ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

TÍTULO DE LA TESIS

La Utilización de la Historia de la Matemática como introducción al fundamento teórico para mejorar el rendimiento académico de los estudiantes en la Escuela de Ingeniería Automotriz de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo en el período Septiembre 2014-Febrero del 2015

AUTOR

OLGA BEATRIZ BARRERA CÁRDENAS

Tesis presentada ante el Instituto de Postgrado y Educación Continua de la ESPOCH, como requisito parcial para la obtención del grado de Magíster en Matemática Básica

RIOBAMBA - ECUADOR

2015

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

CERTIFICACIÓN:

EL TRIBUNAL DE TESIS CERTIFICA QUE:
El trabajo de titulación, titulado "La Utilización de la Historia de la Matemática como introducción al fundamento teórico para mejorar el rendimiento académico de los estudiantes en la Escuela de Ingeniería Automotriz de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo en el período Septiembre 2014-Febrero del 2015", de responsabilidad de la Sra. Olga Beatriz Barrera Cárdenas ha sido prolijamente revisado y se autoriza su presentación.

Tribunal de Tesis:

Ing. Wilian Pilco
PRESIDENTE

Dra. Angélica Urquizo
DIRECTOR

Dr. Mario Audelo
MIEMBRO

Mat. Marcelo Cortez
MIEMBRO

COORDINADOR SISBIB ESPOCH

Riobamba, Febrero del 2015

DERECHOS INTELECTUALES

Yo, Olga Beatriz Barrera Cárdenas, declaro que soy responsable de las ideas, doctrinas y resultados expuestos en la presente Tesis/Tesina, y que el patrimonio intelectual generado por la misma pertenece exclusivamente a la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

FIRMA
1802128551

DEDICATORIA

A mi esposo y mis hijos la razón de mi vida.

A mi padre, hermano y familiares con quienes comparto el viaje de la vida.

A mi madre que está conmigo en mi corazón.

Olga Beatriz Barrera Cárdenas.

AGRADECIMIENTO

Mi agradecimiento a la Dra. Angelita Urquizo, directora de tesis, al Dr. Mario Audelo y Mat. Marcelo Cortez miembros del tribunal, quienes con su paciencia y sobre todo con sus valiosos conocimientos aportaron en el desarrollo de este trabajo.

Agradezco también a quienes hicieron posible tanto la planificación como la realización de la maestría en matemática básica.

CONTENIDOS

ÍNDICE DE IMÁGENES

ÍNDICE DE CUADROS

RESUMEN

Investigación para determinar si la Historia de la Matemática utilizada como introducción al fundamento teórico, mejora el rendimiento académico de los estudiantes de Algebra Superior de la Escuela de Ingeniería Automotriz, Facultad de Mecánica de la ESPOCH, período académico Octubre 2014-Febrero 2015 aplicando un mes de clase expositiva a dos grupos, uno de experimentación y otro de control, al primero formado por 33 estudiantes, se entrega conocimientos previos sobre la base filosófica de la matemática a través de biografías, videos, documentos científicos en forma física como en digital, utilizándose una aula virtual con plataforma Moodle, lográndose consolidar los conocimientos de Algebra Superior de forma crítica y auto valorativa para solucionar problemas; mientras que al grupo de control, formado por 42 estudiantes, se dictó las clases de forma tradicional. Se evaluó el rendimiento al grupo de experimentación alcanzando una media de 4.61/6 sobre el grupo de control de 4.13/6 que, comparada con una prueba z normalizada (prueba paramétrica de comprobación hipotética), arrojó resultados de 2.0879 (z calculada) > 1.96 (valor crítico). Lográndose verificar que existe una diferencia significativa en el rendimiento académico. Se concluye que utilizando la Historia de la Matemática como introducción al fundamento teórico el estudiante alcanza conocimientos significativos.

Palabras claves: /HISTORIA DE LA MATEMÁTICA/ BASE FILOSÓFICA DE LA MATEMÁTICA/ RENDIMIENTO ACADÉMICO/ ALGEBRA SUPERIOR/

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

ABSTRACT

This research objective is to determine if the History of Mathematics used as introduction to the theoretical frame, improves academic performance of Higher Algebra students in the Automotive Engineering School, Mechanics Faculty, ESPOCH, in the academic period October 2014-February 2015 applying one month expository classes to two groups, experimental and control, to the first group with 33 students, prior knowledge about the philosophical basis of mathematics is provided through printed and digital biographies, videos, and scientific documents using a virtual classroom with Moodle platform, in order to consolidate knowledge of Higher Algebra in a critical and self-evaluative way to solve problems; in the control group with 42 students traditional classes were taught. The experimental group performance was evaluated and reached 4.61 / 6 average over the control group 4.13 / 6, that compared to a standard z-test (parametric test of hypothetical checking) showed a result of 2.0879 (calculated z)> 1.96 (critical value). The results prove that there is a significant difference in academic performance. It is concluded that when using the History of Mathematics as introduction to the theoretical basis the student achieves significant knowledge.

Keywords: / HISTORY OF MATHEMATICS / PHILOSOPHICAL BASIS OF MATHEMATICS / ACADEMIC PERFORMANCE / HIGHER ALGEBRA

INTRODUCCIÓN

¿Hasta qué punto es importante la inclusión de la historia de la matemática al abordar los contenidos de lógica, conjuntos y números reales a fin de lograr resultados óptimos en estudiantes que comienzan su vida universitaria y deben obligatoriamente tomar cursos de matemática básica? Este es el problema que esta investigación pretende analizar.

El tema es de interés para la autora de este documento por la experiencia de la misma en las sesiones de aula en las cuales y por innúmeras ocasiones los estudiantes mostraban un vacío en los procesos sistemáticos relacionados con los prerrequisitos en los diferentes cursos vinculados a la matemática por lo cual se decidió incluir la temática epistemológica de historia de la matemática con lo cual se podían solventar un amplio número de problemas tipo.

Es útil esta investigación por cuanto permite colocar en la palestra de la universidad el asunto siempre prescindible en las instituciones de educación superior como lo es la epistemología. Un maestro que quiere cumplir con integralidad de ser un facilitador no brindará soluciones a sus estudiantes sin hacer que ellos se involucren en el problema que generó dicha solución. Es lo que esta investigación pretende.

Esta tesis se divide en los siguientes apartados: el capítulo uno contiene la introducción, importancia y justificación de la investigación; los objetivos e hipótesis del estudio; el capítulo dos acoge un estudio sobre la revisión bibliográfica de otros estudios relacionados; se incluye también un marco conceptual sobre las variables de la investigación.

El capítulo tres incluye la metodología de trabajo, el tratamiento estadístico y matemático, así como los resultados de la aplicación didáctica; El capítulo cuatro registra las conclusiones de la investigación; Finalmente se describen las recomendaciones que se enlazan o provienen de las conclusiones de la tesis.

CAPÍTULO 1

1. PROBLEMATIZACIÓN

Si la matemática es considerada como una ciencia, entonces la filosofía de las matemáticas puede ser considerada como una rama de la filosofía de la ciencia, al lado de disciplinas como la filosofía de la física y la filosofía de la biología. Sin embargo, a causa de su objeto, la filosofía de las matemáticas ocupa un lugar especial en la filosofía de la ciencia.

Considerando que las ciencias naturales investigan las entidades que se encuentran en el espacio en el tiempo, no es en absoluto evidente que este también es el caso de los objetos que se estudian en las matemáticas. Además de eso, los métodos de investigación de las matemáticas difieren notablemente de los métodos de investigación en las ciencias naturales.

Considerando que el conocimiento general éstos tienen usando métodos inductivos, el conocimiento matemático parece ser adquirida de una manera diferente: por deducción a partir de principios básicos. El estado de los conocimientos matemáticos también parece diferir de la situación de los conocimientos en las ciencias naturales.

Las teorías de las ciencias naturales parecen ser menos seguras y más abiertas a la revisión de las teorías matemáticas. Por estas razones la matemática plantea problemas de un tipo muy peculiar para la filosofía. Por lo tanto, los filósofos han concedido especial atención a las cuestiones ontológicas y epistemológicas sobre las matemáticas (Platón, 2007).

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En la Región 3 de planificación de la SENPLADES se ubica la provincia de Chimborazo cuya capital es la ciudad de Riobamba. Sobre la parroquia Lizarzaburu Km 2.5 de la Panamericana Sur se sitúa la Escuela de Ingeniería Automotriz de la Facultad de Mecánica de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

En la escuela en cuestión se han registrado los siguientes problemas relacionados con el proceso educativo en el área de matemática básica:

- Falta de articulación teórico-práctica de contenidos.
- Falta de indicadores claros de aprendizaje significativo por efecto de difícil abstracción de temas debido a enfoques puntuales (sin tomar en cuenta evolución de conocimientos).
- Orientación deficiente de profesores de matemáticas acerca de metas de aprendizaje a lograr en los estudiantes vs criterios de filtración de elementos en las carreras.
- Completa desvinculación de la epistemología con el currículo de matemáticas en el nivel básico. (Anexo 1).
- Relación sujeto-objeto de la investigación externa.
- Evaluación de aprendizajes criterial, cuantitativo, reductivo.
- Fraccionamiento de conocimientos los estudiantes con respecto a los temas abordados; lo que imposibilita el desarrollo de la categoría síntesis del dominio cognitivo.
- Falta de recursos relativos a la didáctica en el proceso educativo de la matemática.
- Desinterés en el desarrollo del micro currículum en cuanto a procesos pedagógicos y dando mayor vigor a los contenidos a desarrollar por el profesor. (Anexo 1)

1.2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

¿De qué forma la inclusión de la epistemología en su apartado referente a la historia de la matemática mejora el rendimiento de los estudiantes de la Escuela de Ingeniería Automotriz de la Facultad de Mecánica de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo durante 2014?

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo general

Determinar si la utilización de la historia de la matemática como introducción al fundamento teórico mejora el rendimiento académico de los estudiantes de la escuela de ingeniería automotriz de la ESPOCH.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Investigar si en la Escuela de Ingeniería Automotriz de la Espoch se utiliza o no la Historia de la Matemática como introducción al fundamento teórico.
- Utilizar la Historia de la Matemática como introducción al fundamento teórico en la asignatura de Algebra Superior del primer semestre de la carrera de Ing. Automotriz y comparar el rendimiento académico de los estudiantes de los grupos de control y el de experimentación.
- Proponer el diseño y la implementación de un curso sobre Historia de la Matemática.

1.4 JUSTIFICACIÓN

Es importante esta investigación porque propone un cambio en el enfoque de la matemática: de pista de obstáculos obligatoria como requisito para abordar las disciplinas de especialidad en las ingenierías a ciencia formal que permite cimentar las bases de las asignaturas fácticas. Esto, mediante el uso de la epistemología sin la cual no se puede generar el conocimiento.

Se justificó la presente investigación por cuanto existió la voluntad política de las autoridades tanto del posgrado cuanto de la facultad y escuela de Ingeniería Automotriz (Ver anexo 3 y 4) donde se plasmó este proyecto hoy convertido en realidad. Los estudiantes auxiliares de la investigación mostraron su beneplácito de participar en este estudio.

Existió la viabilidad y factibilidad de realización de esta investigación por cuanto hubo los medios técnicos, tecnológicos e informáticos para la ejecución de la misma; no faltó tampoco el talento humano consistente en la tutora, la investigadora y los estudiantes sujetos de experimentación. Se contó también con el recurso financiero requerido para llevar a cabo este proyecto.

La justificación normativa se desagregó desde los siguientes documentos obligatorios: Constitución del Ecuador; Ley Orgánica de Educación Superior en sus acápites relacionados con la pertinencia académica de la labor de la universidad y al Modelo Pedagógico de la ESPOCH el cual propende al logro de un estudiante crítico e integral.

Es original este estudio por cuanto no existen otros trabajos en la biblioteca de la ESPOCH que aborden el problema de la epistemología de la matemática en su apartado Historia de la Matemática a través de la aplicación de recursos didácticas con el objetivo de mejorar el alcance académico de los estudiantes de los niveles iniciales.

CAPÍTULO 2

2. MARCO TEÓRICO CONCEPTUAL

2.1 ANTECEDENTES

Muis, K. R. (2004) en su artículo titulado *Personal epistemology and mathematics: A critical review and synthesis of research* en *Review of Educational Research* establece una revisión que examina críticamente 33 estudios sobre las creencias epistemológicas de los estudiantes sobre las matemáticas. Se identificaron cinco categorías: creencias sobre las matemáticas, el desarrollo de las creencias, los efectos de las creencias sobre el comportamiento, las diferencias de dominio, y el cambio de creencias. Los estudios que examinan las creencias sobre las matemáticas revelan patrones consistentes en no válidas creencias en todos los niveles educativos. En los diferentes entornos de enseñanza de las matemáticas se infiere que debe influir en el desarrollo de las creencias sobre las matemáticas. Todos los estudios revelaron relaciones significativas entre las creencias y la cognición, la motivación y el rendimiento académico. Los estudios descriptivos encontraron relaciones entre las creencias y comportamientos de aprendizaje. Los estudios que examinan las diferencias de dominio encontraron variaciones significativas en las creencias en todas las disciplinas. Los estudios que se centran en el cambio de creencias tuvieron éxito, que se atribuyó a cambios en el estilo de instrucción apropiado. El artículo concluye con sugerencias para futuras investigaciones.

Sierpinska, A., & Lerman, en su artículo *Epistemologies of mathematics and of mathematics education. In International handbook of mathematics education* (pp. 827-876) publicada por Springer Netherlands se ocupan de cuestiones relativas a la epistemología, que se relacionan con las matemáticas y la educación. Comienza con un examen de algunas de las principales cuestiones epistemológicas relativas a la verdad, el significado y la seguridad, y las diferentes formas en que pueden ser interpretadas. Examinan las epistemologías del "contexto de justificación" y del "contexto de descubrimiento", fundamentalista y epistemologías no fundacionalistas de las matemáticas, epistemologías, socio-históricas y culturales histórico-crítico, y el significado de las epistemologías.

En la segunda parte de estos autores, después de un breve vistazo a la epistemología en relación a las declaraciones de la educación matemática, las epistemologías de la educación matemática se convierten en el principal foco de atención. Los puntos de controversia dentro de una serie de áreas se consideran: el carácter subjetivo-objetivo del conocimiento matemático; el papel de la cognición en el contexto social y cultural; y las relaciones entre el lenguaje y el conocimiento. Los principales postulados del constructivismo, enfoques socio-culturales, interaccionismo, la didáctica francesa y el significado de la epistemología. Se abordan también las relaciones entre la epistemología y una teoría de la enseñanza, sobre todo en lo que se refiere a los principios didácticos.

Gill, M. G., Ashton, P. T., & Algina, J. en 2004 escriben su artículo titulado *Changing preservice teachers' epistemological beliefs about teaching and learning in mathematics: An intervention study*. *Contemporary Educational Psychology*, donde registran una investigación de un modelo teórico que incluye una intervención de instrucción y del tratamiento sistemático a la cuenta de un cambio en las creencias epistemológicas sobre la enseñanza y el aprendizaje en matemáticas. Como procesamiento general y de temas específicos se estudiaron las creencias epistemológicas y sistemáticas y se evaluó a 161 maestros en formación, asignando al azar un grupo experimental cuyas creencias epistemológicas acerca de las matemáticas se activaron y desafiaron por activación aumentada y se asignó un grupo de control que debía leer un texto expositivo tradicional. El modelo fue parcialmente apoyado. El grupo de tratamiento que recibió la intervención de instrucción demostró un mayor cambio en las creencias epistemológicas implícitas que el grupo control, y el apoyo parcial para el procesamiento sistemático se obtuvo una apreciación de la relación entre las creencias epistemológicas generales y el cambio en las creencias epistemológicas específicas.

2.2 FUNDAMENTACIÓN CIENTÍFICA

2.2.1 Fundamentación sicológica

El presente trabajo tiene una orientación en el enfoque integral (Piaget, 1967) en el cual se ha considerado el momento biológico por el que atraviesa el estudiante; no es un niño o un adolescente y sí un joven que busca abrirse paso por la vida mediante la concreción de sus estudios universitarios. La metodología ha sido diseñada y aplicada tomando en cuenta los principios de Piaget.

2.2.2 Fundamentación sociológica

Se ha dirigido esta investigación por la teoría de la Zona de Desarrollo Próximo (Daniels, 2001), la cual da un especial papel en el protagonismo del aprendizaje del estudiante la participación del entorno; en este caso, compañeros, estudiantes, autoridades, padres de familia y demás miembros de la comunidad en la que se desenvuelve el alumno. La implementación metodológica ha propendido todo el tiempo a esta realidad.

2.2.3 Fundamentación Pedagógica

La importancia a la realidad social en la que se desenvuelve el estudiante han hecho posible la realización es este trabajo de investigación; a diferencia del paradigma cuantitativo frío del método cartesiano, este estudio ha tomado en cuenta la pedagogía del oprimido (Freire, 2005) la cual propende a la libertad interior del individuo que es lo que pretende la investigadora para con sus dicentes.

2.2.4 Fundamentación Epistemológica

El paradigma complejo (Morin, 2000) ha servido de base para la elaboración de esta propuesta educativa. Mediante los principios de la complejidad el estudiante sabe que cada temática es un hecho aislado o espontáneo; más bien obedece a una amplia gama de factores que inciden en su creación.

2.2.5 Fundamentación Axiológica

Son las dimensiones del ser humano (Zubiri, 2006) , individual, social y humana las que han direccionado el estudio presentado mediante este documento. ¿Para qué sirve la educación sino para formar integralmente al hombre y en colaborar con su autodeterminación y auto realización?

2.3 FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

2.3.1. Categoría variable dependiente: el rendimiento académico

El rendimiento académico es el resultado de la educación - el grado en que un estudiante, maestro o la institución ha logrado sus metas educativas. El rendimiento académico se mide comúnmente por los exámenes o la evaluación continua, pero no existe un acuerdo general sobre la forma en la mejor forma o los aspectos más importantes; el conocimiento procedimental como las habilidades o conocimientos declarativos del conocimiento como son los hechos (Ward, Annie; Stoker. W, 1996). Hablando del rendimiento académico; en Estados Unidos por ejemplo, el logro de las escuelas se mide por el índice de rendimiento académico. Las diferencias individuales que influyen en el rendimiento académico.

Las diferencias individuales en el rendimiento académico se han relacionado con diferencias en la inteligencia y la personalidad. (Stumm, Sophie; Hell, Benedikt; Chamorro-Premuzic, Tomas , 2011). Los estudiantes con mayor habilidad mental como lo demuestran las pruebas de CI y los que son más altos en la concienciación (vinculado al esfuerzo y la motivación de logro) tienden a lograr altos resultados en el ámbito académico.

Una meta-análisis reciente sugiere que la curiosidad mental (medida por el compromiso intelectual típico) tiene una influencia importante en el logro académico, además de la inteligencia y la conciencia (Ibíd)

Las transiciones de entorno y el aprendizaje en casa de los estudiantes se agudizan al empezar la escuela. Los logros académicos tempranos mejoran el rendimiento académico posterior (Bossaert, G; S. Doumen; E. Buyse; K. Verschueren , 2011). La socialización académica de los padres es un término que describe la forma en que estos influyen en el rendimiento académico mediante el incentivo hacia el desarrollo de habilidades, comportamientos y actitudes hacia la escuela; (Magnuson, 2007) los estudiantes tienen la influencia de su padres a través del medio ambiente y los padres del discurso que tienen con sus hijos.

La socialización académica puede ser influenciada por el nivel socioeconómico de los padres. Los padres con estudios superiores tienden a tener un ambiente de aprendizaje más estimulante. En los niños los primeros años de vida son cruciales para el desarrollo del lenguaje y las habilidades sociales.

La preparación escolar en estas áreas ayudar a los estudiantes a adaptarse a las expectativas académicas (Kerry, 1995). Otro potenciador muy importante de los logros académicos es la presencia de la actividad física. Los estudios han demostrado que la actividad física puede aumentar la actividad neural en el cerebro (Tomporowski, Davis, Miller, & Naglieri, 2008) . El ejercicio aumenta específicamente las funciones ejecutivas cerebrales tales como la capacidad de atención y la memoria de trabajo (Ibid).

2.3.2 Categoría Variable independiente historia de la lógica matemática

La lógica matemática es un sub campo de la matemática que explora las aplicaciones de la lógica formal. Por vía tópica, la lógica matemática tiene estrechas relaciones con la meta matemática, los fundamentos de las matemáticas y la informática teórica. Los temas unificadores en la lógica matemática incluyen el estudio de la capacidad expresiva de los sistemas formales y el poder deductivo de los sistemas de prueba formal.

La lógica matemática se divide a menudo en los campos de la teoría de conjuntos, teoría de modelos, teoría de la repetición, y la teoría de la prueba. Estas áreas comparten resultados básicos de lógica, sobre todo la lógica de primer orden, y la definibilidad. En las ciencias de la computación por ejemplo la lógica matemática abarca temas adicionales propios de su estudio.

