, esta etapa se realiza on-line, para la cual la excitación del robot se realiza a través de las señales de controlabilidad, es decir, velocidad lineal y velocidad angular de referencia del robot. EL objetivo de esta etapa es que conocer el valor de las velocidades de salidas ante un valor de excitación predeterminado, la diferencia entre estas señales ilustra la dinámica del robot. ii) *Algoritmo de identificación*, esta etapa se realiza off-line y tiene como objetivo la implementación de algún algoritmo que permita identificar los parámetros dinámicos en base a los valores obtenidos en la primera etapa; y finalmente iii) *validación* esta etapa es la

encargada de evaluar si los valores de los parámetros dinámicos obtenidos son los correctos, para lo cual se utiliza la estructura del modelo dinámico obtenido teóricamente.

En este trabajo para estimar los parámetros dinámicos del robot que mejor se ajuste al modelo dinámico del robot, se debe implementar el método de Mínimos Cuadrados, puesto que brinda mayor aproximación al sistema real, mismo que se define a través de la minimización de una función de costo que considera el error cuadrático medio, en cada período de muestreo, entre las velocidad de referencia y las velocidades de salida, es decir que los parámetros dinámicos estimados se obtienen a partir de

$$\Omega^* = \left[ \zeta_{PR}^T \zeta_{DR}^T \right]^{-1} \zeta_{PR}^T v_{ref\_PR} \quad (22)$$

donde,  $\Omega^*$  representa los valores de los parámetros dinámicos estimados el robot móvil.

Para la identificación y validación del modelo dinámico del robot móvil se implementó en Simulink de MatLab la (22) para lo cual se consideró un filtro de primer orden cuya función de transferencia está dado por

$$f(s) = \frac{\lambda}{(s + \lambda)} \quad (23)$$

donde,  $\lambda > 0$  y  $s$  representan el operador diferencial. El objetivo de implementar (17) es estimar las aceleraciones lineales y angulares a partir de las velocidades medidas, necesarias para implementar en la parametrización lineal dada

$$\begin{bmatrix} \dot{u} & 0 & -\dot{\omega} & 0 & -\omega^2 & u & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\omega} & 0 & \dot{u} & 0 & 0 & u\omega & \omega & -\omega^2 & \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \vdots \\ \Omega_{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{ref} \\ \omega_{ref} \end{bmatrix} \quad (24)$$

A partir de los vectores de salida, se implementa en el Script de MatLab la (22), con lo cual se obtiene que los parámetros dinámicos estimados del robot móvil son:

$$\begin{bmatrix} \Omega_1 = 0.1757 \\ \Omega_2 = 0.1279 \\ \Omega_3 = 0.0047 \\ \Omega_4 = -0.1730 \\ \Omega_5 = -0.0062 \\ \Omega_6 = 0.9710 \\ \Omega_7 = -0.1543 \\ \Omega_8 = 0.9510 \\ \Omega_9 = -0.0647 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Los valores estimados de los parámetros dinámicos obtenidos fueron a partir de que se consideró como referencia a señales tanto de velocidad lineal y velocidad angular, según muestra las Figuras 3 - 4



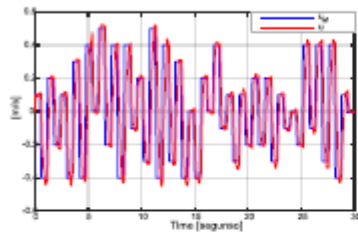


Figura 3. Identificación de la velocidad lineal

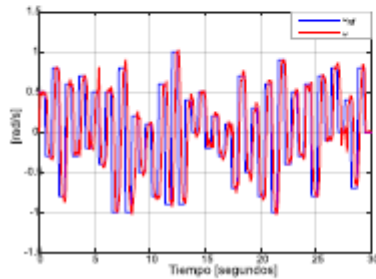


Figura 4. Identificación de la velocidad angular

Mientras que las Figuras 5-6 ilustran la validación del modelo dinámico obtenido (21), considerando los valores estimados experimentalmente de los parámetros dinámicos obtenidos (25).

