

# MORISHIMA E O RETORNO DE ESCALA DOS INSUMOS: UMA APLICAÇÃO DA FUNÇÃO CUSTO TRANSLOG NO SETOR AGROPECUÁRIO DOS MUNICÍPIOS DO SUBMÉDIO DO RIO SÃO FRANCISCO

*TÁCITO AUGUSTO FARIAS<sup>1</sup>*  
*LUIZ EDUARDO NASCIMENTO FIGUEIREDO<sup>2</sup>*  
*EWERTON MELO ARAUJO<sup>3</sup>*

## Resumo

Este trabalho teve como objetivo apresentar os conceitos de dualidade e função custo existentes na literatura, assim como apresentar um exemplo empírico utilizando a função custo translog para o cálculo das elasticidades-preço direta e cruzada, as elasticidade de substituição de Allen e Morishima e os retornos de escala do setor agropecuário para os anos de 1995/1996 e 2006 para a região do submédio do Rio São Francisco. As elasticidades obtidas estão de acordo com a literatura teórica e empírica observada, apresentando características de substituição entre os fatores. Verificaram-se também mudanças nas proporções nas elasticidades dos fatores entre os anos observados mas mantendo a característica de substituição entre eles, assim como foi possível observar um aumento no retorno de escala da economia de 1995/1996 para 2006.

**Palavras-Chaves:** Dualidade, elasticidade, função custo translog.

## Abstract

This study aimed to present the concepts of duality and cost func-

tion in the literature, as well an empirical example using the translog cost function for the calculation of price-elasticities (direct and cross), Allen's elasticity of substitution, Morishima's elasticity of substitution and the returns of scale of the agricultural sector for the region of the São Francisco River submedium (1995/1996 and 2006).

**Key Words:** duality, elasticity, translog cost function

**JEL:** R1;D00

## INTRODUÇÃO

O presente trabalho busca apresentar os conceitos referentes à dua-

lidade e função custo, assim como a aplicação dos conceitos em um exemplo empírico da estimação da função custo para setor agropecuário da região do submédio do rio São Francisco. Essa região possui 91 municípios divididos entre os estados da Bahia (23 municípios) e Pernambuco (68 municípios). A principal fonte de recursos da região é a agricultura, com predominância para a agricultura familiar. O submédio fica localizado principalmente na zona do semiárido nordestino, região com forte escassez de água, o que acaba levando a baixa produtividade agrícola e consequentemente baixa renda per capita, além da necessidade de importantes investimentos públicos e privados para a

<sup>1</sup> Doutor em Economia pela ESALQ/USP. Professor efetivo do departamento de Economia da Universidade Federal de Sergipe. Membro efetivo do Grupo de Estudos em Economia Matemática e Finanças da Universidade Federal de Sergipe. Email: [tacitoaugusto@yahoo.com.br](mailto:tacitoaugusto@yahoo.com.br)

<sup>2</sup> Mestrando em Economia PIMES/UFPE. Membro efetivo do Grupo de Estudos em Economia Matemática da Universidade Federal de Sergipe. Membro efetivo do Grupo de Apoio a Gestão Econômico-Integrada da Universidade Federal de Pernambuco. Email: [lenfigueiredo@yahoo.com.br](mailto:lenfigueiredo@yahoo.com.br)

<sup>3</sup> Mestrando em Economia PIMES/UFPE. Professor substituto do Departamento de Economia da Universidade Federal de Pernambuco. Email: [ewerton.felipe@hotmail.com](mailto:ewerton.felipe@hotmail.com)

irrigação. Os efeitos decorrentes da implantação dos projetos de irrigação no semiárido vêm modificando a estrutura produtiva de algumas microrregiões do Nordeste. (SOBEL; ORTEGA, 2010)

Um dos principais casos de sucesso da implantação de projetos de irrigação no semiárido nordestino é o Polo de Juazeiro/Petrolina, localizado na região do submédio do São Francisco. O principal destaque desse Polo é a fruticultura, setor que tem recebido investimentos e modificado o perfil econômico da região. Esse desenvolvimento tem se mostrado expressivo principalmente nas culturas de uva, manga e banana, exportando 70% da uva de mesa e da manga do Brasil, segundo dados da Codevasf em 1998. (SOBEL; ORTEGA, 2010)

Além dos perímetros irrigados de Juazeiro/Petrolina, têm-se no submédio os projetos do Sistema de Reassentamento Itaparica, desenvolvidos pela CHESF e CODEVASF, entre outros de fundamental importância para a população dessa região. Segundo dados da CODEVASF (2012), o volume de recursos destinados com operação e manutenção dos perímetros irrigados públicos foi superior a 106 milhões de reais, obtendo uma área irrigada total de 121.522 hectares de perímetros públicos.

Segundo dados do IBGE para 2006, a região possui mais de 620 mil trabalhadores dedicados à agropecuária. Destes aproximadamente apenas 120 mil empregados não possuem relação de parentesco com o produtor, o que demonstra a característica familiar da agricultura da região. O consumo de energia para a produção representa 5% do consumo de energia para a agricultura da Bahia e aproximadamente 50% do consumo de energia para a agricultura do estado de Pernambuco. O submédio apresenta um valor total de produção que corresponde a 8% de toda a produção agropecuária

da Bahia e a aproximadamente 40% da produção agropecuária de todo o estado de Pernambuco.

Por esses fatores apresentados e pela importância de políticas públicas efetivas para a região, destaca-se a necessidade de observar como se relacionam os diversos fatores na produção agropecuária do submédio do rio São Francisco. Por isso, o objetivo deste artigo é utilizar os conceitos econômicos da dualidade, função custo e dos diversos tipos de elasticidades para estimar, a partir das informações disponíveis pelo IBGE no censo agropecuário para os anos de 1995/1996 e 2006, uma função custo translog para o setor agropecuário da região e calcular, a partir das estimativas, as elasticidades-preço, de substituição de Allen, a elasticidade de substituição de Morishima entre os fatores de produção podendo assim verificar as características de complementariedade e de substituição entre eles. Além disso, busca-se proporcionar uma análise comparada entre o período 1995/1996 e 2006 verificando possíveis mudanças nas relações dos fatores. Por fim observa-se também o grau retorno de escala econômica em que o setor agropecuário da região encontra-se para os mesmos períodos.

