UNIVERSIDAD DE PANAMÁ

VICERRECTORÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO

PROGRAMA DE MAESTRÍA EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTA Y TECNOLOGÍA

TRABAJO DE GRADUACIÓN

“UN ESTUDIO SOBRE EL CONOCIMIENTO, LAS ESTRATEGIAS Y LOS RECURSOS QUE UTILIZA EL DOCENTE EN LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA, EN VI GRADO EN LA PROVINCIA DE DARIÉN”

PRESENTADO POR:

ENRIQUE J. ORTEGA GIL

TRABAJO DE GRADUACIÓN PARA OPTAR POR EL GRADO DE MAGÍSTER EN CIENCIAS CON ESPECIALIZACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA.

PANAMÁ, REPÚBLICA DE PANAMÁ

AGRADECIMIENTO

Primeramente, mi infinito agradecimiento a nuestro Padre Celestial por otorgarme el Don de la vida y darme la oportunidad de superarme profesionalmente.

A mi esposa, Maribel Peña de Ortega, quien, tantas veces, participó activamente en el trabajo; por su ánimo, su apoyo y por la paciencia que tuvo durante todo el periodo que duró la maestría.

A mi asesor de tesis, Germán Beitía (Q. D. E. P), que, con sus acertadas recomendaciones, sugerencias y su constante apoyo me permitió tocar las puertas donde se esconde la luz del conocimiento que envuelve a la educación.

A la profesora, Analida Ardila, quien, con su valioso aporte y conocimientos, me brindó el apoyo incondicional que permitió culminar este proyecto.

A todos los compañeros, docentes de las escuelas participantes que, de forma desinteresada, han colaborado en la realización de exámenes y cuestionarios, por su constante colaboración.

A mis padres, Alejandro Ortega y Juana Gil (Q. D. E. P), quienes, desde siempre, me ofrecieron su apoyo incondicional para lograr mis metas más deseadas; al igual, que a todos mis hermanos y hermanas.

A mis profesores de esta maestría quienes, por medio de su labor educativa, propiciaron y desarrollaron en mí conocimientos relevantes y edificantes los cuales cimientan la educación de calidad que recibí; de la cual me siento agradecido y lleno de orgullo.

A TODOS ELLOS, DEDICO MI ESFUERZO.

DEDICATORIA

Para recorrer el camino del éxito que nos lleva a alcanzar nuestras metas es necesario mantener la calma y ser perseverantes; pues, así nos convertimos en personas íntegras y competentes, que aportamos sabiamente al desarrollo de la sociedad.

De manera muy especial, dedico este trabajo a mi esposa, Maribel Peña de Ortega, quien mantengo presente en mi mente en cada instante de mi vida. A mis padres, Alejandro Ortega y Juana Gil, quienes, con sus sabios consejos y el amor incondicional que siempre me ofrecieron, han sido la luz que da claridad y vida a mi existencia.

A mis queridos hermanos y todos aquellos amigos que me hicieron ver que los obstáculos sólo son escalones que te llevan al éxito y prueba fehaciente de que, si nos proponemos trabajar con todas nuestras fuerzas, seguro obtendremos el éxito anhelado. El que persevera alcanza…Para Dios, nada es imposible.

GRACIAS

ÍNDICE GENERAL

PRIMER CAPÍTULO

I. ASPECTOS GENERALES DEL PROBLEMA INVESTIGADO

SEGUNDO CAPÍTULO

II. MARCO TEÓRICO

TERCER CAPÍTULO
III. MARCO METODOLÓGICO

CUARTO CAPÍTULO

IV.PRESENTACIÓN, ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS

ÍNDICE DE GRÁFICOS

INTRODUCCIÓN

En Panamá, una de las grandes dificultades que presentan los estudiantes se encuentra en la enseñanza y aprendizaje de la Matemática, el problema se presenta en todas las áreas de esta asignatura y por muchos años, ha sido una de las debilidades de nuestro sistema educativo que, al parecer, las autoridades correspondientes no han tomado los correctivos necesarios. Se debe averiguar si existe alguna relación que vincule esta situación con el dominio de conocimientos y recursos didácticos utilizados por el maestro en Matemática, en particular en el área de Geometría al momento de impartir sus clases ya que es una de las áreas de mayor dificultad para el docente y estudiantes de primaria. De ser así, debería ser tarea del Ministerio de Educación y todos los actores involucrados tratar de corregir esta supuesta deficiencia de manera que se haga más interesante y significativa la enseñanza de la Geometría, enriqueciendo el bagaje en esta rama de la Matemática y la formación integral del alumnado.

Esta investigación se estructura en cuatro capítulos a saber: El primer capítulo contempla lo concerniente al planteamiento del problema, los objetivos y la justificación en donde se presenta la importancia de fortalecer los conocimientos geométricos y el manejo de recursos didácticos utilizados por los docentes de primaria, al momento de enseñar Geometría en las aulas de clase; se mencionan algunas investigaciones realizadas en los últimos años alusivos al tema, las razones y necesidades que han originado su recuperación.

En el segundo capítulo se presenta la teoría concerniente a la Historia de la Geometría desde las antiguas civilizaciones antes de Cristo hasta la formación axiomática de la misma.

En el tercer capítulo se describe la metodología, señalando el tipo y diseño de investigación, la población y muestra, procedimientos y técnicas de análisis de datos. Se hace uso de un test de conocimiento y una encuesta dirigida a docentes de educación primaria que laboran con grupos de VI° grado y dictan clase en 30 escuelas de la provincia de Darién.

El capítulo cuarto describe el análisis cuantitativo y cualitativo de los resultados obtenidos en la encuesta y test de conocimiento aplicados a docentes de primaria de 30 escuelas de la provincia de Darién. Además, se establecen cuadros y tablas de datos que luego se grafican en términos comparativos.

PRIMER CAPITULO

ASPECTOS GENERALES DEL PROBLEMA INVESTIGADO

1.1 Antecedentes del problema

Es común observar que las actitudes de los estudiantes hacia la Matemática no son las más favorables. Una cantidad significativa de ellos están condicionados desde el punto de vista psicológico y del aprendizaje de la Matemática. Está claro que existe un problema en la enseñanza de la Matemática y que no es algo desconocido en nuestra comunidad educativa.

La enseñanza de la Geometría en VI° grado, donde el estudiante recibe las bases que lo prepararán para los niveles posteriores, enfrenta algunas dificultades lo cual es evidente ante el alto índice de fracasos y el rechazo de los estudiantes hacia esa rama de la Matemática; además, de las dificultades que enfrentan al momento de realizar las pruebas de pre-ingreso en la Universidad de Panamá y la UTP debido a su bajo rendimiento en los exámenes de admisión, los cuales optan por estudiar en Universidades Privadas donde pueden ingresar de forma expedita. En este sentido, en investigación realizada por el diario El Siglo, fechada el 9 de enero de 2018 se refleja que:

> Al menos para el año 2018, se inscribieron unos 19 mil alumnos, pero en vista del bajo rendimiento, se espera que ingresen unos 16 mil, es decir, un 89% es el porcentaje aproximado que culmina los procesos de admisión, tanto el Campus Central como en los centros regionales y extensiones universitarias del país (“Jóvenes con deficiencias graves para ingresar a la UP”, 2018).

Sabemos que Matemática es una de las asignaturas que mayor dificultad presenta al estudiante en su aprendizaje, según información del Ministerio de Educación. En este sentido el diario La Prensa en el año 2017 reveló que:

> Matemática, Español, Ciencias Naturales, Ciencias Sociales e Inglés son las materias que más problemas ocasionan a los estudiantes de primaria. El Ministerio de Educación (Meduca) informó que no prevé ninguna variación en el porcentaje de fracasos que tradicionalmente se presenta en los diferentes niveles del sistema escolar. De hecho, informó, a través de un comunicado, que dicho porcentaje será igual al de 2016, cuando hubo 5% de fracasos en primaria y 17% en premedia y media académica. Lo anterior significa que de los 390 mil 354 estudiantes que este año cursaron la primaria, al menos, 19 mil 517 repiten el año escolar; mientras que lo mismo ocurrirá con 28 mil 534 de los 167 mil 851 de premedia, y con 17 mil 743 de los 104 mil 373 de media (“Fracasos se sitúan entre el 5% y 17%, según el Meduca”, 2017).

La formación del alumno en la Educación Básica General es crucial dado que su finalidad es proporcionarle al egresado el dominio pleno de operaciones, procedimientos lógicos matemáticos y uso de tecnologías que como herramientas de trabajo, le servirán para resolver problemas matemáticos y situaciones del diario vivir; incluyendo otras ramas del saber humano; pero lo cierto es que hay problemas en la formación matemática del alumno que cursa del nivel primario al secundario reflejado en el bajo rendimiento y dificultades que el mismo muestra en posteriores cursos de esta asignatura.

En Panamá, el acto docente se presenta a los estudiantes como un producto acabado, cerrado y sin ningún nivel de flexibilidad debido a la formación que ha recibido el maestro en las universidades del país, lo cual podría ser una de las causantes de los altos índices de fracasos en Matemática, mencionado anteriormente, y de los graves problemas que enfrentan los egresados del nivel primario en esta asignatura. Una de las ramas de la Matemática que presenta grandes dificultades para el aprendizaje del alumno es la Geometría la cual, por su nivel de abstracción, requiere mucho dominio por parte del docente, quien juega un papel imprescindible en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática. Estas razones pudieran ser las posibles causas por la cuales los egresados de nuestro sistema educativo, de primaria, evidencian una deficiente preparación en Geometría. Es poca la atención prestada a esta situación y por mucho tiempo ha sido desatendida por nuestras autoridades educativas, sin que se intente buscar las causas que la originan y así encontrar alternativas de solución.

Haciendo algunas reflexiones sobre el problema podemos decir, en términos generales, que posiblemente sea poco lo que se ha investigado sobre la metodología que utiliza el maestro para la enseñanza de la Geometría en el aula y tal vez los nuevos cambios curriculares y las nuevas políticas educativas hayan introducido importantes variantes en el enfoque de la enseñanza de esta disciplina, sin que se hayan hecho los ajustes correspondientes.

Si el educador presenta el contenido al alumno alejado de su contexto, es decir, que no coincida con su realidad, posiblemente, tendrá dificultades para interpretar la situación. Por esta razón se recomienda que el conocimiento debe llegar al educando interpretado como una necesidad social para que él pueda desarrollar mejor su capacidad de razonamiento, de lo contrario se dificultará su comprensión.

> Ardila, Tejada y Agard (2002) sostienen que hoy en día, los maestros tratan, en sus aulas de clases, temas de ciencia que son prácticamente incomprensibles para muchos, debido a que entrañan fenómenos en escalas lejanas a la experiencia humana como la velocidad de la luz y la distancia entre las estrellas y los planetas. También se refieren a dimensiones minúsculas como el tamaño de una molécula o átomo.

Los docentes que imparten clase, en el nivel primario, fueron formados en la Universidad de Panamá, en el Instituto Pedagógico Superior Juan Demóstenes Arosemena o en otros Centros públicos o privados de estudios superiores del país; a través de un sistema que no obedece a las políticas educativas que hoy día se pretenden implementar ni a las exigencias de la sociedad actual; por lo que se requiere de una revisión en la formación académica y didáctica del maestro por lo menos en el área de Geometría con la finalidad de fortalecer la formación que recibe el estudiante, en las aulas del nivel primario.

La mayoría del profesorado actualmente en ejercicio se ha formado durante la década de los 70, bajo una línea enfocada en planteamientos estructurales que enfatizan en el formalismo, en la evaluación de los procedimientos y en el control conceptual no permitiéndole integrar las componentes científicas con una formación psicopedagógica sólida y un conocimiento metodológico adquirido en un periodo de práctica bien orientado y estructurado, que permita una mejor conexión entre esta formación y el rol que debe ejercer como docente de Matemáticas. Esto ha generado educadores que incidentalmente imparten unas matemáticas cuya complejidad intelectual y didáctica ignoran o docentes que al momento de enseñar reiteran unas matemáticas aparentemente triviales de cuyo valor cultural, dificultad cognitiva y proceso de aprendizaje desconocen. Debemos averiguar si los nuevos cambios curriculares y las nuevas políticas educativas, han cambiado actualmente estas prácticas docentes en las aulas de clase o si las mismas continúan; dado que el rechazo de los estudiantes hacia la matemática es indicativo de la existencia de un problema en la enseñanza y aprendizaje de esta asignatura. La formación en matemática del maestro es indispensable para su enseñanza, ya que es crucial el manejo de términos, fórmulas y algoritmos que rigen la esencia de esta disciplina. Es necesario que nuestras universidades contemplen, en sus programas de estudios, líneas de formación matemática bien definidas y estructuradas para que el maestro se fortalezca con los conocimientos necesarios en esta disciplina y pueda aprenderla plenamente.

> El docente aprende mejor un concepto, específicamente uno matemático, con el desarrollo de actividades que le permitan aproximarse a la abstracción a partir de situaciones en contexto, y mediante la construcción del conocimiento. Los docentes aprenden a hacer bien aquello que practican, es decir, si se desean que ellos apliquen los conceptos en otras situaciones, entonces, deben aprender en situaciones similares (Ardila et al. , 2002).

En Panamá, la comunidad de Educadores Matemáticos está formada por todos aquellos docentes dedicados a la enseñanza de la Matemática, muchos de ellos, sin conocer sus fundamentos. A nivel nacional se ha implementado la Educación Básica General que cubre desde primero a noveno grado; pero la enseñanza primaria que va de primero a sexto grado es atendida por un sólo maestro quien se ocupa de todas las asignaturas y que sin tener el conocimiento tiene que dictar esta materia; lo que indica que aquellos cambios estructurales en el Sistema Educativo Panameño, sólo se han dado en teoría.