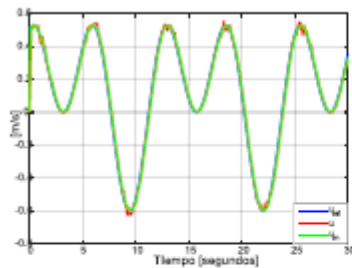


Figura 5. Validación de la velocidad lineal

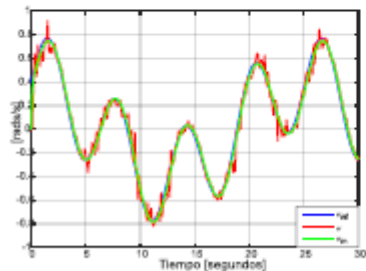


Figura 6. Validación de la velocidad angular

En las Figuras 5 - 6 se puede observar que las salidas del modelo dinámico tanto para la velocidad lineal como angular (líneas verdes) siguen a las velocidades de salida reales de robot móvil; por lo cual se puede concluir que el modelo dinámico (21) y los parámetros dinámicos estimados (25) emulan el comportamiento del robot móvil en el cual se consideró el centro de masa con desviación lateral.

#### IV. CONTROL PREDICTIVO BASADO EN EL MODELO

Un modelo no lineal determinístico general en tiempo discreto de un sistema puede expresarse como,

$$\mathbf{x}(k+1) = f(\mathbf{x}(k), \mathbf{v}(k)) \quad (26)$$

$$\mathbf{y}(k) = h(\mathbf{x}(k)) \quad (27)$$

donde,  $\mathbf{x}(k)$ ,  $\mathbf{v}(k)$  y  $\mathbf{y}(k)$  son los vectores de estado, de entrada de control y de salida, respectivamente.

Por lo tanto el modelo cinemático (3) y el modelo dinámico (21) se puede describir en forma compacta como,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\psi} \\ \dot{u} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \cos(\psi) - a \omega \sin(\psi) \\ u \sin(\psi) + a \omega \cos(\psi) \\ \omega \\ \frac{\Omega_1}{\Omega_2} \omega^2 - \frac{\Omega_1}{\Omega_2} u \\ -\frac{\Omega_2}{\Omega_1} u \omega - \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \omega^2 \end{bmatrix} + \frac{1}{\Omega_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{w1} \\ \omega_{w1} \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t)) + g(\mathbf{v}(t))$$

donde,  $\mathbf{x}(t) = [x \ y \ \psi \ u \ \omega]^T$  es el vector de estado del sistema,  $\mathbf{v}(t) = [u_{w1} \ \omega_{w1}]^T$  es el vector de control.

El modelo dinámico del robot móvil puede ser discretizado mediante cualquier método de aproximación numérica, e.g., la aproximación de Euler,

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + T_o [f(\mathbf{x}_k) + g(\mathbf{v}_k)] \quad (29)$$

donde,  $T_o$  es el periodo de muestreo y el vector de condiciones iniciales está dado por,

$$\mathbf{x}_k(t) = [x_k \ y_k \ \psi_k \ u_k \ \omega_k]^T \quad (30)$$

La ecuación de salida del sistema está dada por,

$$\mathbf{y}(k) = h(\mathbf{x}(k)) = C\mathbf{x}(k) \quad (31)$$

donde,  $C$  es una matriz de dimensión  $o \times e$  ( $o$  es el número de estados controlados del sistema). En el presente trabajo se considera la siguiente ecuación de salida,

$$\mathbf{y}(k) = [x(k) \ y(k) \ \psi(k)]^T \quad (32)$$

Por otro lado, la mayoría de los métodos de MPC están basados en un esquema común (Ramírez *et.al.*, 1999). Se define un funcional de coste o costo  $J$ , el cual es a menudo una

función cuadrática de la suma de la norma de los errores futuros de seguimiento de la trayectoria,

$$e(k+i|k) = y(k+i|k) - y_d(k+i) \quad (33)$$

predichos sobre un horizonte de predicción  $N$  más la suma de la norma de los incrementos predichos en la acción de control, sobre un horizonte de control  $N_c$ ,

$$J = \sum_{i=1}^N \delta_i \|e(k+i|k)\|_{Q_i}^2 + \sum_{i=1}^{N_c} \lambda_i \|\Delta v(k+i-1|k)\|_{L_i}^2 \quad (34)$$