Desde su creación, la lógica matemática ha sido motivada por el estudio de los fundamentos de las matemáticas. Este estudio se inició en el siglo 19 con el desarrollo de los marcos axiomáticos para la geometría, aritmética, y el análisis. Desde fines del siglo 19 (Hilbert, 1899) se propuso un programa para probar la consistencia de las teorías fundacionales.

Los resultados de Kurt Gödel, Gerhard Gentzen (Gödel, 1929) y otros proporcionaron la resolución parcial para el programa, y aclararon las cuestiones implicadas en la prueba de consistencia. El trabajo en la teoría de conjuntos mostró que casi todas las matemáticas ordinarias se pueden formalizar en términos de conjuntos, aunque hay algunos teoremas que no pueden ser probados en sistemas axiomáticos comunes por la teoría de conjuntos.

Las intervenciones contemporáneas en los fundamentos de las matemáticas a menudo se centran en establecer qué partes de las matemáticas se pueden formalizar; en particular los sistemas formales (como en la matemática inversa) en lugar de tratar de encontrar teorías en las que todas las matemáticas se pueden desarrollar.

La lógica matemática contemporánea hace una división aproximada de su estudio en cuatro áreas:

- la teoría de conjuntos
- la teoría de modelos
- la teoría de la repetición, y
- la teoría de la prueba y las matemáticas constructivas (considerados como partes de una misma área).

Cada área tiene un enfoque distinto, aunque muchas de las técnicas y los resultados son compartidos entre múltiples áreas. Las fronteras entre estos campos y las líneas que separan la lógica matemática y otros campos de las matemáticas, no son siempre visibles (Felscher, 2000) . El teorema de la incompletitud de Gödel no sólo marca un hito en la teoría de la repetición y la teoría de la prueba, sino que también ha dado lugar al teorema de Löb en la lógica modal.

El campo matemático de la teoría de la categoría utiliza muchos métodos axiomáticos formales, e incluye el estudio de la lógica categórica, pero la teoría de las categorías no se considera normalmente un sub-campo de la lógica matemática. Debido a su aplicabilidad en diversos campos de las matemáticas, matemáticos incluyendo a Saunders y Mac Lane han propuesto la teoría de categorías como un sistema fundamental para las matemáticas, independientemente de la teoría de conjuntos.

La lógica matemática surgió en la segunda mitad del siglo 19 como un sub-campo de la matemática independiente del estudio tradicional de la lógica. Antes de esta aparición, la lógica se estudió con la retórica, a través del silogismo, y con la filosofía. La primera mitad del siglo 20 vio una explosión de los resultados fundamentales, acompañados por un intenso debate sobre los fundamentos de las matemáticas (Ferreirós, 2001).

Las teorías de la lógica se desarrollaron en muchas culturas de la historia, incluyendo a China, India, Grecia y el mundo islámico. En la Europa del siglo 18, los intentos para tratar las operaciones de la lógica formal de manera simbólica o algebraica habían sido hechas por los matemáticos filosóficos entre ellos Leibniz y Lambert, pero sus trabajos permanecieron aislados y poco conocidos.

A mediados del siglo XIX, George Boole y Augustus De Morgan presentaron tratamientos matemáticos sistemáticos de la lógica. Su trabajo, basándose en el trabajo de los algebristas como George Peacock, extendió la doctrina aristotélica tradicional de la lógica en un marco suficiente para el estudio de los fundamentos de las matemáticas (Milies, 2003).

Charles Sanders Peirce se basó en el trabajo de Boole para desarrollar un sistema lógico de las relaciones y cuantificadores, el que publicó en varios periódicos de 1870 a 1885. Gottlob Frege presentó un desarrollo independiente de la lógica con cuantificadores en su artículo, publicado en 1879, una obra generalmente considerada como punto de inflexión en la historia de la lógica. La obra de Frege permaneció en la oscuridad, hasta que Bertrand Russell comenzó a promoverlo cerca del cambio de siglo. La notación de dos dimensiones que Frege desarrolló nunca fue adoptada ampliamente y no se utiliza en los textos contemporáneos (Fraenkel, 1922).

De 1890 a 1905, Ernst Schroeder publicó *Vorlesungen über die Algebra der Logik* en tres volúmenes. Este trabajo resume los aportes de Boole, De Morgan, y Peirce, y constituye una referencia completa a la lógica simbólica que ya se entendía a finales del siglo 19.

2.3.2.1 Teorías fundacionales

Las preocupaciones de que las matemáticas no habían sido construidas sobre una base adecuada condujeron al desarrollo de los sistemas axiomáticos para las áreas fundamentales de las matemáticas como la aritmética, el análisis y la geometría.

En la lógica, el término aritmética refiere a la teoría de los números naturales. (Peano, 1976) Se publicó un conjunto de axiomas para la aritmética que vinieron a llevar su nombre (axiomas de Peano), utilizando una variación del sistema de lógica de Boole y Schröder pero añadiendo cuantificadores. Peano no tenía conocimiento de la obra de Frege por el momento.

Por la misma época, Richard Dedekind mostró que los números naturales se caracterizan únicamente por sus propiedades de inducción (Dedekind, 1872). Dedekind proponía una caracterización diferente, que carecía del carácter lógico formal de los axiomas (Peano, 1976). El trabajo de Dedekind, sin embargo, demostró teoremas inaccesibles en el sistema de Peano, incluyendo la singularidad del conjunto de los números naturales (hasta el isomorfismo) y las definiciones recursivas de adición y multiplicación y la inducción matemática.

En la mitad del siglo 19, las fallas en los axiomas de Euclides para la geometría llegaron a ser conocidos (Katz, 1964). Además de la independencia del postulado de las paralelas, establecido por Nikolai Lobachevsky en 1826 (Lobachevsky 1840), los matemáticos descubrieron que ciertos teoremas dados por sentado por Euclides no lo eran, de hecho, lo que puede deducirse de sus axiomas.

Entre los diversos parámetros se encuentra el teorema de que una línea contiene al menos dos puntos, o que los círculos del mismo radio cuyos centros están separados por radio deben cruzarse. (Hilbert, 1899) desarrolló un conjunto completo de axiomas para la geometría, a partir de un trabajo previo de Pascua (1882). El éxito en la geometría axiomática ha motivado a Hilbert a buscar axiomatizaciones completas de otras áreas de las matemáticas, como (Felscher, 2000) los números naturales y la recta real. Esto demostraría ser un área importante de la investigación en la primera mitad del siglo 20.

El siglo 19 vio grandes avances en la teoría del análisis real, incluyendo las teorías de la convergencia de las funciones y las series de Fourier. Los matemáticos como Karl Weierstrass comenzaron a construir funciones que se extendían desde la intuición, como funciones continuas en ninguna parte-diferenciables. Concepciones anteriores de una función como una regla para el cálculo, o un gráfico liso, ya no eran adecuadas.

Weierstrass comenzó a abogar por la aritmetización del análisis, que buscaba axiomatizar el análisis utilizando las propiedades de los números naturales. El moderno (ε, δ) -definición de las funciones de límite y continuas ya fue desarrollado por Bolzano en 1817 (Felscher, 2000), pero se mantuvo relativamente desconocido. Cauchy en 1821 define la continuidad en términos de los infinitesimales (Cours d'Analyse, página 34). En 1858, Dedekind propuso una definición de los números reales en términos de cortes de Dedekind de los números racionales (Dedekind, 1872), una definición todavía empleada en los textos contemporáneos.

Georg Cantor desarrolló los conceptos fundamentales de la teoría de conjuntos infinitos. Sus primeros resultados desarrollaron la teoría de cardinalidad y demostró que los reales y los números naturales tienen diferentes cardinalidades (Cantor 1874). Durante los próximos veinte años, Cantor desarrolló una teoría de los números transfinitos, en una serie de publicaciones. En 1891, se publicó una nueva prueba de la incontabilidad de los números reales que introdujeron el argumento diagonal, y se utiliza este método para demostrar el teorema de Cantor que ningún conjunto puede tener la misma cardinalidad. Cantor creía que cada conjunto puede ser bien ordenado, pero era incapaz de producir una prueba de este resultado, dejándolo como un problema abierto en 1895 (Katz, 1964).

Imagen 1 Georg Cantor

Fuente: Biografías.com

2.3.2.1 Siglo 20

En las primeras décadas del siglo 20, las principales áreas de estudio fueron la teoría de conjuntos y la lógica formal. El descubrimiento de las paradojas de la teoría de conjuntos informal hizo que algunos se preguntan si las matemáticas eran inconsistentes, y se debía buscar pruebas de consistencia.

En 1900, Hilbert planteó una famosa lista de 23 problemas para el próximo siglo. Las dos primeras de ellas fueron para resolver la hipótesis del continuo y probar la consistencia de la aritmética elemental respectivamente; la décima era producir un método que podría decidir si una ecuación polinómica multivariante sobre los números enteros tiene una solución.

Los trabajos posteriores para resolver los problemas antes mencionados siguieron la dirección de la lógica matemática, esforzándose para resolver el *Entscheidungsproblem* (Problemas de decisión) que Hilbert, planteó en 1928. Este problema se basaba en un procedimiento que decidiría, dado un enunciado matemático formalizado, si la afirmación es verdadera o falsa.

Imagen. 2 David Hilbert

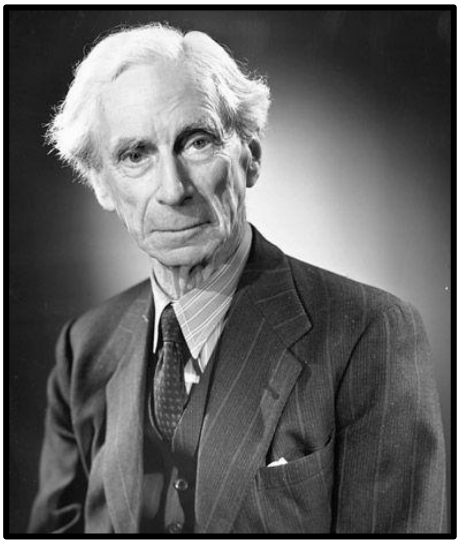
Fuente: www.prof-edigleyalexandre.com

2.3.2.3 La teoría de conjuntos y paradojas

Ernst Zermelo (1904) dio una prueba de que cada conjunto puede estar bien ordenado, un resultado que Georg Cantor habría podido obtener. Para conseguir la prueba, Zermelo introdujo el axioma de elección, que atrajo a un acalorado debate y la investigación entre los matemáticos y los pioneros de la teoría de conjuntos. La crítica inmediata del método llevó a Zermelo a publicar una segunda exposición de su resultado, dirigiéndose directamente a las críticas de su prueba (Zermelo, 1908). Este trabajo condujo a la aceptación general del axioma de elección en la comunidad matemática.

El escepticismo sobre el axioma de elección fue reforzado por paradojas recientemente descubiertas en la teoría de conjuntos (Burali-Forti, 1897) la paradoja de Burali-Forti muestra que el conjunto de todos los números ordinales no puede formar un conjunto. Muy poco después, Bertrand Russell descubrió la paradoja de Russell en 1901, y Jules Richard (1905) descubrió la paradoja de Richard.

Imagen. 3 Bertrand Russell



Fuente: curiosidades.batanga.com

Zermelo (1908) proporcionó el primer conjunto de axiomas para la teoría de conjuntos. Estos axiomas, junto con el axioma adicional de sustitución propuesta por Abraham

Fraenkel, ahora se llaman Axiomas de Zermelo-Fraenkel (ZF). Los axiomas de Zermelo incorporan el principio de limitación de tamaño para evitar la paradoja de Russell.

En 1910, se publicó el primer volumen de los Principia Mathematica de Russell y Alfred North Whitehead. Este trabajo seminal desarrolló la teoría de funciones y cardinalidad en un marco completamente formal de la teoría de tipos, que desarrollaron Russell y Whitehead, en un esfuerzo para evitar las paradojas. Principia Mathematica es considerada una de las obras más influyentes del siglo 20, aunque el marco de la teoría no resultó popular como una teoría fundamental para las matemáticas (Ferreirós, 2001).

Se demostró (Fraenkel, 1922) que el axioma de elección no puede ser probada de los axiomas restantes de la teoría de conjuntos de Zermelo. El trabajo posterior de Paul (Cohen, 1966) mostró que no se necesita la adición de elementos átomo, y el axioma de elección es indemostrable en ZF. La prueba que Cohen desarrolló usa el método de forzamiento, que ahora es una herramienta importante para el establecimiento de los resultados de la independencia en la teoría de conjuntos.

2.3.2.4 La lógica simbólica

A inicios del siglo 20 (Löwenheim, 1915) se obtuvo el teorema Löwenheim-Skolem, que dice que la lógica de primer orden no puede controlar las cardinalidades de las estructuras infinitas. Skolem dándose cuenta de que este teorema se aplicaría a las formalizaciones de primer orden de la teoría de conjuntos, y que implica dicha formalización propone un modelo contable. Este hecho contrario a la intuición se hizo conocido como la paradoja de Skolem.

En su tesis doctoral, (Gödel, 1929) demostró el teorema de completitud, que establece una correspondencia entre la sintaxis y la semántica de la lógica de primer orden. Gödel utiliza el teorema de completitud para demostrar el teorema de compacidad, lo que demuestra la naturaleza finitista de primer orden en la consecuencia lógica. Estos resultados ayudaron a establecer la lógica de primer orden como la lógica dominante utilizada por los matemáticos.

En 1931, Gödel publicó sobre proposiciones formalmente indecidibles de Principia Mathematica y sistemas relacionados, que demostraron el carácter incompleto (en un sentido diferente de la palabra) de todos, teorías de primer orden eficaces suficientemente fuertes. Este resultado, conocido como teorema de incompletitud de Gödel, establece severas limitaciones en bases axiomáticas de las matemáticas y alcanzan un fuerte golpe en el programa de Hilbert. Se mostró la imposibilidad de dar una prueba de consistencia de la aritmética dentro de cualquier teoría formal de la aritmética. Hilbert, sin embargo, no reconoció la importancia del teorema de incompletitud durante algún tiempo (Hilbert, 1899).

El teorema de Gödel muestra que una prueba de consistencia de cualquier sistema axiomático suficientemente fuerte, eficaz no se puede obtener en el propio sistema, si el sistema es consistente, ni en cualquier sistema más débil. Esto deja abierta la posibilidad de que las pruebas de consistencia que no pueden ser formalizadas dentro del sistema que consideran. (Gentzen, 1936) Demostró la consistencia de la aritmética utilizando un sistema finitístico junto con un principio de inducción transfinito.

El resultado de Gentzen introdujo las ideas de eliminación de corte y ordinales, prueba teórica que se convirtió en herramienta clave en la teoría de la prueba. Gödel dio una prueba de consistencia diferente, lo que reduce la consistencia de la aritmética clásica a la de la aritmética intuicionística en tipos superiores.

2.3.2.5 Comienzos de las otras ramas

Alfred Tarski desarrolló los fundamentos de la teoría de modelos. A partir de 1935, un grupo de matemáticos prominentes colaboró con el seudónimo de Nicolas Bourbaki para publicar una serie de textos de matemáticas enciclopédicas. Estos textos, escritos en un estilo austero y axiomático, hicieron hincapié en la presentación rigurosa de fundamentos de teoría de conjuntos. Terminología acuñada por estos textos, con palabras como biyectivo, inyectivo y sobreyectivo, que fueron usados en textos de los fundamentos de la teoría de conjuntos ampliamente y en toda la matemática (Tarski, 1948).

El estudio de la computabilidad llegó a ser conocida como teoría de la repetición, porque las primeras formalizaciones de Gödel y Kleene confiaron en definiciones recursivas de funciones. Con estas definiciones, se mostró un equivalente a la formalización de Turing que involucra las máquinas de Turing, se hizo evidente que un concepto nuevo. - la función computable - había sido descubierto, y que esta definición era suficientemente robusta como para admitir numerosas caracterizaciones independientes (Gödel, 1929).

Imagen 4 Alan Turing

Fuente: www.abc.es

En su trabajo sobre los teoremas de incompletitud en 1931, Gödel carecía de un concepto riguroso de un sistema formal eficaz; inmediatamente se dio cuenta de que las nuevas definiciones de la computabilidad podrían utilizarse para este fin, lo que le permite indicar los teoremas de incompletitud de generalidad que sólo podía darse a entender en el documento original.

Numerosos resultados en la teoría de la repetición se obtuvieron en la década de 1940 por Stephen Cole Kleene y Emil León Post. (Kleene, 1943) introdujo los conceptos de computabilidad relativa, anunciadas (Turing, 1939) , y la jerarquía aritmética. Kleene generalizaría más adelante la teoría de la repetición de los funcionales de orden superior. Kleene y Kreisel estudiaron versiones formales de las matemáticas intuicionistas, particularmente en el contexto de la teoría de la prueba.

2.3.2.6 Algebraica lógica

La lógica algebraica utiliza los métodos de álgebra abstracta para estudiar la semántica de la lógica formal. Un ejemplo fundamental es el uso de las álgebras de Boole para representar los valores de verdad de la lógica proposicional clásica, y el uso de las álgebras de Heyting para representar los valores de verdad de la lógica proposicional intuicionista.

Las lógicas más fuertes, como la lógica de primer orden y la lógica de alto nivel, se estudian usando más complicadas estructuras algebraicas como álgebras cilíndricas.

2.3.3 La Teoría de conjuntos

La teoría de conjuntos es el estudio de los conjuntos, que son colecciones abstractas de objetos. Muchas de las nociones básicas, como los números ordinales y cardinales, se desarrollaron de manera informal por Cantor antes de que se desarrollaran axiomatizaciones formales de la teoría de conjuntos. El primero de estas axiomatizaciones, debido a Zermelo (1908), se amplió ligeramente para convertirse en Axiomas de Zermelo-Fraenkel (ZF), que ahora es la teoría más ampliamente utilizada y es fundamental para las matemáticas.

Se han propuesto otras formalizaciones de la teoría de conjuntos, incluyendo la teoría de conjuntos de von Neumann-Bernays-Gödel (NBG), Morse-Kelley (MK), y las Nuevas Fundaciones (NF). De estos, ZF, NBG, y MK son similares en la descripción de una jerarquía acumulativa de conjuntos. Las nuevas fundaciones toman un enfoque diferente; que permite a los objetos tales como el conjunto de todos los conjuntos existir a costa de restricciones en sus axiomas de conjunto. El sistema de la teoría de conjuntos Kripke-Platek está estrechamente relacionado con la teoría de la recursividad generalizada.

Dos declaraciones famosas de la teoría de conjuntos son el axioma de elección y la hipótesis del continuo. El axioma de elección, primero declarado por Zermelo, se demostró independiente de la ZF por Fraenkel (1922), pero ha llegado a ser ampliamente aceptada por los matemáticos. Se afirma que, dada una colección de conjuntos no vacíos hay un único conjunto C que contiene exactamente un elemento de cada conjunto en la colección. El conjunto C se dice que debe "elegir" un elemento de cada conjunto de la colección. Si bien la capacidad de tomar una decisión de este tipo se considera evidente por algunos, ya que cada conjunto de la colección es no vacío, la falta de una norma concreta general por el cual la elección puede ser hecha hace el axioma no constructivo. Stefan Banach y Alfred Tarski mostraron que el axioma de elección se puede utilizar para descomponer una bola sólida en un número finito de piezas que luego se pueden reorganizar, sin escala, para hacer dos bolas sólidas de tamaño original. Este teorema, conocido como la paradoja de Banach-Tarski, es uno de los muchos resultados contrarios a la intuición del axioma de elección.

La hipótesis del continuo, propuesto como una conjetura por Cantor, fue catalogado por David Hilbert como uno de sus 23 problemas en 1900. Gödel demostró que la hipótesis del continuo no puede refutarse desde los axiomas de Zermelo-Fraenkel por la teoría de conjuntos (con o sin el axioma de elección), mediante el desarrollo del universo construible de la teoría de conjuntos en los que la hipótesis del continuo se debe sostener (Gödel, 1929).

En 1963 (Cohen, 1966) se demostró que la hipótesis del continuo no puede ser probada de los axiomas de Zermelo-Fraenkel por la teoría de conjuntos (Cohen, 1966). Este resultado de independencia no estabiliza completamente la pregunta de Hilbert, sin embargo, es posible que los nuevos axiomas de la teoría de conjuntos pudiesen resolver la hipótesis. Un trabajo reciente a lo largo de estas líneas se ha llevado a cabo por W. Hugh Woodin, aunque su importancia aún no está clara (Woodin, 2001).

La investigación contemporánea en la teoría de conjuntos incluye el estudio de los grandes cardinales y su determinación. Los grandes cardinales son números cardinales con propiedades particulares tan fuertes que la existencia de tales cardinales no se puede probar por ZFC.

2.3.3.1 La teoría de modelos

La teoría de modelos estudia los modelos de varias teorías formales. Aquí una teoría es un conjunto de fórmulas de una lógica formal particular, mientras que un modelo es una estructura que da una interpretación concreta de la teoría. La teoría de modelos está estrechamente relacionada con el álgebra universal y la geometría algebraica, aunque los métodos de la teoría de modelos se centran más en consideraciones lógicas que esos campos.

El conjunto de todos los modelos de una teoría particular se llama una clase de primaria; la teoría modelo clásico busca determinar las propiedades de los modelos en una clase de primaria en particular, o determinar si ciertas clases de estructuras forman clases elementales.