La formación Matemática del maestro panameño es muy general y los planes de estudios, de esta carrera, en la Universidad de Panamá a pesar de que actualmente contiene tres cursos de matemática y uno de didáctica, anteriormente sólo contenía un curso de matemática y dos de didáctica y es con este último programa que se formaron la gran mayoría de maestros que actualmente están laborando. Además, es importante señalar que algunos centros de estudios superiores privados ni siquiera contemplan en el currículo asignaturas de matemática; colocando al docente en desventaja al momento de enseñar

Geometría, ya que, en su preparación profesional, no recibió los conocimientos necesarios para impartirla en el nivel donde se desempeña. Esto implica que, muchas veces, el maestro cometa errores al impartir los contenidos o simplemente no los imparta a sus alumnos, dejando grandes deficiencias en la formación del estudiante que, posteriormente, se reflejarán en niveles superiores. Los docentes egresados de la Universidad de Panamá, específicamente antes del año 2013, de la Licenciatura en Educación Primaria recibieron muy pocos cursos de matemática según el plan de estudio de esta carrera.

En contraste con la formación matemática del maestro, los programas de primaria contienen un contenido bastante amplio de esta asignatura que el docente debe enseñar a sus alumnos. Estos contenidos implican el manejo de diferentes áreas de conocimiento entre ellas Geometría, asignatura que antes del año 2013 no se contemplaba en plan de estudio de la Licenciatura en Educación Primaria de la Universidad de Panamá. Esto significa un posible desconocimiento en una gran cantidad de temas de Geometría que el maestro debe impartir en las aulas de clase.

Los problemas que enfrentan los estudiantes en cuanto a la enseñanza de la Geometría en las escuelas primaria manifiestan la existencia de debilidades en el sistema educativo, lo cual se pone en evidencia, por ejemplo, al momento de realizar las pruebas de admisión en la Universidad de Panamá, en la Universidad Tecnológica de Panamá o en pruebas de matemática realizadas a nivel nacional e internacional. En relación a esto el diario El Siglo en el año 2018 destacó que:

> Años tras año, los estudiantes que intentan ingresar por primera vez a la Universidad de Panamá (UP) presentan algunas deficiencias al momento de presentar los exámenes de admisión o de conocimientos generales.
>
> Ricardo Turner, director de Admisión de esta casa de estudios superiores, expresó que en su opinión ‘desde la primaria se ha ido dejando a un lado la importancia de enseñar bien la lectura, escritura y las matemáticas básicas, porque ahora se quiere enseñar a leer desde la edad preescolar, cosa que no debe ser porque no se les enseña bien a los estudiantes (“Jóvenes con deficiencias con deficiencias graves para ingresar a la UP”, 2018)

Los resultados obtenidos demuestran estándares muy bajos en relación con los exigidos por la sociedad actual, lo que permite pensar que el problema pudiera tener origen en la escuela primaria porque es ahí donde el alumno recibe su primera formación sobre esta rama de la matemática y es en este nivel donde: “uno de los aspectos más notorios de nuestro sistema educativo es la deficiente preparación de nuestros egresados, tanto en primaria como en secundaria, en lo que a Geometría se refiere” (Gutiérrez, 2002, p. 105).

Esta deficiencia en la formación matemática del estudiante se refleja todos los años en una gran cantidad de alumnos que presentan dificultades en su aprendizaje, lo que implica un alto índice de fracasos en las escuelas de nuestro país.

> En Panamá, los índices de reprobación en Matemática son muy altos y son continuas las críticas acerca de los deficientes conocimientos matemáticos de los estudiantes de la enseñanza preuniversitaria. Algunos datos en los que se basan estas afirmaciones: más del 80% de los alumnos de noveno y duodécimo grado y entre el 50% y 60% de los de tercer y sexto grado mostraron un nivel de rendimiento “deficiente” en matemáticas (en una escala de excelente, regular y deficiente), según el informe del Programa de Promoción de la Reforma Educativa en América Latina y el Caribe (PREAL, 2007). En PISA 2009 (OECD, 2010), Panamá ocupa el puesto 62 de 65 países, mientras que en Matemáticas consigue una puntuación de 360, significativamente por debajo del promedio de la OCDE) que es 496 (Sáenz y Lebrija, 2014, p.2)

Estos resultados evidencian un bajo nivel de preparación matemática en los estudiantes de nuestras escuelas, surge entonces la interrogante si esto tiene alguna relación con la formación académica y didáctica del maestro. Es necesario conocer la formación geométrica del docente de primaria, para evaluar si domina o no los contenidos de los programas actuales.

> ¿Existe realmente ese conocimiento sólido en futuros profesores de Primaria? Estudios como los de Baturo y Nason (1996) o Liñán y Contreras (2013) han puesto de manifiesto carencias en la comprensión del concepto de área por estos estudiantes, así como

> importantes dificultades de éstos al trabajar con unidades de medida. Esa falta de comprensión también provoca, por ejemplo, confusiones frecuentes entre área y perímetro y las posibles relaciones entre ellos (Liñán y Contreras, 2013; D'Amore y Fandiño, 2007) (Sánchez y Garrote, 2014, p. 2).

Si el maestro no domina en su totalidad los contenidos geométricos que debe impartir a sus estudiantes, implica que estos al momento de cursar a niveles superiores, por ejemplo, el de Básica, enfrentaran dificultades, ya que no cuentan con una formación sólida que le permita avanzar sin inconvenientes.

- Es posible que estos estudiantes en los niveles de básica tampoco reciban una buena formación en Geometría ya que:

> En pleno siglo XXI, muchos docentes aún no dominan los conocimientos geométricos básicos para actuar en la Educación Básica. Esa falta de preparación es perjudicial para las futuras generaciones que, sin los conocimientos geométricos, cómo trabajarán la percepción espacial, la visualización, la capacidad de abstracción. Hace falta en la Universidad preparar mejor los futuros docentes con situaciones de Investigación, exploración, resolución de problemas, incorporación de las Tecnologías de Información y Comunicación, para trabajar en clases de matemáticas más eficaz. Los alumnos necesitan de la incorporación de diversas propuestas metodológicas en sus clases de matemáticas para obtener una

formación más amplia, para que abarcaren un aprendizaje más significativo (Fontes, 2013, p.1043).

Las estadísticas revelan un alto índice de fracasos en las escuelas del país, así como dificultades en la enseñanza y aprendizaje de la Matemática, situación que se repite todos los años, lo cual es indicativo que el sistema educativo presenta debilidades. Esta situación se sustenta, por ejemplo, en la investigación realizada en el año 2006 por la profesora Alicia Delgado de Brandao, en el Centro Regional Universitario de Azuero relacionada con La Enseñanza de la Matemática en el Nivel primario, donde pone de manifiesto las siguientes inquietudes con respecto a esta asignatura:

- Existencia de un alto porcentaje de fracasos, según las cifras estadísticas del Ministerio de Educación, por ejemplo, en el año 2003, los estudiantes reprobados en Matemática a nivel primario representaron un 11,2% de la población, comportamiento que no ha mejorado en los últimos años.
- Los estudiantes que se inscriben en las Universidades Oficiales del país presentan dificultad para aprobar los exámenes que son requisitos de ingreso, donde se observa que la mayor limitación está precisamente en Matemática y Lengua.
- En el nivel primario se presenta la particularidad de que el estudiante se promueve de un grado a otro por el promedio general de todas las asignaturas y, generalmente, se promueve sin haber logrado el dominio de la asignatura, lo que le acarrea consecuencias cuando necesite este

conocimiento para aprobar otros cursos en los niveles posteriores como son la pre-media, media y superior.

- La cantidad de horas dedicadas a la Matemática en el Plan de Estudio de la Licenciatura en Educación Primaria es de 16 horas semanales, lo que corresponde a un 7,14% del total de horas impartidas en dicho plan de estudio; pero, la cantidad de horas de Matemática que se imparten en el nivel primario es de 36 horas lo que equivale a un 19,4% del total del Programa de Primaria (186 horas).
- Los recién egresados de la Licenciatura en Educación Primaria de la Universidad de Panamá presentan dificultades en el dominio de los conocimientos matemáticos básicos que deben poseer para facilitar el aprendizaje de esta asignatura en el nivel primario.
- Este nivel de dificultad se observa en todas las áreas (Números, Geometría, Estadística y Medida) siendo Medida el área donde el rendimiento es menor.
- Ninguno de los recién egresados alcanzó el promedio considerado como regular es decir un 71%, en la prueba que se les aplicó.
- Los resultados de nuestros alumnos de tercer y sexto grado que participaron del segundo estudio comparativo donde se muestra que no obtuvieron resultados mínimos aceptables en Matemática.

Las conclusiones, de la profesora Alicia Delgado de Brandao, puede ser atribuida a diversas razones que podrían tener su origen en el alumno, la escuela, el docente, el hogar, etc. Entre los factores provenientes del docente, queremos destacar la posible falta de dominio en temas de matemática, así como su formación en Didáctica de esta ciencia. En esta vía se nota en la formación del profesor egresado de la Licenciatura en Educación primaria de la Universidad de Panamá, lo siguiente:

Muchos maestros que laboran en las escuelas primarias del país son egresados de la Universidad de Panamá, de la Licenciatura en Educación Primaria, cuyo currículum sólo contemplaba un curso de Matemática y dos cursos de Didáctica de la Matemática los cuales no son facilitados, algunas veces, por especialistas en Matemática Educativa. Actualmente (en el año 2013) este plan fue modificado y contiene nuevos cursos de matemática, pero son pocos los maestros egresados de este nuevo programa que se encuentran laborando. La formación Matemática que recibe el egresado de la Licenciatura en Primaria para atender las cuatro áreas que se facilitan a nivel primario (Número, Geometría, Medida y Estadística) es un total de trece horas, de las cuales el 33,3% de ellas es para Estadística. Estas 13 horas corresponde a 7,14% de la formación recibida de dicho plan de estudio. Sin embargo, la cantidad de horas de Matemática que se imparten en el nivel primario es aproximadamente de un 19,4%, de acuerdo al plan de estudio de este nivel.

La comunidad de educadores de Matemática, en Panamá no solamente está formada por Licenciados en Matemática, sino por Ingenieros, Físicos, Estadísticos, Economistas, entre otros; quienes son los encargados de dictar Cursos de Matemática y, algunas veces, a los estudiantes de la Facultad de Educación. Esto implica la necesidad de replantear la enseñanza básica en la educación superior, con especialistas en las materias fundamentales, especialmente en Matemática; dado que no se puede enseñar algo que no esté bien fundamentado.

La nueva estructuración del plan de estudio de la Licenciatura en Educación Primaria de la Universidad de Panamá, a partir del año 2013, contempla nuevos Cursos de Matemática (Núcleo Común, Matemática básica y Geometría), pero sólo tiene en el cuarto semestre un curso sobre Didáctica de la Enseñanza de la Matemática para la Educación Primaria. Lo cierto es que la gran mayoría de maestros en ejercicio, actualmente en las escuelas primaria de nuestro país, fueron preparados con una base muy general en conocimientos geométricos respecto a la gran cantidad de contenidos que contemplan los planes de estudios de primaria.

La intención de mejorar la formación de los docentes de primaria en cuanto a su preparación en Matemática y Didáctica de la misma ha sido siempre un tema pendiente no sólo en nuestro país, sino a nivel centroamericano. Esto lo sustentan algunos proyectos de investigación a nivel nacional y centroamericano que se han realizado con este objetivo, como el realizado por la Coordinación Educativa y Cultural centroamericana (CECC).

En los últimos años, la (CECC) ha realizado importantes investigaciones dirigidas a mejorar y modernizar la educación primaria o básica y las mismas han tenido un gran impacto en la región, gracias a los esfuerzos ministeriales. Los proyectos aprobados más recientemente se han enfocado a enfrentar graves problemas o grandes déficits de los sistemas educativos centroamericanos. Entre estos tenemos el Proyecto titulado "**Apoyo al Mejoramiento de la Formación Inicial de Docentes de la Educación Primaria o Básica",** cuyo desarrollo ha conducido a una minuciosa revisión de los diversos parámetros relacionados con la formación de los docentes de primaria. Los resultados de este proyecto son evidentes en cada país miembro.

Este valioso proyecto es el resultado de los diagnósticos realizados sobre la formación inicial de educadores ejecutado en cada uno de los siete países Centroamericanos, en el año 1996 y fue financiado por el Gobierno de los Países Bajos. En él se concluyó y recomendó brindar especial atención a la formación de los formadores y a promover la formación de docentes de primaria donde no existiere. También se destacó la necesidad de establecer perfiles del formador y de los maestros y la actualización de los respectivos programas de estudio. Este proyecto, cuyo objetivo es mejorar la formación inicial de educadores, se basa en los seis diagnósticos nacionales y en los principales resultados del Seminario Regional y en la información más importante de los informes nacionales.

Como resultado de este trabajo, y de las conversaciones realizadas con los funcionarios de la Embajada Real (Embajada de los países bajos encargada de la Cooperación Financiera y técnica con sede en San José, Costa Rica) sobre los logros y financiamiento posible de este proyecto, se avaló y dio inició en diciembre de 1999 con los siguientes programas:

1. **Desarrollo del perfil marco centroamericano del docente de Educación Primaria o Básica para mejorar el currículo de formación inicial de docentes.** Tomando como base este perfil se elaboraron los perfiles nacionales, y a la vez se utilizó como referencia en los currículos de formación inicial de docentes en cada país miembro.

2. **Mejoramiento de la formación de formadores de docentes para la Educación Primaria o Básica.** Con el objetivo de establecer perfiles académicos de los formadores de educadores que resulte en planes de estudio de grado y de postgrado.

3. **Producción de recursos educativos para el mejoramiento del desarrollo del currículo de formación inicial de docentes de la Educación Primaria o Básica.** Con el objetivo de producir bibliografía y materiales interactivos que se utilicen en las aulas de formación de docentes de primaria.

4. **Innovaciones pedagógicas.** Tiene como propósito la ejecución y evaluación de innovaciones pedagógicas en el área de la formación inicial y en servicio de educadores.

5. **Investigación Educativa.** El objetivo es desarrollar investigaciones dentro del contexto de la formación inicial de los docentes de primaria.

> Es oportuno destacar cómo la cooperación financiera y técnica del Gobierno de los Países Bajos, a través de su Embajada Real en San José, Costa Rica, ha sido no sólo útil a los Ministerios de Educación del Área, por centrarse en uno de los factores determinantes de la calidad de la Educación, sino porque ha permitido, en dos momentos, completar una propuesta de trabajo que ha impactado y que ha abierto nuevas vertientes de análisis y reflexión de la formación inicial de docentes para la Educación Primaria (Ardila, 2002,p.v).