$$\Delta v(k+i|k) = v(k+i|k) - v(k+i-1|k)$$

donde,  $\delta_i$  y  $\lambda_i$  son secuencias de penalización que usualmente se eligen constantes,  $y_d(k+i)$  es la salida deseada y la notación  $y(k+i|k)$  indica que  $y(k+i)$  se calcula con la información conocida en el instante  $k$ . Las salidas futuras del sistema  $y(k+i|k)$  para  $i = 1, \dots, N$ , son predichas mediante un modelo del proceso a partir de las salidas y entradas anteriores al instante  $k$ , y a partir de las acciones de control futuras predichas,  $v(k+i|k)$  para  $i = 0, \dots, N_c-1$ , las cuales son las que se pretende calcular. Además, se tiene que  $\|x\|_Q^2 = x^T Q x$  y  $Q > 0$

De esta manera  $J$  se puede expresar como una función dependiente sólo de las acciones de control futuras. El objetivo del control predictivo es obtener una secuencia de acciones de control futuras  $[v(k), v(k+1|k), \dots, v(k+N_c-1|k)]$ , de tal manera que las salidas predichas usando el modelo del sistema  $y(k+i|k)$ , estén tan cerca de la referencia  $y_d(k+i|k)$  como sea posible, a lo largo del horizonte de predicción. Esto se consigue mediante la minimización de  $J$  respecto a las variables de control. Luego de que se obtiene esta secuencia, se emplea una estrategia de *horizonte deslizando*, que consiste en aplicar únicamente la primera acción de control  $v(k)$  calculada. Este proceso se repite en cada tiempo de muestreo.

Cuando se utilizan modelos no lineales, el MPC depende de encontrar la solución a un problema de programación no lineal en cada paso de muestreo. Para resolver esto, es necesario realizar la optimización y solucionar el modelo del sistema. Estos dos problemas pueden implementarse de dos maneras diferentes: en forma secuencial o simultáneamente (Peña, 2002).

#### 4.2.1 Algoritmo de optimización secuencial

Para la implementación secuencial, se encuentra una solución en cada iteración de la rutina de optimización. Los controles son las variables de decisión que ingresan al algoritmo, el cual calcula la solución para el modelo. Luego, se usa esta solución para evaluar la función objetivo y el valor calculado se entrega al programa de optimización. Entonces, la variable de optimización toma la forma,

$$z = [v(k) \ v(k+1|k) \ \dots \ v(k+N_c-1|k)]^T \quad (35)$$

La función que calcula el funcional, debe resolver primero el modelo del sistema con los valores del vector  $z$  y con el estado actual  $x(k)$  aplicando  $N$  veces la (28). De este modo se obtiene

la secuencia de vectores  $[x(k+1|k) \ x(k+2|k) \ \dots \ x(k+N|k)]$ . Con la (32) se establece los valores de la secuencia  $[y(k+1|k) \ y(k+2|k) \ \dots \ y(k+N|k)]$  de la salida y con estos valores se evalúa el funcional de costo dado en (34).

El funcional de costo  $J$  depende de las salidas predichas, las cuales a su vez son función del vector de estados y éste de las acciones de control (variables de optimización). Por tanto, resulta que, para obtener el gradiente del funcional, deben derivarse las salidas respecto a las acciones de control desde  $k$  hasta  $(k+N_c-1)$ . Esto resulta complicado y no siempre se tiene solución. Por esto, en la resolución secuencial no se tiene la información del gradiente y debe obtenerse a través de la diferenciación numérica, lo que es computacionalmente negativo, debido a que se genera un mayor costo de cálculo y problemas de convergencia.

#### 4.2.2 Algoritmo de optimización simultáneo

A diferencia de la solución secuencial, la solución y optimización simultánea, incluyen los estados y controles del modelo como variables de decisión. Las ecuaciones del modelo se añaden al problema de optimización como ecuaciones de restricción. Entonces, la variable de optimización resulta,

$$z = [x(k+1) \ x(k+1|k) \ \dots \ x(k+N|k) \ v(k) \ v(k+1|k) \ \dots \ v(k+N_c-1|k)]^T \quad (36)$$

es decir, se consideran los estados y las acciones de control como variables de optimización. La dimensión de este vector es de  $(eN + pN_c)$ , que es mayor a la que resulta en la propuesta secuencial  $(pN_c)$ , donde  $e$  y  $p$  son los tamaños de los vectores de estado y entrada de control, respectivamente. Esto conlleva un incremento considerable en el tamaño de la variable de optimización en relación a la propuesta secuencial. Las ecuaciones del modelo aparecen como restricciones de igualdad como se muestra a continuación,

$$R = \begin{cases} x(k+1|k) - f(x(k), v(k)) \\ x(k+2|k) - f(x(k+1), v(k+1)) \\ \vdots \\ x(k+N|k) - f(x(k+N-1), v(k+N_c)) \end{cases} \quad (37)$$