O presente artigo está estruturado em cinco seções. A introdução, na qual se apresenta os aspectos gerais da região analisada. Na segunda seção, são apresentados o referencial teórico, onde são apresentadas as relações de dualidade e função custo, assim como a forma funcional custo translog e suas propriedades, além de uma breve explanação acerca das elasticidades preço cruzada, elasticidade de substituição, elasticidade de substituição de Allen (AES), a elasticidade de substituição de Morishima (MES), e a economia de escala, como também apresentação de literaturas complementares acerca dos assuntos. Na terceira etapa, proporciona-se uma análise dos referenciais em-

píricos. Com apresentação de artigos empíricos relacionados ao assunto, assim como, também, referências complementares. Na quarta seção apresentam-se os dados trabalhados e as suposições observadas para os mesmos, neste tópico, separamos os fatores de produção em três (trabalho, energia e outras despesas), a escolha do insumo energia está diretamente relacionada com fato de a região ser altamente dependente da produção irrigada e a energia serem o principal insumo para o transporte da água. Nesta seção, também é apresentado o modelo de custo translog que será estimado contendo os três fatores de produção descritos acima e o método de estimação utilizado SUR (Seemingly Unrelated Regression) proposto por Zellner (1962), assim como os resultados e discussões. Na seção 5 são apresentadas as considerações finais acerca do trabalho.

## REFERENCIAL TEÓRICO

### Dualidade e função custo

Segundo Mcfadden (1978a), na teoria clássica da produção e do custo, a firma é assumida em um conjunto de possibilidade de produção fixo e seus insumos são obtidos em um mercado competitivo, de forma que cada firma escolhe uma cesta de insumos que minimize o custo de produção para cada output possível. Com os preços de insumos sendo fixo, esse comportamento determina o custo mínimo como uma função do output, produzindo uma curva de custo padrão, encontrado nos textos elementares. Uma imediata generalização é permitir que além do produto, os preços dos insumos também variassem, considerando assim o custo mínimo como uma função dos preços e da produção. Com essa pequena modificação, a função custo torna-se uma importante ferramenta analítica na teoria

da produção, particularmente nas aplicações econométricas.

A dualidade entre o conjunto de possibilidade de produção e a função custo, primeiramente provado por Shephard (1953) e Uzawa (1962) possibilita a afirmação de que a função custo contém todas as informações necessárias para a reconstrução da estrutura de possibilidade de produção. (MCFADDEN, 1978)

A aplicação da teoria da dualidade na resolução dos problemas econômicos apresentou resultados úteis para o estudo das relações de produção e custo. Um desses importantes resultados é que, de acordo com certas condições de regularidade, existem funções de custo e de produção que apresentam características de dualidade entre elas. Assim, a estrutura de produção pode ser estudada de forma empírica usando tanto a função de produção como a função custo. Sendo a estimativa da função custo mais atrativa, quando o nível de output for exógeno. (Christensen; Greene, 1976)

Mcfadden (1978) define a função custo então como uma relação entre o valor total de produção e os preços dos insumos. Essa relação é definida a partir da tomada de decisão, para grau de tecnologia dada, do menor custo de um determinado nível de produção, de acordo com os preços definidos competitivamente. Essa função custo irá identificar todas as características economicamente relevantes da tecnologia da firma e é particularmente utilizada para formulações de modelos econométricos.

Essas funções apresentam as seguintes propriedades: serem côncavas, não decrescentes, homogêneas e continuamente diferenciáveis em relação aos preços para cada nível de output; são contínuas e crescentes no output; a derivada da função custo em relação ao preço do insumo é a própria demanda pelo insumo que minimiza o custo; cada função de produção produzirá uma função

custo distinta que poderá ser recuperada pelos métodos da dualidade; e a segunda derivada da função custo em relação ao preço do insumo quase sempre existirá e será ela, independentes de outras diferenciações, para cada nível de produto. (MCFADDEN, 1978)

A abordagem da função custo, na teoria da dualidade determina que cada função custo implica um conjunto de equações de demanda. Dessa forma, formas funcionais da função custo têm sido desenvolvidas para possuir duas características principais: a função custo implica em equações de demanda lineares nos parâmetros e, ao mesmo tempo, representando estruturas de produção de forma geral, independente de serem geradas diretamente das estruturas das funções de produção explícitas. (CHRISTENSEN; GREENE, 1976)

O uso da função custo, ao invés da função e produção para a estimação dos parâmetros apresenta algumas vantagens. Primeiro, as funções custo são homogêneas de grau um nos preços independentemente da função de produção. Segundo, em geral, as equações estimadas possuem os preços como variáveis independentes em vez das quantidades dos fatores, considerados variáveis exógenas não adequadas. Terceiro, na estimação da elasticidade de substituição da demanda pelo fator, não é necessário inverter a matriz de coeficiente estimada, como ocorre na estimação da função de produção, esse procedimento apresenta uma tendência à estimação exagerada. Quarto, na estimação da função de produção a alta multicolinearidade dos fatores frequentemente causa problema, como usualmente a multicolinearidade entre os preços dos fatores é pequena, esse problema não surge na estimação da função custo. Quinto, no caso da função custo translog, todas as equações estimadas serão lineares nos logaritmos,

facilitando o processo de estimação. Outras características tornam a estimação da função custo preferível em relação à estimação da função de produção. (BINSWANGER, 1974)

Mcfadden (1978) também apresenta suas considerações acerca da função custo afirmando que para muitas propostas econométricas, a função custo pode ser vista como forma de equação reduzida, sendo tal formulação mais conveniente que a formulação determinada pela função de produção. A principal vantagem prática da função custo reside na facilidade computacional para determinação da função e demanda do fator minimizador de custo, determinada pela derivada parcial da função custo em relação ao preço do insumo. A definição da função custo como o resultado de uma otimização produz fortes propriedades matemáticas, estabelecendo a função custo uma estatística suficiente de todas as características economicamente relevantes de um processo produtivo. Também, as propriedades da função custo podem ser usadas para generalizar e simplificar as implicações qualitativas da minimização do custo, como por exemplo, resultados da estática comparativa que podem ser obtidos sem a necessidade de assumir divisibilidade das commodities, convexidade e suavidade das possibilidades de produção.