En junio del año 2012 un estudiante de maestría de La Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán de Honduras que optaba por el título de Máster en Formación de Formadores de Docentes para Educación Básica realizó una investigación en el departamento de Ocotepeque con educadores del nivel primario, la cual arrojó importantes resultados y de los cuales llegó a las siguientes conclusiones respecto al docente de primaria:

- ✓ A pesar de que los maestros cuentan con las competencias cognitivas y con la capacidad para enseñar matemática muchos de ellos presentan poca creatividad en el desarrollo de sus clases, limitándose únicamente a desarrollar las actividades presentadas en la Guía para el Maestro.
- ✓ Los docentes han recibido capacitación para mejorar el rendimiento de los niños en matemáticas por parte de las autoridades educativas, sin embargo, hace falta más preparación en temas como geometría la cual es de difícil comprensión tanto para los maestros como para los estudiantes.

- ✓ Es necesario una verdadera orientación pedagógica del educador ya que los mismos desconocen a plenitud algunos enfoques didácticos y su aplicación, razón por la cual presentan dificultades en el logro de competencias en el área de las matemáticas.
- ✓ El maestro mantiene un estilo tradicional en la enseñanza de la matemática, es decir, la resolución de problemas es su marco de actuación constituyéndose así en un aspecto fundamental en su actuar didáctico.

Los resultados de esta investigación nos enmarcan en una realidad a la cual Panamá no escapa, debido a que nuestra educación en el nivel de primaria (como en otros) está relacionada con un alto índice de fracaso en Matemática, rechazo y "fobia" del alumno por esta ciencia y grandes deficiencias al momento de cursar niveles más altos (premedia, media y universitario).

1.2 Planteamiento del problema

> Cattaneo, Lagreca, Filipputti, de Hinrichsen y Buschiazzo (1997) aseguran que el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática supone analizar las diversas variables que intervienen en su desarrollo. Estas variables deben ser tratadas en el contexto actual, pero con proyección de futuro.

Una de estas variables es, sin duda alguna, la formación del maestro tanto en conocimientos geométricos como didácticos, ya que son estos dos elementos los principales pilares de una educación con carácter científico que permita al sistema educativo preparar un recurso humano que pueda hacerle frente a las exigencias y avances de la ciencia, y la tecnología; además, de ajustarse a los estándares educativos internacionales.

La importancia de esta investigación radica en conocer algunas debilidades del sistema educativo panameño en cuanto a la formación del maestro con la finalidad de mejorar la enseñanza y aprendizaje de la Matemática en Primaria y consolidar así una formación sólida y científica por parte de los discentes, de manera que los mismos puedan comprender mejor los contenidos y su aplicación, elevando así la calidad de la educación.

Por lo anterior expuesto, se considera que fortalecer a los maestros en los contenidos geométricos y didácticos que contemplan los programas de este nivel o especializar a un profesional en Matemática sólo para primaria puede ser una estrategia pedagógica que resulte beneficiosa en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes.

Por consiguiente, se hace necesario establecer una estrategia didáctica que recurra al fortalecimiento del maestro en cuanto a cocimientos geométricos y didácticos o a preparar un docente en Matemática exclusivamente para primaria. Por esta razón, el siguiente proyecto de investigación pretende responder a la siguiente pregunta:

¿Están preparados los maestros para impartir clases de Geometría en VI° grado y los recursos y técnicas metodológicas que utilizan serán las apropiadas para un aprendizaje significativo en el estudiante?

1.3 Hipótesis general

Más del 50% de los docentes de educación primaria tienen dificultades relacionadas con el conocimiento y metodología en la enseñanza de la Geometría en VI° grado, su construcción y conceptualización; así como su aplicación, profundización con que se desarrolla y transmite esta rama de la Matemática.

1.4 Objetivos de la investigación

1.4.1 Objetivos generales

- Investigar qué conoce de Geometría el maestro de primaria para contribuir en el mejoramiento educativo del nivel de VI° grado.
- Evaluar la metodología (técnicas, recursos didácticos, etc.) que utiliza el maestro de VI° grado en Geometría en su enseñanza para establecer si está de acuerdo a los ejes temáticos de los planes y programas vigentes.

1.4.2 Objetivos específicos

- Revisar los contenidos geométricos de los programas de estudios de la Carrera de Educación para conocer la formación del maestro en esta rama de la Matemática.
- Realizar observaciones en el aula para conocer el manejo de contenidos y las técnicas aplicadas por el docente de VI° grado para la enseñanza de la Geometría.

- Revisar si en su carrera el docente de primaria recibe cursos relacionados con la enseñanza o didáctica de la Geometría a través de la aplicación de una encuesta.

- Evaluar si los docentes que imparten VI° grado reciben jornadas de capacitación continua sobre contenidos geométricos y técnicas metodológicas para la enseñanza de la Geometría en este nivel.

- Lograr la Preparación de un especialista en Matemática sólo para primaria, de manera científica.

1.5 Delimitación

La investigación se desarrolla en 30 escuelas primarias de la provincia de Darién, ubicadas en seis zonas escolares de la misma, con la participación de 31 maestros que imparten clases a grupos de sexto grado, de los cuales algunos de ellos son egresados de la Universidad de Panamá, del Instituto Pedagógico Superior Juan Demóstenes Arosemena o de otros Centros de Estudio Superiores.

1.6 Justificación

El dominio del conocimiento geométrico y de una metodología adecuada debe ser parte indispensable del bagaje cognitivo del maestro de primaria. Todos los años, el alto índice de fracaso en Matemática es preocupante en todos los niveles del sistema educativo y uno de los factores es la deficiente preparación de los alumnos en el área de la Geometría en la Educación Primaria.

Ciertamente, existe un problema en el nivel primario por el cual es necesario buscar alternativas que permitan mejorar la calidad de la educación y elevar el nivel de la enseñanza y aprendizaje de la Matemática a estándares de exigencia realmente competitivos. ¿Qué podemos hacer para subsanar esta situación?, ¿Qué se puede hacer para estimular a los alumnos en cuanto al aprendizaje de la Geometría? Al lado de la complejidad del problema y el rechazo de los estudiantes hacia la Matemática, una investigación sobre la formación Geométrica y el manejo de recursos en su enseñanza del maestro puede resultar una alternativa de solución, ya que esto permitiría conocer algunas dificultades del docente y crea alternativas que permitan fortalecer aquellos conocimientos que los mismos no dominan, de manera que éste pueda poner aquellos temas al alcance del discente y hacer de ellos, un recurso que contribuya a la transmisión efectiva de los contenidos.

> Algunos autores e investigadores establecen la importancia de una formación sólida en los maestros en cuanto a Geometría se refiere; tal es el caso de Clemente y Linares los cuales manifiestan que “Los estudiantes para maestro deben llegar a conocer la Geometría en el ámbito curricular de la Educación Primaria de forma que les permita ir más allá que simplemente reconocer propiedades y hechos geométricos en las figuras planas” (Clemente y Linares, 2014, p.8).

Se debe reconocer la Geometría como área importante dentro de la enseñanza de la Matemática, ya que la misma es permanente estímulo del razonamiento. Como ciencia aplicada, forma parte de las diversas actividades del hombre; está presente en el lenguaje cotidiano, la arquitectura, el diseño, el arte, el medio ambiente, entre otros. Haciendo otra lista de su aplicación, la tenemos por ejemplo en la Cartografía, estructuras en Ingeniería y Arquitectura, en la industria textil, de alimentos, de publicidad, digitalización y manipulación de imágenes, aplicaciones en óptica, fotografía, etc. Estas aplicaciones, cada día, son más amplias y versátiles, motivo por el cual es necesario ofrecer una cultura geométrica a los futuros ciudadanos, por medio de la Geometría dinámica. La enseñanza de la Geometría en la Educación Primaria debería desarrollar según Hoffer (1981 citado por Bressan, 1997) una serie de habilidades básicas y las clasifica en cinco áreas: visuales, verbales, de dibujo, lógicas y de aplicación.

Siendo la Geometría un área de mucha exigencia para su dominio, se hace relevante conocer el grado de conocimiento que tienen los maestros en este contexto y si realmente están preparados para enseñar Geometría en este nivel, con el propósito de atender a sus alumnos. Debemos conocer qué estrategias y recursos utiliza el maestro para impartir estos contenidos y si evidencia en el proceso de enseñanza el dominio conceptual y estructural de la asignatura y así fortalecer su conocimiento en esta rama de la Matemática. El docente de primaria debe tener una formación integral en Geometría, es decir, debe conocer métodos, técnicas y recursos didácticos para su enseñanza, al igual que tener pleno dominio de los contenidos que les corresponde impartir, como por ejemplo comprender los fundamentos de esta disciplina y el manejo de conceptos.

> El maestro de Primaria debe tener un conocimiento sólido sobre el concepto de área y de su enseñanza, y también debe saber los métodos de cálculo en las figuras planas propias de los contenidos curriculares de esta etapa educativa, desde una perspectiva superior. Esto supone distinguir con claridad el concepto de los distintos métodos de cálculo y su fundamentación. Por tanto, consideramos necesario que el proceso de formación inicial de los Estudiantes del Grado de Educación Primaria (EGP) trate estos temas científicamente (Sánchez y Garrote,2014, P. 2).

Otro aspecto que justifica este proyecto de investigación es el valor que tiene el uso y aplicación de la Geometría en diferentes áreas del saber humano, como herramienta de solución en problemas y situaciones del mundo real. Reforzar el conocimiento geométrico le permite al docente darle a la Matemática una imagen de producto terminado, inmune a la crítica y al cuestionamiento; así como elevar la preparación y formación de sus alumnos, al igual que proporcionarle un escepticismo saludable, generando un ambiente adecuado de aprendizaje.

Es por esto que la importancia de esta investigación radica en mostrar la necesidad que existe en reforzar al docente de primaria en cuanto a contenidos geométricos y manejo de recursos didácticos para su enseñanza o preparar un especialista en Matemática para el nivel primario; permitiendo suavizar el camino que conduce de la enseñanza al aprendizaje de la Geometría. Fortalecer al maestro en el área de Geometría y en el manejo de recursos didácticos para su enseñanza o preparar un especialista en Matemática sólo para primaria de manera científica es uno de los objetivos trazados en esta investigación.

El aporte de este proyecto es fortalecer a los docentes de primaria en su formación matemática, en lo académico, como en lo didáctico para transmitir contenidos geométricos de una manera efectiva. A partir de una buena preparación geométrica por parte del docente, se puede lograr un aula de clases estimulante al estudiantado en el conocimiento de esta asignatura y que despierte su deseo de saber sobre la materia.

SEGUNDO CAPÍTULO

MARCO TEORICO

2.1 Orígenes de la Geometría

Las primeras nociones geométricas del ser humano datan de tiempos antiguos y, al parecer, se originan de observaciones simples que son el resultado de la creatividad humana para reconocer formas y tamaños. Como es conocido, las culturas más remotas tenían una Matemática rudimentaria que utilizaban para contar conjuntos de elementos que cada día exigía un número mayor. Esto dio como resultado la creación de símbolos, gráficos o lingüísticos para representar los números que, posteriormente, se tradujo en un sistema de base o un proceso posicional para cantidades mayores. Todo este acontecimiento demuestra un alto desarrollo de la Aritmética en culturas como la Mesopotámica al punto de rebasar la frontera la cual separa la etapa que se considera los números como entes objetivos a un concepto abstracto con significado propio; dando origen al proceso de contar, calcular y medir. Es aquí donde la Geometría y la Aritmética interrelacionan entre la forma y la cantidad para crear dos visiones diferentes de la realidad una geométrica y la otra numérica.

- Yagüe (1998) en su obra Didáctica e Historia de la Geometría Euclidiana afirma lo siguiente:

> La opinión de Proclo (tomada de [7a]) sobre los orígenes de la Geometría es la siguiente: "…, de acuerdo con la mayoría de las versiones, la Geometría fue primeramente descubierta en Egipto, teniendo su origen en la medición de áreas, ya que esta era una necesidad para los egipcios, debido a que el Nilo, al desbordarse,

barría con las señales que indicaban los límites de los terrenos de cada quien" (p. 1).

Algunas culturas como la Mesopotámica contaban con procedimientos para calcular áreas de figuras planas como triángulos, algunos trapezoides, el círculo y volúmenes de prismas, cilindros circulares, rectos, conos y pirámides cuadrangulares truncadas. De igual forma, tenían una buena aproximación para π. Elementos encontrados como la tablilla Plimpton 322 en donde demuestran que en Mesopotamia ya tenían conocimiento de lo que hoy llamamos el Teorema de Pitágoras; pues conocían las relaciones entre los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo.

La importancia de la Matemática, en aquellos tiempos, consistía en cómo resolver un problema a través de procedimientos aritméticos, llevando a la Geometría a una actividad de la vida diaria a la cual se le podía aplicar métodos numéricos u operatorios. De esta manera, la Geometría en Babilonia no era considerada una disciplina en particular, sino una forma más de relación numérica entre objetos de uso práctico.

Como dice Proclo: la Geometría se descubre por primera vez en Egipto y está relacionada con la medición de tierras, debido a que el Nilo al desbordase desaparecía los límites de sus terrenos; estos tenían la necesidad de volver a demarcarlos.

- Yagüe (1998) en su libro Didáctica e Historia de la Geometría Euclidiana manifiesta lo siguiente:

> Herodoto señala que en los tiempos de Ramsés II (1,300 a.C.), la tierra se distribuía entre los egipcios en terrenos rectangulares iguales, por los que pagaban un impuesto anual y, cuando el río inundaba parte de su tierra, el dueño pedía una deducción proporcional en el impuesto, y los agrimensores de aquel tiempo tenían que certificar que tal fracción de la tierra había sido inundada (p. 1).