En esta propuesta, la obtención del gradiente en forma analítica es más sencilla, por lo que se puede incorporar en forma explícita el algoritmo de optimización. Para el caso del funcional (34) resulta,

$$\nabla J = \begin{bmatrix} 2\delta_1 G_{n,n}^T Q [h(x(k+1|k)) - y_r(k+1)] \\ 2\delta_2 G_{n,n}^T Q [h(x(k+2|k)) - y_r(k+2)] \\ \vdots \\ 2\delta_N G_{n,n}^T Q [h(x(k+N|k)) - y_r(k+N)] \\ 2\lambda_1 R \Delta v(k) - 2\lambda_2 R \Delta v(k+1) \\ 2\lambda_2 R \Delta v(k+1) - 2\lambda_3 R \Delta v(k+2) \\ \vdots \\ 2\lambda_{N-1} R \Delta v(k+N-1) \end{bmatrix} \quad (38)$$

con

$$G_{n,n}^T = \left. \frac{\partial h(x(k), v(k))}{\partial x(k)} \right|_{x_{n,n}}$$

El gradiente de las restricciones de igualdad es una matriz dispersa y toma la forma de,

$$VR = \begin{bmatrix} I_{n,n} & -Fx(k+1) & \dots & 0_{n,n} & 0_{n,n} \\ 0_{n,n} & I_{n,n} & \dots & 0_{n,n} & 0_{n,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_{n,n} & 0_{n,n} & \dots & I_{n,n} & -Fx(k+N-1) \\ -Fv(k) & 0_{n,n} & \dots & 0_{n,n} & I_{n,n} \\ 0_{n,n} & -Fv(k+1) & \dots & 0_{n,n} & 0_{n,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_{n,n} & 0_{n,n} & \dots & 0_{n,n} & -Fv(k+N-1) \end{bmatrix} \quad (39)$$

donde,

$$F_{n,n} = \left. \frac{\partial f(x(k), v(k))}{\partial x(k)} \right|_{x_{n,n}} ;$$

$$F_{n,n} = \left. \frac{\partial f(x(k), v(k))}{\partial v(k)} \right|_{x_{n,n}} ;$$

$I_{n,n}$  es la matriz identidad de dimensión  $n$  y  $0_{n,n}$  es una matriz nula con dimensión  $n \times n$ .

Para problemas pequeños con pocos estados y un horizonte de predicción pequeño, el método secuencial es probablemente más efectivo (Peña, 2002). Para problemas grandes generalmente la propuesta simultánea es más robusta, ya que es menos probable que falle. En la propuesta secuencial la adición de restricciones sobre los estados o las salidas es más complicada. Además de las restricciones que surgen del modelo, se pueden agregar restricciones en la acción de control, en el estado estacionario, etc.

## V. RESULTADOS EXPERIMENTALES

Para las pruebas experimentales se utiliza el robot móvil tipo unicycle (ver Figura 7) construido en el proyecto de investigación *Tele-operación bilateral cooperativo de múltiples manipuladores móviles*, proyecto ganador de la novena convocatoria CEDIA-CEPRA. El proyecto es ejecutado por la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, Universidad Técnica de Ambato, Escuela Politécnica Nacional y la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE.



Figura 7. AKASHA, robot móvil tipo unicycle

Para la implementación del MPC con enfoque secuencial se considera a la variable de optimización (35). La función que calcula el funcional, debe resolver primero el modelo del sistema con los valores del vector  $z$  y con el estado actual  $x(k)$  aplicando  $N$  veces la (28). El algoritmo que se implementó para realizar el controlador predictivo no lineal con restricciones con enfoque secuencial.