El método de eliminación de cuantificadores se puede utilizar para demostrar que conjuntos definibles en teorías particulares no pueden ser demasiado complicados. (Tarski, 1948) estableció la eliminación de cuantificadores para los campos-cerrados reales, un resultado que también muestra la teoría del campo de los números reales que es decidible. Un subcampo moderno del desarrollo de esta tiene que ver con las estructuras minimales.

El teorema de categoricidad (Morley, 1965), demostrado por Michael D. Morley, establece que si una teoría de primer orden en un lenguaje contable es categórica, es decir, que todos los modelos de esta cardinalidad son isomorfos, entonces es categórica en todas las cardinalidades incontables.

Una consecuencia trivial de la hipótesis del continuo es que una teoría completa con menos de continuum de muchos modelos contables no isomorfos sólo puede tener contablemente a muchos. La conjetura de Vaught, dice que esto es cierto incluso independientemente de la hipótesis del continuo. Muchos casos especiales de esta conjetura se han establecido.

2.3.3.2 Teoría de la repetición

La teoría de la repetición, también llamada teoría de la computabilidad, estudia las propiedades de las funciones computables y los grados de Turing, que dividen las funciones no computables en conjuntos que tienen el mismo nivel de incomputabilidad. La teoría de la repetición también incluye el estudio de la computabilidad generalizada y la definibilidad. La teoría de la repetición apareció de la obra de Alonzo Church y Alan Turing en 1930, que se amplió en gran medida por Kleene y Publicar en la década de 1940 (Turing, 1939).

La teoría de la repetición clásica se centra en la computabilidad de las funciones de los números naturales a los números naturales. Los resultados fundamentales establecen una sólida clase canónica de funciones computables con numerosas caracterizaciones independientes, equivalentes utilizando las máquinas de Turing, el cálculo λ, y otros sistemas. Los resultados más avanzados se refieren a la estructura de los grados de Turing y la red de sistemas recurrentemente ennumerables.

La teoría de la repetición generalizada amplía las ideas de la teoría de la repetición a los cálculos que ya no son necesariamente finitos. Incluye el estudio de la computabilidad de tipos más altos, así como áreas tales como la teoría híper aritmética y la teoría-α de recursividad.

La investigación contemporánea en teoría de la repetición incluye el estudio de aplicaciones tales como la aleatoriedad algorítmica, la teoría de modelos computables y las matemáticas inversas, así como los nuevos resultados en la teoría de la repetición pura.

2.3.3.3. Problemas irresolubles algorítmicamente

Un subcampo importante de los estudios de la teoría de la recursividad irresolubilidad algorítmica; un problema de decisión o problema función es algorítmicamente irresoluble si no hay un posible algoritmo computable que devuelve la respuesta correcta para todas las entradas legales al problema.

Los primeros resultados sobre la insolubilidad, obtenidos de forma independiente por Turing en 1936, mostraron que el Entscheidungsproblem es algorítmicamente irresoluble. Turing demostró mediante el establecimiento de la insolubilidad del problema de la parada, un resultado con implicaciones de largo alcance, tanto en teoría de la repetición y de la informática (Turing, 1939).

Hay muchos ejemplos conocidos de problemas indecidibles de las matemáticas ordinarias. El problema de la palabra para los grupos se comprobó algorítmicamente irresoluble por Pyotr Novikov en 1955 y de forma independiente por W. Boone en 1959. El problema del castor ocupado, desarrollado por Tibor Radó en 1962, es otro ejemplo bien conocido.

El décimo problema de Hilbert pidió un algoritmo para determinar si una ecuación polinómica con coeficientes enteros tiene una solución en los números enteros. Un progreso parcial fue hecho por Julia Robinson, Martin Davis y Hilary Putnam. La insolubilidad algorítmica del problema fue probado por Yuri Matiyasevich en 1970 (Martin, 1983).

2.3.3.4 La teoría de la prueba y las matemáticas constructivas

La teoría de la prueba es el estudio de las pruebas formales en varios sistemas de deducción lógica. Estas pruebas se representan como objetos matemáticos formales, facilitando su análisis por técnicas matemáticas. Varios sistemas de deducción se consideran comúnmente, incluyendo los sistemas de estilo Hilbert de deducción, sistemas de deducción natural, y el cálculo secuencial desarrollado por Gentzen.

El estudio de las matemáticas constructivas, en el contexto de la lógica matemática, incluye el estudio de los sistemas de lógica no clásica como la lógica intuicionista, así como el estudio de los sistemas de predicción. Una de los primeros defensores era Hermann Weyl, que demostró que es posible desarrollar una gran parte del análisis real utilizando únicamente métodos predicativos.

2.3.3.5 Historia de la teoría de conjuntos

La historia de la teoría de conjuntos es bastante diferente de la historia de la mayoría de las otras áreas de las matemáticas. Para la mayoría de las áreas un largo proceso por lo general puede rastrear que las ideas evolucionan hasta un flash final de la inspiración, a menudo un número de matemáticos casi simultáneamente, produce un descubrimiento de gran importancia.

La teoría de conjuntos sin embargo, es bastante diferente. Es la creación de una sola persona, Georg Cantor. Antes de tomar la historia principal del desarrollo de Cantor de la teoría, primero examinamos en esta tesis algunas contribuciones tempranas.

La idea de infinito había sido objeto de una profunda reflexión desde la época de los griegos. Zenón de Elea, en alrededor de 450 a.c, con sus problemas en el infinito, hizo una importante contribución temprana. La discusión en la Edad Media de lo infinito había dado lugar a la comparación de conjuntos infinitos. Por ejemplo Alberto de Sajonia, en *Questiones subtilissime*, demuestra que un haz de longitud infinita tiene el mismo volumen que el espacio en 3D. Él muestra que está serrando una viga en trozos imaginarios que luego se ensamblan en capas concéntricas sucesivas que llenan el espacio (Brochero, 2003).

Bolzano fue un filósofo y matemático de gran profundidad de pensamiento. En 1847 él consideraba conjuntos con la siguiente definición una realización de la idea o concepto que concebimos cuando consideramos la disposición de sus partes como una cuestión de indiferencia.

Imagen 5 Bolzano

Fuente: rinconforero.mforos.com

Bolzano defendió el concepto de un conjunto infinito (Felscher, 2000). En ese momento muchos creían que no podrían existir los conjuntos infinitos. Bolzano dio ejemplos para demostrar que, a diferencia de los conjuntos finitos, los elementos de un conjunto infinito podrían ponerse 1-1 en correspondencia con elementos de uno de sus subconjuntos propios. Esta idea eventualmente llegó a ser usada en la definición de un conjunto finito.

Fue con el trabajo de Cantor no obstante, que la teoría de conjuntos se llegó a colocar en una base matemática adecuada. Los primeros trabajos de Cantor versaban sobre la teoría de números y publicó una serie de artículos sobre este tema entre 1867 y 1871. Estos, aunque en gran calidad, no daban ninguna indicación de que fueron escritos por un hombre a punto de cambiar el curso de las matemáticas.

Un acontecimiento de gran importancia ocurrió en 1872 cuando Cantor hizo un viaje a Suiza. Allí Cantor conoció a Richard Dedekind y una amistad duradera apareció. Numerosas cartas entre los dos entre los años 1873-1879 se conservan y aunque éstos discuten relativamente poco de matemáticas es evidente que en el fondo la manera lógica abstracta de Dedekind de pensar era una influencia importante en Cantor para el desarrollo de sus ideas (Dedekind, 1872).

Cantor se mudó de la teoría de números a las series trigonométricas. Estos documentos contienen las primeras ideas de Cantor sobre la teoría de conjuntos y también los resultados importantes sobre los números irracionales. Dedekind estaba trabajando de forma independiente en los números irracionales y publicó sobre la continuidad y los números irracionales (Brochero, 2003).

En 1874 Cantor publicó un artículo en el Diario de Crelle que marca el nacimiento de la teoría de conjuntos. Un documento de seguimiento fue presentado por Cantor al Diario de Crelle en 1878 pero la teoría ya establecida se estaba convirtiendo en el centro de la controversia. Kronecker, que estaba en la redacción de Diario de Crelle, no estaba contento con las nuevas ideas revolucionarias contenidas en el documento de Cantor. Cantor fue tentado a retirar el artículo, pero Dedekind Cantor persuadió de no retirarlo y Weierstrass apoyó la publicación. El artículo fue publicado pero Cantor nunca presentó ningún trabajo adicional para el Diario de Crelle.

En su artículo de 1874 Cantor considera al menos dos tipos diferentes de infinito. Antes no existían estos órdenes del infinito, pero todas las colecciones infinitas eran consideradas 'del mismo tamaño ''.

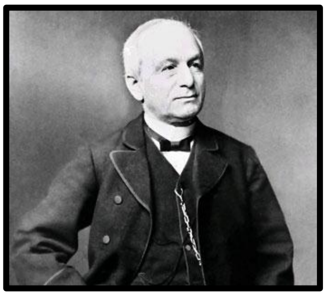
En el mismo artículo Cantor muestra que los números reales no se pueden poner en correspondencia uno a uno con los números naturales utilizando una discusión con intervalos anidados que es más complejo que el utilizado en la actualidad (que es de hecho debido a Cantor en un artículo posterior de 1891). Cantor ahora comenta que esto demuestra un teorema debido a Liouville, a saber, que hay infinitos números trascendentes (es decir, no algebraicos) en cada intervalo.

En su próximo artículo, en el que Cantor tenía problemas de publicación en el Diario de Crelle, introduce la idea de la equivalencia de conjuntos y dice que dos conjuntos son equivalentes o tener el mismo poder si se pueden poner en correspondencia 1-1. La palabra "poder" Cantor tomó de Steiner. Él demuestra que los números racionales tienen el poder infinito más pequeño y también muestra que Rn tiene el mismo poder que R. Se muestra además que una cantidad numerable de copias de R aún tiene el mismo poder que R. En esta etapa Cantor no utiliza la palabra contable, pero él llega a introducir la palabra en un documento de 1883.

Cantor publicó un tratado en seis partes sobre la teoría de conjuntos de los años 1879 a 1884. Este trabajo aparece en *Mathematische Annalen* y fue un acto de valentía por el editor de la publicación de la obra a pesar de la creciente oposición a las ideas de Cantor. La principal figura de la oposición era Kronecker que fue muy influyente en el mundo de las matemáticas (Felscher, 2000).

La crítica de Kronecker se basaba en el hecho de que él sólo creía en las matemáticas constructivas. Él sólo aceptó objetos matemáticos que podrían construirse en el conjunto finito en los números naturales. Cuando Lindemann demostró que π es trascendental en 1882 dijo Kronecker: ¿De qué sirve tu hermosa investigación de π? ¿Por qué estudiar este tipo de problemas cuando no existen los números irracionales? Ciertamente una gama de diferentes infinitos de Cantor era imposible bajo esta forma de pensar.

Imagen 6 Leopold Kronecker



Fuente: Biografías y vidas

Cantor sin embargo continuó con su trabajo. Su quinto trabajo fue publicado en 1883 y discute conjuntos bien ordenados. Los números ordinales se introducen como los tipos de órdenes de conjuntos bien ordenados. La multiplicación y la adición de números transfinitos también se definen en este trabajo aunque Cantor quería dar una más amplia exposición de la aritmética transfinita en su obra posterior. Cantor lleva bastante parte de este artículo justificando su trabajo (Felscher, 2000). Cantor afirmó que la matemática es bastante libre y cualquier concepto se puede introducir con sujeción únicamente a la condición de que está libre de la contradicción y se define en términos de conceptos previamente aceptados. También cita muchos autores anteriores que habían dado opiniones sobre el concepto de infinito, incluyendo Aristóteles, Descartes, Berkeley, Leibniz y Bolzano.

El año 1884 fue uno de crisis para Cantor. Él estaba contento con su posición en Halle y le hubiera gustado ir a Berlín. Sin embargo, esta medida fue bloqueada por Schwarz y Kronecker. En 1884 Cantor escribió 52 cartas a Mittag-Leffler cada una de las cuales atacó Kronecker. En ese año de crisis mentales Cantor pareció perder la confianza en su propio trabajo y se aplicó a una conferencia sobre la filosofía, más que en las matemáticas. La crisis no duró demasiado tiempo y para principios de 1885 Cantor se recuperó y su fe en su propia obra había regresado. Sin embargo, a pesar de una gran cantidad de trabajo importante en los años posteriores a 1884, hay algunos indicios de que él nunca llegó a las alturas del genio que sus papeles notables mostraron durante el período de 10 años 1874-1884 (Milies, 2003).

En 1885 Cantor continuó extendiendo su teoría de los números cardinales y los tipos de órdenes. Extendió su teoría de tipos de órdenes para que ahora sus números ordinales definidos previamente se convirtieran en un caso especial. Entre 1895 y 1897 Cantor publicó su doble tratado final sobre la teoría de conjuntos. Contiene una introducción que parece un libro moderno de la teoría de conjuntos, conjunto que define, subconjunto, etc. Cantor demuestra que si A y B son conjuntos con un equivalente a un subconjunto de B y B equivalente a un subconjunto de A, entonces A y B son equivalentes. Este teorema también fue probado por Félix Bernstein y de forma independiente por E Schröder.

Las fechas de 1895 y 1897 son importantes para la teoría de conjuntos de otra manera. En 1897 la primera paradoja apareció publicada por Cesare Burali-Forti. Algunos de los efectos de esta paradoja se perdieron más Burali-Forti consiguió la definición de un conjunto bien ordenado e un modo errado. Sin embargo, incluso si la definición se corrigió, la paradoja se mantuvo. Esta básicamente gira alrededor del conjunto de todos los números ordinales (Felscher, 2000).

El número ordinal del conjunto de todos los ordinales debe ser un ordinal y esto lleva a una contradicción. Se cree que Cantor descubrió esta paradoja por sí mismo en 1885 y escribió a Hilbert al respecto en 1886. Esta cifra es ligeramente sorprendente ya que Cantor fue muy crítico con el papel Burali-Forti cuando apareció. El año 1897 fue importante para Cantor de otra manera, ya que en ese año se celebró el primer Congreso Internacional de Matemáticos en Zúrich y en esa conferencia de trabajo de Cantor se celebró en la más alta estima de ser elogiado por muchos incluyendo Hurwitz y Hadamard (Milies, 2003).

En 1899 Cantor descubrió otra paradoja que surge del conjunto de todos los conjuntos. ¿Cuál es el número cardinal del conjunto de todos los conjuntos? Es evidente que debe ser el mayor posible cardinal; todavía el cardinal del conjunto de todos los subconjuntos de un conjunto siempre tiene un cardinal mayor que el propio conjunto. Comenzó a parecer como si la crítica de Kronecker podría tener, al menos, parte de razón, ya la extensión del concepto de conjunto yendo demasiado lejos parecía ser la producción de las paradojas. La paradoja "última" fue encontrada por Russell en 1902 (y se encontró de forma independiente por Zermelo). Se simplifican define un conjunto:

D = {X | X no es un miembro de X}.

Russell luego preguntó: - es un elemento de D? Tanto el supuesto de que D es un miembro de D y D no es un miembro de una conduce a una contradicción. La propia construcción del conjunto parece dar una paradoja.

Russell escribió a Frege para hablarle de la paradoja. Frege había estado cerca de la finalización de su principal tratado sobre los fundamentos de la aritmética. Frege añadió un reconocimiento a su tratado.

En esta etapa, sin embargo, la teoría de conjuntos estaba empezando a tener un impacto importante en otras áreas de las matemáticas Lebesgue define "medida" en 1901 y en 1902 definió la integral de Lebesgue usando establecidos conceptos teóricos (Felscher, 2000). El análisis necesitaba la teoría de conjuntos de Cantor, que no podía permitirse el lujo de limitarse a las matemáticas intuicionistas al estilo del espíritu de Kronecker. En lugar de descartar la teoría de conjuntos, debido a las paradojas, se buscaron maneras de mantener las características principales de la teoría de conjuntos pero tratando de eliminar las paradojas.

¿Las paradojas provienen del 'axioma de elección'? Cantor había utilizado el 'axioma de elección "sin sentir que era necesario escogerlo para ningún tratamiento especial. La primera persona que tuvo en cuenta de manera explícita que él estaba usando un axioma tal parece haber sido Peano en 1890 para hacer frente a una prueba de la existencia de soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales. De nuevo en 1902 fue mencionado por Beppo Levi, pero el primero en introducir formalmente el axioma de Zermelo fue cuando demostró, en 1904, que cada conjunto puede ser bien ordenado. Este teorema se había conjeturado por Cantor. Émile Borel señaló que el axioma de elección es de hecho equivalente al teorema de Zermelo.

Gödel demostró, en 1940, que el axioma de elección no puede ser refutada con los otros axiomas de la teoría de conjuntos. No fue sino hasta 1963 (Cohen, 1966) se demostró que el axioma de elección es independiente de los otros axiomas de la teoría de conjuntos.

La paradoja de Russell había socavado la totalidad de las matemáticas en palabras de Frege. Russell, tratando de reparar el daño, hizo un intento de poner las matemáticas sobre una base lógica en su principal obra Principia Mathematica escrito con Whitehead. Este trabajo trata de reducir los fundamentos de las matemáticas a la lógica y fue extremadamente influyente. Sin embargo, el método para evitar las paradojas mediante la introducción de una "teoría de los tipos" hacía imposible decir que una clase es o no miembro de sí misma. No parecía una forma muy satisfactoria en torno a los problemas y otros buscaron diferentes maneras (Felscher, 2000).

Zermelo en 1908 fue el primero en intentar una axiomatización de la teoría de conjuntos. Muchos otros matemáticos intentaron axiomatizar dicha teoría. Fraenkel, von Neumann, Bernays y Gödel son todas las figuras importantes en este desarrollo. Gödel demostró las limitaciones de cualquier teoría axiomática y los objetivos de muchos matemáticos como Frege y Hilbert nunca podrían alcanzarse.

2.4. HISTORIA DE LOS NÚMEROS REALES

Después de miles de años se han utilizado los números para contar, medir, calcular, el hombre comenzó a especular sobre la naturaleza y propiedades de los números mismos. Esta curiosidad nació como la teoría de números, una de las ramas más profundas de las matemáticas (Moreira, 1999).

La teoría de los números nació alrededor del año 600 aC, cuando Pitágoras y sus discípulos comenzaron a estudiar las propiedades de los números enteros. Los pitagóricos produjeron verdadera mística adoración al concepto de número, considerándola como la esencia de las cosas (Brochero, 2003). Ellos creían que todo en el universo se asoció con los números enteros o razones de números enteros (en el lenguaje corriente, números racionales). Además, el número de longitud de designación se aplica sólo a números enteros mayores que uno. Esta creencia ha sido profundamente conmovida cuando utilizaron el Teorema de Pitágoras para calcular la medida de la diagonal de un cuadrado de una unidad.

Ya que sólo conocían los números racionales fue con gran sorpresa y shock que se encontró que había segmentos de línea cuya medida no puede ser expresada por un número racional (Moreira, 1999) . Este hallazgo se atribuye a un discípulo de Pitágoras tratando de descubrir el alcance de la diagonal de un cuadrado de lado 1.

Para encontrar que la diagonal de un cuadrado de lado 1 no era una razón de dos números enteros (en lenguaje actual, la raíz cuadrada de 2 es un número irracional) los pitagóricos considerarían interrumpida la armonía del universo, ya que no podían aceptar la raíz de dos como un número, pero no podían negar que esta raíz era la medida de la diagonal de un cuadrado de unidad. Convencido de que los dioses les castigarían en caso que revelen lo que les parecía una imperfección divina, intentaron ocultar su descubrimiento (Milies, 2003). Según la leyenda, el primer miembro de la secta pitagórica que lanzó este hallazgo se ahogó en un naufragio y su alma fue sacudida por las olas. Así, $\sqrt{2}$ fue el primer número irracional con el que la humanidad se enfrentaría (Brochero, 2003).

Aristóteles (384-322 aC), como ejemplo de una demostración por reducción al absurdo, mostró que la raíz cuadrada de 2 no es un número racional, es decir, no se puede escribir como una fracción de dos números enteros.

2.4.1 El número irracional

El número pi (por lo general representado por la letra griega p) es el más famoso irracional en la historia, con la que es la relación constante de la circunferencia de cualquier círculo y su diámetro (Moreira, 1999).

Si pensamos que un estudiante de la ESPOCH al dar vuelta a la luna, siguiendo uno de sus grandes círculos, viajó aproximadamente 10.920 kilómetros lo dividimos por el diámetro de la Luna que es 3.476 kilómetros verá que esta relación es 3,14154200..., este número nos es familiar, es de aproximadamente 3,14.

2.4.2 La historia de Pi

Así comienza la historia de un número que sólo será llamado Pi en el siglo XVIII; se inicia con el estudio de la relación entre el perímetro, p, de un círculo y su diámetro, d. La existencia de una relación constante de la circunferencia de un círculo y su diámetro se sabe en muchas antiguas civilizaciones. Tanto los babilonios como los egipcios sabían que esta proporción era mayor que 3 (Brochero, 2003).