- El cuerpo humano jugó un papel muy importante en lo que respecta a algunas unidades utilizadas, por primera vez, para medir distancias ya que:

> Las primeras medidas de longitud fueron las propias partes del cuerpo humano. Todavía utilizamos medidas que tienen este origen. Una pulgada era igual a la anchura de un pulgar; un pie, a la longitud del pie. Más difícil de adivinar resulta el que un ana comprendiese la distancia entre el codo y la punta del dedo corazón. Poco a poco, estas medidas fueron redondeándose para obtener, entre ellas, relaciones sencillas, pero verdaderas. El pie es igual a doce pulgadas, y el ana equivale a dos pies (Lidman, 1972, p.5).

Muchos acontecimientos de la realidad, inclusive del hombre primitivo, lo llevó a un sinnúmero de observaciones y descubrimientos geométricos subconscientes.

Por ejemplo, la idea de distancia fue, sin lugar a dudas, una de las primeras nociones geométricas que aparecieron. La consideración del tiempo que tomaba en ir de un lugar a otro lo llevó a la idea que el camino más corto era la línea recta.

El interés en demarcar terrenos lo condujo a la idea de figuras geométricas sencillas, la noción de línea vertical, perpendicular o paralela, al parecer, fueron utilizadas en la construcción de viviendas.

Muchos son los ejemplos que podemos citar con respecto al origen de la Geometría. Aquellas formas y figuras físicas con características ordenadas en contraste con las de carácter desordenado llevaron al hombre a una mente reflexiva, y, de esta manera, algunos conceptos elementales sobre Geometría se esclarecen. A esta Geometría se le denominó **Geometría del Subconsciente** la cual fue empleada por el hombre primitivo, quien, con su arte, contribuyó al posterior desarrollo de esta rama de la Matemática.

En un inicio, el hombre sólo consideró aquellos problemas geométricos concretos y en el momento que éste fue capaz de extraer relaciones abstractas generales de situaciones reales, la Geometría pasa a ser una ciencia; con la ventaja de ordenar problemas prácticos en grupos que se resuelven por un mismo procedimiento. Esto lo llevó a la idea de Ley o Regla Geométrica.

La historia del hombre demuestra que pasaron muchos siglos para que el mismo elevara la Geometría a la calidad de ciencia; pero todos los investigadores coinciden que fue en el Valle del Nilo del antiguo Egipto donde ésta se convierte en ciencia a través de prácticas sobre agrimensura. En efecto, la palabra

Geometría significa “Medición de la Tierra”. A pesar de no existir datos concretos sobre el surgimiento de la Geometría es casi seguro que la misma como ciencia es el producto de la necesidad práctica que ayuda a quienes se encargaban de la ingeniería y la agricultura en pueblos del Antiguo Oriente. Las evidencias históricas demuestran que no solamente esto ocurrió en el Río Nilo de Egipto, sino en cuencas de otros ríos como el Tigris y el Éufrates en Mesopotamia, el Indus y el Ganges en Asia sur-central y en el Hwang Ho y el Yangtzé en el este de Asia. Es en estas grandes cuencas donde se da origen a las formas más avanzadas de la Geometría como ciencia a través de sus trabajos sobre ingeniería en el drenaje de parcelas, irrigación, control de inundaciones y construcción de grandes estructuras; lo que exigía un desarrollo de la Geometría práctica.

Las evidencias más antiguas de la actividad geométrica del hombre la encontramos enterradas en Mesopotamia en unas tablas inscritas de arcilla cocida y que a la fecha, se cree de los tiempos sumerios de aproximadamente 300 A. de C. Otro caso son las tablas cuneiformes babilónicas provenientes de la primera dinastía babilónica del rey Hammurabi, el imperio Nuevo Babilónico de Nabucodonosor, y a los periodos persas y seléucidas. Estas tablas son fiel evidencia que la Geometría antigua de estos pueblos estaba estrechamente relacionada con la medición práctica de tierra.

- Ballús **(2013) en su obra *Consultor Enciclopedia Temática* sostiene lo siguiente:**

> Parece ser que, en efecto, la Geometría nació de la necesidad de medir los campos de cultivo en el antiguo Egipto y en Mesopotamia; pues las periódicas crecidas de los ríos modificaban a menudo sus límites. En el siglo VI a. C., alcanzó un gran desarrollo de la mano de los Matemáticos Griegos Tales y Pitágoras, cuyos famosos teoremas comentaremos más adelante. En el siglo III a. C. destaca la obra de otras dos figuras señeras de la Geometría Clásica Griega: Euclides y Arquímedes. Tras el ocaso de la ciencia en la sociedad medieval europea, en los siglos XVI y XVII se produjo la llamada Revolución Científica. En esta época, Descartes y Fermat crearon, por separado, la Geometría Analítica, que relaciona, de forma genial, el Álgebra y la Geometría. Ya en el siglo XX, con el desarrollo de las computadoras, ha nacido la Geometría Fractal, un original enfoque geométrico aplicable al estudio de figuras excesivamente irregulares, como el contorno de una costa o la forma de las ramas de un árbol (p.798).

2.1.1 Geometría Babilónica

Las investigaciones coinciden en que los babilonios de 2000 a 1600 a.C tenían conocimiento para calcular el área de figuras geométricas tales como el rectángulo, el triángulo (rectángulo e isósceles y posiblemente el triángulo general), el trapecio, el volumen de un prisma recto con base de trapecio especial. Estos procedimientos se realizaban por medio de la Aritmética, la cual utilizaban para realizar cálculos astronómicos, mercantiles o relacionados con áreas y volúmenes. Aún antes de la aparición del cero, los babilonios ya realizaban operaciones numéricas complejas, por ejemplo, habían elaborado tablas para multiplicar y dividir utilizando métodos sumamente ingeniosos; lo que demuestra un elevado grado de abstracción. Estos consideraron la circunferencia como tres veces su diámetro, y su área como un dozavo del cuadrado de la misma, además de conocer su división en dos, cuatro, ocho, dieciséis, treinta y dos, etc. partes iguales, subdividiendo los arcos. En este sentido, también conocían el procedimiento para dividirla en tres y seis partes iguales. Es conocido también que esta cultura logró una aproximación de π de 3 1/8 y que obtuvieron el volumen de un cilindro circular recto calculando el producto de su base por la altura. De manera incorrecta, calcularon el volumen de un cono o de una pirámide cuadrada truncados como el producto de la mitad de la suma de las bases y su altura.

Existen evidencias de que los babilonios antiguos conocían la fórmula (incorrecta) para calcular el área de un cuadrilátero: $K = (a + c) (b + d) / 4$, donde a, b, c y d son los lados consecutivos. Está claro que esta civilización tenía conocimiento de que los lados correspondientes de dos triángulos rectángulos semejantes eran proporcionales, además que la altura que pasa por el vértice de un triángulo isósceles biseca la base, y que el ángulo inscrito en un semicírculo es recto. Aproximadamente en el año 2000 a.C los babilonios ya conocían el Teorema de Pitágoras. Éstos utilizaban tablas de arcilla cocida imperecedera para registrar sus trabajos, pero para ellos la Matemática era sólo una parte de los resultados que podían obtener a través de la percepción.

2.1.2 Geometría Egipcia

2.1.2.1 Geometría Prehelénica

Las principales fuentes de información sobre la Geometría Egipcia antigua provienen de los años 1850 a.C y 1650 a.C aproximadamente, correspondientes a los papiros de Moscú y Rhind, textos que contienen 25 y 85 problemas, respectivamente. Evidencias encontradas en el antiguo Egipto tales como un instrumento astronómico o topográfico (una combinación de plomada y vara de agrimensor) del año 1950 a.C y un reloj de sol que data del año 1500 a.C aproximadamente son fiel evidencia de un conocimiento relacionado con alguna geometría práctica. De los 110 problemas contenidos en los papiros de Moscú y Rhind veintiséis corresponden a Geometría. La mayor cantidad de estos problemas derivan de fórmulas relacionadas con la medición de áreas de terrenos y volúmenes de graneros. Los egipcios consideraron el volumen de un cilindro recto como el producto del área de la base por su altura y el área del círculo igual a la de un cuadrado de 8/9 del diámetro por lado. Las investigaciones demuestran que esta cultura conocía que el área de un triángulo está definida por la mitad del producto de la base y su altura. Algunos problemas, al parecer, están relacionados con la cotangente del ángulo diedro entre la cara y la base de la pirámide y otros manifiestan un conocimiento de la teoría elemental de figuras semejantes. A pesar de no existir evidencia escrita que demuestre que los egipcios conocían el Teorema de Pitágoras, algunas investigaciones revelan que sabían que el triángulo cuyos lados tienen longitud 3, 4 y 5 unidades respectivamente era rectángulo.

Curiosamente la fórmula K = (a + c) (b + d) / 4 para calcular el área de un cuadrilátero cualquiera con lados de longitudes a, b, c, d apareció inscrita en la tumba de Tolomeo XI desaparecido en el año 51 a.C.

El uso correcto de la fórmula V = h (a + ab + b) / 3 para calcular el volumen de un tronco de pirámide cuadrada de altura h y a y b las longitudes de los lados de las bases cuadradas aparece en el papiro de Moscú a través de un ejemplo numérico. Este descubrimiento es considerado una fiel evidencia de un ejemplo extraordinario de inducción. Los antiguos egipcios al igual que los babilonios, utilizaron el método de "Tanteo" en las relaciones Matemáticas empleadas debido a que muchas de sus fórmulas son incorrectas. La Matemática Prehelénica fue más allá del empirismo práctico, un conjunto de procedimientos empíricos que resultaron factibles ante las necesidades de esta civilización; es decir, no aparece el elemento lógico ni está contenido ningún entendimiento real; pero, a pesar de esto, es asombroso la extensión y variedad de problemas que resolvieron exitosamente.

La Matemática Prehelénica, generalmente, se considera una disciplina que no contaba con lo que pudiese llamarse un teorema; tenía solamente una especie de procedimientos para hacer ciertos cálculos; pero aun así elevaban estos conocimientos al nivel de verdades que en aquel tiempo no requerían mayor demostración para su verificación la cual se comprobaba al contrastarla con la realidad y comprobar los datos. Es decir, el proceso de demostración para un teorema se verificaba en cada caso particular.

- Es notorio el gran avance de estos pueblos en aquellos tiempos ya que:

> La Matemática Prehelénica había alcanzado un alto grado de desarrollo de la habilidad operatoria para abordar todo tipo de problemas de la vida práctica; problemas que iban desde la repartición de una herencia y el cálculo del interés compuesto, hasta los problemas ligados a lo que después llamaríamos Geometría (Yagüe, 1998, p. 5).

El logro más grande de la Ciencia Prehelénica fue el descubrimiento de los inconmensurables, demostrando así un alto grado de rigurosidad y carácter científico lo que caracteriza a los métodos y demostraciones de la Geometría Griega; hecho que evidencia una gran tendencia a la formalización de la Matemática. En otras palabras, la tendencia aritmetizante y algebratizante de la Matemática Prehelénica fue la fuerza impulsora de las primeras épocas del desarrollo de la Matemática Griega.

2.1.2.2 Geometría Helénica

El descubrimiento de los inconmensurables y la crítica de las ideas que relacionaban a la Aritmética con la Geometría por medio del estudio de la medición y del movimiento, fueron las fuerzas que originaron la necesidad de un mayor rigor en el desarrollo y presentación de la Matemática; la aparición de los incomensurables echó por tierra una gran cantidad de demostraciones que suponía que todas las magnitudes eran conmensurables. Ante este hecho, Zenón presenta sus paradojas como un contraste a las ideas de los pitagóricos que hacían del punto “Una unidad que ocupa cierta posición en el espacio”. Este investigador es célebre por sus paradojas las cuales son formidables construcciones lógicas que contrastan con la realidad reduciéndose a simples falacias debido a un posible desconocimiento de cosas básicas como el movimiento relativo o que el producto de dos magnitudes puede ser constante a pesar de que una de ellas se haga cada vez más pequeña. A pesar de esto, las paradojas de Zenón al igual que otros descubrimientos llevaron a los Matemáticos de la época a darle un nuevo enfoque a la Matemática, es decir, crearon la necesidad de elevar esta ciencia a una disciplina con carácter deductivo.

Zenón cita sus paradojas para oponerse a los ataques de los pitagóricos a su maestro Parménides y para contrarrestar algunas de sus ideas. Estas paradojas se enuncian como sigue:

- **Paradoja de la dicotomía**: “No se puede recorrer un número infinito de puntos en un tiempo finito. Primero, ha de recorrerse la mitad de la distancia total; a su vez, la mitad de esta última distancia; y, nuevamente la mitad de esta última.

- **Paradoja de Aquiles y la tortuga**: Aquiles, el héroe legendario, el más rápido de los humanos, compite contra una tortuga a la que, pretenciosamente, le ha dado una ligera ventaja; el héroe no es capaz de vencer a la tortuga. Aquiles, primero, debe de llegar al lugar donde arrancó la tortuga. Para entonces, la tortuga ha recorrido un pequeño trecho; Aquiles ha de recorrer este último; pero, para entonces, la tortuga ya habrá avanzado un poco más. Aquiles estará más cerca, pero nunca podrá alcanzarla.

- **Paradoja de la flecha**: Una flecha lanzada al aire por un potente arco, en todo instante, está en reposo.

- **Paradoja del estadio**: Considérense tres hileras de puntos unos debajo de otros como en la figura.

Figura 1	Figura 2
A	**A . . . .**
B	**B . . . .**
C	**C . . . .**

Una de ellas, B, está inmóvil, mientras que A y C se mueven en direcciones opuestas con igual velocidad, hasta encontrarse en la posición que aparece figura 2. Lo recorrido por C, respecto a A, es el doble de lo recorrido respecto a B; o, en otras palabras, cualquier punto de C ha pasado el doble de puntos de A que de B. Por tanto, no puede ser que un instante corresponda al paso del móvil de un punto a otro.

Esta presentación le dio a Zenón una imagen de formidable lógico suscitando una confusión entre los griegos, ya que, durante un largo tiempo, el intentar de desentrañar el contenido de estas paradojas obligó a los investigadores a crear modelos aritméticos más sólidos del tiempo y del espacio que permitieran una descripción adecuada del movimiento y lejos de toda posibilidad de una percepción sensorial directa. Una de las paradojas de Zenón plantea claramente el problema de la posibilidad de efectuar la división de un segmento lineal de forma indefinida lo que implicaba un proceso de orden infinito para lo cual se carecía de construcciones intelectuales con las cuales era posible manejar esta problemática.