Assim, neste trabalho, utilizar-se-á uma forma funcional do custo denominada translog, conforme apresentada abaixo. Para mais sobre dualidade e função custo, ver Hotelling (1932), Hicks (1946), Samuelson (1947), Shephard (1953, 1970), Uzawa (1964), Diewert (1971, 1974, 1982), Hanoch (1975) e Lau (1976). Para uma análise matemática das propriedades da função custo, da função lucro e da dualidade ver Mcfadden (1978a)

### **Função custo translog**

Para este trabalho, será estimada uma função de custo translog para o

setor agropecuário da região do submédio do rio São Francisco para os anos de 1995/1996 e 2006. Uma característica da função de custo translog é a não imposição de restrição na possibilidade de substituição entre os fatores de produção, assim como, permitir que a escala econômica varie com o nível do produto, característica fundamental para permitir o formato clássico de U da função custo. (CHRISTENSEN; GREENE, 1976)

Dadas às características apresentadas, será utilizada a função custo translog para a estimação das elasticidades preço e substituição. A forma funcional dessa função custo pode ser escrita de maneira geral por:

$$\ln c = \alpha_0 + \alpha_y \ln y + \frac{1}{2} \gamma_{yy} (\ln y)^2 + \sum_i \alpha_i \ln w_i + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \gamma_{ij} \ln w_i \ln w_j + \sum_i \gamma_{yi} \ln y \ln w_i \quad (1)$$

Para que a função de custo translog apresente a propriedade de homogeneidade de grau um nos preços, é necessário impor um conjunto de restrições como apresentadas a seguir:

$$\sum_i \alpha_i = 1 \quad (2)$$

$$\sum_i \sum_j \gamma_{ij} = 0 \quad (3)$$

$$\sum_i \gamma_{ij} = \sum_j \gamma_{ij} = 0 \quad (4)$$

$$\sum_i \gamma_{yi} = 0 \quad (5)$$

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ji} \quad (6)$$

É necessário observar que a homogeneidade nos preços não impõe homogeneidade de grau um nos insumos para a função de produção. Nenhuma restrição é imposta para as elasticidades de substituição da demanda do fator, o que torna a forma funcional translog mais geral que outras formas utilizadas. (BINSWANGER, 1974)

A participação do fator no custo total pode ser obtida a partir da derivada do log do custo pelo log do preço do fator, utilizado o lema de Shephard, onde a derivada do custo em relação ao preço do insumo é a própria demanda pelo insumo. Logo,

$$\frac{\partial \ln c}{\partial \ln w_i} = \frac{\partial c}{\partial w_i} \frac{w_i}{c} = \frac{x_i w_i}{c} = S_i \quad (7)$$

Dessa maneira, a participação do fator  $i$  no custo total será dada por:

$$S_i = \alpha_i + \sum_j \gamma_{ij} \ln w_j + \gamma_{yi} \ln y \quad (8)$$

## Elasticidade preço direta e cruzada

A elasticidade-preço direta e cruzada mede a sensibilidade da demanda pelo fator em relação a variações no preço dos fatores. Ela pode ser definida como a razão entre a variação percentual na quantidade consumida e a variação percentual no preço dos insumos. Será definida como elasticidade-preço direta quando a variação ocorrer em relação ao preço do próprio fator e cruzada quando a variação ocorre em relação ao preço dos outros fatores. A elasticidade-preço direta e cruzada pode ser escrita na forma:

$$\eta_{ii} = \frac{\frac{\Delta x_i}{x_i}}{\frac{\Delta P_i}{P_i}} \quad e \quad \eta_{ij} = \frac{\frac{\Delta x_i}{x_i}}{\frac{\Delta P_j}{P_j}} \quad (9)$$

O sinal da elasticidade-preço direta é normalmente negativa, indicando uma queda na demanda pelo fator com o aumento do preço do insumo. O sinal da elasticidade-preço cruzada dependerá das características dos fatores de produção (substitutos ou complementares). Se o valor absoluto da elasticidade-preço direta for maior que um diz-se que o fator é elástico. Se o valor absoluto da elasticidade-preço direta for menor que um, diz-se que o fator é inelástico em relação preço. Em relação à elasticidade-preço cruzada, se for positiva, diz-se que os fatores são substitutos brutos e, se for negativa, afirma-se que os fatores são complementares brutos. (VARIAN, 1992)

Outra maneira de escrever a elasticidade-preço direta e cruzada é:

$$\eta_{ii} = \frac{\partial \ln x_i}{\partial \ln P_i} \quad e \quad \eta_{ij} = \frac{\partial \ln x_i}{\partial \ln P_j} \quad (10)$$

Para a função translog, a elasticidade-preço direta cruzada será determinada por:

$$\eta_{ii} = \left( \frac{\gamma_{ii}}{S_i} \right) + S_i - 1 \quad e \quad \eta_{ij} = \left( \frac{\gamma_{ij}}{S_i} \right) + S_j \quad (11)$$

## Elasticidade de substituição

A elasticidade de substituição entre dois fatores de produção é definida como a elasticidade da razão entre os fatores em relação à taxa marginal de substituição técnica entre eles. Ou seja, a elasticidade é um índice de sensibilidade do fator de insumo minimizador do custo proporcionado por mudanças no preço relativo dos fatores. A elasticidade de substituição também pode ser definida em termos de derivadas da função custo. (MCFADDEN, 1978b)

Introduzida originalmente por Hicks (1932) a elasticidade de substituição possui a proposta de analisar mudanças na participação dos insumos, primeiramente desenvolvida apenas para o insumo capital e trabalho, no crescimento da economia. Allen e Hicks (1934) sugeriram generalizações do conceito de elasticidade para mais de dois insumos. (BLACKORBY; RUSSELL, 1989)

Arrow, Chenery, Minhas e Solow (1961) em seu artigo seminal trazem uma lista de questões econômicas cuja resolução depende das elasticidades de substituição.

### *Elasticidade de substituição de Allen*

Das generalizações propostas por Hicks e Allen (1934), Allen (1938) e Uzawa (1962) aprofundam-se na denominada elasticidade de substituição parcial. É importante notar que apesar da elasticidade de substituição de Allen ou Allen-Uzawa reduzir-se para o conceito original de Hicks para duas dimensões, para mais de dois insumos ela não preserva nenhuma das propriedades destacadas por Hicks, ou seja, não é uma medida de curvatura da isoquanta; não fornece nenhuma informação acerca das participações relativas dos fatores; e não pode ser interpretado pela razão entre a derivada do log da razão dos insumos pela taxa marginal de substituição. (BLACKORBY; RUSSELL, 1989)

Segundo Stiroh (1999), a elasticidade de substituição é um conceito econômico bem conhecido e que tem recebido bastante atenção na literatura. O conceito, originalmente formulado por Hicks, tornou-se ponto principal da teoria microeconômica aplicada. Uma comum definição do conceito de elasticidade de substituição é o conceito de Allen-Uzawa, desenvolvido por Allen (1938) e Uzawa (1962). Uzawa (1962) apresentou a elasticidade de substituição parcial de Allen (1938) a partir da função custo, escrita na forma:

$$\sigma^{AES}_{ij} = \frac{c_{ij}}{c_i c_j}$$

Onde  $c$  é a derivada do custo em relação ao fator.