Resultados de la implementación del controlador.

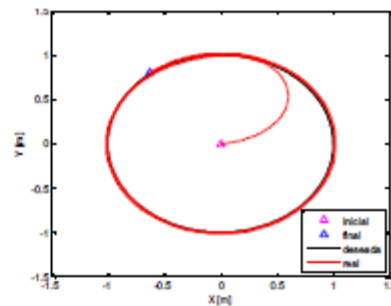


Figura 8. Trayectoria descrita: Circunferencia de radio 1[m]

En la Figura 8, se puede notar que el robot móvil sigue correctamente a la referencia; tanto el robot móvil como la referencia a seguir dan 2 vueltas respectivamente. En la Figura 9 se puede notar que los errores tanto en el eje  $x$  como en  $y$  son muy pequeños y lo importante es que tienen a bajar.

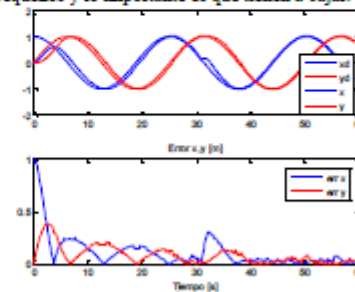


Figura 9. Posición y errores del eje  $x$  y  $y$

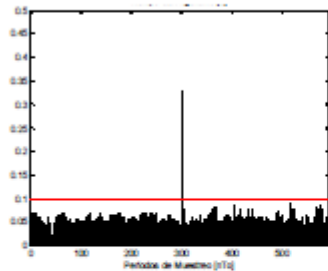


Figura 10. Tiempos de cálculo del algoritmo

Los tiempos de cálculo del algoritmo son menores que el periodo de muestreo del robot, según muestra la Figura 10 con un promedio de 0.06 [s].

A diferencia de la solución secuencial, la solución y optimización simultánea, incluyen los estados y controles del modelo como variables de decisión. Las ecuaciones del modelo se añaden al problema de optimización como ecuaciones de restricción. Entonces, la variable de optimización que se implementa es (36).

Los resultados experimentales de esta prueba se muestran en las Figuras 11 a las 13.

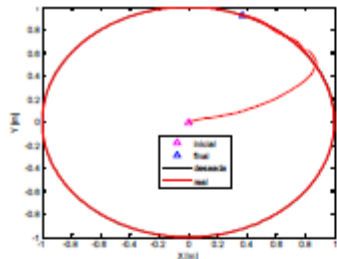


Figura 11. Trayectoria: Circunferencia de radio 1[m]

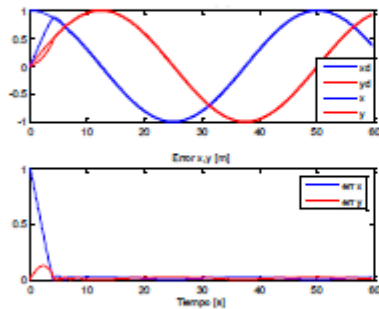


Figura 12. Posición y errores del eje x y y

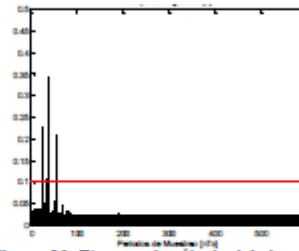


Figura 13. Tiempos de cálculo del algoritmo

La Figura 11 muestra que el robot móvil sigue correctamente a la referencia deseada; mientras que en la Figura 12 se puede observar que una vez el robot móvil alcanzó a la referencia el error en el eje 'x' y en 'y' se mantuvo constante a un valor de 0.05 [m]. Los tiempos de cálculo a pesar de que su mayoría fueron menores que el periodo de muestreo hay intervalos en los que se sobrepasan de forma significativa.

## VI. CONCLUSIONES

Para la implementación de un algoritmo de MPC en aplicaciones robóticas se debe considerar que los tiempos de cómputo (tiempo que se dispone para realizar los cálculos del algoritmo) debe ser menores al tiempo de muestreo del robot, a fin de que los errores de control converjan a cero. Es importante considerar que para aplicaciones que requieran una alta velocidad el periodo de muestreo debe disminuir, por lo tanto, el tiempo de cómputo también debe disminuir, esto hace que la implementación del MPC para sistemas rápidos sea complicada.