Cambios económicos y políticos en el antiguo Egipto y Babilonia (últimos siglos del segundo milenio a.C.) provocaron que su poder decayera y el posterior desarrollo de la Geometría pasara a manos de los griegos. Éstos le dieron a esta rama de la Matemática un carácter deductivo debido a razones antes mencionadas, transformándola en algo diferente al conjunto de conclusiones empíricas desarrollado por los antiguos egipcios y babilonios; llegando a conclusiones geométricas por demostraciones lógicas y no por tanteo. De esta manera la Geometría es transformada en lo que ahora se le puede llamar **Geometría Sistemática o Matemática**.

La Geometría Griega parece haber iniciado, esencialmente, en la primera mitad del siglo VI a.C. con el trabajo de Tales de Mileto, primer Matemático conocido al cual se le atribuye el uso de métodos deductivos en la Geometría, fundador imprescindible de la Geometría Sistemática y considerado el Padre de la Matemática Griega; durante este periodo, Grecia se caracterizó por el desarrollo de la Geometría Deductiva. En su resumen, Eudemo manifiesta que Tales llevó la Geometría a Grecia donde le aplica los procedimientos deductivos de la Filosofía Griega, es decir, el razonamiento lógico en lugar del experimento y la intuición; a él se debe la demostración de los ángulos opuesto por el vértice y el Teorema de la Existencia de Paralelas (dos perpendiculares a una recta son paralelas entre sí).También dio a conocer el uso de la circunferencia y su división sexagesimal para la medición de los ángulos, así como descubrió la propiedad que tiene el diámetro de dividir a la circunferencia en dos partes iguales.

A Thales de Mileto se le atribuye los siguientes Teoremas relacionados con la Geometría:

- ✓ Los ángulos adyacentes a la base de un triángulo isósceles son iguales. Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.
- ✓ Si en un triángulo se traza una paralela a uno de los lados, los otros dos quedan divididos en partes proporcionales.

Este último aún conserva el nombre de teorema de Thales.

Algunos teoremas sobre proporcionalidad fueron descubiertos por Thales como por ejemplo el que dice: "Si por un punto del lado de un triángulo se traza una paralela al otro lado, el triángulo pequeño que resulta es semejante al grande".

Este matemático también dio las primeras demostraciones sobre semejanza de triángulos y se le atribuye los siguientes resultados:

- Los ángulos en la base de un triángulo isósceles son iguales.
- Un diámetro biseca a un círculo.
- Dos triángulos son congruentes si tienen un lado y dos ángulos iguales.
- El ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto.

Se dice que algunos de estos resultados sólo fueron enunciados por Tales ya que, de alguna manera, eran conocidos desde antes, pero fue él quien utilizó un razonamiento deductivo para verificar su veracidad.

-El siguiente ejemplo ilustra el debate sobre la posibilidad de que Tales hubiese demostrado, que el ángulo en un semicírculo es un ángulo recto, el cual plantea lo siguiente:

> Si Tales hubiera sabido que el ángulo en un semicírculo es un ángulo recto, podría haber demostrado que la suma de los tres ángulos interiores de cualquier triángulo rectángulo es igual a dos rectos. Porque, supóngase que **BC** es el diámetro de un semicírculo, **O** el centro y **A** un punto de la semicircunferencia (figura 6):

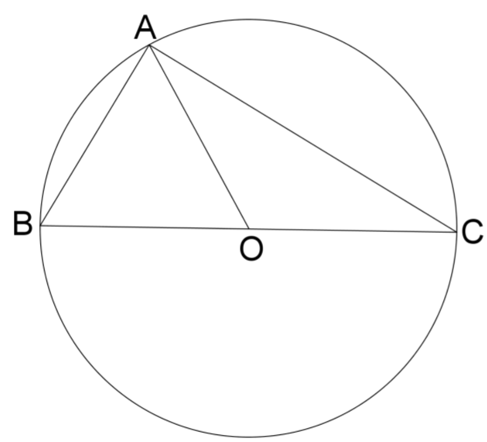


Figura 6

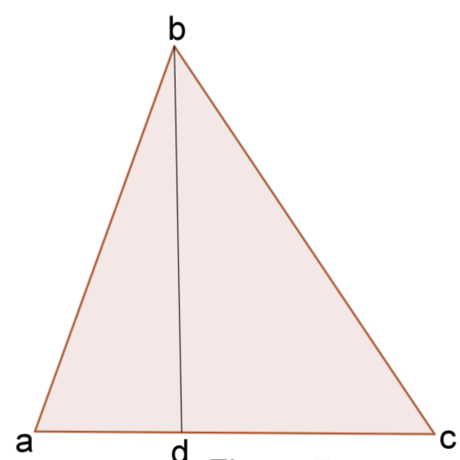


Figura 7

Tales sabe: **A)** El ángulo **BAC** es un ángulo recto. Trazando **OA** se forman dos triángulos isósceles **OAB** y **OAC** (en ambos, dos lados son iguales al radio). Tales sabe: **B)** Los ángulos de la base de tales triángulos son iguales. Esto es,

Ángulo **OAC** = ángulo **OCA**

Ángulo **OAB** = ángulo **OBA**

Por lo tanto, la suma de los ángulos **OAC** y **OBA** es igual a la suma de los ángulos **OAC** y **BAO**, pero, usando A), Tales concluye que: **C)** esta última suma es un ángulo recto.

Usando **A)** y **C)**, Tales puede concluir que la suma de los tres ángulos del triángulo **ABC** es igual a dos rectos.

Además, es fácil ver que cualquier triángulo se puede partir en dos triángulos rectángulos, como se indica en la figura 7, y de allí concluir que: **D)** la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es igual a dos rectos.

Si analizamos lo escrito, vemos que Tales, a partir del conocimiento de **A)** y **B)**, podría, mediante argumentos lógicos, haber concluido otro resultado geométrico **C)**, y después, con el mismo procedimiento, obtener **D)**. He aquí un ejemplo de lo que significa deducir en matemática (Yagüe, 1998, p. 16).

El giro iniciado por la escuela de Tales, al intentar de transformar esa especie de disciplina experimental, que heredó del Oriente, en una ciencia deductiva fue lo que permitió el posterior desarrollo de la Matemática Griega cuyos resultados son demostrados a través del razonamiento y no por la observación. Todos estos resultados son proseguidos por los pitagóricos, quienes fueron los primeros que intentaron explicar la realidad captada a través de los sentidos usando las Matemáticas.

Otro matemático famoso que aparece en escena en el resumen de Eudemio es Pitágoras de Samos quien, en la segunda mitad del siglo VI a.C alrededor del año 540 a.C continuó el Trabajo de Tales de Mileto. Se cree que Pitágoras nació alrededor del año 572 a.C y para él el concepto de número llegó a ser el principio principal de toda proporción, orden y armonía del universo. Este investigador continuó con la sistematización de la Geometría y descubrió el Teorema que lleva su nombre, el más importante de la geometría; cuyo enunciado dice: "El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos (B, López, s.f, p.91)". Pitágoras también fundó su famosa Escuela Pitagórica, congregación que se dedicaba al estudio de las Matemáticas, la Filosofía, y las Ciencias Naturales y que era una fraternidad unida a ritos secretos y costumbres. Esta cesta aportó valiosos resultados al desarrollo de la Geometría entre ellos, por ejemplo, dio las propiedades de las paralelas, utilizándolas para demostrar que la suma de los ángulos de un triángulo cualquiera es igual a dos ángulos rectos. También, contribuyeron notablemente al desarrollo del Álgebra Geométrico Griego y desarrollaron una teoría de la proporción aplicable sólo a magnitudes conmensurables, utilizada para deducir propiedades de figuras semejantes. Se sabe que esta fraternidad tenía conocimiento, al menos, de tres de los poliedros regulares, además de descubrir la inconmensurabilidad de un lado y una diagonal de un cuadrado.

Mucha de esta información era ya conocida por los babilonios de períodos más antiguos, pero fueron los pitagóricos quienes les dieron ese carácter deductivo a estos trabajos. La educación y en especial el aprendizaje de las Matemáticas tenían un valor muy elevado para Pitágoras y sus seguidores (los pitagóricos), era el camino que había que recorrer para elevar las almas. “La beatitud es el conocimiento de la perfección de los números del alma” frase que destaca la importancia de la Matemática para los pitagóricos.

Son muchos los descubrimientos sobre Geometría que realizaron los pitagóricos en donde se destaca la visión geométrica como elemento fundamental para encontrar y demostrar resultados Aritméticos y Geométricos. Por ejemplo, utilizaban figuras geométricas para representar los números como arreglos de puntos con cierto orden geométrico como lo muestran las siguientes figuras:

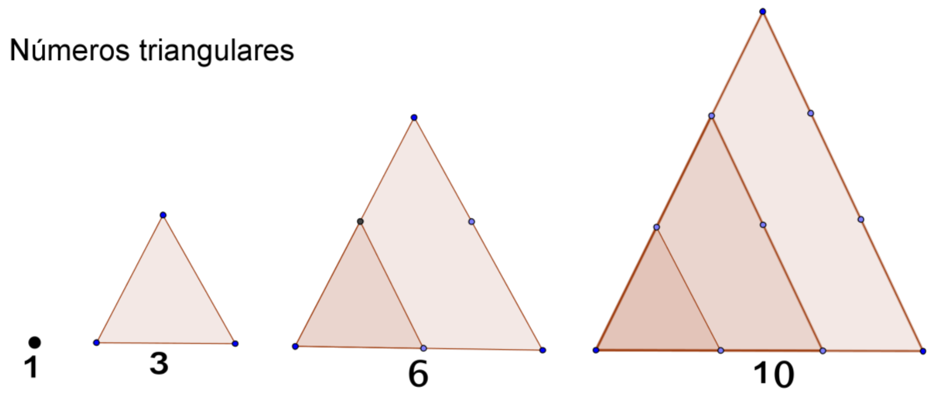


Figura 5

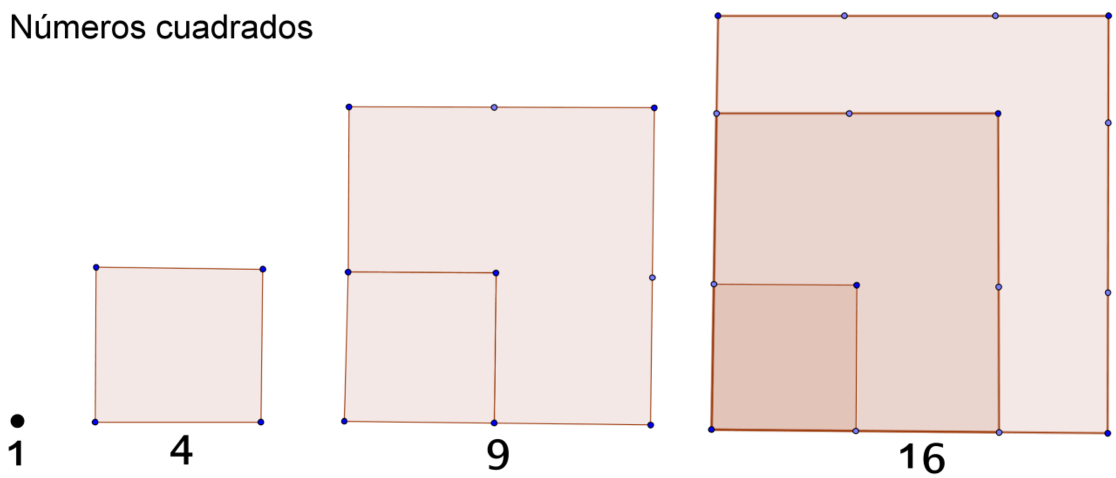


Figura 6

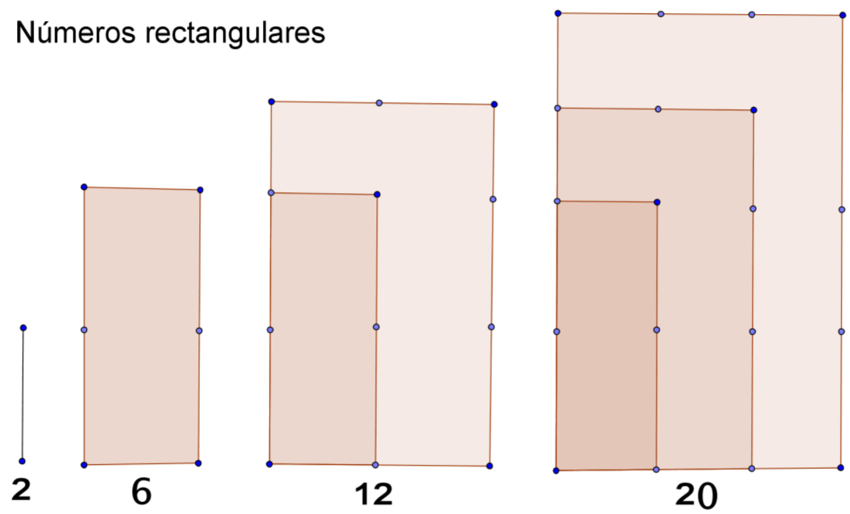


Figura 7

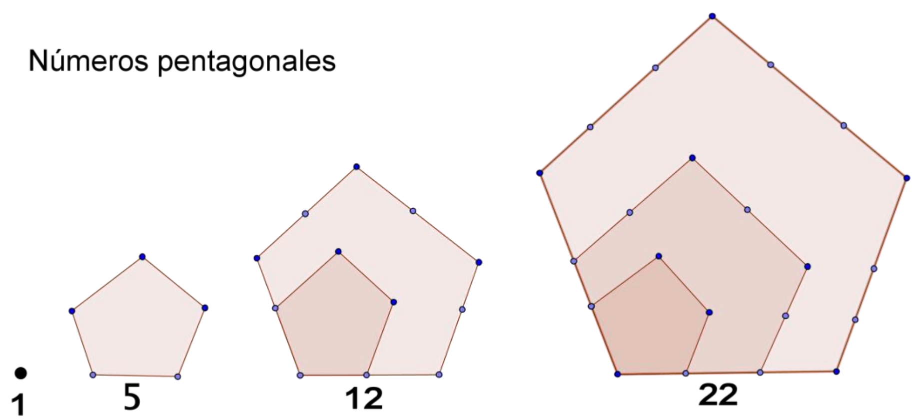


Figura 8

A través de una visión geométrica adecuada de estas figuras se pueden obtener muchos teoremas sobre números. Tal es el caso, por ejemplo, para obtener fórmulas para sumar progresiones geométricas:

1. $1 + 2 + 3 + \ldots + K + \ldots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$

La suma de los primeros n es el enésimo número triangular.