Para a função translog, a elasticidade de Allen pode ser definida por:

$$\sigma^{AES}_{ij} = \frac{\gamma_{ij}}{S_i S_j} + 1$$

$$\sigma^{AES}_{ii} = \frac{\gamma_{ij}}{S_i^2} + 1 - \frac{1}{S_i}$$

A elasticidade de substituição de Allen pode também ser simplesmente escrita como uma relação entre a elasticidade-preço cruzada e a participação do fator no custo total, tal que:

$$\sigma^{AES}_{ij} = \frac{\eta_{ij}}{S_j}$$

O erro padrão da estimação da elasticidade de Allen será determinado pela razão entre o erro-padrão da elasticidade-preço cruzada e a participação do fator no custo total, definido por:

$$ep_{\sigma^{AES}_{ij}} = \frac{ep_{\eta_{ij}}}{S_j}$$

Blackorby e Russell (1989) afirmam que como medida quantitativa a elasticidade de substituição de Allen não providencia nenhum significado, assim como, como medida qualitativa ela não adiciona nenhuma informação do que a contida na elasticidade-preço cruzada e a participação do fator, sendo uma medida apropriada de substituição apenas em casos especiais.

### Elasticidade de substituição de Morishima

A elasticidade de substituição de Morishima é um conceito alternativo, desenvolvido originalmente por Morishima (1967). Uma característica importante é que a elasticidade de Morishima preserva as propriedades do conceito original de Hicks, ou seja: é uma medida de curvatura e de substituição; é uma estatística suficiente para derivar quantitativamente e qualitativamente, os efeitos referentes a mudanças nas relações de preço e quantidade e o seu impacto na participação dos fatores; e pode ser definida pela derivada do logaritmo da razão da quantidade em relação à taxa marginal de substituição. (BLACKORBY; RUSSELL, 1989)

A elasticidade de substituição de Morishima pode ser definida por:

$$\sigma_{ij}^M = \eta_{ji} - \eta_{jj}$$

Pode-se escrever a elasticidade de Morishima também em termos da elasticidade Allen, de forma que:

$$\sigma_{ij}^M = S_j(\sigma^{AES}_{ij} - \sigma^{AES}_{jj})$$

Blackorby e Russell (1989) apresenta que a elasticidade de substituição de Morishima apresenta vantagens em relação à elasticidade de substituição desenvolvida por Allen. A primeira vantagem está relacionada ao fato que a elasticidade de substituição de Morishima poder ser descrita como uma medida da curvatura da isoquanta. Uma segunda vantagem é que a MES é estatisticamente suficiente para avaliações na mudança dos preços relativos e nas quantidades, enquanto que a elasticidade Allen não.

Outra característica importante da elasticidade de Morishima é sua

assimetria. Só apresentando-se de forma simétrica quando a função custo for uma variedade da função de elasticidade de substituição constante (CES), conforme demonstrado por Blackorby e Russell (1989). Um ponto importante é que a elasticidade de Allen e Morishima podem apresentar resultados diversos em relação à classificação entre substitutos e complementares.

### Economia de escala

O retorno de escala de um setor econômico pode ser definido em termos do aumento relativo do output em resposta a um aumento proporcional de todos os insumos. Uma maneira natural de expressar a economia de escala é pensar como um aumento proporcional do custo derivado de um aumento no nível do produto, ou seja, como uma elasticidade do custo total com relação ao produto. (CHRISTENSEN; GREENE, 1976)

Pode-se definir a economia de escala por:

$$sce = 1 - \frac{\partial \ln c}{\partial \ln y}$$

O resultado será positivo se o setor econômico estiver numa posição de economia de escala e negativo se estiver numa posição de deseconomia de escala. Na função custo translog, ela pode ser obtida pela relação:

$$sce = 1 - \alpha_y - \gamma_{yy} \ln y - \sum_i \gamma_{yi} \ln w_i$$

### REFERENCIAL EMPÍRICO

A aplicação da função custo translog para a estimação das elasticidades de substituição e preço tem sido utilizada com frequência na literatura internacional. Biswanger (1974) estimou a função custo translog para os dados agrícola dos Estados Unidos, para esse trabalho ele utilizou os dados cross-section para 39 grupos de estados para os anos de 1949, 1954, 1959 e 1964.

Christensen e Green (1976) aplicaram para estimar as economias de escala do setor elétrico americano com dados cross-section para os anos de 1955 e 1970. Gyapong e Gyimah-Brempong (1988) estimaram a função custo translog para investigar as características da produção da polícia usando os dados dos departamentos municipais da polícia de Michigan para obter as elasticidades de substituição, preço da demanda dos fatores e a economia de escala do setor.

Stiroh (1999) estimou para dados do setor financeiro americano para os anos 90, com destaque principal para os anos de 1991 e 1996, obtendo as elasticidades de Allen e de Morishima para o setor, assim como uma análise comparada entre os anos. Para mais trabalhos empíricos acerca das elasticidades na literatura internacional ver Mullineau (1978), Sharma (2002), Sidhu e Baanante (1981), Mcfadden (1978B), Antle (1984), Christensen, Jorgenson e Lau (1971, 1973), entre outros.

Na literatura nacional têm-se os trabalhos de Conti e Ferreira Filho (2007) que buscaram analisar a inter-relações entre os principais insumos utilizados para o cultivo da soja para os cinco principais estados produtores do país, obtendo as elasticidades de Allen e Morishima para o setor. Rodrigues

e Teixeira (2008) utilizaram a função custo translog para observar a relação entre insumos da agricultura brasileira na década de 90, calculando as elasticidades-preço da demanda por fator, e obtendo resultados, em sua maioria, condizentes com a teoria econômica.

Moraes e Loures (2013) utilizam a translog para a estimação da produção agropecuária do Estado do Rio Grande do Sul para o ano de 2006, obtendo as elasticidade-preço da demanda dos fatores. Soares et. al (2007) utiliza a função de Cobb-Douglas para estimar a função de produção do setor de celulose nacional. Schmidt e Lima (2005) estimaram a elasticidade-preço e a perda do bem-estar social do setor de siderurgia brasileira para os anos de 200 e 2001.