## REFERENCES

- Andaluz, (Diciembre de 2016). Virtual Reality Integration with Force Feedback in Upper Limb Rehabilitation. *International Symposium on Visual Computing*, 259-268.
- Andaluz, G. (octubre de 2011). Modelación, Identificación y Control de Robots Móviles. *Tesis de Pregrado*. Quito. Obtenido de <http://www.monografias.com/trabajo31/robotica/robotica.shtml>
- Andaluz, V.H., et al. (2015). Modeling and control of a wheelchair considering center of mass lateral displacements. *IEEE Transactions on System, Man and Cybernetics: Systems*, 45, 254-270.
- Armada, et al. (2005). On the design and development of climbing and walking robots for the maritime industries. *Journal of Maritime Research*, 9-32.
- Camacho F. et al. (2007). *Model Predictive Control* (2nd ed.). Springer.
- Engelberger, J. (1989). *Robotics in Service*. Springer.
- Evans, J. (1994). HelpMate: An Autonomous Mobile Robot Courier for Hospitals. *Intelligent Robots and Systems '94. Advanced Robotics Systems and Real World*. Germany.
- Feng Xie, et al. (2009). Stabilization Nonholonomic Robot Formation: A First-state Contractive Model

- Control Approach. *Journal of computing and information technology*, 17, 37-50.
9. Howard et al. (2010). Receding Horizon Model - Predictive Control for Mobile Robot Navigation of Intricate Paths. *Field and Service Robotics*, 69 - 78.
  10. Kelly, S. L. (2005). *Control of Robot Manipulators in Joint Space*. London: Springer - Verlag .
  11. Lars Grune, et al. (2016). *Nonlinear Model Predictive Control*. Springer.
  12. Locchi L., R. j. (2012). Domestic Service Robots in the Real World. *Journal of Intelligent Conference on Robotics and Automation*, 1416-1422.
  13. Ma X., G. S. (2012). Development of Novel Robotic Catheter Manipulating System with Fuzzy PID Control. *Intelligent Mechatronics and robotics*, 44-49.
  14. María Chaparro, O. V. (Junio de 2016). Robótica quirúrgica, desde los grandes asistentes hasta la nanotecnología. *Scientia et Technica*, 21(2), 182-190.
  15. Massahi, et.al. (2013). Live-line maintenance training using robotics technology. *IEEE World Haptics Conference* (págs. 587-592). España: IEEE.
  16. Mathia, K. (2010). *Robotics for Electronics Manufacturing: Principles and Applications in Cleanroom Automation*. EEUU: Cambridge.
  17. Max, S. (17 de marzo de 2017). BBC Mundo. *Qué países tienen más robots en sus fábricas y cuán cierto es que nos están robando puestos de trabajo*.
  18. Ollero A., A. O. (1991). Predictive tracking of Mobile Robots. *IEEE 50TH INTERNATIONAL CONFERENCE ON ADVANCE ROBOTICS*, 1081-1086.
  19. OstafewC, et al. (2015). Learning-based Nonlinear Model Predictive Control to Improve Vision-based Mobile Robot Path Tracking. *Journal of Field Robotics*, 133-152.
  20. Peña M. (2002). Control basado en Modelos Borrosos. *Tesis Doctoral*. San Juan, Argentina: INAUT - UNSJ.
  21. Ramirez et.al. (1999). Model based predictive control using genetic algorithms. Application to pilot plan. *Proceedings of the 1999 European Control Conference*. Karlsruhe.
  22. Reyes, F. (2011). *Robótica - control de robots manipuladores*. México: Alfaomega Grupo Editor S.A.
  23. Siciliano, B. S. (2009). *Robotics: Modelling, Planing and Control*. Springer -Verlag London.
  24. Tanner, W. (1979). *Industrial Robots. Applications* (Vol. 2). Canadá.
  25. Victores et al. (2013). *Augmented reality and social interaction platform through multirobot design*. Madrid: Universidad Carlos III de Madrid - Robotic Lab.
  26. Zoltan K, et al. (2007). Evaluation study an efficient output feedback nonlinear model predictive control dor temperature tracking in an industrial batch reactor. *ScienceDirect*, 839-850.