2. $1 + 3 + 5 + \ldots + K + \ldots + (2n - 1) = n^2$

La suma de los primeros n impares es el enésimo número cuadrado.

3. $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + K + \ldots + 2n = n(n + 1)$

La suma de los primeros n pares es un número rectangular.

4. $1 + 4 + 7 + \ldots + K + \ldots + (3n - 2) = \frac{n(3n - 1)}{2}$

La suma de los primeros n términos de esta progresión aritmética es un número pentagonal.

Los griegos antiguos se interesaron en encontrar ternas de números naturales en la que la suma del cuadrado de dos de ellos fuera igual al cuadrado del tercer número, a esta terna de números se les llamó terna de números pitagóricos.

Los números 3, 4, 5 forman una terna pitagórica ya que fácilmente se puede comprobar que $5^2 = 3^2 + 4^2$.

Los griegos reemplazaron los procedimientos aritméticos utilizados por los babilonios y los hindúes por métodos puramente geométricos con el propósito de evitar aquellos inconvenientes que se encontraron al intentar aritmetizar magnitudes geométricas lineales. Por ejemplo, utilizaron propiedades del área para demostrar algunas identidades algebraicas muy utilizadas.

Consideremos la figura siguiente dividida en dos cuadrados y dos rectángulos.

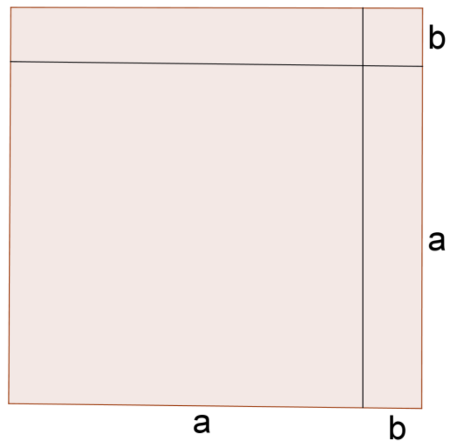


Figura 9

Calculando el área obtenemos:

Área de cuadrado total = $(a + b)^2$

Área del cuadrado chico = b^2

Área del otro cuadrado = a^2

Área de cada rectángulo = a x b

Utilizando la propiedad aditiva del área tenemos: $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

$= a^2 + 2ab + b^2$

Otro ejemplo de este caso podemos verlo en la siguiente figura:

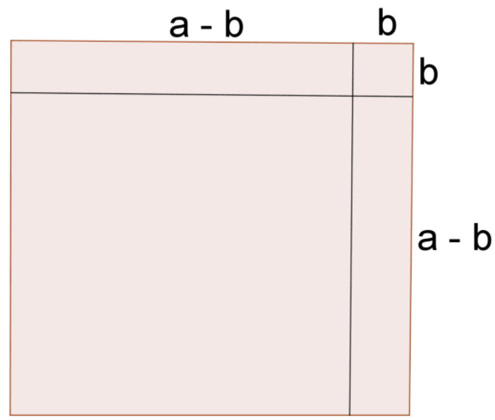


Figura 10

Cada uno de los sumandos de los términos de la siguiente igualdad:

$a^2 = (a - b)^2 + b^2 + 2b(a - b)$ puede considerarse como el área de algunos de los cuadrados o rectángulos de la figura.

Para resolver algunas ecuaciones de segundo grado, los pitagóricos utilizaban el método de las proporciones y el de “la aplicación de las áreas”. Es posible hallar, con la ayuda de la teoría de las proporciones, segmentos lineales que cumplan proporciones tales como:

1) $a : b = c : x$
2) $a : x = x : b$

donde, a, b y c son segmentos lineales dados. Se puede inferir que el segmento marcado con x en la figura 11 es la solución de 1).

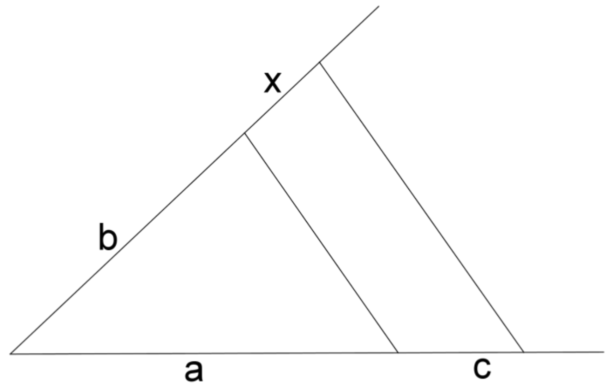


Figura 11

Tanto que x en la figura 12 es la solución de 2)

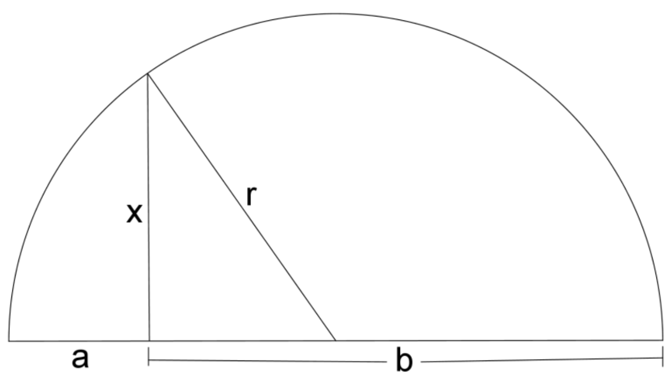


Figura 12

En la figura 12 lo que se pretende es hacer ver que $x^2 = ab$.

Pero, por el teorema de Pitágoras se tiene que:

$$x^2 = r^2 - h^2$$

esto, es igual a

$$x^2 = (r + h)(r - h) = bxa$$

Lo interesante de este caso es conocer técnicas que permitan resolver geométricamente la ecuación

$$x^2 - ax + b^2 = 0$$

donde a y b son segmentos lineales dados.

Consideremos el siguiente problema: Sobre todo el segmento AB, de longitud a, tenemos que encontrar un punto Q tal que $(AQ)(QB) = b^2$.

Para conseguirlo, sobre el punto medio M de AB (ver figura 13), trácese una perpendicular y sobre ella, encontramos el punto N tal que MN = b.

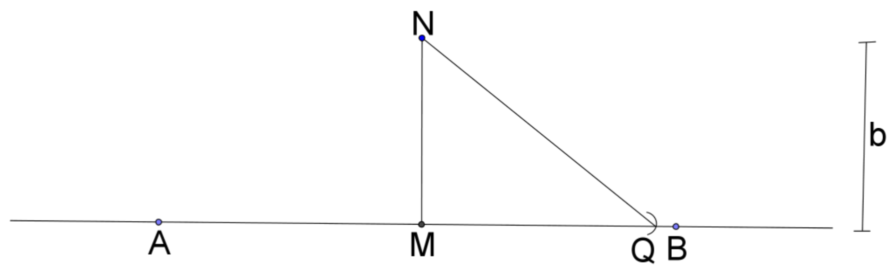


Figura 13

Tomando MB como radio y N como centro, trácese un arco que corte en Q a AB. El punto buscado es Q.

Tenemos, entonces que

$$(AQ)(QB) = (AM + MQ)(MB - MQ)$$

$$= (MB + MQ)(MB - MQ) = (MB)^2 - (MQ)^2$$

$$= (NQ)^2 - (MQ)^2 = b^2$$

¿Por qué decimos que AQ y QB son las raíces de la ecuación $x^2 - ax + b^2 = 0$?

Esto podemos verlo fácilmente recordando que las raíces de una ecuación de esta naturaleza deberán cumplir con lo siguiente:

Su suma es igual a a

Su producto es igual a b^2

Esto es lo que se ha encontrado que cumplen AQ y QB. Encontrar Q es, equivalente a encontrar las raíces de la ecuación $x^2 - ax + b^2 = 0$.

Transformación de áreas

Los pitagóricos también abordaron problemas relacionados con transformación de áreas, es decir, dada una figura rectilínea hallar otra, con otra forma, cuya área sea la misma que la primera. Ejemplo de este caso lo podemos ver cuando intentan transformar un polígono cualquiera en un cuadrado con la misma área. Considérese el polígono ABCDE de la figura 14.

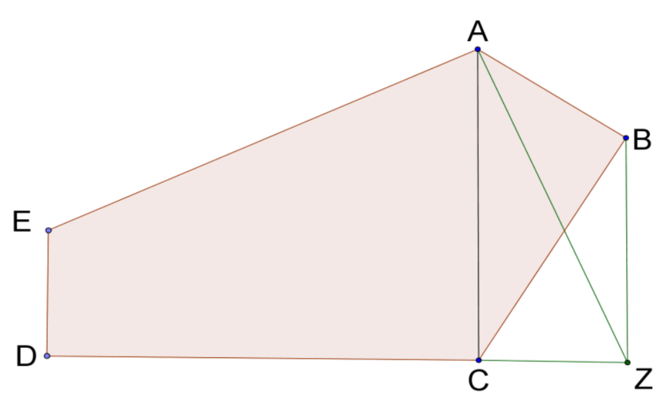


Figura 14

Trácese AC y una paralela BZ que corte a DC en Z y considérese los triángulos ABC y ACZ. Nótese que ambos tienen una misma base AC y las alturas correspondientes a tal base son iguales. Luego ambos ABC y ACZ tienen la misma área. De aquí concluimos que el polígono ABCDE tienen la misma área que el polígono AZDE; pero este último tiene un vértice menos.

Repitiendo este procedimiento, podemos encontrar un triángulo que tenga la misma área que el polígono con el que comenzamos.

Ahora sólo tenemos que encontrar el lado x de un cuadrado que satisfaga

$$x^2 = \frac{ba}{2}$$

donde b es la base y a la altura del triángulo dado.

De esta manera, empezó a florecer un conjunto de proposiciones de las cuales se dedujeron otras, aumentando en cantidades considerables y a partir de las cuales se planteó desarrollar toda la Geometría en un solo conjunto.

El principio del Teorema de Pitágoras era ya conocido por los pueblos orientales, particularmente para los números 3, 4 y 5; pero fue este autor quien, en sus viajes a través de Egipto, recopiló la información logrando generalizarlo, sin demostración. Euclides fue el primero en demostrar este teorema utilizando una de las formas más sencillas conocidas. Actualmente, se conocen unas 40 demostraciones.

Los pitagóricos (mediados del siglo V a.C) tenían la fiel convicción que, dadas dos magnitudes cualesquiera, por ejemplo, las magnitudes lineales A y B, siempre era posible encontrar una magnitud menor, por ejemplo, C, que “cabe” un número m de veces en A, y un número entero de veces n en B.

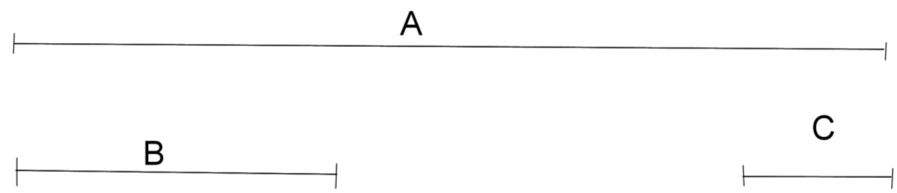


Figura 15

A esto fue a lo que los pitagóricos llamaron magnitudes conmensurables, es decir, hay entre ellas una relación numérica o existe una unidad con la cual es posible medir ambas. El descubrimiento de los inconmensurables dio un duro golpe a la Filosofía Pitagórica ya que hay magnitudes que no son conmensurables, por ejemplo, el lado cualquiera de un cuadrado y su diagonal. Este hecho produjo una crisis en la Matemática Griega que no duró mucho, ya que poco tiempo después contaban con teorías que les permitía trabajar a los inconmensurables de la misma forma que a los conmensurables; tal es el caso de la Teoría de las Proporciones. Esta crisis fue resuelta por Eudoxio de Cnido, estudiante de la Academia de Platón en Atenas e investigador con un alto grado de pensamiento creador.

La clave de Eudoxio fue la formulación de proporcionalidad la cual enuncia de la siguiente manera:

> Sean a y b magnitudes geométricas del mismo tipo (ambas son longitudes, o áreas o volúmenes). Sean c y d un segundo par de magnitudes geométricas, ambas del mismo tipo, pero no necesariamente del mismo tipo del primer par. Eudoxio define la proporcionalidad $a : b = c : d$ si dados dos números m y n enteros y positivos se tiene que o bien:
>
> $na > mb$ y $nc > md$, o
>
> $na = mb$ y $nc = md$, o
>
> $na < mb$ y $nc < md$ (Ardila et al., 2002)

Con el descubrimiento de los inconmensurables, los griegos abandonaron la idea de expresar cualquier magnitud lineal en términos de magnitudes simples; pero para la época de Platón ya contaban con una Teoría de las Proporciones que incluían el tratamiento de magnitudes inconmensurables (irracionales). La idea de los pitagóricos de interpretar cualquier fenómeno utilizando sólo los números naturales representó un obstáculo para la época, lo que llevó a Platón a intentar buscar una solución a tal problemática apoyándose en los resultados obtenidos por amigos y discípulos matemáticos. Las paradojas de Zenón, así como la medición de longitudes, áreas y volúmenes trae consigo la necesidad de aproximar, tanto como sea posible, una magnitud en términos de ciertas unidades. Los griegos al trabajar con la idea de cuadrado, en general, debían tener presente que la diagonal era un segmento determinado y si, por ejemplo, deseaban comparar su longitud con cualquier otro segmento no se podían conformar con sus aproximaciones por lo mejor que fueran. Por ejemplo, para demostrar la proporción:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{{d_1}^2}{d_2^2}$$

donde A_1, A_2, son las áreas de los círculos y d_1, d_2, son sus diámetros tenían que poseer algún método que "manejase" las magnitudes exactas y no sus aproximaciones.