2.4.3 Babilonia

El estudio de esta relación preocupaba a los babilonios a 4 mil años, y una mesa en forma de cuña propuso una solución en su momento sin explicación y sin fórmula de notación algebraica. De ello se desprende la tira, que se sabe que es el primer enfoque que da un decimal exacto.

2.4.4 Egipto

Un famoso papiro, del papiro de Moscú, contiene una fórmula para calcular el área de la esfera, donde se le asigna a Pi el valor de 3,14. Esto evidencia que en la medición de la circunferencia el egipcio tenía error inferior al uno por ciento.

Imagen 7 Pi en los Papiros Rhind y de Moscú

Fuente: www.scoop.it

2.4.5 Antiguo Testamento

El Antiguo Testamento describe una cuenca circular hecha por Hiram de Tiro. La cuenca se describe como un "lago de diez codos, de margen a margen (Moreira, 1999), circulares, de cinco codos de fondo, y treinta en torno a" lo que era pi igual a 3. Sin embargo, en este momento de la historia se sabía que era pi mayor que 3.

2.4.6 Grecia

Aunque muchas civilizaciones antiguas han observado a través de mediciones que la razón de la circunferencia es la misma para los círculos de diferentes tamaños, los griegos fueron los primeros en explicar por qué. Es una simple propiedad de las figuras semejantes (Milies, 2003). Los antiguos griegos fueron probablemente los primeros en entender que pi, son muy diferentes números de números enteros o números racionales (relación de números enteros) que utilizan en sus matemáticas.

Arquímedes (287-212 aC) fue capaz de mejorar un poco el enfoque dado al número pi. Al acercarse a la circunferencia por polígonos regulares de 12, 24, 48 y 96 lados, se encuentra que el valor de pi está limitado por los siguientes valores:

3,14085 <pi <3.142857, obteniendo una aproximación con dos cifras decimales correctas.

2.4.7 Después de Cristo

En el año 400 dC, el libro indio "Paulisha Siddhanta" utiliza el valor de pi 3177/1250, años más tarde, Tsu Chung-Chi (430-501 dC) descubre que el valor de pi está entre 3.1415926 y 3.1415927:

3.1415926 <p <3,1415927.

Alrededor del 499 dC, aparece en un tratado indio de las matemáticas y la astronomía titulado "Aryabhata" para obtener pi : "Añadir a 4-100, multiplicar el resultado por 8 y sumar 62.000, el resultado es aproximadamente la longitud diámetro de la circunferencia de 20.000 ". ¿De dónde sale el valor aproximado de 3,1416 p, que es una buena aproximación con 3 decimales correctos (Moreira, 1999)?

Investigadores posteriores obtienen mejores aproximaciones a pi usando polígonos con más lados que los que fueron utilizados por Arquímedes. Un cálculo chino impresionante con un polígono con más de 3000 partes dio cinco décimas hasta el pi.

Los chinos también encontraron una fracción simple 355/113 que difiere de pi por menos de 0,0000003. El enfoque racional 355/113 fue redescubierto en el siglo XVI por el ingeniero alemán Adriaan Anthoniszoon. En el mismo siglo, otro alemán, Adriaen van Rooman, utilizó el método de Arquímedes con 230 partes por 15 cifras decimales a pi.

Unos años más tarde Ludolph Van Ceulen (1539/1610), profesor de matemáticas y ciencia militar en la Universidad de Leyden, tuvo un valor pi de 20 cifras decimales, y más tarde, en 1615 (Milies, 2003), se extendió este resultado a 35 cifras. Los alemanes estaban tan asombrados por este cálculo que durante años llamaron al número Ludolfino. Al parecer este pi habría sido grabado en la lápida del autor, esta piedra se ha perdido. Aún más interesante es el hecho de que hoy en Alemania, pi a menudo puede ser designado como Ludolfino.

Aunque las personas se han interesado por siglos por la razón del uso de la letra griega pi como símbolo se sabe que esta es relativamente reciente. El inglés William Jones (1675-1749) es generalmente reconocido como el primero en utilizar el símbolo pi. El símbolo apareció en su libro *Sinopsis Palmariarum Malheseos*, publicado en 1706, que incluyó 100 decimales de pi calculados por John Machin (1680-1752).

La letra griega pi llegó a ser ampliamente aceptada después de que Leonhard Euler la usara en su famoso libro *Introductio in analysin Infinitorum*, publicado en 1748 se cree que la letra pi fue elegida como la primera letra de la palabra griega para el perímetro y la periferia.

En 1761 el matemático alemán Johann Lambert utiliza una fracción continua tangente trigonométrica de un ángulo mostrando de manera concluyente que pi es irracional (Moreira, 1999). También Legendre en 1794 demuestra lo mismo que Lambert. Vega en 1796 da una aproximación de pi con 140 decimales. Y en 1844 un vienés, da una aproximación a 205 decimales.

Se llegó a un nuevo récord para el cálculo de pi en 1874 por William Shanks, con 707 decimales.

Fue a partir del siglo XX, especialmente a partir de 1949, con la ayuda de computadoras y algoritmos de computadora que fue encontrando un creciente número de decimales a pi. Un algoritmo, escrito por Salamin y Brent (Milies, 2003), que se determinaron 16 millones de dígitos. Estas cuentas fueron posteriormente verificadas por la relación de Gauss, que mostró que los primeros 10.013.395 eran correctos.

Gosper, usando un algoritmo, calculado en 1985 encontró 17 millones de dígitos y Bailey en enero de 1986 alcanzó un récord de 29 millones. En septiembre de 1986, en Canadá se calcularon 33.554.000 dígitos, y en enero de 1987, se pudieron calcular 227 millones de dígitos y, finalmente, en enero de 1988 se alcanzan 201 326 551 dígitos.

Años más tarde, Bailey y Gregory Chudnovsky, de la Universidad de Columbia, han calculado sobre un billón de cifras decimales a pi, este valor se superó en 1995 por investigadores japoneses quienes obtuvieron tres mil millones de cifras decimales a pi.

En septiembre de 1995, Yasumana, después de haber hecho su equipo Hitachi para trabajar durante más de 250 horas, se consiguió 6.442.450.939 cifras decimales exactas de este número. Este registro resulta ser superado cuando en junio de 1997 se obtienen 51.539.600.000 decimales exactos.

En octubre de 1996, los franceses Fabrice Bellard (Moreira, 1999), calculan el valor de pi pero en notación binaria, alcanzando sucesivamente 400 mil millones de cifras, pero en septiembre de 1997 se puede alcanzar 1 billón de decimales a pi, después 25 días de cálculo intensivo en equipos en red a través de Internet y se ha utilizado una fórmula desarrollada en 1995 por los matemáticos de la Universidad Simón Fraser, pero perfeccionado por Bellard (Milies, 2003).

2.4.8 Curiosidades sobre el número pi

Hiroyuki Goto estableció un nuevo récord mundial en 1995, a recitar de memoria la primera 42.000 decimales de pi. Pasando poco más de 9 horas recitando.

En abril de 1995, la agencia Reuters informó que un niño chino de doce años de edad, Zhang Zhuo, recitó de memoria el valor de pi hasta 4000 cifras decimales. Al parecer, en sólo unos veinticinco minutos.

2.4.9. Las ecuaciones y las desigualdades

Los procesos algebraicos no han sido expresados por símbolos para un largo tiempo, pero la evolución de la notación algebraica no refleja sólo la eliminación progresiva de "sustancia física loco" (Radford, 1997). Algunos símbolos diofánticos aparecen en una colección de problemas probablemente anterior a la aritmética de Diofanto.

Debe tenerse en cuenta y es importante señalar que la expresión matemática fue inicialmente oral. El desarrollo de la matemática occidental en cuanto al simbolismo debe ser enmarcado en el contexto cultural correcto, hacia una sistematización de la expresión humana (Bagni, 2005).

La evolución histórica es compleja: por ejemplo, G. Lakoff y R. Núñez anotan que puede ser difícil de creer, pero durante dos milenios, hasta el siglo 16, los matemáticos llegaron sin un símbolo de igualdad (Lakoff, 2000). Por supuesto, el papel de "=" no puede ser considerado demasiado simple: Incluso una idea tan aparentemente simple como la igualdad implica una considerable complejidad cognitiva. La comprensión de lo que "=" significa requiere un análisis cognitivo de las ideas matemáticas involucradas (Ibíd).

Vamos ahora a esbozar algunas referencias históricas relativas a la ecuación y las desigualdades. La historia de las ecuaciones matemáticas proviene de fuentes ricas y diferentes en muchas parte del mundo y aborda los procesos que pueden estar relacionados con las ecuaciones; en el Renacimiento, el llamado Regola d'Algebra (regla algebraica) fue el proceso para la aritmética, la resolución de problemas basada en la resolución de una ecuación algebraica (Franci, 1979).

La historia de las desigualdades no es tan rica en cuanto a su diversidad. Las desigualdades antiguas, también, eran expresada por los registros verbales; es importante subrayar que una desigualdad es a menudo sólo la expresión de una inigualdad (Bagni, 2005).

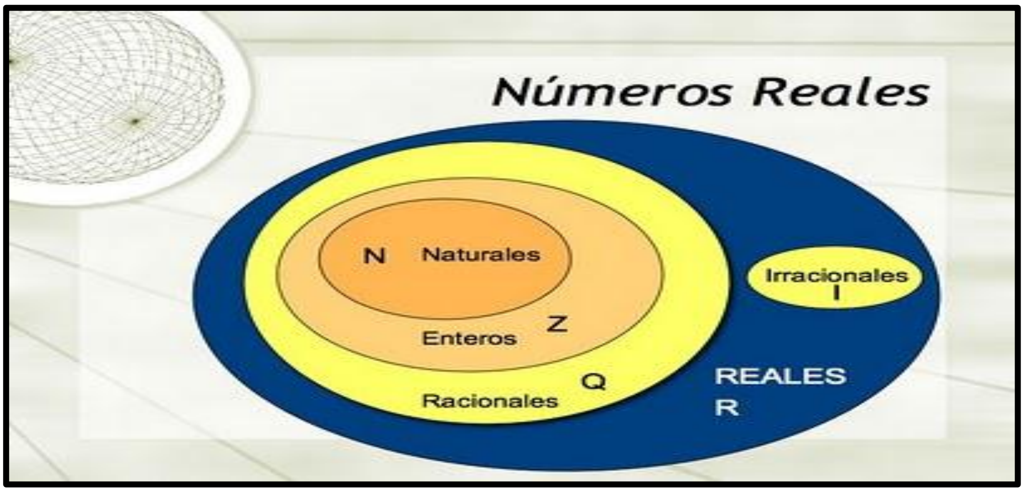
Algunas desigualdades en el sentido propio de inecuación pueden estar relacionadas con el desarrollo del cálculo, por ejemplo, a la maximización o minimización (Hairer, 1996). Se debe ahora considerar en el desarrollo de esta tesis algunos textos publicados en el siglo 19; dos tratados de P. Ruffini (1765-1822) fueron publicados por partes del tercero-quinto de Corso di Matematiche (Módena, Italia, 1806 y 1808).

Una contribución de von Neumann fue la solución, en 1937 de un problema planteado por L. Walras en 1874. Se observó que un modelo debe ser expresado por desigualdades (como solemos hacer hoy en día) y no debe expresarse sólo por las ecuaciones (como los matemáticos estaban acostumbrados a hacer en ese período), después él encontró una solución por el teorema de Brouwer (Bagni, 2005).

Así podemos señalar una asimetría histórica interesante: los matemáticos suelen expresar el problema a resolver por ecuaciones (Franci R. &., 1979); entonces, por desigualdades (en el sentido propio de inecuación), expresan algunas condiciones para solucionar las ecuaciones consideradas.

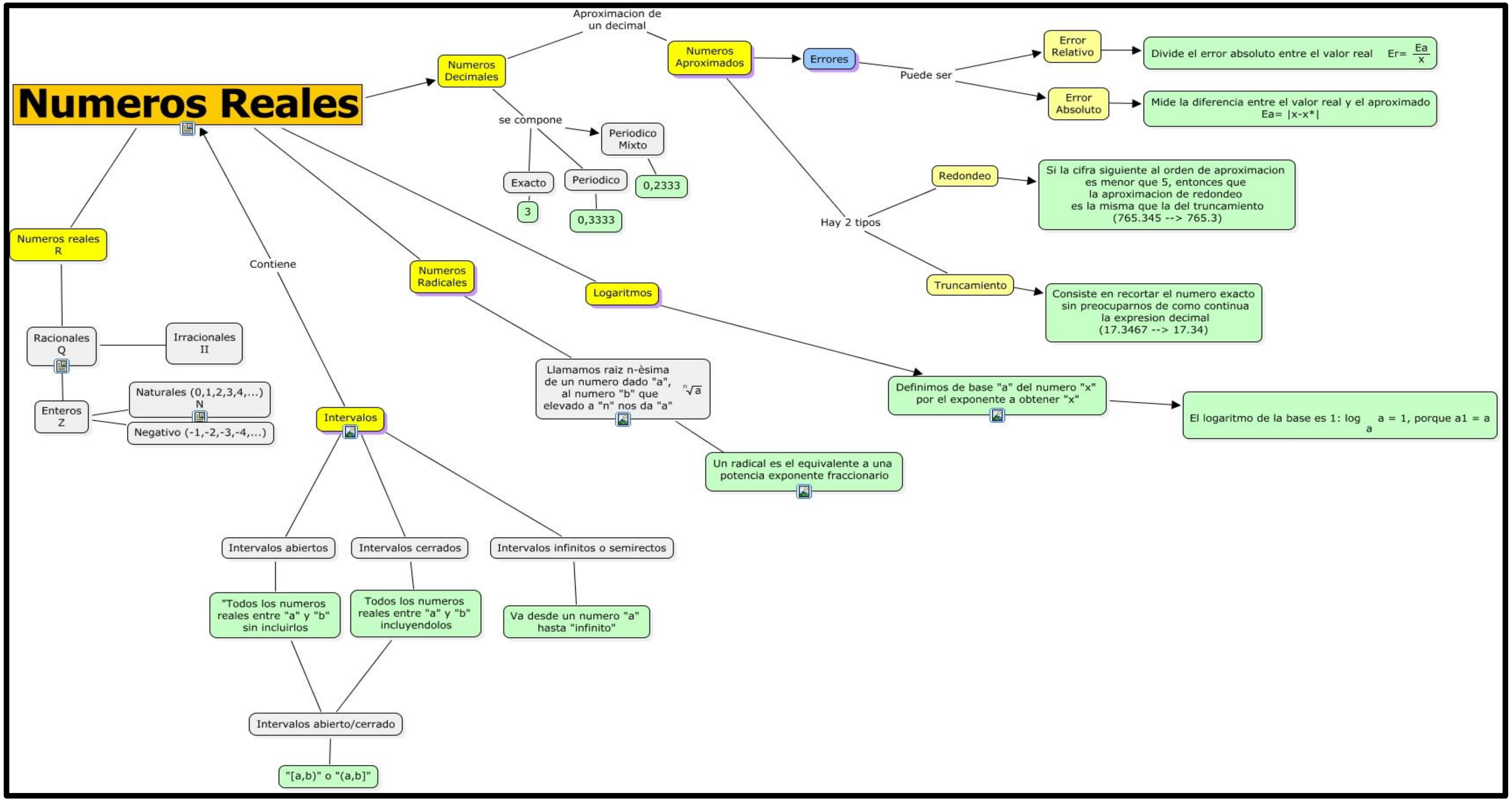
Por otra parte, en la historia, la resolución de una desigualdad (inecuación) ha sido a menudo obtenida resolviendo una ecuación que prácticamente sustituye la desigualdad asignada. Los contextos sociales y culturales debe tenerse en cuenta: con frecuencia la "solución práctica" se ha considerado como el principal resultado a obtener, esto ha sido más importante que profundizar el "campo de posibilidades". Así que una importancia social significativa se ha atribuido al proceso por el cual la solución de la desigualdad puede obtenerse (Bagni, 2005).

Imagen 8 Los números reales



Fuente: superbachilleres.com

Imagen 9 Mapa conceptual Números Reales



Fuente: www.skat.himc.us

2.5 EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA

2.5.1 Generalidades

Las matemáticas son un sujeto vivo que busca comprender los patrones que tanto permean el mundo exterior. Aunque el lenguaje de las matemáticas se basa en reglas que se deben aprender, es importante que se entienda que la motivación va más allá de las reglas para poder expresar las cosas en el lenguaje de las matemáticas.

La descrita transformación sugiere cambios en ambos contenidos, tanto curriculares, como en el estilo de enseñanza; implica el aprendizaje de la matemática el esfuerzo renovado para centrarse en:

• Buscar soluciones y no sólo memorizar procedimientos;

• Exploración de patrones, no sólo memorizar fórmulas;

• La formulación de conjeturas, no sólo hacer ejercicios.

La enseñanza comienza a reflejar este énfasis, por el cual los estudiantes tendrán oportunidades para estudiar matemáticas como en un estudio exploratorio, dinámico, en evolución disciplinaria y no como en un absoluto cuerpo cerrado rígido de las leyes que hay que memorizar.

Se les animará a los estudiantes a ver las matemáticas como una ciencia, no como un canon, y reconocer el enfoque de las matemáticas en base de los patrones que maneja, y no solamente sobre los números a los que se somete. (National research Council, 1989).

Desde la anterior perspectiva, el aprendizaje de matemáticas es la capacidad matemática por la cual dichos estudiantes son cuantitativamente alfabetizados (Morley, 1965); ellos son capaces de interpretar la gran de datos cuantitativos pues utilizan las matemáticas en la práctica diaria, desde aplicaciones simples como el uso de razonamiento proporcional para las recetas o escala de modelos, las proyecciones presupuestarias, complejos análisis estadísticos y modelos informáticos; son pensadores flexibles con un amplio repertorio de técnicas y perspectivas (Milies, 2003).

2.5.2 Recursos de la enseñanza de las matemáticas

En el proceso educativo de las matemáticas se manejan los siguientes tipos de recursos:

a) técnicos

- franelógrafo
- pizarrón
- mapas mentales
- mapas conceptuales
- recursos para técnica kj (división del pizarrón para momentos de clase)
- otros

b) tecnológicos

- ordenadores
- infocus
- laboratorios virtuales
- aulas virtuales
- otros

2.5.3 Los ambientes de aprendizaje en la matemática

Corresponden al arreglo del docente del espacio y personal; se subdividen en los siguientes ambientes:

- Contrato de aprendizaje (al inicio del periodo lectivo)
- Clase expositiva (Estudiantes-estudiantes o profesor-estudiantes)
- Clase grupal
- Clases de elaboración conjunta
- Sesiones de proyectos

2.5.4 La evaluación en el aprendizaje de la matemática

Existen diversas formas de evaluar el aprendizaje de las matemáticas; entre las que destacan:

a) Por objetivos.- lastimosamente en este caso no se determina si los objetivos corresponden a los perseguidos por el maestro o por el alumno.

b) Por destrezas con criterio de desempeño.- Categorizadas como la conjunción de conocimiento y grado de profundidad acerca de los temas matemáticos. Este tipo de evaluación es aplicada experimentalmente en la educación media ecuatoriana (MEC, 2010).

b) Por competencias.- Barriga (1981) establece a la competencia como una confluencia de capacidades, manejo de recursos y operatividad en situaciones críticas. Lamentablemente no existe una forma real de medir las competencias dentro de un corto periodo de tiempo (aunque existen acercamientos a comparar la competencia con la calificación igual o mayor al 70%).

c) Por resultados del aprendizaje.- Equivalen a lo que el estudiante es capaz de conocer o hacer luego de un periodo de tiempo y se asocian a la Taxonomía de Bloom (Kennedy, 2007) en los dominios:

Cognitivo: categorías conoce, comprende, aplica, analiza, sintetiza y evalúa

Afectivo: categorías: receptividad, respuesta, valoración y categorización

Psicomotriz: categorías imitación, independencia, precisión y naturalidad.

2.5.5 Las estrategias del aprendizaje de matemáticas

Las estrategias del aprendizaje de las matemáticas se circunscriben al paradigma elegido por el docente; es decir no son únicas; así por ejemplo en el paradigma activo se fortalecen las capacidades del estudiante mediante trabajos que desarrolla él mismo con ayuda de sus compañeros siendo características en este tipo de estrategia: las ruedas de discusión o la puesta en escena.

Si hablamos del constructivismo de Brunner, veremos que este hace hincapié en el descubrimiento del estudiante para la construcción de su propio aprendizaje en cuanto a matemática se refiere; así vemos por ejemplo, en este caso el aprendizaje laberíntico y la técnica del rompecabezas, técnicas usadas por el profesor para las clases.

En el constructivismo de John Dewey vemos en cambio que es la problemática la que conduce a que el estudiante busque las herramientas científicas para consolidar su conocimiento el cual es útil para la solución del problema propuesto. En este caso las estrategias que usa el maestro para fijar el conocimiento matemático en el estudiante se vincula al paradigma pragmático. (Schunk, 1997).