Para mais trabalhos sobre a estimação das elasticidades-preço da demanda por fator e substituição no Brasil ver: (LUQUE, 1977; ALBUQUERQUE, 1987; GARCIA, FERREIRA FILHO, 2004; ALMEIDA, 2005; BRAGAGNOLO et al., 2011), entre outros.

## MATERIAIS E MÉTODOS

### Dados

Para este trabalho, utilizaremos os dados dos Censos Agropecuários 1995/1996 e 2006 fornecidos pelo IBGE para todos os 91 municípios pertencentes à região do submédio do rio São Francisco. Na análise, consideraram-se três fatores de produção (trabalho, energia e outras despesas), o valor total da produção e o custo total do período. O fator energia foi observado dado à importância da produção irrigada para a região analisada e ser, a energia, o principal fator para o transporte da água.

A participação do fator energia foi obtida pela razão entre a despesa total com o fator e a despesa total da produção. O preço da energia foi

obtido pela razão entre o total gasto com o fator e o consumo total de energia em megawatts/hora.

Para a participação do fator trabalho foi utilizado a razão entre o valor total gasto com salários pagos em dinheiro ou produtos para pessoas da família e empregados, inclusive décimo terceiro e a despesa total do período. O preço do fator trabalho foi obtido pelo gasto total com salários com familiares e não familiares divididos pelo total de trabalhadores permanentes e temporários para cada conjunto, ponderado pela proporção de cada gasto em relação ao gasto total com salários.

As outras despesas foram obtidas do somatório de com serviços, adubos, corretivos, sementes, agrotóxicos, armazenamento, transporte, compra de animais, medicamentos, sal e rações, matérias primas agroindustriais, impostos e juros e despesas financeiras, combustível e aluguel de máquinas e equipamentos. A participação do fator foi obtida pela razão entre o somatório dos gastos acima relacionados e a despesa total da produção. O preço foi obtido em relação a área total destinada para a produção de culturas temporárias, permanentes e a destinada a pecuária.

No quadro abaixo se observa as participações média dos fatores para os anos de 1995/1996 e 2006.

**Tabela 1 - Participação média do fator**

	Trabalho	Energia	Outras Despesas
1995/1996	0,31	0,04	0,64
2006	0,19	0,10	0,71

Fonte: Censo Agropecuário - IBGE

Visualiza-se na tabela acima o aumento percentual do custo da energia no custo total. Um dos possíveis fatores é a expansão da economia irrigada na região que ocorreu entre os períodos, com um aumento da área com irrigação disponível nos perímetros públicos e um crescimento dos perímetros privados. Também, pode-se observar uma queda no percentual do trabalho no custo total, uma das explicações possíveis está em parte do custo ter deslocado para o consumo de energia e outra pela expansão da área total produzida o que levou a maiores gastos em fertilizantes, adubos, entre outros.

### Método

Neste artigo utilizaremos o modelo da função custo translog com três fatores (trabalho, energia e outras despesas) de produção, temos então o seguinte sistema a ser estimado:

$$(1) \ln c = \alpha_0 + \alpha_y \ln y + \frac{1}{2} \gamma_{yy} (\ln y)^2 + \alpha_1 \ln w_1 + \alpha_2 \ln w_2 + \alpha_3 \ln w_3 + \frac{1}{2} \gamma_{11} (\ln w_1)^2 + \gamma_{12} \ln w_1 \ln w_2 + \gamma_{13} \ln w_1 \ln w_3 + \frac{1}{2} \gamma_{22} (\ln w_2)^2 + \gamma_{23} \ln w_2 \ln w_3 + \frac{1}{2} \gamma_{33} (\ln w_3)^2 + \gamma_{y1} \ln y \ln w_1 + \gamma_{y2} \ln y \ln w_2 + \gamma_{y3} \ln y \ln w_3$$

$$(2) S_1 = \alpha_1 + \gamma_{11} \ln w_1 + \gamma_{12} \ln w_2 + \gamma_{13} \ln w_3 + \gamma_{y1} \ln y$$

$$(3) S_2 = \alpha_2 + \gamma_{22} \ln w_2 + \gamma_{12} \ln w_1 + \gamma_{23} \ln w_3 + \gamma_{y2} \ln y$$

Percebe-se que a equação de participação de um fator foi excluída, isso é devido ao fato de que o somatório das participações totalizar um, sendo assim exclui-se uma das equações de participação. O modelo também estará sujeito às devidas restrições de homogeneidade de grau um nos preços apresentadas acima.

O método de estimação utilizado será o tradicional SUR (Seemingly Unrelated Regression) proposto por Zellner (1962). Ele propõe um procedimento de estimação que produz estimadores dos coeficientes,

pelo menos assintoticamente, mais eficiente do que os estimadores de mínimos quadrados em equação simples. Neste método os coeficientes de regressão em todas as equações são estimados simultaneamente aplicando os mínimos quadrados generalizados de Aitken para todo o sistema de equações.

A razão para a utilização desse método está nas variáveis independentes que pertence em comum a mais de uma das equações do sistema, o que pode gerar correlação entre os erros das equações. Outra

característica deste método é que ele proporcionar estimativas que apresentam maior eficiência em relação às apresentadas na aplicação dos mínimos quadrados equação por equação, conforme demonstrado por Zellner (1962).

É necessário observar que, para evitar problema de singularidade em relação às participações do fator, uma das equações é descartada do processo de estimação. Desse modo, será estimado o sistema de equações acima apresentado para os dados referentes a 1995/1996 e 2006.

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

Na tabela 2, podem-se observar os coeficientes estimados para a função custo no ano de 1995/1996. Visualiza-se que apenas os coeficientes  $\alpha_1$ ,  $\alpha_3$ ,  $\gamma_{23}$  e  $\gamma_{y3}$  não deram estatisticamente diferente de zero, todos os outros coeficientes foram significantes a 5%.