En este sentido Platón, en su Teoría del Conocimiento afirmaba que era necesario un cocimiento fuera de la realidad sensorial para el manejo de tales problemas, el Método Exhaustivo de Eudoxio era una herramienta para tal fin.

Una línea de investigación desarrollada por los griegos es la referente a la Geometría de orden superior; es decir, la referente a otras curvas que no fueran ni las rectas ni los círculos y superficies que no fuesen ni los planos ni las esferas; investigaciones que se originan al intentar resolver los tres problemas conocidos como clásicos asociados a la solución de ecuaciones de grado mayor que dos. Por su valor en el desarrollo de la Geometría, estos problemas se detallan a continuación:

- ✓ **La duplicación de Cubo**: Consiste en construir el lado de un cubo que tenga el doble de volumen de un cubo determinado.

- ✓ **La trisección del ángulo**: Consiste en dividir un ángulo cualquiera en tres partes iguales.

- ✓ **La cuadratura del círculo**: Consiste en construir un cuadrado que posea igual área que un círculo dado.

La solución de estos problemas estaba sujeta a la condición que sólo fuese con regla y compás y los mismos no siempre tienen solución si se restringen solamente al uso de herramientas euclidianas. Intentar resolverlos trajo consigo una gran cantidad de resultados importantes para el desarrollo de la Matemática, como, por ejemplo, el Descubrimiento de las Secciones Cónicas, algunas curvas cuadráticas y cúbicas, y algunas curvas trascendentes; todo esto por parte de la cultura griega.

En su resumen, Eudemo manifiesta que Hipócrates de Chíos (un pitagórico) intentó, por primera vez, ordenar toda la Geometría en una cadena lógica a partir de unas cuantas definiciones y proposiciones. Otros matemáticos realizaron mejores intentos, pero fue Euclides (Matemático Griego del siglo III a. C) quien logró exitosamente esta tarea a través de **Los Elementos;** un compendio de 13 libros que contienen una cadena lógica y deductiva de 465 proposiciones referentes a la Geometría Plana y del Espacio, Teoría de Números y el Álgebra Geométrico Griego.

Los Elementos de Euclides es una de las mejores contribuciones que aportaron los antiguos griegos al desarrollo de la Matemática, donde la misma se formula a través de una axiomática material; es decir, por razonamiento deductivo de un conjunto de principios iniciales. El nivel de desarrollo de esta obra es tan elevado que se considera el primer progreso en la historia del pensamiento y la organización Matemática y por más de 2000 años ha dominado toda la enseñanza de la Geometría y su incidencia sobre el desarrollo de la Matemática no ha tenido precedente.

La cultura griega (500 a 200 a. C.) utilizaba procedimientos geométricos para hallar la solución de muchos problemas, entre ellos las ecuaciones de primero y segundo grado. Este fue el resultado del descubrimiento de los números irracionales y la ausencia de practicidad del sistema de numeración griega. Posiblemente, esto hizo que los griegos sintieran más seguridad ante las figuras geométricas que ante los números y por esta razón, Euclides desarrolló gran parte de la Aritmética y de la Teoría de Números con un matiz geométrico. Las magnitudes eran representadas por segmentos y el producto de dos de ellas a y b lo representaban por el rectángulo de los lados a y b.

Para encontrar la solución de ciertas ecuaciones de primero y segundo grado, los pitagóricos hacían uso especialmente de dos métodos: El Método de las Proporciones y el de la Aplicación de las Áreas.

El periodo del Álgebra Geométrica resuelve los problemas algebraicos con el apoyo de construcciones geométricas. La base la constituye el método de anexión de áreas cuyo propósito principal era resolver ecuaciones. Este método se puede utilizar para encontrar la solución de ecuaciones lineales y no lineales. Euclides, en **Los Elementos,** trata diversas ecuaciones cuadráticas según los métodos del Álgebra Geométrica. Además, Teodoro de Cirene, Teeteto y Eudoxo de Cnido la utilizan.

Veamos a continuación los procedimientos utilizados por la cultura griega para resolver algunas ecuaciones de primero y segundo grado: La proposición 12 del Libro VI de **Los Elementos** (pág. 107) trata sobre el cálculo de la cuarta proporcional de tres segmentos dados. Esta propiedad permite resolver “geométricamente” ecuaciones del tipo $ax = b$ cuyos coeficientes son positivos, considerando como segmentos: $AB = a$, $BC = b$, $AD = 1$ y $DE = x$.

Para resolver la ecuación lineal $ax = bc$, donde a, b y c son segmentos lineales dados, los griegos la consideraban como la expresión de la igualdad de las áreas ax y bc o también como una proporción o igualdad entre las dos razones $a{:}b$ y $c{:}x$, así al construir en este caso la cuarta proporcional x lo que se hacía usualmente era construir un rectángulo ABCD (ver figura abajo) de lados AD = b y AB = c y llevar sobre AD un segmento DE = a. Completando el rectángulo DEFC y trazando la diagonal EC y prologando la misma, corta en P la extensión de AB; luego, extendiendo DC y EF se tiene los rectángulos RSCF y SPBC. Se observa claramente que FR es el segmento buscado, puesto que el rectángulo RSCF tiene igual área que el rectángulo ABCD.

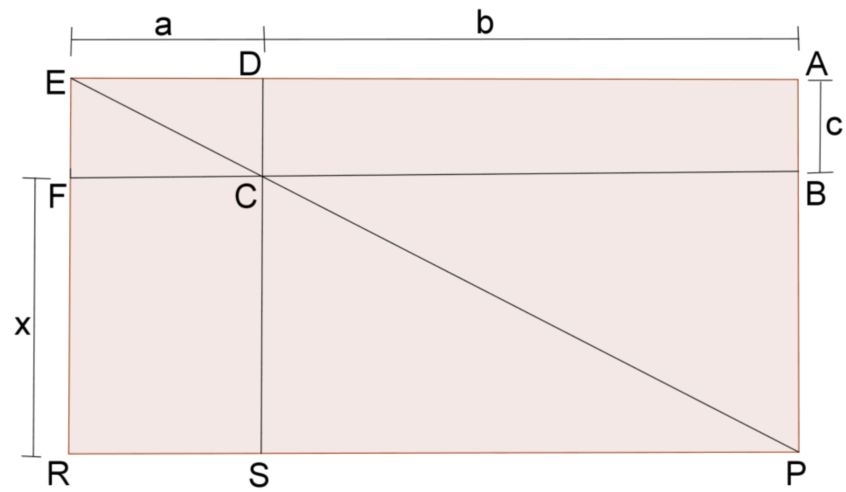


Figura 16

2.1.2.3 Geometría Helenística

El auge de la Geometría Griega está representado en Matemáticos como Arquímedes, Apolonio y Euclides. Todos los desarrollos siguientes de esta rama de la Matemática, inclusive hasta nuestra época, tienen alguna relación con algún trabajo de estos investigadores.

- Euclides, en su obra los **Elementos de Geometría**, coleccionó todos los saberes de aquellos tiempos, aportando así un sin número de proposiciones originales.

- Arquímedes realizó cálculos relacionados con el valor de π, las áreas del círculo y de la elipse, y los volúmenes del cono y de la esfera.

- Apolonio trabajó profundamente en las propiedades de las cónicas, conocimientos que posteriormente (siglo XVIII) sirvieron a Kepler en el descubrimiento de las leyes del movimiento de traslación de los planetas.

El trabajo de estos tres autores es muy amplio y de gran importancia para el desarrollo de la Geometría. Apolonio de Pérgamo, Matemático de la Escuela de Alejandría, nació aproximadamente en el año 262 a.C. dedicó la mayor parte de su vida a la universidad y estudió con los sucesores de Euclides; en su obra **Sobre lugares planos** realizó un estudio del círculo y en el libro titulado **De Seccione ratione** estudió el problema del trazado de una circunferencia tangente a otras dadas. A pesar de la gran cantidad de temas matemáticos que escribió, se destaca con su extraordinaria **Secciones Cónicas** trabajo que le dio el mérito de "El Mayor Geómetra" entre sus contemporáneos. Este trabajo está contenido en ocho libros y contiene casi 400 proposiciones referentes a las cónicas a través de un estudio minucioso y profundo de las mismas. De esta obra, los cuatro primeros libros se refieren a la Teoría Elemental General de las Cónicas y los cuatro restantes tratan de estudios más especializados.

El libro uno de la obra de Apolonio trata sobre la generación de las tres cónicas, para los cuales asignó los nombres de parábola (similar a línea que rodea una superficie); elipse (este mismo concepto con una "deficiencia"), e hipérbola (la misma figura con un "exceso").

El segundo libro trata sobre las asíntotas y de los ejes.

El tercer libro se refiere a las propiedades de los focos de la elipse e hipérbola y a proposiciones relacionadas con los triángulos, rectángulos y cuadrados, referentes a las cuerdas, asíntotas y tangentes.

El cuarto libro trata del número máximo de puntos de intersección que pueden contener las cónicas y sobre los puntos de tangencia posibles entre ellas.

El quinto libro contiene problemas de límites y de los centros de curvatura.

El sexto libro narra sobre la semejanza de cónicas.

El libro séptimo contiene temas sobre los valores relativos de los diámetros conjugados.

Y último u octavo libro contiene problemas relacionados con el contenido del libro séptimo.

La Geometría Griega llegó a su término con la muerte de Apolonio y los pocos geómetras que le sucedieron se dedicaron posiblemente a desarrollar, de manera independiente, teorías que ya se encontraban inmersas en trabajos de sus predecesores.

Euclides es famoso por haber recopilado toda la información Matemática de su época en su obra titulada **Los Elementos,** la cual se compone de 13 libros y desarrollada por medio del método axiomático.

- Ningún otro texto de Geometría se equipará con **Los Elementos** y la forma en que Euclides lo redacta es muy especial, por ejemplo en su contenido:

> Los términos propios de la teoría jamás se introducen en ella, sin antes haber sido definidos. Las proposiciones jamás se usan sin antes haber sido demostradas, con la excepción hecha de un pequeño grupo de proposiciones primeras que han sido elegidas de tal manera que puedan ser aceptadas por cualquier individuo en su sano juicio (Yagüe, 1998, p.69).

En **Los Elementos** el autor se introduce con una lista de definiciones:

- ✓ Un punto es aquello que no tiene parte.
- ✓ Una línea es una longitud “sin ancho”.
- ✓ Una superficie es aquello que tiene únicamente longitud y ancho.
- ✓ Un ángulo plano es la inclinación entre dos rectas de un plano que se cortan en un punto y que no están contenidas en una línea recta.
- ✓ Líneas rectas paralelas son aquellas que, aun siendo extendidas indefinidamente en el mismo plano, no se cortan en ninguna de las direcciones.

Luego de que Euclides introduce las veintitrés definiciones primarias en **los Elementos,** procede con los Postulados. Estos se describen a continuación:

I) Es posible trazar una línea recta que vaya de un punto dado a otro, también dado.

II) Es posible producir una sola línea recta a partir de un segmento finito.

III) Es posible construir un círculo con cualquier centro y radio.

IV) Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.

V) Si una recta, al coincidir sobre otras dos, forma del mismo lado ángulos interiores menores que dos rectos, las dos líneas, si se prolongan, se cortarán del lado en que están los ángulos cuya suma es menor que dos rectos.

Posteriormente, se agregan otros supuestos denominados Nociones Comunes detallados a continuación:

1. Cosas iguales a una tercera son iguales entre sí.
2. Si a iguales sumamos lo mismo, obtendremos iguales.
3. Si a iguales restamos lo mismo, obtendremos iguales.
4. Cosas que coinciden con otras son iguales entre sí.
5. El todo es mayor que cualquiera de sus partes.

Los cuatro primeros postulados tienen un matiz de verificabilidad empírica indiscutible y hacen referencia a la posibilidad de realizar construcciones con regla y compás; pero el Quinto Postulado presenta una asimetría ya que es muy distinto ir y medir dos ángulos dados, que ir y prolongar indefinidamente dos rectas hasta que se corten. Esta asimetría es el resultado de que Euclides no utilizó este postulado durante las demostraciones de las veintiocho primeras proposiciones, de las cuales algunas afirmaban que, si la suma de los ángulos interiores es igual a dos rectos, entonces las rectas no se cortan (son paralelas). Ejemplos de algunas de estas proposiciones son:

- ✓ **Proposición I – 27**: Si una recta, que corta a otras dos, forman ángulos alternos internos iguales, dichas rectas serán paralelas.

- ✓ **Proposición I – 28**: Si una recta, que corta a otras dos, forman ángulos correspondientes iguales o internos colaterales iguales a dos rectos, dichas rectas serán paralelas.

La falta de simetría y congruencia del Quinto Postulado exigía una posible demostración del mismo, el cual hablaba de hechos que no eran verificables empíricamente, y más aún dado la situación de que los griegos tenían conocimientos de curvas que se aproximaban más y más unas a otras; pero nunca se cortaban como es el caso de las asíntotas de las cónicas. El intento por demostrar este postulado o de obtener o no el mismo a partir del resto de los axiomas fue una tarea de muchos siglos que trajo consigo interesantes resultados y por ende, el desarrollo de nuevas Geometrías.

Euclides fundó la Teoría de las Paralelas la cual se encuentra en el libro I de **Los Elementos**, teoría que ha tenido gran incidencia aún en obras geométricas modernas. La vida de Euclides es poco conocida, pero se sabe que fue el primer Profesor de Matemática en la prestigiosa Universidad de Alejandría y padre de la famosa Escuela de Matemática de Alejandría la cual perduró por mucho tiempo.

En el **libro I** se encuentran las definiciones, los axiomas y los postulados, así como también los criterios de congruencia; la primera demostración de este libro consiste en construir un triángulo equilátero de lados iguales a un segmento dado. El **libro II** hace referencia a pruebas geométricas de fórmulas tales como $a(b + c + d) = ab + ac + ad$; $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ y a la resolución geométrica de las ecuaciones $yx^2 + ax = b^2$ y $x^2 = ab$. **Los libros III y IV** contienen la geometría de círculos y los problemas de inscripción y circunscripción de Polígonos regulares. La teoría de la proporcionalidad de magnitudes se encuentra en el **libro V** y en él se establece un ejemplo de la manera en que Eudoxio utiliza la noción de magnitudes proporcionales para demostrar que la razón entre las áreas de dos círculos es proporcional a la razón de los cuadrados de sus diámetros.