CAPÍTULO 3

3. MARCO HIPOTÉTICO

3.1 HIPÓTESIS

La utilización de la Historia de la Matemática como introducción al fundamento teórico mejora el rendimiento académico de los estudiantes de la Escuela de Ingeniería Automotriz de la ESPOCH.

VARIABLE INDEPENDIENTE

Historia de la matemática

VARIABLE DEPENDIENTE

Rendimiento académico

3.2 OPERACIONALIZACIÓN CONCEPTUAL

Cuadro 1. Operacionalización conceptual

VARIABLES	CONCEPTUALIZACIÓN
INDEPENDIENTE. La utilización de la historia de la matemática como introducción al fundamento teórico	Elemento de la epistemología matemática que determina la lógica de los descubrimientos en función de las necesidades científicas de la misma matemática
VARIABLE DEPENDIENTE. Rendimiento académico de los estudiantes de la Facultad de Mecánica de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo”	Logros académicos cuantitativos de abstracción científica

3.3 OPERACIONALIZACIÓN METODOLÓGICA

Cuadro 2: Operacionalización metodológica

VARIABLES	DIMENSIONES	INDICADORES	ITEMS
VARIABLE INDEPENDIENTE. La utilización de la historia de la matemática como introducción al fundamento teórico	1.Conocimientos descubiertos por grandes matemáticos 2. Testimonios concretos y verídicos.	1. Lógica y conjuntos, números reales, funciones de una variable real, trigonometría, Matrices, Geometría plana y del espacio, vectores, Geometría analítica, estadística y probabilidad, análisis matemático. 2. Biografía	¿Relaciona Usted los conocimientos matemáticos con la biografía de sus descubridores?
VARIABLE DEPENDIENTE. Rendimiento académico de los estudiantes de la Facultad de Mecánica de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo"	1. Conocimientos matemáticos que posee el estudiante sin Historia de la matemática como fundamento teórico" 2. Conocimientos matemáticos que posee el	(10) Supera los aprendizajes requeridos. (9)Domina los aprendizajes requeridos (7-8) Alcanza los aprendizajes	

	estudiante con Historia de la matemática como fundamento teórico”	requeridos (5-6) Está próximo a alcanzar los aprendizajes requeridos (<4) No alcanza los aprendizajes requeridos	

CAPÍTULO 4

4. MARCO METODOLÓGICO

4.1 DISEÑO Y TIPO DE ESTUDIO.

El tipo de estudio que se utilizó en la investigación es cuasi experimental.

Por otro lado el estudio es aplicado y explicativo “Su objetivo es determinar las causas y los factores de ciertos comportamientos sociales y probar la hipótesis. Tratan de explicar por qué ocurren los fenómenos yendo más allá de la simple descripción, buscando las causas o las razones que la provocan” (Urquizo, 2005).

4.2 DETERMINACIÓN DE LA POBLACIÓN

La investigación equivale a los estudiantes que reciben y recibirán matemática en la Escuela de Ingeniería Automotriz.

4.3 MUESTRA.

La muestra en la investigación fue 34 estudiantes de álgebra superior para el grupo experimental y 42 para el grupo de control.

4.4. MÉTODO, TÉCNICAS E INSTRUMENTOS

4.4.1 Método

Los métodos usados en el desarrollo de este estudio fueron:

- Método Hipotético-deductivo

Al ser la presente una investigación científica no dogmática, las conclusiones a las que ésta llega son tanto falsables cuanto reproductibles; verdaderas en el contexto de lo relativo y temporal; tanto en la elaboración teórica cuanto en la experimental.

- ➢ Método inductivo

En todo el desarrollo de la tesis se aplicaron los pasos de este importante método que parte de lo particular a lo general promoviendo además la categoría sintética de aprehensión de aprendizajes:

- Observación
- Inducción
- Deducción
- Predicciones

➢ Método científico

Es evidente que en el marco de los estudios de posgrado en el nivel de la maestría aunque no sea de investigación pura requiere la apropiación del método científico para la validación de las hipótesis propuestas. Los pasos de éste primordial método con los que se ha involucrado la elaboración de este trabajo se describen a continuación:

- Problema
- Planteamiento de la hipótesis
- Experimentación
- Comprobación de la hipótesis
- Divulgación
- Método Bibliográfico

En la revisión de la literatura se recurrió a la procura de fuentes primarias y secundarias; como son: índices, registros, tesis, artículos científicos y libros referentes tanto al aprendizaje y la epistemología de las matemáticas; cuanto a temas puntuales de matemáticas y estadística aplicados en el desarrollo de la presente tesis.

➢ Método Estadístico.

Se recurrió a la utilización de la prueba z de validación de las hipótesis del estudio por las siguientes razones.

a) La muestra correspondió a un número mayor a 30 individuos.

b) Efecto de la causa anterior se suponen las distribuciones normales.

c) Las muestras fueron cuantitativas por tanto se requería la prueba paramétrica de comprobación hipotética.

Se eligió un nivel de significación correspondiente a 0,05 que es el adecuado para este tipo de estudios basados en los parámetros del aprendizaje y no en la calidad (0,01); o en las encuestas de satisfacción (0,1).

Como se pretendía mostrar que el rendimiento utilizando la metodología propuesta en el grupo de experimentación daba mejores resultados que la mera aplicación de la clase magistral en el grupo de control se eligió la prueba z a una sola cola demostrando que la media de este último grupo era menor que la media de aquel u1>u2.

- Método Empírico

El orden lógico de la investigación fue el siguiente:

- Aplicación de un mes de clases teóricas en los grupos de experimentación y control de modo que se descartasen diferencias sustanciales ajenas a la investigación en los grupos de estudiantes (las medias de rendimiento debían ser relativamente iguales).
- Evaluación diagnóstica sobre 6 puntos (que el estudiante gana a través de pruebas in situ, de modo que no sede paso al sesgo que provocan las tareas en casa o los trabajos grupales los cuales unos trabajan y otros no).
- Aplicación de la epistemología matemática con refuerzo en la historia de cada temática en el grupo de experimentación y no en el de control a través de las siguientes técnicas activas:

    - Exposición
    - Puesta en escena
    - Mapas conceptuales
    - Mapas mentales
    - Rompecabezas

- Evaluación final a ambos grupos.
- Tabulación y análisis de datos.
- Validación de las hipótesis de la investigación.

4.4.2 Técnicas

Se enlistan las técnicas utilizadas para la recopilación de datos, así como para la tabulación de los mismos.

- Exposición Problémica
- Conversación heurística
- Búsqueda parcial
- Mayéutica
- Clase magistral
- Test, postest

Técnicas estadísticas

- Análisis de varianza
- Prueba paramétrica

4.4.3 Instrumentos

- Cuestionarios con registro de rendimiento.
- Z normalizada

4.4.4 Materiales

Los materiales y recursos necesarios a ser utilizados en la elaboración de ésta tesis fueron los siguientes:

- Recursos informáticos.
- Recursos técnicos
- Recursos tecnológicos
- Programas informáticos matemáticos y estadísticos
- Matrices de registro paramétrico de aprendizajes.

4.5 PROCESAMIENTO DE DATOS

- El esquema de trabajo en cuanto a la tabulación siguió la siguiente lógica:
- Clasificación de datos por rangos
- Análisis de normalidad de las clases

- Determinación de la prueba paramétrica
- Aplicación de Z normalizada test-postest

CAPÍTULO 5

5.1 ANÁLISIS, INTERPRETACIÓN Y PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

5.1.1 Evaluación diagnóstica

Para comprobar la hipótesis primero se tomó una prueba de diagnóstico para medir los conocimientos iniciales arrojando los siguientes resultados:

Cuadro 3. Evaluación diagnóstica

Número	**Diagnóstico**	
	Experimental	**Control**
1	4,00	3,00
2	5,30	2,00
3	1,50	4,80
4	2,00	4,00
5	1,33	3,00
6	4,00	2,40
7	2,60	2,00
8	5,30	4,80
9	2,80	4,00
10	5,00	3,40
11	4,00	2,80
12	3,00	4,00
13	4,00	4,80
14	5,00	3,60
15	2,00	4,80
16	1,00	3,00
17	4,00	2,40
18	4,00	3,00
19	3,00	4,80
20	5,00	4,80
21	1,80	3,60
22	2,00	5,00
23	4,00	2,00

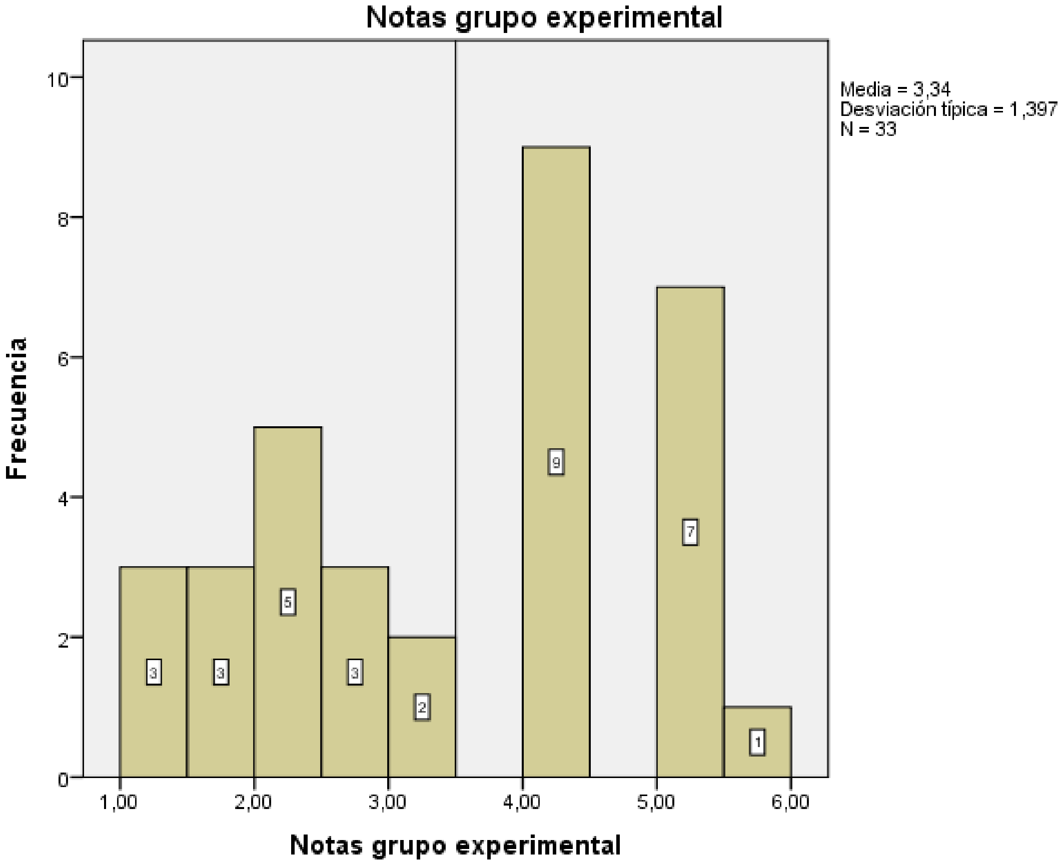
24	1,90	2,40
25	4,00	4,80
26	4,00	3,00
27	1,00	4,80
28	5,00	4,80
29	2,00	3,00
30	2,67	3,00
31	5,50	2,40
32	2,40	3,20
33	5,00	3,40
34		4,20
35		1,90
36		3,40
37		2,80
38		3,50
39		5,00
40		3,30
41		3,60
42		5,00

Fuente: Rendimiento de los estudiantes

Elaborado por: Olga Barrera

5.1.2 Histograma de la prueba diagnóstica del grupo experimental

Cuadro 4. Histograma de notas del grupo experimental

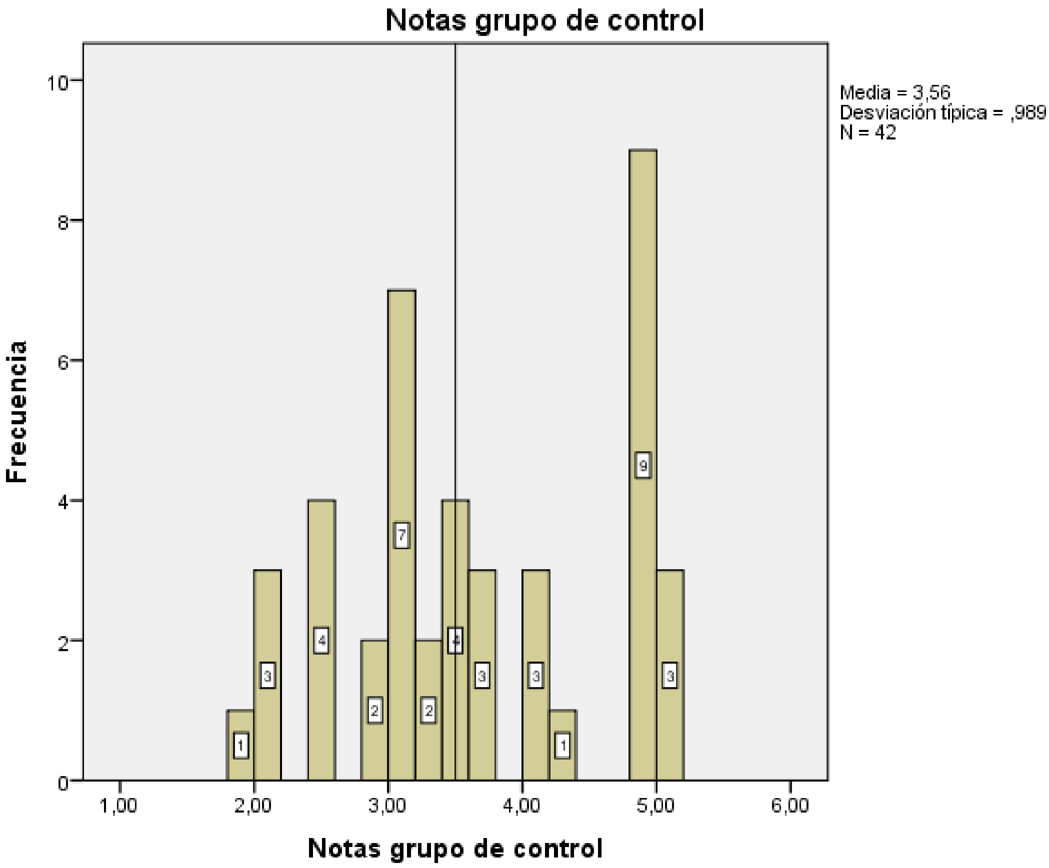


Fuente: Rendimiento de los estudiantes

Elaborado por: Olga Barrera

5.1.3 Histograma de la prueba diagnóstica del grupo de control

Cuadro 5. Histograma de notas del grupo de control



Fuente: Rendimiento de los estudiantes

Elaborado por: Olga Barrera

Como se puede observar en los cuadros y en el resultado de las medias éstas no varían significativamente por lo que se concluye que los dos grupos presentan un mismo nivel de conocimiento.

5.1.4 Evaluación final de la investigación

Se realizó la prueba final de acuerdo al anexo 4 y los resultados obtenidos son los siguientes.

Cuadro 6. Evaluación final

Número	Evaluación Final	
	Experimental	Control
1	5,40	3,90
2	5,50	2,40
3	3,40	5,00
4	3,00	5,20
5	3,60	3,90
6	5,00	3,50
7	4,60	2,60
8	6,00	5,00
9	4,20	5,20
10	5,30	4,40
11	4,50	3,60
12	4,40	5,20
13	6,00	5,00
14	5,30	4,60
15	3,50	5,00
16	3,30	3,90
17	6,00	3,20
18	6,00	3,90
19	4,50	5,00
20	5,40	4,00
21	3,60	4,80
22	3,50	3,00
23	4,20	2,60
24	3,00	3,20
25	5,20	5,00
26	4,90	3,90
27	3,50	5,50
28	6,00	5,20
29	3,30	1,90
30	5,30	3,90
31	5,70	3,80
32	3,80	4,20
33	5,40	4,40
34		5,30
35		2,50
36		4,40
37		2,60
38		4,60

39		6,00
40		4,30
41		3,8
42		4,2

Fuente: Rendimiento de los estudiantes

Elaborado por: Olga Barrera

5.1.5 Frecuencias de la evaluación final de la investigación

Cuadro 7. Frecuencias del grupo experimental

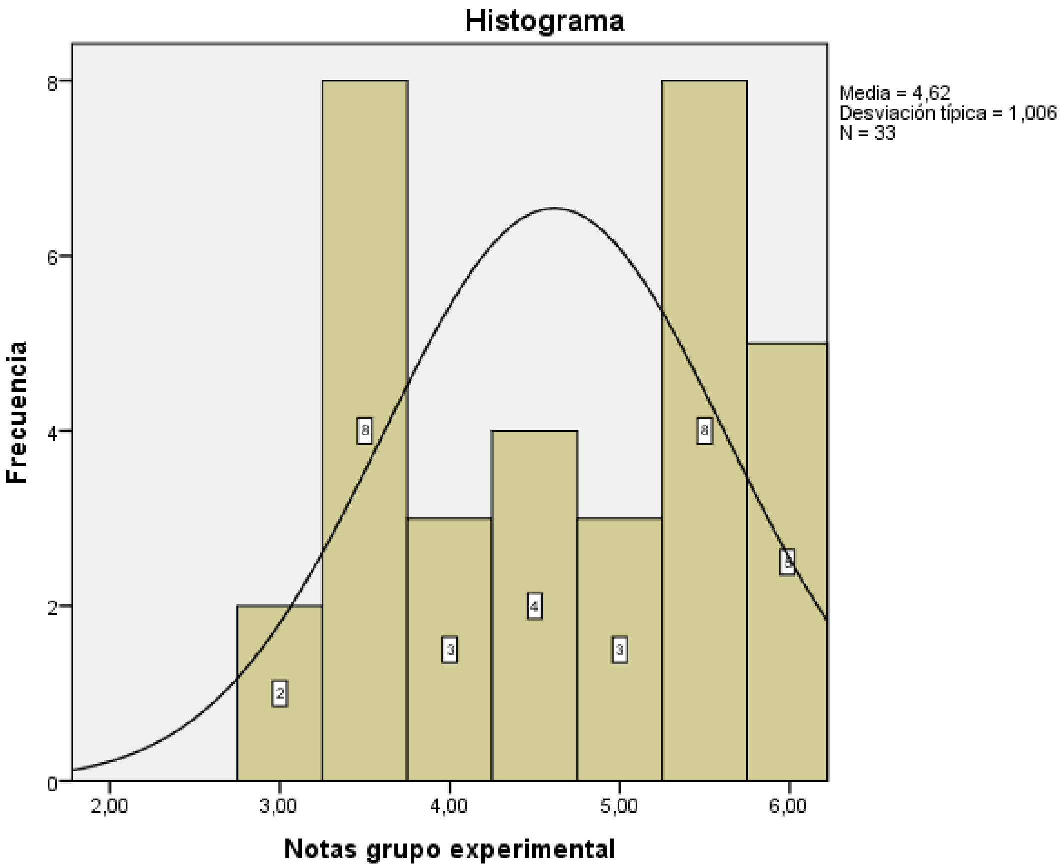
Notas	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
3,00	2	4,8	6,1	6,1
3,30	2	4,8	6,1	12,1
3,40	1	2,4	3,0	15,2
3,50	3	7,1	9,1	24,2
3,60	2	4,8	6,1	30,3
3,80	1	2,4	3,0	33,3
4,20	2	4,8	6,1	39,4
4,40	1	2,4	3,0	42,4
4,50	2	4,8	6,1	48,5
4,60	1	2,4	3,0	51,5
4,90	1	2,4	3,0	54,5
5,00	1	2,4	3,0	57,6
5,20	1	2,4	3,0	60,6
5,30	3	7,1	9,1	69,7
5,40	3	7,1	9,1	78,8
5,50	1	2,4	3,0	81,8
5,70	1	2,4	3,0	84,8
6,00	5	11,9	15,2	100,0
Total	33	78,6	100,0	