**Tabela 2 - Coeficientes estimados da função custo para o ano de 1995/1996**

Coeficiente	Valor	Erro-padrão	Z	P> z	Mín 95%	Máx 95%
$\alpha_y$	5.514673	1.008079	5.47	0	3.538875	7.49047
$\gamma_{yy}$	-0.30711	0.064636	-4.75	0	-0.4338	-0.18043
$\alpha_1$	-0.09933	0.148378	-0.67	0.503	-0.39014	0.191489
$\alpha_2$	1.058526	0.172449	6.14	0	0.720532	1.396519
$\alpha_3$	0.0408	0.061203	0.67	0.505	-0.07916	0.160756
$\gamma_{11}$	0.111888	0.009189	12.18	0	0.093877	0.129898
$\gamma_{12}$	-0.09814	0.008982	-10.93	0	-0.11574	-0.08054
$\gamma_{13}$	-0.01375	0.003936	-3.49	0	-0.02146	-0.00603
$\gamma_{22}$	0.103279	0.010113	10.21	0	0.083459	0.1231
$\gamma_{23}$	-0.00514	0.003341	-1.54	0.124	-0.01169	0.001408
$\gamma_{33}$	0.018889	0.003258	5.8	0	0.012504	0.025274
$\gamma_{y1}$	-0.02008	0.008922	-2.25	0.024	-0.03756	-0.00259
$\gamma_{y2}$	0.023348	0.0104	2.25	0.025	0.002965	0.043731
$\gamma_{y3}$	-0.00327	0.003715	-0.88	0.378	-0.01055	0.00401
$\alpha_0$	-30.6388	7.943784	-3.86	0	-46.2083	-15.0692

Fonte: Dados da Pesquisa

Na tabela 3, observam-se os coeficientes estimados da função custo para o ano de 2006. Os coeficientes  $\alpha_y$ ,  $\gamma_{yy}$ ,  $\gamma_{13}$  e  $\alpha_0$  não deram estatisticamente significantes enquanto que to-

dos os outros deram estatisticamente significantes a 10% e com exceção, foram significantes a 5%. Biswanger (1974) indica que os coeficientes estimados por si só, apresentam

pouca significado econômico, mas possuem importância ao serem utilizados para a construção das elasticidades.



**Tabela 3 - Coeficientes estimados da função custo para o ano de 2006**

Coeficiente	Valor	Erro-padrão	Z	P> z	Mín 95%	Máx 95%
$\alpha_y$	1.570666	1.199674	1.31	0.19	-0.78065	3.921984
$\gamma_{yy}$	-0.0743	0.071302	-1.04	0.297	-0.21405	0.065446
$\alpha_1$	-0.46211	0.114491	-4.04	0	-0.68651	-0.23771
$\alpha_2$	1.168955	0.134503	8.69	0	0.905334	1.432577
$\alpha_3$	0.293151	0.074114	3.96	0	0.147891	0.438411
$\gamma_{11}$	0.063904	0.007712	8.29	0	0.048789	0.079019
$\gamma_{12}$	-0.05692	0.007432	-7.66	0	-0.07148	-0.04235
$\gamma_{13}$	-0.00699	0.004567	-1.53	0.126	-0.01594	0.001965
$\gamma_{22}$	0.066048	0.009213	7.17	0	0.047991	0.084105
$\gamma_{23}$	-0.00913	0.004913	-1.86	0.063	-0.01876	0.000498
$\gamma_{33}$	0.016117	0.005179	3.11	0.002	0.005967	0.026268
$\gamma_{y1}$	0.032097	0.00685	4.69	0	0.018671	0.045523
$\gamma_{y2}$	-0.01967	0.008054	-2.44	0.015	-0.03545	-0.00388
$\gamma_{y3}$	-0.01243	0.004455	-2.79	0.005	-0.02116	-0.0037
$\alpha_0$	-5.19871	10.06236	-0.52	0.605	-24.9206	14.52314

Fonte: Dados da Pesquisa

Com as estimativas dos coeficientes da função custo translog, calcula-se as elasticidade-preço direta e cruzada, assim como as elasticidades de substituição de Allen, Morishima e Sombra. Por fim utiliza-se para calcula o retorno de escala do setor.

Na tabela 4, observam-se as elasticidades-preço direta e cruzada

estimadas para o ano de 1995/1996. Na diagonal principal, visualiza-se que todos os resultados foram negativos, o que indica que um aumento no preço do insumo, leva a uma menor demanda por esse fator. Na elasticidade-preço cruzada verifica-se que a relação trabalho e outras despesas é positiva, isto quer dizer

que o aumento do preço de um desses fatores, levará a um aumento na quantidade demandada do outro fator. O mesmo não pode se visualizar com relação à energia e trabalho que deu negativo, porém estatisticamente diferente de zero. Entre parênteses encontra-se o desvio padrão das elasticidades.

**Tabela 4 - Elasticidade-preço direta e cruzada estimada para o ano de 1995/1996**

	TRABALHO	OUTRAS DESPESAS	ENERGIA
TRABALHO	-0.32849776 (0.02106283)	0.32914567 (0.02028314)	-0.00064792 (0.01249985)
OUTRAS DESPESAS	0.20069883 (0.01236778)	-0.22915013 (0.01533368)	0.0284513 (0.00817921)
ENERGIA	-0.0063797 (0.12307972)	0.45943804 (0.13207976)	-0.45305835 (0.1395465)

Fonte: Dados da Pesquisa

Na tabela 5, observam-se as elasticidades-preço direta e cruzada estimadas para o ano de 2006. Na diago-

nal principal, visualiza-se que todos os resultados permanecem negativos, o que indica que um aumento

no preço do insumo, levará a uma menor demanda por esse fator. Na elasticidade-preço cruzada verifica-

se agora que a relação entre todos os insumos foram positivas, isto quer dizer que o aumento do preço de um

desses fatores, levará a um aumento na quantidade demandada do outro fator. Entre parênteses novamen-

te encontra-se o desvio padrão das elasticidades.

**Tabela 5 - Elasticidade-preço direta e cruzada estimada para o ano de 2006**

	TRABALHO	OUTRAS DESPESAS	ENERGIA
TRABALHO	-0.47767466 (0.03928353)	0.41731614 (0.03782934)	0.06035852 (0.02331303)
OUTRAS DESPESAS	0.11522041 (0.01044463)	-0.1984121 (0.01294934)	0.08319168 (0.00690737)
ENERGIA	0.12285855 (0.0474532)	0.6133134 (0.05092315)	-0.73617195 (0.05380194)

Fonte: Dados da Pesquisa

Para as tabelas 5 e 6 seguintes foram observados as elasticidades de substituição de Allen estimadas para o ano de 1995/1996 e 2006. Os valores positivos indicam que os fatores são substituíveis, enquanto que os valores negativos apontam

uma relação de complementariedade. Para o ano de 1995/1996 verifica-se que a relação trabalho e energia apresentam complementariedade, enquanto que as relações entre os outros bens apresentam-se como substitutos. Um dos motivos

para esses resultados relacionados a energia é o sua baixa participação no custo total do setor para o ano de 1995/1996. Verifica-se que a elasticidade de substituição de Allen é simétrica.

**Tabela 6 - Elasticidade de substituição de Allen estimada para o ano de 1995/1996**

	TRABALHO	OUTRAS DESPESAS	ENERGIA
TRABALHO	-.90059532 (0.05774496)	.55022728 (0.03390698)	-0.0174903 (0.33743007)
OUTRAS DESPESAS		-.38306641 (0.02563306)	.76803484 (0.22079551)
ENERGIA			-12.230183 (3.7670185)

Fonte: Dados da Pesquisa

Para os dados de 2006, visualiza-se que todas as elasticidades de Allen estimadas entre fatores deram positivas, isto é, apresentam substituição

entre os fatores. Algo a se observar é que com o aumento da participação da energia no setor, seus resultados variaram de significância de um ano

para o outro. É necessário observar também que as estimativas de elasticidade de substituição entre os fatores deram todos menores que um.

**Tabela 7 - Elasticidade de substituição de Allen estimada para o ano de 2006**

	TRABALHO	OUTRAS DESPESAS	ENERGIA
TRABALHO	-2.442436 (0.03928353)	0.58914258 (0.05340526)	0.62819771 (0.24263667)
OUTRAS DESPESAS		-0.28010662 (0.01294934)	0.86584008 (0.07189033)
ENERGIA			-7.6619097 (0.05380194)

Fonte: Dados da Pesquisa

Nas tabelas 7 e 8 visualizam-se as elasticidades de substituição de Morishima estimadas. Para o ano de 1995/1996 todos os bens apresentaram como fatores substitutos. Assim, para nível de produção constante, há substituição entre os fatores quando o preço de um dos fatores variar.

**Tabela 8 - Elasticidade de substituição de Morishima estimada para o ano de 1995/1996**

	TRABALHO	OUTRAS DESPESAS	ENERGIA
TRABALHO	-	0.86788133	0.03271399
OUTRAS DESPESAS	0.34042469	-	0.04264172
ENERGIA	4.4546557	7.775527	-

Fonte: Dados da Pesquisa

Para o ano de 2006, novamente as elasticidade de Morishima estimadas apresentaram-se positivas, ou seja, indicando características de substituição nos fatores. É interessante observar que, em ambos os períodos, a elasticidade de Morishima estimada possui diferença em relação a elasticidade de substituição de Allen. Outro ponto é que, segundo Chambers (1988), pode-se ocorrer mudança na relação de complementariedade e de substituição entre os fatores quando tratamos das elasticidades de Allen e Morishima, ou seja, pode ocorrer de uma elasticidade apresentar característica de complementariedade e a outra apresentar característica de substituição entre os fatores.

**Tabela 9 - Elasticidade de substituição de Morishima estimada para o ano de 2006**

	TRABALHO	OUTRAS DESPESAS	ENERGIA
TRABALHO	-	2.1474032	0.29503276
OUTRAS DESPESAS	0.17000172	-	0.1101049
ENERGIA	1.6213216	6.0405881	-

Fonte: Dados da pesquisa.

Como visto acima para resultados positivos, o setor da economia encontra-se em economia de escala. Pelos dados estimados obteve-se valores positivos para ambos os períodos, conforme exposto na tabela 9. Isto quer dizer que, em ambos os períodos, o setor agropecuário do submédio do São Francisco estava atuando em economia de escala, ou seja, o aumento de todos os fatores levaria a uma produção proporcionalmente maior de output.

**Tabela 10 - Retorno de Escala estimado para os anos de 1995/1996 e 2006.**

1995/1996	2006
0.33669313	0.5747

Fonte: Dados da pesquisa.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conforme visualizado, este trabalho buscou apresentar de maneira clara e sucinta os conceitos e aplicabilidades relacionados à dualidade e a função custo. Apresentando um resumo da literatura teórica e empírica existente e indicando literaturas adicionais para cada seção. Assim como, formalizando um exemplo empírico, calculando as

elasticidades-preço direta e cruzada, as elasticidades de Allen e Morishima, assim como o retorno de Escala do setor agropecuário para os anos de 1995/1996 e 2006, verificando mudanças e contrapondo aos conceitos apresentados. A região escolhida do submédio decorreu da importância da região para o desenvolvimento do semiárido nordestino, assim como, por ser uma região principalmente agropecuária que vem recebendo grandes investimentos públicos e privados em irrigação ao longo dos anos e os resultados obtidos podem vir a ser utilizados para a formulação de políticas agrícolas para a região.

É interessante observar que os conceitos expostos neste texto estão consolidados na literatura desenvolvida ao longo do tempo e nas últimas décadas vêm sendo utilizados das mais variadas maneiras na busca de resultados que sejam utilizados pelos formuladores de políticas públicas e gestores privados para uma maior eficiência do uso dos escassos recursos. O setor agropecuário, utilizado neste artigo, é de fundamental importância para os países em desenvolvimento, exportadores principalmente de produtor primários, e que vem, ao longo dos anos, enfrentando escassez de seus principais recursos como terra e água e por isso deve continuar sendo fruto de estudos, pesquisas e participação pública e privada para o seu desenvolvimento.