Fuente: Rendimiento de los estudiantes

Elaborado por: Olga Barrera

5.1.6 Histograma de la evaluación del grupo experimental

Cuadro 8. Gráfico de frecuencias del grupo experimental



Fuente: Rendimiento de los estudiantes

Elaborado por: Olga Barrera

5.1.7 Frecuencias de la evaluación final de la investigación

Cuadro 9. Frecuencias del grupo de control

Experimental

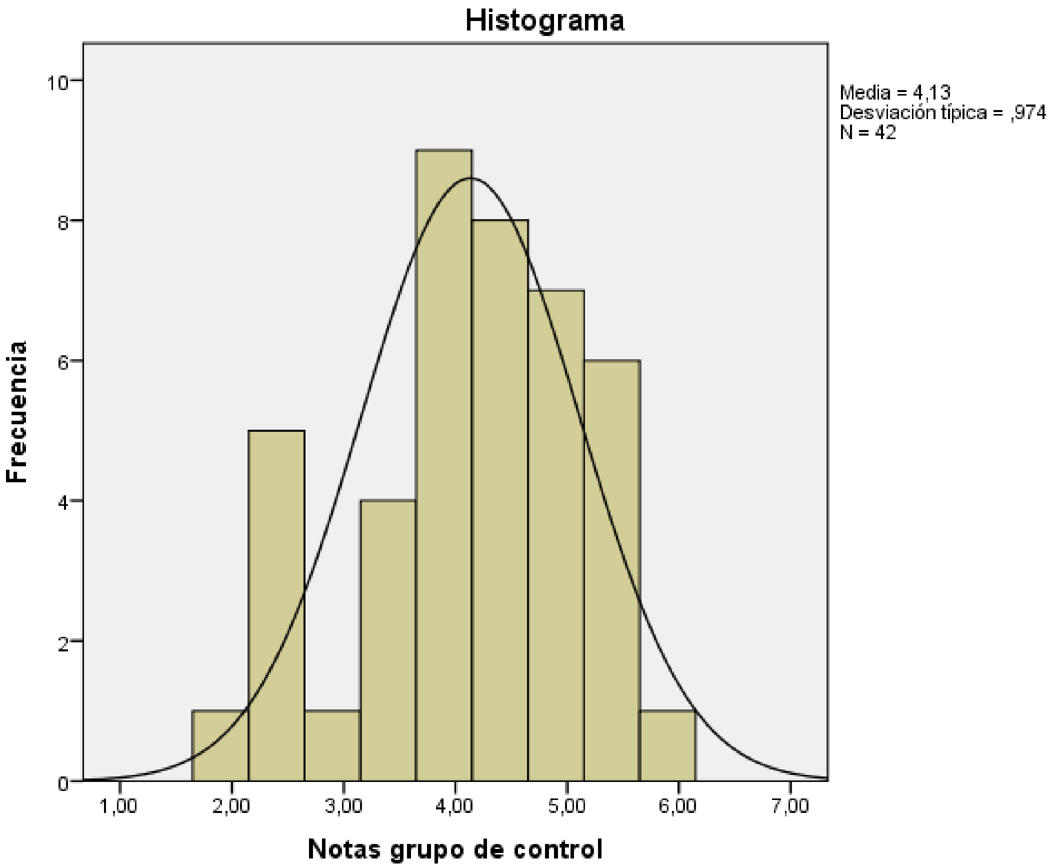
Notas	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
3,00	2	4,8	6,1	6,1
3,30	2	4,8	6,1	12,1
3,40	1	2,4	3,0	15,2
3,50	3	7,1	9,1	24,2
3,60	2	4,8	6,1	30,3
3,80	1	2,4	3,0	33,3
4,20	2	4,8	6,1	39,4
4,40	1	2,4	3,0	42,4
4,50	2	4,8	6,1	48,5
4,60	1	2,4	3,0	51,5
4,90	1	2,4	3,0	54,5
5,00	1	2,4	3,0	57,6
5,20	1	2,4	3,0	60,6
5,30	3	7,1	9,1	69,7
5,40	3	7,1	9,1	78,8
5,50	1	2,4	3,0	81,8
5,70	1	2,4	3,0	84,8
6,00	5	11,9	15,2	100,0
Total	33	78,6	100,0	
Total	42	100,0		

Fuente: Rendimiento de los estudiantes

Elaborado por: Olga Barrera

5.1.8 Histograma de la evaluación del grupo de control

Cuadro 10. Gráfico de frecuencias del grupo de control



Fuente: Rendimiento de los estudiantes

Elaborado por: Olga Barrera

5.1.9 Estadísticos descriptivos del grupo experimental y de control.

Cuadro 11.Estadísticos descriptivos del grupo experimental y de control.

Estadísticos

	Experimental	Control
	33	42
Media	4,6152	4,1333
Error típ. de la media	,17517	,15029
Mediana	4,6000	4,2000
Moda	6,00	3,90[a]
Desv. típ.	1,00627	,97397
Varianza	1,013	,949
Rango	3,00	4,10
Mínimo	3,00	1,90
Máximo	6,00	6,00
Suma	152,30	173,60

a. Existen varias modas. Se mostrará el menor de los valores.

Fuente: Rendimiento de los estudiantes

Elaborado por: Olga Barrera

Cuadro 12. Medias y desviaciones muestrales

X1	4,6152
X2	4,1333
s1	1,0063
s2	0,9740

Fuente: Rendimiento de los estudiantes

Elaborado por: Olga Barrera

5.1.2 Planteamiento de la hipótesis científica de la investigación

Ho: $\mu 1 - \mu 2 = 0$; p_valor >=0.05

5.1.3 Elección del nivel de significancia

Por tratarse de una investigación que implica rendimiento a través de la didáctica y epistemología se utiliza un nivel de significancia de 0,05 al 95%.

5.1.3.1 Criterios de rechazo de la hipótesis nula

Hi: $\mu 1 - \mu 2 > 0$; p_valor <0.05

5.2 APLICACIÓN DE LA FÓRMULA PARA CALCULAR LOS VALORES Y CONTRASTAR LOS CON LOS VALORES TEÓRICOS, DE ACUERDO A LA TÉCNICA ESTADÍSTICA ELEGIDA.

Prueba z para muestras independientes

$$z = \frac{X1 - X2}{\sqrt{\left(\frac{s1^2}{n1} + \frac{s2^2}{n2}\right)}}$$

$$z = \frac{4,6152 - 4,1333}{\sqrt{\left(\frac{(1,0063)^2}{33} + \frac{(0,9740)^2}{42}\right)}}$$

z= 2,0879. Dónde:

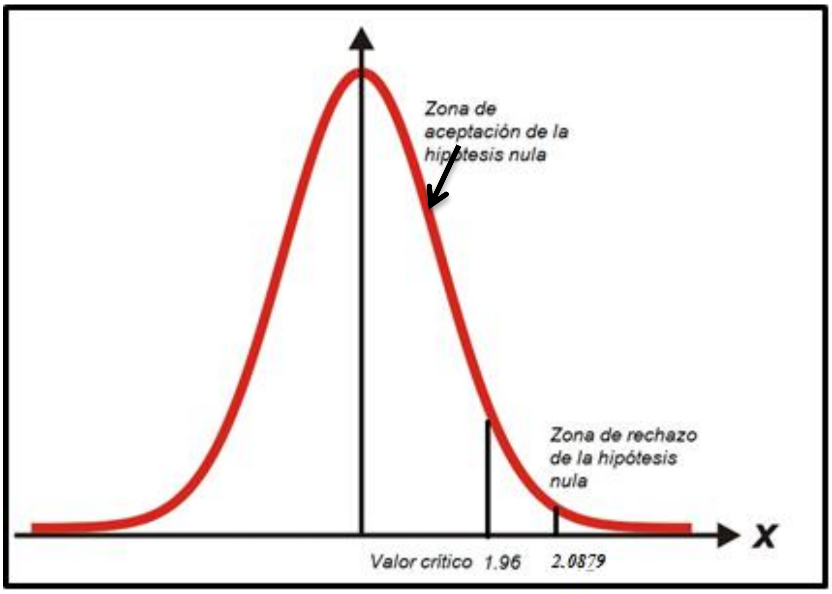
X1: Media de rendimiento del grupo experimental

X2: Media de rendimiento del grupo de control

s1: Desviación muestral del grupo experimental

s2: Desviación muestral del grupo de control

Imagen 10. Validación de hipótesis final.



Fuente: Rendimiento de los estudiantes

Elaborado por: Olga Barrera

5.2.1 Decisión a tomar de acuerdo a los valores calculados y teóricos.

Como 2.0879 (z calculada) > 1.96 (valor crítico) se concluye que existen suficientes argumentos para desechar la hipótesis nula; es decir las medias entre los grupos experimental y de control en la evaluación final son significativamente diferentes superando la media el grupo de control sobre el experimental sin atribuirse este hecho al azar.

5.2.2 Error típico de la distribución muestral del grupo experimental (Error típico de la media)

$$SE = \frac{S}{\sqrt{N}}$$

$$SE = \frac{1,013}{\sqrt{33}}$$

$$SE = 0,1751$$

Las siguientes expresiones pueden ser usadas para calcular los límites de confianza por encima y por debajo del 95%, SE es igual al error típico para la media de la muestra, y 1,96 es el cuantil 0.475 de la distribución normal:

Por encima del 95% Límite = X1+ (SE* 1.96),

Por encima del 95% Límite =4,6152+ (0,1751* 1.96) =4,9585

Por debajo del 95% Límite = X1- (SE* 1.96).

Por debajo del 95% Límite = 4,6152- (0,1751* 1.96) =4,2719

5.2.3 Error típico de la distribución muestral del grupo de control (Error típico de la media)

$$ES = \frac{S}{\sqrt{N}}$$

$$ES = \frac{1{,}000}{\sqrt{42}}$$

$$ES = 0{,}1543$$

Las siguientes expresiones pueden ser usadas para calcular los límites de confianza por encima y por debajo del 95%, SE es igual al error típico para la media de la muestra, y 1,96 es el cuantil 0.475 de la distribución normal:

Por encima del 95% Límite = X1+ (SE* 1.96),

Por encima del 95% Límite =4,1333+ (0,1543* 1.96) =4,4357

Por debajo del 95% Límite = X1- (SE* 1.96).

Por debajo del 95% Límite = 4,1333- (0,1543* 1.96) =3,8309

5.2.4 Decisión

Si consideramos por debajo del 95% de confianza el límite del grupo experimental es igual a 4,2719; que es menor al de por encima del 95% del límite que es de 4,4357 del grupo de control, entonces las posibilidades de que no haya mejora en el rendimiento académico son:

$$No\ mejora\ el\ rendimiento = (4{,}4357 - 4{,}2719) * 100/ = 23{,}86\%$$

Es decir que existe el 76,14% de posibilidades que si hay mejora del rendimiento académico.

CAPÍTULO 6

6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

6. 1 CONCLUSIONES

- Se concluye que la inclusión de la epistemología de la matemática en las temáticas de historia de la lógica, conjuntos y números reales incidió positivamente en el rendimiento académico de los estudiantes sobre los cuales se aplicó la metodología didáctica; los resultados del capítulo previo así lo indican, es decir 2.0879 (z calculada) > 1.96 (valor crítico) de lo que se concluye que existen suficientes argumentos para desechar la hipótesis nula; es decir las medias entre los grupos experimental y de control en la evaluación final son significativamente diferentes superando la media el grupo de control sobre el experimental sin atribuirse este hecho al azar.

- El grupo experimental superó al grupo de control en cuanto al alcance de logros de rendimiento, como lo demuestra la prueba de hipótesis correspondiente.
- Si analizamos el error típico muestral y consideramos por debajo del 95% de confianza el límite del grupo experimental es igual a 4,2719; que es menor al de por encima del 95% del límite que es de 4,4357 del grupo de control, entonces las posibilidades de que no haya mejora en el rendimiento académico son:

$$No\ mejora\ el\ rendimiento = (4{,}4357 - 4{,}2719) * 100/ = 23{,}86\%$$

Es decir que existe el 76,14% de posibilidades que si hay mejora del rendimiento académico, lo que confirma lo obtenido en la prueba de hipótesis.

6.2. RECOMENDACIONES

- Se recomienda la ampliación del tratamiento epistemológico de las temáticas matemáticas no solo referentes a la lógica, conjuntos y números reales sino otras vinculadas ya al cálculo integral o al análisis vectorial para analizar cuáles serían los resultados a los que llegarían investigaciones similares.
- Usar las técnicas activas no limitándose al ejercicio del docente; que sea el estudiante el que aborde el asunto epistemológico mediante trabajos expositivos, grupales o de consulta; el estudiante es el que debe hacer de la historia de la matemática una herramienta imprescindible en el estudio de esta disciplina.
- Utilizar la metodología activa basada en la epistemología de la matemática para la transposición de contenidos que es un medio que facilita el aprendizaje junto a un ambiente de estudio adecuado; así por ejemplo propiciar las sesiones de clase por proyectos, elaboración conjunta; solución de problemas; clase magistral y otros.

CAPÍTULO 7

7. PROPUESTA

7.1. INTRODUCCIÓN

Se presenta en el presente apartado la propuesta vinculada a la inclusión de la historia en las sesiones de clase de matemática con visos de cumplir con la formalidad epistemológica de las ciencias exactas sobre estudiantes de pregrado de la carrera de ingeniería automotriz.

De las diversas maneras de aplicar la producción científica ya sea en productos tangibles o intangibles se ha elegido la divulgación promovida por el método científico una vez implementada la metodología a través de la cual se corrige un notable error en el cual el profesor de matemáticas incurre con mucha frecuencia: prescindir de la epistemología en el abordaje de los contenidos.

La importancia de la presente propuesta se verá claramente tanto por alcanzar la primera ley de la didáctica que es vincular teoría y práctica de la ciencia cuanto propender a partir de la hilación científica de los procesos de descubrimiento hasta la clarificación de los problemas y demostraciones que llevan el conocimiento hasta un nivel significativo.

7.2. JUSTIFICACIÓN

La presente propuesta se justifica por los siguientes aspectos:

De la investigación realizada se observa que el rendimiento académico se mejora con la utilización de la Historia de la Matemática como introducción al fundamento teórico, pero lamentablemente los docentes de Matemática dela Escuela de Ingeniería Automotriz no la utilizan dentro de su metodología, por lo que sería aconsejable utilizarla mediante una capacitación que luego podría extenderse para todos los docentes de Matemática de la Facultad.

Dado que la preparación del docente y la búsqueda de nuevas estrategias para lograr llegar al estudiante con el conocimiento deben ser tareas continuas se justfica la implementación al menos de una de ellas como la que se plasma dentro de ésta propuesta.

La historia de la matemática como introducción al fundamento teórico es la base epistemológica de la matemática, lo que permite enlazar los contenidos de la asignatura con los verdaderos impulsores de la matemática como Aristoteles, George Cantor, George Boole etc,

7.3. OBJETIVOS

7.3.1 Objetivo General

Capacitar a los docentes de Matemática sobre la utilización de la historia de la matemática como introducción al fundamento teórico para mejorar el rendimiento académico de los estudiantes de la escuela de ingeniería automotriz de la ESPOCH.

7.3.2. Objetivo Específicos

- Planificación del curso de capacitación
- Determinar los contenidos de la asignatura
- Aplicar la historia de la matemática como eje transversal a los docentes de algebra superior
- Explicar a los docentes respecto de que la historia de la matemática como fundamento teórico influye en el rendimiento académico positivamente.

7.4. VIABILIDAD.

La viabilidad es notable por cuanto existió la voluntad política de las autoridades de la Escuela de Ingeniería Automotriz de la ESPOCH, como las del posgrado y de los estudiantes involucrados en la investigación.

7.5. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA.

El rendimiento académico

El rendimiento académico es el resultado de la educación - el grado en que un estudiante, maestro o la institución ha logrado sus metas educativas. El rendimiento académico se mide comúnmente por los exámenes o la evaluación continua, pero no existe un acuerdo general sobre la forma en la mejor forma o los aspectos más importantes; el conocimiento procedimental como las habilidades o conocimientos declarativos del conocimiento como son los hechos (Ward, Annie; Stoker. W, 1996). Hablando del rendimiento académico; en Estados Unidos por ejemplo, el logro de las escuelas se mide por el índice de rendimiento académico. Las diferencias individuales que influyen en el rendimiento académico.

Las diferencias individuales en el rendimiento académico se han relacionado con diferencias en la inteligencia y la personalidad. (Stumm, Sophie; Hell, Benedikt; Chamorro-Premuzic, Tomas , 2011). Los estudiantes con mayor habilidad mental como lo demuestran las pruebas de CI y los que son más altos en la concienciación (vinculado al esfuerzo y la motivación de logro) tienden a lograr altos resultados en el ámbito académico.

Una meta-análisis reciente sugiere que la curiosidad mental (medida por el compromiso intelectual típico) tiene una influencia importante en el logro académico, además de la inteligencia y la conciencia (Ibíd)

Las transiciones de entorno y el aprendizaje en casa de los estudiantes se agudizan al empezar la escuela. Los logros académicos tempranos mejoran el rendimiento académico posterior (Bossaert, G; S. Doumen; E. Buyse; K. Verschueren , 2011). La socialización académica de los padres es un término que describe la forma en que estos influyen en el rendimiento académico mediante el incentivo hacia el desarrollo de habilidades, comportamientos y actitudes hacia la escuela; (Magnuson, 2007) los estudiantes tienen la influencia de su padres a través del medio ambiente y los padres del discurso que tienen con sus hijos.

La socialización académica puede ser influenciada por el nivel socioeconómico de los padres. Los padres con estudios superiores tienden a tener un ambiente de aprendizaje más estimulante. En los niños los primeros años de vida son cruciales para el desarrollo del lenguaje y las habilidades sociales.

La preparación escolar en estas áreas ayudar a los estudiantes a adaptarse a las expectativas académicas (Kerry, 1995). Otro potenciador muy importante de los logros académicos es la presencia de la actividad física. Los estudios han demostrado que la actividad física puede aumentar la actividad neural en el cerebro (Tomporowski, Davis, Miller, & Naglieri, 2008) . El ejercicio aumenta específicamente las funciones ejecutivas cerebrales tales como la capacidad de atención y la memoria de trabajo (Ibid).

La lógica matemática es un sub campo de la matemática que explora las aplicaciones de la lógica formal. Por vía tópica, la lógica matemática tiene estrechas relaciones con la meta matemática, los fundamentos de las matemáticas y la informática teórica. Los temas unificadores en la lógica matemática incluyen el estudio de la capacidad expresiva de los sistemas formales y el poder deductivo de los sistemas de prueba formal.

La lógica Matemática.

La lógica matemática se divide a menudo en los campos de la teoría de conjuntos, teoría de modelos, teoría de la repetición, y la teoría de la prueba. Estas áreas comparten resultados básicos de lógica, sobre todo la lógica de primer orden, y la definibilidad. En las ciencias de la computación por ejemplo la lógica matemática abarca temas adicionales propios de su estudio.

Desde su creación, la lógica matemática ha sido motivada por el estudio de los fundamentos de las matemáticas. Este estudio se inició en el siglo 19 con el desarrollo de los marcos axiomáticos para la geometría, aritmética, y el análisis. Desde fines del siglo 19 (Hilbert, 1899) se propuso un programa para probar la consistencia de las teorías fundacionales.

Los resultados de Kurt Gödel, Gerhard Gentzen (Gödel, 1929) y otros proporcionaron la resolución parcial para el programa, y aclararon las cuestiones implicadas en la prueba de consistencia. El trabajo en la teoría de conjuntos mostró que casi todas las matemáticas ordinarias se pueden formalizar en términos de conjuntos, aunque hay algunos teoremas que no pueden ser probados en sistemas axiomáticos comunes por la teoría de conjuntos.

Las intervenciones contemporáneas en los fundamentos de las matemáticas a menudo se centran en establecer qué partes de las matemáticas se pueden formalizar; en particular los sistemas formales (como en la matemática inversa) en lugar de tratar de encontrar teorías en las que todas las matemáticas se pueden desarrollar.

La lógica matemática contemporánea hace una división aproximada de su estudio en cuatro áreas:

- la teoría de conjuntos
- la teoría de modelos
- la teoría de la repetición, y
- la teoría de la prueba y las matemáticas constructivas (considerados como partes de una misma área).

Cada área tiene un enfoque distinto, aunque muchas de las técnicas y los resultados son compartidos entre múltiples áreas. Las fronteras entre estos campos y las líneas que separan la lógica matemática y otros campos de las matemáticas, no son siempre visibles (Felscher, 2000) . El teorema de la incompletitud de Gödel no sólo marca un hito en la teoría de la repetición y la teoría de la prueba, sino que también ha dado lugar al teorema de Löb en la lógica modal.

El campo matemático de la teoría de la categoría utiliza muchos métodos axiomáticos formales, e incluye el estudio de la lógica categórica, pero la teoría de las categorías no se considera normalmente un sub-campo de la lógica matemática. Debido a su aplicabilidad en diversos campos de las matemáticas, matemáticos incluyendo a Saunders y Mac Lane han propuesto la teoría de categorías como un sistema fundamental para las matemáticas, independientemente de la teoría de conjuntos.

La lógica matemática surgió en la segunda mitad del siglo 19 como un sub-campo de la matemática independiente del estudio tradicional de la lógica. Antes de esta aparición, la lógica se estudió con la retórica, a través del silogismo, y con la filosofía. La primera mitad del siglo 20 vio una explosión de los resultados fundamentales, acompañados por un intenso debate sobre los fundamentos de las matemáticas (Ferreirós, 2001).

Las teorías de la lógica se desarrollaron en muchas culturas de la historia, incluyendo a China, India, Grecia y el mundo islámico. En la Europa del siglo 18, los intentos para tratar las operaciones de la lógica formal de manera simbólica o algebraica habían sido hechas por los matemáticos filosóficos entre ellos Leibniz y Lambert, pero sus trabajos permanecieron aislados y poco conocidos.

A mediados del siglo XIX, George Boole y Augustus De Morgan presentaron tratamientos matemáticos sistemáticos de la lógica. Su trabajo, basándose en el trabajo de los algebristas como George Peacock, extendió la doctrina aristotélica tradicional de la lógica en un marco suficiente para el estudio de los fundamentos de las matemáticas (Milies, 2003).