## REFERÊNCIAS

- ALBUQUERQUE, M. C. C. "Uma análise translog sobre a mudança tecnológica e efeitos de escala: um caso de modernização ineficiente." **Pesquisa e Planejamento Econômico**, Rio de Janeiro, v. 17, n. 1, p. 191-220, 1987.
- ALLEN, R.G.D, HICKS, J R., "A Reconsideration of the Theory of Value, Pt. II," **Economica**, n. 1, p. 196-219, 1934
- ALLEN, R.G.D. **Mathematical Economics**. London; New York: Macmillan; St. Martin's Press, 1957.
- ALMEIDA, E. S. "Função de produção agropecuária espacial". In: CONGRESSO DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE ECONOMIA, ADMINISTRAÇÃO E SOCIOLOGIA RURAL, 44., 2005, Ribeirão Preto **Anais...** Ribeirão Preto, 2005.
- ANTLE, J.M. "The structure of U.S. Agricultural Technology.", 1910-78. **American Journal of Agricultural Economics**, Malden, v. 66, N. 4, p. 414-421, nov. 1984.
- Arrow, K. J., Chenery, H. B., Minhas, B. S. Solow, R. M., "Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency," **Review of Economics and Statistics**, n. 43, 225-47, 1961.
- BISWANGER, H. P. "A Cost Function Approach to the Measurement of Elasticities of Factor Demand and Elasticities of Factor Demand." **American Journal of Agricultural Economics**, Malden, v.53, p. 377-386, 1974.
- BLACKBORY, C. RUSSELL, R.R "Will the Real Elasticity of Substitution Please Stand Up? (A Comparison of the Allen/Uzawa and Morishima Elasticities)." **The American Economic Review**, v. 79, n. 4, p. 882-888, 1989.
- BLACKBORY, C. RUSSELL, R.R. The Morishima Elasticity of Substitution. **Discussion Paper**, n. 75-1, San Diego: Economics, University of California, 1975.
- CHAMBERS, Richard G. **Applied Production Analysis: A Dual Approach**. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- CHRISTENSEN, L. R. JORGENSON, D.W. LAU, L.J. "Conjugate Duality and the Transcendental Logarithmic Production Function". **Econometrica**, 39, p. 255-256, 1971.
- CHRISTENSEN, L. R. JORGENSON, D.W. LAU, L.J. "Transcendental Logarithmic Production Frontiers." **Review Economic and Statistical**, n. 55, p. 28-45, 1973.
- CHRISTENSEN, L. R; GREENE, W.H. "Economies of Scale in U.S Electric Power Generation." **Jornal of Political Economy**, p. 655 -76, Aug. 1976,
- CONTE, L.; FERREIRA FILHO, J. B. S. "Substituição de fatores produtivos na produção de soja no Brasil." **Revista de Economia e Sociologia Rural**, Piracicaba, v. 45, p. 475, 2007.
- DIEWERT, W. E. "An application of the Shephard Duality Theorem: A Generalized Leontief Production Function." **Journal of Political Economics**, v.79, p. 481-507, maio 1971
- DIEWERT, W.E. Applications of duality theory. **Frontiers of Quantitative Economics**, Amsterdam: North Holland, v. 2, p. 106-171, 1974
- DIEWERT, W.E. Duality Approaches to Microeconomic Theory." In: **Handbook of Mathematical Economics**. Amsterdam: North Holland, 1982. (V. 2).
- GOMES, A. L.; FERREIRA FILHO, J. B. S. **Economias de escala na produção de leite: uma análise dos estados de Rondônia, Tocantins e Rio de Janeiro**. **Revista de**

- Economia Rural**, Rio de Janeiro, v. 45, n. 3, p. 591-619, 2007.
- GYAPONG, A.O. GYIAMA-H-BREMPONG, K. Factor substitution, price elasticity of factor demand and returns to scale in police production: Evidence from Michigan. **Southern Economic Journal**, n. 54, p 863 -78, 1988.
- HANOCH, G. Production and demand models with direct or indirect implicit additivity. **Econometrica**, v. 43, n. 3, p. 395-420, 1975.
- HICKS, J.R. **Value and Capital**. 2 ed. Oxford: Clarendon Press. 1946
- HOTELLING. H. Edgeworth's taxation paradox and the nature of demand and supply functions. **Journal of Political Economy**, v. 40, n. 5, p. 577-616, 1932
- LAU, L. J. "A note on the elasticity of substitution functions", **Review of Economics Studies**, v. 43, n. 134, p. 353 – 358, 1976.
- LUQUE, C. A. Elasticidade de escala e taxa efetiva de incentivos à exportação. **Pesquisa e Planejamento Econômico**, Rio de Janeiro, v. 7, n. 2, p. 405-422, 1977.
- McFADDEN, D. "Cost, Revenue, and Profit Functions." MACFADDEN, D.(Ed.). **Production Economics: A Dual Approach to Theory and Applications**. Vol. I. North-Holland, 1978a.
- McFADDEN, D. "Estimation Techniques for the elasticity of substitution and the other production parameters." In: FUSS, M.; MACFADDEN, D.(Ed.). **Production Economics: A Dual Approach to Theory and Applications**. North-Holland, 1978b. (V. 2)
- MULLINEAUX D.J. "Economies of scale and organizational efficiency in banking: A profit function approach." **The Journal of Finance**, v. 33, n. 1, p. 259-280, mar. 1978.
- SAMUELSON, P.A. **Foundations of Economic Analysis**, Cambridge. MA: Harvard University Press. 1947
- SHARMA, S.C. "The Morishima Elasticity Of Substitution For The Variable Profit Function And The Demand For Imports In The United States." **International Economic Review**, v. 43, p.115-135, 2002.
- SHEPHARD, R.W. **Cost and Production Functions**, Princeton. NJ: Princeton University Press. 1953
- SHEPHARD, R.W. **Theory of Cost and Production Functions**, Princeton. NJ: Princeton University Press. 1970
- SIDHU, S.S. & BAANANTE, C. Estimating Farm-Level Input Demand and Wheat Supply in the Indian Punjab Using a Translog Profit Function. **American Journal of Agricultural Economics**, Malden, v. 63, n. 2, p. 237-246,1981.
- SOARES, Naisy S.; SILVA, Márcio L.; lima, João E. A função de produção da indústria brasileira de celulose em 2004. **Revista Árvore**, Viçosa, v. 31, n. 3, p. 495-502, 2007
- SOBEL, T. F. ; ORTEGA, A. C. . "Desenvolvimento Territorial e Perímetros Irrigados: avaliação das políticas governamentais implantadas nos Perímetros Irrigados Bebedouro e Nilo Coelho em Petrolina (PE). **Planejamento e Políticas Públicas**, v. 35, p. 87-118, 2010.
- STIROH, K.J. Measuring Input Substitution in Thrifts: Morishima, Allen-Uzawa, and Cross-Price Elasticities. **Journal of Economics and Business**, n. 51, p. 145–157, 1999.
- UZAWA, H. Production Functions with Constant Elasticities of Substitution. **Review Economic Studies**, October, 1962, 291-99.
- UZAWA, H. Duality principles in the theory of cost and production. **International Economic Review**, v. 5, n. 2, p.216-220, 1964.
- VARIAN, H.R. **Microeconomic Analysis**, 3. ed. New York: W.W. Norton, 1992.
- ZELLNER, A. An Efficient Method of Estimating Seemingly Unrelated Regressions and Tests for Aggregation Bias. **Journal of the American Statistical Association**, n. 57, p. 348-368, 1962.