Charles Sanders Peirce se basó en el trabajo de Boole para desarrollar un sistema lógico de las relaciones y cuantificadores, el que publicó en varios periódicos de 1870 a 1885. Gottlob Frege presentó un desarrollo independiente de la lógica con cuantificadores en su artículo, publicado en 1879, una obra generalmente considerada como punto de inflexión en la historia de la lógica. La obra de Frege permaneció en la oscuridad, hasta que Bertrand Russell comenzó a promoverlo cerca del cambio de siglo. La notación de dos dimensiones que Frege desarrolló nunca fue adoptada ampliamente y no se utiliza en los textos contemporáneos (Fraenkel, 1922).

De 1890 a 1905, Ernst Schroeder publicó *Vorlesungen über die Algebra der Logik* en tres volúmenes. Este trabajo resume los aportes de Boole, De Morgan, y Peirce, y constituye una referencia completa a la lógica simbólica que ya se entendía a finales del siglo 19.

Teorías fundacionales

Las preocupaciones de que las matemáticas no habían sido construidas sobre una base adecuada condujeron al desarrollo de los sistemas axiomáticos para las áreas fundamentales de las matemáticas como la aritmética, el análisis y la geometría.

En la lógica, el término aritmética refiere a la teoría de los números naturales. (Peano, 1976) Se publicó un conjunto de axiomas para la aritmética que vinieron a llevar su nombre (axiomas de Peano), utilizando una variación del sistema de lógica de Boole y Schröder pero añadiendo cuantificadores. Peano no tenía conocimiento de la obra de Frege por el momento.

Por la misma época, Richard Dedekind mostró que los números naturales se caracterizan únicamente por sus propiedades de inducción (Dedekind, 1872). Dedekind proponía una caracterización diferente, que carecía del carácter lógico formal de los axiomas (Peano, 1976). El trabajo de Dedekind, sin embargo, demostró teoremas inaccesibles en el sistema de Peano, incluyendo la singularidad del conjunto de los números naturales (hasta el isomorfismo) y las definiciones recursivas de adición y multiplicación y la inducción matemática.

En la mitad del siglo 19, las fallas en los axiomas de Euclides para la geometría llegaron a ser conocidos (Katz, 1964). Además de la independencia del postulado de las paralelas, establecido por Nikolai Lobachevsky en 1826 (Lobachevsky 1840), los matemáticos descubrieron que ciertos teoremas dados por sentado por Euclides no lo eran, de hecho, lo que puede deducirse de sus axiomas.

Entre los diversos parámetros se encuentra el teorema de que una línea contiene al menos dos puntos, o que los círculos del mismo radio cuyos centros están separados por radio deben cruzarse. (Hilbert, 1899) desarrolló un conjunto completo de axiomas para la geometría, a partir de un trabajo previo de Pascua (1882). El éxito en la geometría axiomática ha motivado a Hilbert a buscar axiomatizaciones completas de otras áreas de las matemáticas, como (Felscher, 2000) los números naturales y la recta real. Esto demostraría ser un área importante de la investigación en la primera mitad del siglo 20.

El siglo 19 vio grandes avances en la teoría del análisis real, incluyendo las teorías de la convergencia de las funciones y las series de Fourier. Los matemáticos como Karl Weierstrass comenzaron a construir funciones que se extendían desde la intuición, como funciones continuas en ninguna parte-diferenciables. Concepciones anteriores de una función como una regla para el cálculo, o un gráfico liso, ya no eran adecuadas.

Weierstrass comenzó a abogar por la aritmetización del análisis, que buscaba axiomatizar el análisis utilizando las propiedades de los números naturales. El moderno (ε, δ) -definición de las funciones de límite y continuas ya fue desarrollado por Bolzano en 1817 (Felscher, 2000), pero se mantuvo relativamente desconocido. Cauchy en 1821 define la continuidad en términos de los infinitesimales (Cours d'Analyse, página 34). En 1858, Dedekind propuso una definición de los números reales en términos de cortes de Dedekind de los números racionales (Dedekind, 1872), una definición todavía empleada en los textos contemporáneos.

Georg Cantor desarrolló los conceptos fundamentales de la teoría de conjuntos infinitos. Sus primeros resultados desarrollaron la teoría de cardinalidad y demostró que los reales y los números naturales tienen diferentes cardinalidades (Cantor 1874). Durante los próximos veinte años, Cantor desarrolló una teoría de los números transfinitos, en una serie de publicaciones. En 1891, se publicó una nueva prueba de la incontabilidad de los números reales que introdujeron el argumento diagonal, y se utiliza este método para demostrar el teorema de Cantor que ningún conjunto puede tener la misma cardinalidad. Cantor creía que cada conjunto puede ser bien ordenado, pero era incapaz de producir una prueba de este resultado, dejándolo como un problema abierto en 1895 (Katz, 1964).

7.6. DESCRIPCIÓN DE LA PROPUESTA

El curso de capacitación está planificado de acuerdo a la experiencia obtenida durante la investigación y los contenidos de algebra superior y dirigido a un grupo de docentes de r de la Escuela de Ingeniería Automotriz con el fin de reforzar sus conocimientos sobre la historia de la matemática, y finalmente explicar los beneficios en el rendimiento académico de los estudiantes.

7.6.1. BENEFICIARIOS

Los beneficiarios son los docentes y estudiantes de la escuela de ingeniería automotriz de la ESPOCH.

7.6.2. CONTENIDO

Los contenidos se presentan a continuación:

PROGRAMA DE CAPACITACIÓN			
NOMBRE DEL EVENTO	**HORAS**	**GRUPOS**	**FECHA**
Historia de la matemática	68	4	
DIRIGIDO A:	**CAUSAS QUE DIRIGEN LA FORMACIÓN**		

<table>
<tr><td>Docentes de la Escuela de Ingeniería Automtoriz.</td><td>La escuela de Ingeniería Automotriz de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH), requiere que la planta docente utilice la historia de la matemática como introducción al fundamento teórico para la enseñanza de la matemática.</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">OBJETIVOS DEL EVENTO</td></tr>
<tr><td colspan="2">Capacitar al docente en la historia de la matemática como introducción al fundamento teórico.

Proporcionar los elementos necesarios acerca de la historia de la matemática.</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">RESULTADOS ESPERADOS DE LA CAPACITACIÓN</td></tr>
<tr><td colspan="2">Que los docentes de utilicen la historia de la matemática como introducción al fundamento teórico.</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">CONTENIDOS DEL EVENTO</td></tr>
<tr><td colspan="2">Teorías fundacionales
La teoría de conjuntos y paradojas
La lógica simbólica
Comienzos de las otras ramas
La teoría de conjuntos
La teoría de modelos
Teoría de la repetición
Problemas irresolubles algorítmicamente
La teoría de las pruebas y las matemáticas constructivas
Historia de la teoría de conjuntos
Historia de los números reales
Número Irracional</td></tr>
</table>

7.6.3. METODOLOGÍA

La metodología educativa para el desarrollo de la introducción al fundamento teórico acerca de la historia de la matemática está resumida en los siguientes pasos:

Presentación del tema

Presentación del objetivo

Exposición del contenido

Interacción

Aprendizaje

Presentación del tema

Dar un impacto motivacional al presentar el tema, en forma presencial y virtual

Usar correctamente los recursos didácticos

Presentar los contenidos educativos con eficiencia

Presentación del objetivo

Planificar el alcance de los contenidos del tema presentado

Decidir la relación de la historia de la matemática con el tema presentado

Concretar habilidades y destrezas a desarrollar

Exposición del contenido

Conocer la introducción al fundamento teórico a través de la historia de la matemática para el tema presentado.

Fomentar el autoaprendizaje a través del entorno virtual

Interacción

Facilitar un espacio de discusión sobre el tema presentado con la formación de grupos.

Aprendizaje

Plenaria para la exposición de los resultados de la discusión en grupos.

7.7. RECURSOS HUMANOS, TÉCNICOS Y DIDÁCTICOS

7.7.1. Recursos humanos

Tesista

7.7.2. Recursos técnico didácticos

Se enlistan los recursos utilizados para la ejecución del programa de capacitación:

- Guía
- Plataforma virtual Moodle, entorno virtual de aprendizaje
- Videos
- Afiches

7.7.3. Guía 1

<table>
<tr><th colspan="4">GUÍA N°1</th></tr>
<tr><th>TEMA: HISTORIA DE LA LÓGICA MATEMÁTICA</th><th>HORAS</th><th>GRUPOS</th><th>FECHA</th></tr>
<tr><td>Teorías fundacionales.

Evolución de la Lógica en el siglo XX</td><td>16</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><th colspan="4">OBJETIVO DEL EVENTO</th></tr>
<tr><td colspan="4">Objetivo General.

Capacitar al docente en la historia de la matemática como introducción al fundamento teórico.

Objetivo específico.

Proporcionar al docente los documentos así como herramientas acerca de historia de la lógica Matemática.</td></tr>
<tr><th colspan="4">RESULTADOS ESPERADOS</th></tr>
<tr><td colspan="4">Que los docentes de algebra superior utilicen la historia de la matemática como introducción al fundamento teórico.</td></tr>
<tr><th colspan="4">CONTENIDOS DEL EVENTO</th></tr>
<tr><td colspan="4">Teorías fundacionales

La teoría de conjuntos y paradojas

La lógica simbólica</td></tr>
</table>

Comienzos de las otras ramas
INTERACCIÓN.
Discusión: Una vez que se presenta el contenido Historia de la Lógica que lo realiza a través de documentos enviados al aula virtual así como los documentos que se proporciona dentro de la clase presencial se procede a entablar grupos de trabajo en donde se discute el contenido del mismo, lo que provocará que los docentes interactúen entre ellos de manera de sacar nuevas herramientas que ayudarán en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Dramatización: Se puede catalogar utilizar un recurso de tal magnitud como descabellado pero sin embargo puedo dar testimonio de que es un recurso que ayuda a desarrollar la creatividad, aflora el ingenio del alumno y la manera divertida con la que se llega al conocimiento. Trabajos en Grupo, exposiciones: Cada grupo trabajará en clase sobre folletos relacionados con personajes importantes que aportaron sobre la lógica matemática, incentivando el uso de materiales como pueden ser carteles, diapositivas, etc, que dependerá del ingenio de cada grupo. OBSERVACIONES: Dentro de la investigación se puede llegar a las siguientes observaciones que se comparte: El estudiante se aburre con documentos largos. Las fechas tanto de biografías como de publicaciones de resultados importantes solo citarlas como referencia hay que recordar que la historia de la matemática es utilizada como recurso afianzador en la conexión personajes importantes de la matemática con los contenidos. Si se utiliza videos que no sean demasiado largos sino más bien puntuales y después de ello siempre provocar discusión. La interacción se realiza a través de foros en el aula virtual en donde los docentes pueden comentar sobre los documentos que se le proporcionó. Dentro del aula la interacción debe ser continua de manera de no provocar clases aburridas y monótonas.
APRENDIZAJE
Plenaria, exposición de resultados y evaluación
RECURSOS
• Plataforma virtual Moodle, entorno virtual de aprendizaje. • Videos • Afiches
EVALUACIÓN
Dado que el curso será aprobado cada una de las actividades serán evaluadas una vez

que lleguen a su término. Síntesis de documentos enviados al aula virtual 2. Foros de discusión 2. Dramatización 2. Trabajos en Grupo 2. Exposición con material didáctico 2. TOTAL 10.

7.7.4. Guía 2.

GUÍA N°2			
TEMA: HISTORIA DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS.	**HORAS**	**GRUPOS**	**FECHA**
Historia de la teoría de conjuntos	16	4	Días 4,5
OBJETIVO DEL EVENTO			
Objetivo General. Capacitar al docente en la historia de la matemática como introducción al fundamento teórico. Objetivo específico. Proporcionar al docente los documentos así como herramientas acerca de historia de la Teoría de Conjuntos.			
RESULTADOS ESPERADOS			
Que los docentes de algebra superior utilicen la historia de la matemática como introducción al fundamento teórico.			
CONTENIDOS DEL EVENTO			
La teoría de conjuntos La teoría de modelos Teoría de la repetición Problemas irresolubles algorítmicamente La teoría de las pruebas y las matemáticas constructivas Historia de la teoría de conjuntos			
INTERACCIÓN.			
Discusión: Una vez que se presenta el contenido Historia de la Teoría de Conjuntos que lo realiza a través de documentos enviados al aula virtual así como los documentos que se proporciona dentro de la clase presencial se procede a entablar grupos de trabajo en donde se discute el contenido del mismo, lo que provocará que los docentes interactúen entre ellos de manera de sacar nuevas herramientas que ayudarán en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Dramatización: Se puede catalogar utilizar un recurso de tal magnitud como descabellado pero sin embargo puedo dar testimonio de que es un recurso que ayuda a			

desarrollar la creatividad, aflora el ingenio del alumno y la manera divertida con la que se llega al conocimiento. Trabajos en Grupo, exposiciones: Cada grupo trabajará en clase sobre folletos relacionados con personajes importantes que aportaron sobre la historia de la matemática, incentivando el uso de materiales como pueden ser carteles, diapositivas, etc, que dependerá del ingenio de cada grupo. OBSERVACIONES: Dentro de la investigación se puede llegar a las siguientes observaciones que se comparte: El estudiante se aburre con documentos largos. Las fechas tanto de biografías como de publicaciones de resultados importantes solo citarlas como referencia hay que recordar que la historia de la matemática es utilizada como recurso afianzador en la conexión personajes importantes de la matemática con los contenidos. Si se utiliza videos que no sean demasiado largos sino más bien puntuales y después de ello siempre provocar discusión. La interacción se realiza a través de foros en el aula virtual en donde los docentes pueden comentar sobre los documentos que se le proporcionó. Dentro del aula la interacción debe ser continua de manera de no provocar clases aburridas y monótonas.
APRENDIZAJE
Plenaria, exposición de resultados y evaluación
RECURSOS
• Plataforma virtual Moodle, entorno virtual de aprendizaje. • Videos • Afiches
EVALUACIÓN Dado que el curso será aprobado cada una de las actividades serán evaluadas una vez que lleguen a su término. Síntesis de documentos enviados al aula virtual 2. Foros de discusión 2. Dramatización 2. Trabajos en Grupo 2. Exposición con material didáctico 2. TOTAL 10.

7.7.5. Guía 3.

<table>
<tr><th colspan="4">GUÍA N°3</th></tr>
<tr><td>TEMA: HISTORIA DE LOS NÚMEROS REALES</td><td>HORAS</td><td>GRUPOS</td><td>FECHA</td></tr>
<tr><td>Historia de los números reales</td><td>16</td><td>4</td><td>Días 5,6</td></tr>
<tr><th colspan="4">OBJETIVO DEL EVENTO</th></tr>
<tr><td colspan="4">Objetivo General.

Capacitar al docente en la historia de la matemática como introducción al fundamento teórico.

Objetivo específico.

Proporcionar al docente los documentos así como herramientas acerca de historia de los números reales.</td></tr>
<tr><th colspan="4">RESULTADOS ESPERADOS</th></tr>
<tr><td colspan="4">Que los docentes de algebra superior utilicen la historia de la matemática como introducción al fundamento teórico.</td></tr>
<tr><th colspan="4">CONTENIDOS DEL EVENTO</th></tr>
<tr><td colspan="4">Historia de los números reales

Número Irracional

Curiosidades sobre el número pi.</td></tr>
<tr><th colspan="4">INTERACCIÓN.</th></tr>
<tr><td colspan="4">Discusión: Una vez que se presenta el contenido Historia de los números reales que lo realiza a través de documentos enviados al aula virtual así como los documentos que se proporciona dentro de la clase presencial se procede a entablar grupos de trabajo en donde se discute el contenido del mismo, lo que provocará que los docentes interactúen entre ellos de manera de sacar nuevas herramientas que ayudarán en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Dramatización: Se puede catalogar utilizar un recurso de tal magnitud como descabellado pero sin embargo puedo dar testimonio de que es un recurso que ayuda a desarrollar la creatividad, aflora el ingenio del alumno y la manera divertida con la que se llega al conocimiento.

Trabajos en Grupo, exposiciones: Cada grupo trabajará en clase sobre folletos relacionados con personajes importantes que aportaron sobre la lógica matemática, incentivando el uso de materiales como pueden ser carteles, diapositivas, etc, que dependerá del ingenio de cada grupo.

OBSERVACIONES:

Dentro de la investigación se puede llegar a las siguientes observaciones que se</td></tr>
</table>

comparte: El estudiante se aburre con documentos largos. Las fechas tanto de biografías como de publicaciones de resultados importantes solo citarlas como referencia hay que recordar que la historia de la matemática es utilizada como recurso afianzador en la conexión personajes importantes de la matemática con los contenidos. Si se utiliza videos que no sean demasiado largos sino más bien puntuales y después de ello siempre provocar discusión. La interacción se realiza a través de foros en el aula virtual en donde los docentes pueden comentar sobre los documentos que se le proporcionó. Dentro del aula la interacción debe ser continua de manera de no provocar clases aburridas y monótonas.
APRENDIZAJE
Plenaria, exposición de resultados y evaluación
RECURSOS
• Plataforma virtual Moodle, entorno virtual de aprendizaje. • Videos • Afiches
EVALUACIÓN Dado que el curso será aprobado cada una de las actividades serán evaluadas una vez que lleguen a su término. Síntesis de documentos enviados al aula virtual 2. Foros de discusión 2. Dramatización 2. Trabajos en Grupo 2. Exposición con material didáctico 2. TOTAL 10.

7.8. EVALUACIÓN Y SEGUIMIENTO

La operatividad se describe a través del siguiente cuadro esquema

	Día 1	Día 2	Día 3	Día 4	Día 5	Día 6
Teorías fundacionales La teoría de conjuntos y paradojas La lógica simbólica Comienzos de las otras ramas	X	X				

La teoría de conjuntos La teoría de modelos Teoría de la repetición Problemas irresolubles algorítmicamente La teoría de las pruebas y las matemáticas constructivas Historia de la teoría de conjuntos			X	X		
Historia de los números reales Número Irracional					X	X

7.9. IMPACTO.

El impacto de la propuesta se define a través de los indicadores de aprendizaje significativo medidos sobre los docentes a quiénes se impartirá el curso.

BIBLIOGRAFÍA

BIBLIOGRAFÍA

Bagni, G. (2005). *Syllogismos.* Recuperado el 1 de Diciembre de 2014, de http://www.syllogismos.it/history/BagniCERME4.pdf

Bossaert, G; S. Doumen; E. Buyse; K. Verschueren . (2011). "Predicting Students' Academic Achievement After the Transition to First Grade: A Two-Year Longitudinal Study. *Journal of Applied Developmental Psychology* , 47–57.

Brochero, M. (2003). *Um passeio com primos e outros números familiares.* Sao Paulo: IMPA.

Burali-Forti, C. (1897). *A question on transfinite numbers.* Amsterdam: van Heijenoort.

Cohen, P. (1966). *Teoría de Conjuntos y la hipótesis del continuo.* California: Menlo Park.

Daniels, H. (2001). *Vygotsky y la Pedagogía.* Barcelona: Paidós.

Dedekind, R. (1872). *Stetigkeit und irrationale Zahlen.* Berlín.

Felscher, W. (2000). Bolzano, Cauchy, Epsilon, Delta. *The American Mathematical Monthly (The American Mathematical Monthly, Vol. 107, No. 9)*, 844–862.

Ferreirós, J. (2001). The Road to Modern Logic-An Interpretation . *Bulletin of Symbolic Logic (The Bulletin of Symbolic Logic, Vol. 7, No. 4)*, 441–484.

Fraenkel, A. (1922). *"Der Begriff 'definit' und die Unabhängigkeit des Auswahlsaxioms", Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-mathematische Klasse, pp. 253–257* . Berlin.

Franci. (1979). *Teoria e storia delle equazioni algebriche.* Milan: Mursia.

Franci, R. &. (1979). *Teoria e storia delle equazioni algebriche.* Roma.

Freire, P. (2005). *Pedagogía del Oprimido.* Montevideo: Tierra Nueva.

Gentzen, G. (1936). Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie. *Mathematische Annalen 112*, 132–213.

Gödel, K. (1929). *Über die Vollständigkeit des Logikkalküls, doctoral dissertation.* Viena: University of Viena.

Hairer, E. &. (1996). *Analysis by Its History.* New York: Springer-Verlag.

Hilbert, D. (1899). *Grundlagen der Geometrie.* Chicago: Teubner.

Katz. (1964). *Axiomatic Analysis.* Boston: Heath an Company.

Kerry, L. (1995). "The Relationship Between Young Children's Academic Achievement and Measures of Intelligence. *Psychology in the Schools 32*, 170-177.

Kleene, S. C. (1943). Recursive Predicates and Quantifiers. *American Mathematical Society Transactions*.

Lakoff, G. &. (2000). *Where Mathematics come from? How the Embodied.* New York: Basic Books.

Löwenheim, L. (1915). Über Möglichkeiten im Relativkalkül. *Mathematische Annalen 76*, 447-470.

Magnuson, K. (2007). Magnuson, Katherine (November 2007). "Maternal Education and Children's Academic Achievement During Middle Childhood". . *Developmental Psychology 43*, Magnuson, Katherine (November 2007). "Maternal Education and Children's Academic Achievement During Middle Childhood". Developmental Psychology 43: 1497–1512.

Martin, D. (1983). Hilbert's tenth problem is unsolvable, The American Mathematical Monthly. *(The American Mathematical Monthly, Vol. 80, No. 3)*, 233–269.

Milies, C. (2003). *Números: Uma introducao a matemática.* Sao Paulo: USP.

Moreira. (1999). *Primos de Mersenne.* Rio de Janeiro.

Morin, E. (2000). *Saberes globais e saberes locais: o olhar transdisciplinar.* Rio de Janeiro: Garamond.

Morley, M. (1965). Categoricity in Power. *Transactions of the American Mathematical Society Vol. 114, No. 2*, 514–538.

Peano, G. (1976). *Aritmetices principia, nova methodo exposita.* Amsterdam: Van Heijenoort.

Piaget, J. (1967). *Psicología de la Inteligencia.* París: Armand Colin.

Radford, L. (1997). Historical Epistemology and the Teaching of mathematics. *On Psychology*, 26-33.

Research, C. N. (1989). *Curriculum and evaluation.* Reston, VA.

Stumm, Sophie; Hell, Benedikt; Chamorro-Premuzic, Tomas . (2011). The Hungry Mind: Intellectual Curiosity Is the Third Pillar of Academic Performance. *Perspective on Psychological Science 6 (6*, 574-588.

Tarski, A. (1948). *A decision method for elementary algebra and geometry.* Santa Monica, California: RAND Corporation.

Tomporowski, P., Davis, C., Miller, P., & Naglieri, J. (2008). "Exercise and Children's Intelligence, Cognition and Academic Achievement". *Educational Psychology 20*, 111-131.

Turing, A. M. (1939). Systems of Logic Based on Ordinals. *Proceedings of the London Mathematical Society 45*, 161–228.

Urquizo, Á. (2005). *Cómo realizar una tesis o una investigación.* Riobamba: Gráficas Riobamba.

Ward, Annie; Stoker. W. (1996). Achievement and Ability Tests. *Education Measurement*, 2-5.

Woodin, W. H. (2001). The Continuum Hypothesis, Part I. *Notices of the American Mathematical Society 48* .

Zermelo, E. (1908). Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung. *Mathematische Annalen* , 107-128.

Zubiri. (2006). *Tres dimensiones del ser humano.* Alianza.

ANEXOS

ANEXO 1

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

SÍLABO INSTITUCIONAL

1. INFORMACIÓN GENERAL

FACULTAD	MECÁNICA	
ESCUELA	INGENIERÍA AUTOMOTRIZ	
CARRERA	INGENIERÍA AUTOMOTRIZ	
SEDE	RIOBAMBA	
MODALIDAD	PRESENCIAL	
SÍLABO DE	ÁLGEBRA SUPERIOR Y TRIGONOMETRIA	
NIVEL	PRIMERO	
PERÍODO ACADÉMICO	SEPTIEMBRE 2013 – ENERO 2014	
ÁREA	**CÓDIGO**	**NÚMERO DE CRÉDITOS**
BASICAS	CB10100	4
NÚMERO DE HORAS SEMANAL	**PRERREQUISITOS**	**CORREQUISITOS**
8	*Sistema Nacional de Nivelación y Admisión (SNNA).*	PI10300

NOMBRE DEL DOCENTE	WILSON ANDRÉS RAMÍREZ MONTESDEOCA
NÚMERO TELEFÓNICO	0998407857
CORREO ELECTRÓNICO	wandresrm@hotmail.es
TÍTULOS ACADÉMICOS DE TERCER NIVEL	INGENIERO MECÁNICO
TÍTULOS ACADÉMICOS DE POSGRADO	

2. DESCRIPCIÓN DE LA ASIGNATURA

2.1. IDENTIFICACIÓN DEL PROBLEMA DE LA ASIGNATURA EN RELACIÓN AL PERFIL PROFESIONAL

La asignatura de Algebra Superior y Trigonometría corresponde al área de formación básica de la escuela de ingeniería automotriz, debido a los diferentes grados de conocimientos que los estudiantes traen a la universidad como consecuencia de los programas analíticos dados en sus colegios, esto ocasiona que exista un desconocimiento de los principales temas que imparten en la asignatura lo que produce un altísimo grado de repitencia.

2.2. CONTRIBUCIÓN DE LA ASIGNATURA EN LA FORMACIÓN DEL PROFESIONAL

.

El Álgebra Superior y Trigonometría es la base del conocimiento, tiene el propósito de alcanzar el aprendizaje, para mejorar la solución de problemas algebraicos y trigonométricos y buena toma de decisiones.

3. OBJETIVOS GENERALES DE LA ASIGNATURA

- Conocer los conceptos fundamentales del Algebra Superior y Trigonometría
- Resolver de manera independiente, creadora y con alto nivel técnico-científico, los problemas actuales, comunes de la profesión, a través de la aplicación del Algebra Superior y Trigonometría.
- Afirmar y complementar los conocimientos del algebra superior y Trigonometría, que permita al alumno aplicar las estrategias matemáticas y trigonométricas relacionadas en la resolución de problemas respecto a su especialidad.

4. CONTENIDOS

UNIDADES	OBJETIVOS	TEMAS
Lógica y conjuntos	• Aplicar las nociones fundamentales de lógica y conjuntos en la solución de problemas. • Definir los diferentes tipos de conjuntos y sus operaciones.	• Proposiciones • Conectivos lógicos • Polinomios Boléanos • Tablas de verdad • Orden de los operadores • Tautología y contradicción • Equivalencia e implicación lógica • Leyes de álgebra de las proposiciones. • Conjunto. Clases de conjuntos • Diagramas de Venn-Euler • Operaciones con conjuntos • Leyes de álgebra de conjuntos
Potenciación y Radicación	• *Aplicar las propiedades de potenciación y radicación en la resolución de ejercicios.*	• *Exponentes enteros* • *Exponentes racionales* • *Radicales* • *Operaciones con radicales* • *Racionalización*
Números Reales, Relaciones y Funciones	• Aplicar ecuaciones e inecuaciones para el cálculo del dominio de	• Los reales como campo • Intervalos • Ecuaciones

	una función. • Identificar las características de los diversos tipos de funciones. • Graficar e identificar funciones.	• Inecuaciones • Valor Absoluto • Relación • Función. Dominio y recorrido • Clasificación de las funciones • Operaciones con funciones • Gráfica de funciones • Método gráfico para resolver ecuaciones e inecuaciones
Polinomios	• Profundizar y aplicar los productos y cocientes notables.	• Definiciones básicas • Operaciones con polinomios • Productos y cocientes notables • Regla de Ruffini • Teorema del residuo y del factor. • Descomposición en fracciones parciales.
Números Complejos	• Identificar las diversas representaciones de los complejos. • Resolver operaciones entre estos números.	• Definiciones • Representación geométrica • Operaciones • Fórmula de Euler • Forma exponencial • Coordenadas polares.
Teorema de Pitágoras y Aplicaciones	-Reforzar las habilidades de razonamiento en la resolución de problemas con operaciones algebraicas y el Teorema de Pitágoras.	• Resolución de problemas con las siete operaciones algebraicas • El teorema de Pitágoras y problemas derivados.
Funciones trigonométricas	-Conceptualizar los principios trigonométricos. -Graficar sinusoides	• De razones a funciones trigonométricas. • Análisis gráfico de funciones trigonométricas.
Identidades a ecuaciones trigonométricas.	-Demostrar identidades trigonométricas. -Resolver ecuaciones y problemas trigonométricos	• Identidades y Ecuaciones Trigonométricas. • Relaciones trigonométricas inversas. Propiedades

5. ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS

- Clase magistral.
- Pensamiento divergente (Autonomía y resolución de problemas).
- Taller de resolución de problemas.
- Investigación.
- Tareas individuales.

6. USO DE TECNOLOGÍAS

El proceso educativo se desarrollará con la ayuda de:

- Pizarra de tiza líquida
- Computador.

- Proyector electrónico.
- Recursos Web 2.0.
- Aula virtual.
- Software Matemático: DERIVE, MATLAB

7. RESULTADOS O LOGROS DE APRENDIZAJE

RESULTADOS O LOGROS DEL APRENDIZAJE	CONTRIBUCION (ALTA,MEDIA, BAJA)	EL ESTUDIANTE SERÁ CAPAZ DE
a. Aplicación de las Ciencias Básicas de la Carrera.	ALTA	Sistematizar y realizar ejercicios que requieran de conceptos de Algebra Superior.
b. Identificación y definición del Problema.	ALTA	Identificar y diagnosticar los problemas, generando propuestas operativas con la aplicación de Algebra Superior.
c. Solución de Problemas.	ALTA	Analizar, seleccionar y aplicar conceptos y métodos de Algebra Superior para la solución de problemas.
d. Utilización de herramientas especializadas.	ALTA	Manejar recursos como Web 2.0, aulas virtuales y herramientas informáticas.
e. Trabajo en equipo.	ALTA	Compartir ideas y conocimientos, para facilitar el trabajo en equipo, la solución de problemas.
f. Comportamiento ético.	ALTA	Respetar ideas, actitudes, ideologías con sus compañeros.
g. Comunicación efectiva.	MEDIA	
h. Compromiso del aprendizaje continuo.	ALTA	Desarrollar la capacidad de mantener una actitud de permanente actualización de conocimientos, dirigido a adquirir voluntad de aprendizaje y auto formación.
i. Conocimiento entorno contemporáneo.	N/A	

8. AMBIENTES DE APRENDIZAJE

El docente será quien genere un ambiente de confianza, seguridad hacia los estudiantes. Demostrándose como un amigo para que estos sin temor actúen de forma libre, soberana, y la clase se vuelva agradable es decir de doble vía.

9. SISTEMA DE EVALUACIÓN DE LA ASIGNATURA

ACTIVIDADES A EVALUAR	PRIMER PARCIAL	SEGUNDO PARCIAL	TERCER PARCIAL	EVALUACIÓN PRINCIPAL	SUSPENSIÓN
Exámenes	62.5% (5pts)	60% (6 pts)	60% (6 pts)	100%	100%
Lecciones	6.25% (0,5 pts)	10% (1 pts)	10% (1 pts)		
Tareas Individuales	6.25% (0,5 pts)	5% (0,5 pts)	5% (0,5 pts)		

Informes					
Fichas de Observación					
Trabajo en Equipo	6.25% (0,5 pts)	5% (0,5 pts)	5% (0,5 pts)		
Trabajo de Investigación	12.5% (1 pts)	10% (1 pts)	10% (1 pts)		
Portafolios					
Aula Virtual	6.25% (0,5 pts)	10% (1 pts)	10% (1 pts)		
Otros					
TOTAL	**8 PUNTOS**	**10 PUNTOS**	**10 PUNTOS**	**12 PUNTOS**	**20 PUNTOS**

10. BIBLIOGRAFÍA

BÁSICA

- Salinas, G. (2012). *Algebra Superior* (4 ed). Riobamba: E-Copycenter
- G. M. Bruño. Algebra y Trigonometría. Nº 478; Barcelona, 1983.
- M. O. GONZALEZ J.D. MANCILL. Algebra elemental moderna. 1ra Ed; Bs. As. Argentina. 1962.
- Proaño, V. G. (1998). Álgebra Superior Moderna**.** Tomo I, II
- Cabrera Gómez Robinson, *Trigonometría*, Borrador de Texto a publicarse.
- Alba Cabrera Rubén, *Trigonometría, teoría y práctica*, Editorial San Marcos.

COMPLEMENTARIA

- Espinoza, E. (2008). Álgebra Pre-Universitaria Vol. 1(2 ed). Lima-Perú: Servicios Gráficos
- Leithold, L. (2008). Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. USA: Oxford
- Gonzales Ramos Mario, *Áreas, teoría y problemas*, Lima

LECTURAS RECOMENDADAS

- Historia de la Matemática
- Aplicaciones del Algebra en la Geometría Plana
- El álgebra y su aplicación
- Malba Tahan*, El hombre que calculaba*.
- *El hombre más rico de Babilonia.*

WEBGRAFÍA

- http://matematicas-iesalvareda.wikispaces.com/Enlaces+de+Matem%C3%A1ticas
- http://www.algebraico.net/

FIRMA DEL DOCENTE DE LA ASIGNATURA

FIRMA DEL COORDINADOR DE ÁREA

FIRMA DEL DIRECTOR DE ESCUELA

LUGAR Y FECHA DE PRESENTACIÓN	Riobamba, 09 de Septiembre de 2013

ANEXO 2

GUÍA DE CLASE.

<table>
<tr><th colspan="4">GUÍA N°1</th></tr>
<tr><th>TEMA:</th><th>HORAS</th><th>GRUPOS</th><th>FECHA</th></tr>
<tr><td>Tema General.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><th colspan="4">OBJETIVO DEL EVENTO</th></tr>
<tr><td colspan="4">Objetivo General.

Objetivos Específicos.</td></tr>
<tr><th colspan="4">RESULTADOS ESPERADOS</th></tr>
<tr><td colspan="4">Detalle los resultados que quiere alcanzar al finalizar la clase.</td></tr>
<tr><th colspan="4">CONTENIDOS DEL EVENTO</th></tr>
<tr><td colspan="4">Temas tratados durante la clase.</td></tr>
<tr><th colspan="4">INTERACCIÓN.</th></tr>
<tr><td colspan="4">Debe indicar la interacción producida durante la clase.</td></tr>
<tr><th colspan="4">APRENDIZAJE</th></tr>
<tr><td colspan="4">Indicar que tipo de aprendizaje utilizó durante la clase.</td></tr>
<tr><th colspan="4">RECURSOS</th></tr>
<tr><td colspan="4">Se detalla los recursos utilizados.</td></tr>
<tr><th colspan="4">EVALUACIÓN</th></tr>
<tr><td colspan="4">Se indicará la ponderación que tendrá cada una de las actividades tanto dentro como fuera del aula.</td></tr>
</table>

ANEXO 3

Recibido
02/10/2014.

Riobamba, 2 de Octubre del 2014.

Ing. Jorge Paucar.

DIRECTOR ESCUELA ING. AUTOMOTRIZ.

Presente.

De mi consideración:

Reciba un atento y cordial saludo a la vez que por medio de la presente solicito a Ud. Muy comedidamente autorice la creación de una aula virtual denominada HISTORIA DE LA MATEMATICA como apoyo a la asignatura de Algebra Superior y Trigonometría ya que me encuentro realizando la tesis de la Maestría en Matemática Básica titulada:

"La Utilización de la Historia de la Matemática como introducción al fundamento teórico para mejorar el rendimiento académico de los estudiantes de la Escuela de Ingeniería Automotriz de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo en el periodo Septiembre 2014-Febrero 2015".

Desarrollaré con el grupo de Algebra Superior paralelo "A" a cargo del Ing. Andrés Salinas por lo que coordinaré actividades con él, y tomaré dos horas presenciales a la semana los días martes de 7H00 a 9H00 y 4 horas virtuales a la semana las mismas que serán desarrolladas en el aula virtual.

La duración de la investigación es en el periodo académico actual es decir Septiembre 2014-Febrero 2015, en el lapso del primer parcial.

Particular que comunico para los fines consiguientes:

Atentamente,

Dra. Olga Barrera C.

ANEXO 4

ESPOCH

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

ESCUELA DE INGENIERÍA AUTOMOTRIZ

Oficio No.651.EIA.FM.2014
Octubre 6 de 2014

Ingeniero
Jairo Jácome
ADMINISTRADOR DE LA RED
FACULTAD DE MECÁNICA
Presente

De mi consideración:

*Con un cordial saludo me dirijo a usted para comunicarle que la Doctora Olga Barrera Cárdenas, se encuentra realizado la tesis para la Maestría **"LA UTILIZACIÓN DE LA HISTORIA DE LA MATEMÁTICA COMO INTRODUCCIÓN AL FUNDAMENTO TEÓRICO PARA MEJORAR EL RENDIMIENTO ACADÉMICO DE LOS ESTUDIANTES DE LA ESCUELA DE INGENIERÍA AUTOMOTRIZ DE LA ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO EN EL PERIODO SEPTIEMBRE 2014 – FEBRERO 2015"**, razón por la que realizará actividades académicas en la materia de Algebra Superior y Trigonometría, paralelo "A".*

En este contexto, solicito comedidamente la creación del aula virtual con 4 horas semanales hasta cubrir el primer parcial.

Por la atención al presente, reitero mi sincero agradecimiento.

Atentamente,

Ing. Jorge Paucar G.
DIRECTOR DE ESCUELA

Dirección: Panamericana Sur km 1 1/2, Teléfono: 593 (03) 2 998200 ext. 135 - 177

eia@espoch.edu.ec

Recibido
Jairo Jácome
07 oct. 20
8:3

ANEXO 5

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

ESCUELA DE INGENIERÍA AUTOMOTRIZ

EVALUACIÓN DE CONOCIMIENTOS DE LA ASIGNATURA DE ALGEBRA SUPERIOR Y TRIGONOMETRÍA.

NOMBRE:____

CURSO:____________________________

PARALELO:_________________________

CÓDIGO:___________________________

FECHA:____________________________

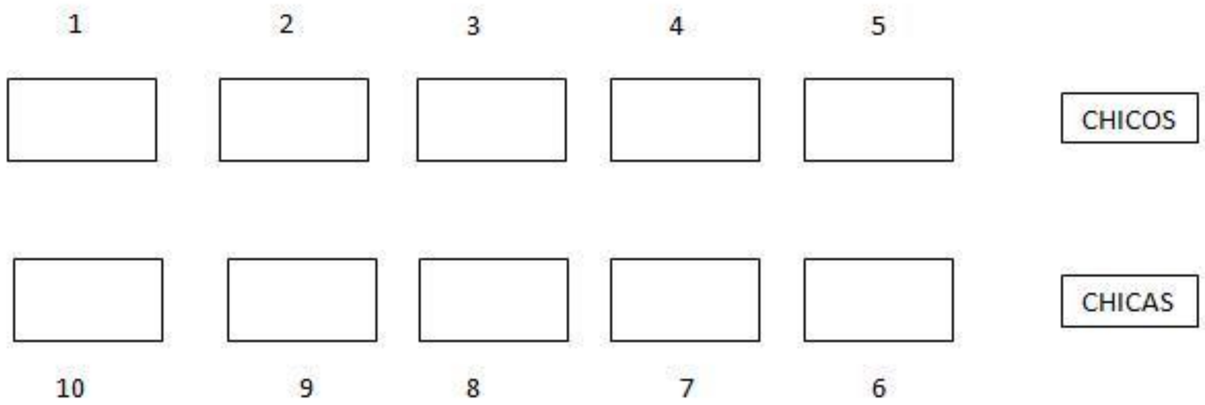
Esta prueba es una evaluación de conocimientos adquiridos durante este primer parcial sobre las temáticas de lógica, conjuntos y números reales. Cada pregunta será evaluada sobre un punto.

1.- Usando razonamiento lógico contestar:

En la escuela los chicos se sientan en los pupitres numerados del 1 al 5 y las chicas se sientan frente a ellos en los numerados del 6 al 10.

1. La chica sentada junto a la chica frente al nº1 es Fiorella.
2. Fiorella se sienta tres pupitres más allá que Grace.
3. Hilary está frente a Colín.
4. Eddy se sienta frente a la chica sentada junto a Hilary.
5. Si Colín no está en el centro, Alan sí.
6. David está junto a Billy.
7. Billy se sienta tres pupitres más allá de Colín.
8. Si Fiorella no está en el centro, Indira sí.
9. Hilary está tres pupitres más allá de Jane.
10. David se sienta frente a Grace.
11. La chica que se sienta junto a la que está frente a Alan es Jane.
12. Colín no se sienta en el pupitre nº5.
13. Jane no se sienta en el pupitre nº10.

¿Quién está sentado a la derecha y contiguo a Indira?



A) Colín.

B) Jane.

C) Billy.

D) Fiorella.

E) Eddie

2.- Indicar si el siguiente razonamiento es válido:

Todos los múltiplos de 16 son múltiplos de 8, todos los múltiplos de 8 son múltiplos de 5, todos los múltiplos de 4 son múltiplos de 2, 64 es múltiplo de 16, luego 64 es múltiplo de 2.

3.- Simplificar:

$$[(A - B) \cap (B - C)] \cup (C - A)$$

4.- Determinar los elementos de los conjuntos A,B,C si:

$$(A \cap C) \cup B' = \{1,2,6,7,8,10,11,12,14\}$$

$$B \cap (A \cup C) = \{3,4,5,7,8,15\}$$

$$(A \cup B) \cap (B \cup C) = \{3,4,5,6,7,8,9,13,15\}$$

$$(B' \cup C')' = \{5,7,8,15\}$$

$$B \cup C' = \{1,2,3,4,5,7,8,9,11,13,15\}$$

$$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15\}$$

5.- Resolver:

$$|x^2 - 3x + 2| + |x + 4| \leq 5$$

6.- Resolver:

$$\begin{cases} |x + 4| < 9 \\ \dfrac{5x - 2}{x + 6} > 1 \end{cases}$$