En el posterior **libro VI**, se aplica la Teoría de Proporciones de Eudoxio y desarrolla los temas elementales de semejanza, en este se encuentra una generalización del Teorema de Pitágoras: “En triángulos rectángulos, la Figura en el lado subtendiendo el ángulo recto, es igual a las Figuras semejantes descritas en los lados que forman el ángulo recto”.

Los temas aritméticos se encuentran en los tres siguientes **libros (VII, VIII y IX)**, destacando contenidos de divisibilidad, de números primos, máximo común divisor y proporcionalidad entre números.

El **libro X** trata sobre La Teoría de Magnitudes Conmensurables e Inconmensurables y también de Magnitudes Racionales e Irracionales.

En el **libro XI** encontramos temas elementales de Geometría en el espacio, presentando algunas demostraciones deficientes, debido a que Euclides no contaba con ningún postulado relacionado con las propiedades de planos o rectas en el espacio.

La proposición 10 del **libro XII** demuestra que el volumen de un cono es igual a un tercio del cilindro con la misma base y altura, y en la proposición 18 se prueba que la razón del volumen entre dos esferas es la misma que la de los cubos de los radios respectivos; resultados que se obtienen a través del Método de Exhaución.

El **libro XIII** hace referencia a la construcción detallada de los poliedros regulares, contemplando que son inscribibles en una esfera. En la proposición 18 de este libro se construyen los lados de estos cuerpos y se demuestra que sólo cinco son poliedros regulares a los cuales se llamó los cinco cuerpos platónicos.

En **Los Elementos** Euclides cita el teorema que dice: Por tres puntos que no estén en línea recta puede pasar una circunferencia. En el libro uno de Los Elementos de Euclides se estudian figuras como el rombo y el trapecio, el triángulo y el rectángulo. El libro cuarto de esta obra se estudian los polígonos regulares. Esta obra sirvió de libro de texto obligatorio para todo aquel interesado en estudiar Geometría y por esta razón, es el libro científico con más ediciones conocido. Este Matemático, al saber, tuvo su formación en la Escuela Platónica de Atenas y no solamente fue el autor de **Los Elementos**, sino que escribió otros tratados geométricos, de los cuales algunos se han conservado hasta la fecha.

Arquímedes, uno de los Matemáticos más famoso de todos los tiempos y posiblemente el mayor de la antigüedad, nació en Grecia en la ciudad de Siracusa en la isla de Sicilia aproximadamente en el año 287 a.C., estableció para π el valor de 3,14, calculándolo por medio de su propio método llamado de los "perímetros", consideró además que "la línea recta es la distancia más corta entre las líneas de igual extremo". El método de más antigüedad conocido para la rectificación de la circunferencia es el de Arquímedes y consiste en tomar tres diámetros más la séptima parte de otro. Este investigador se ocupó también de la cuadratura del círculo, utilizando un procedimiento que no entraña la solución e inventó la espiral publicada en su obra denominada **Sobre las Espirales**. Arquímedes descubrió el teorema que lleva su nombre, el cual dice lo siguiente: La esfera equivale a dos tercios del cilindro, el cilindro a las dos terceras partes del cono circunscrito y el área de la esfera es igual a la lateral del cilindro, siendo esta proposición de gran importancia para este investigador. Otros aportes de este matemático a la Geometría fue la fórmula $A = 4 \pi r^2$ para determinar el área de una esfera, para la cual establece la proposición que dice "La superficie de una esfera es igual a cuatro veces su círculo máximo". En su libro Sobre la esfera y el cilindro estableció las fórmulas $V = \pi r^2 / 3 \times h$ y $V = 4/3\ \pi\ r^3$ para calcular el volumen de un cono y de una esfera respectivamente; en esta obra merece especial atención **El Postulado de Arquímedes** que dice así: Dados dos segmentos rectilíneos desiguales, siempre hay algún múltiplo finito del menor que es mayor que el otro. Puede decirse que los trabajos de Arquímedes son creaciones originales y no compilaciones de sus predecesores; son obras de alto nivel Matemático debido a su acabado, economía de presentación y rigurosidad en sus demostraciones; pero su principal contribución parece ser la anticipación en algunos de los métodos del cálculo integral. En su tratado Método Arquímedes proporciona información sobre el método que utilizó para descubrir gran parte de sus teoremas establecidos rigurosamente por su extensión del método audoxiano exhaustivo, utilizado sólo para descubrir resultados.

Durante esta etapa las aplicaciones de la Geometría fueron aprovechadas, porque se descubrieron varias curvas planas de orden superior. Cabe mencionar otros geómetras que en la parte final de la Geometría Helenística se destacaron por sus trabajos, tal es el caso de Claudio Ptolomeo, Herón, Menelao y Pappus.

Claudio Ptolomeo (siglo II d.C.), Geómetra Egipcio, quien realizó un minucioso estudio del círculo al establecer, en su obra **Sintaxis Matemática**, un sistema astronómico geocéntrico. Este Matemático enunció el teorema que lleva su nombre y que se formula diciendo: “En todo cuadrilátero inscrito, el producto de las diagonales es igual a la suma de los productos de los lados opuesto” García (s.f). Tolomeo también contribuyó al desarrollo de la Trigonometría como un tipo de apoyo a la Astronomía y dio a π el valor de 377 / 120 = 3,14166….

Herón se dedicó especialmente a las mediciones planas y del espacio; de igual manera, dio a conocer la fórmula del área de los polígonos regulares desde el triángulo al dodecágono, por ejemplo en sus libros **Dioptra y Métrica** estableció la fórmula del triángulo en función de sus lados A = $\sqrt{\mathrm{p}\,(\mathrm{p}-\mathrm{a})(\mathrm{p}-\mathrm{b})(\mathrm{p}-\mathrm{c})}$. Este matemático estudió los volúmenes de los cinco poliedros regulares y del tronco de pirámide.

Menelao, geómetra de origen griego del siglo I de nuestra era, aportó importantes elementos al desarrollo de la astronomía y esta manera, a la Trigonometría. Descubrió el teorema que lleva su nombre y que expone en su obra Esférica, referente a las Transversales o Principio de las Seis Dimensiones, cuyo enunciado es el siguiente: Toda transversal determina en los lados de un triángulo seis segmentos tales que el producto de tres no consecutivos es igual al producto de los otros tres.

Pappus (siglo III a.C.) con su obra **La Colección** fue la guía de los trabajos geométricos de la época y en la cual, a través de proposiciones originales, realizó mejoras y extensiones valiosas. Propuso un ingenioso procedimiento para encontrar dos medias proporcionales establecido en sus Colecciones Matemáticas. Pappus fue una de las últimas figuras destacadas en el desarrollo de la Geometría Griega, ya que después de él sus predecesores se limitaron a simples escritores y críticos secundarios; tal es el caso de, **Teón, Proclo y Eutocio**: “El primero es conocido por su edición de **Los Elementos** de Euclides, el segundo por su resumen de Eudemo y sus comentarios sobre Euclides, libro I, y el tercero por su comentario sobre Arquímedes” (Ríos y Casis, 1972, p.21).

2.2 Axiomatización de la Geometría

Karol Borsuk, Wanda Szmielew, Bolyai y Lobachevski desarrollan la Geometría Euclideana. En su obra **Fundamentos de la Geometría**, Bolyai y Lobachevski utilizan un sistema axiomático parecido al de Euclides; sólo que agregando aquellos axiomas que en Los Elementos son utilizados explícitamente. Se ha escogido la obra de Borsunk y Szmielew por su importancia debido a Hilbert, ya que ésta jugó un papel imprescindible en el desarrollo de la Geometría Axiomática; aparte de su gran belleza y concisión. Al desarrollar formalmente una Teoría Matemática se presupone la Lógica Matemática y la Teoría de conjuntos.

Axiomas

Los axiomas se dividen en cinco grupos: Axiomas de incidencia, Axiomas de Orden, Axiomas de Congruencia, Axiomas de Continuidad y un Axioma de Paralelismo.

La teoría que se desarrolla solamente tomando los cuatro primeros grupos de axiomas se llama Geometría Absoluta y consiste en aquellos teoremas válidos para la Geometría Euclidiana y para la Geometría de Bolyai y Lobachevski.

Los Axiomas de Incidencia es un grupo formado por nueve axiomas y antes de mencionarlos principiaremos con algunas definiciones.

Los puntos a, b y c son colineales si existe una recta L tal que a, b, c $\in$ L; de no ser el caso, diremos que a, b y c no son colineales.

Los puntos a, b, c y d son coplanares si existe un plano P tal que a, b, c, d $\in$ P, de lo contrario no son coplanares.

2.2.1 Axiomas de Incidencia

1. Para cualquier recta L, existen dos puntos distintos a y b tales que a, b $\in$ L.

2. Para puntos cualesquiera a y b, existe al menos una recta L tal que a, b $\in$ L.

3. Si los puntos a y b son distintos, existe a lo más una recta L tal que a, b $\in$ L.

4. Para cualquier plano P existen puntos no colineales a, b y c tales que a, b, c $\in$ P.

5. Para puntos cualesquiera a, b y c existe al menos un plano P tal que a, b, c $\in$ P.

6. Si los puntos a, b y c son no colineales, entonces existe a lo más un plano P tal que a, b, c $\in$ P.

7. Para cualquier línea L y cualquier plano P, si existen dos puntos distintos a y b tal que a, b $\in$ L y a, b $\in$ P, entonces L$\subset$ p.

8. Para planos cualesquiera P y Q, si existe un punto a tal que a $\in$ P y a $\in$ Q, entonces existe un punto b distinto de a y tal que b $\in$ P y b $\in$ Q.

9. Existen puntos no coplanares a, b, c y d.

Utilizando estos axiomas Borsuk y Szmielew demostraron quince teoremas, entre los cuales, a manera de ejemplo, citamos los siguientes:

Teorema 10

(I) Dado un punto p en la línea L, existe un punto q, distinto de p que está en L.

(I) Dados los puntos p y q de un plano P, existe un punto r de P que no es colineal con p y q.

(I) Dados tres puntos no colineales p, q y r, existe un punto s no coplanar con p, q y r.

Teorema 15

Dos planos distintos no se intersectan o su intersección es una línea recta.

2.2.2 Axiomas de Orden

Llamaremos a S la relación “estar entre” y S(a,b,c) lo leeremos “el punto b está entre los puntos a y c”.

O.1. Si S(a,b,c), los puntos a, b y c son colineales y distintos (Recuérdese que S(a,b,c) se lee ”el punto b está entre los puntos a y c”).

O.2. Si S(a,b,c), entonces S(c,b,a).

O.3. Si S(a,b,c), entonces ~S(b,a,c). Esto es, no S(b,a,c).

O.4. Si los puntos a, b y c son colineales distintos, entonces es cierta una y sólo una de las relaciones S(a,b,c), S(b,c,a), S(c,a,b).

O.5. Si los puntos a y b son distintos, existe un punto c tal que S(a,b,c).

O.6. Si los punto a y b son distintos, existe un punto c tal que S(a,c,b).

O.7. Si S(a,b,c) y S(b,c,d), entonces S(a,b,d).

O.8. Si S(a,b,d) y S(b,c,d), entonces S(a,b,c).

O.9. Dados en un plano P tres punto no colineales a, b, c y una recta K, si S(a,K,c) y $c \notin k$ entonces S(b,K,c) o S(a,K,c).

Los primeros 8 axiomas hacen referencia a propiedades de la relación S para puntos de una recta. El último es una propiedad respecto al plano.

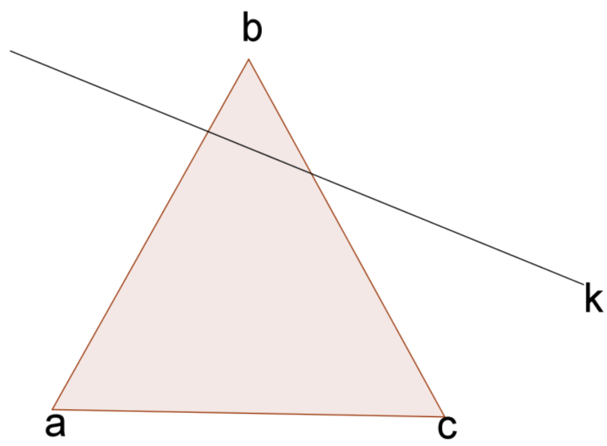


Figura 17

En esencia, el último axioma establece que si una recta corta a uno de los lados de un triángulo, entonces cortará a otro de los dos, y es conocido como el Axioma de Pasch (véase figura 17).

En la obra **Fundamentos de la Geometría,** mencionada anteriormente, con los Axiomas de Incidencia y Orden, se prueba hasta el teorema número 100. Un ejemplo de este caso es el siguiente teorema.

Teorema 18

Dados cualesquiera cuatro puntos a, b, c y d colineales, si “b está entre a y c” (S(a,b,c) y d está entre a y c, con b ‡ d, entonces o S(a,d,b) o S(b,d,c).

2.2.3 Axiomas de Congruencia

Estos axiomas expresan la relación entre segmentos ab y cd, escritos como ab ≡ cd ("el segmento ab es congruente con el segmento cd").

C.1 ab ≡ ab

C.2 Si ab ≡ cd, entonces cd ≡ ab

C.3 Si ab ≡ cd y cd ≡ pq, entonces ab ≡ pq

C.4 Si $S(a_1, b_1, c_1)$ y $S(a_2, b_2, c_2)$, $a_1b_1 \equiv a_2b_2$ y $b_1c_1 \equiv b_2c_2$, entonces $a_1c_1 \equiv a_2c_2$.

C.5 Dado un segmento pq y una semirrecta A de origen a, existe b en A tal que ab ≡ pq.

C.6 Si se tienen las congruencias entre los segmentos y orden entre los puntos que aparecen en las figuras:

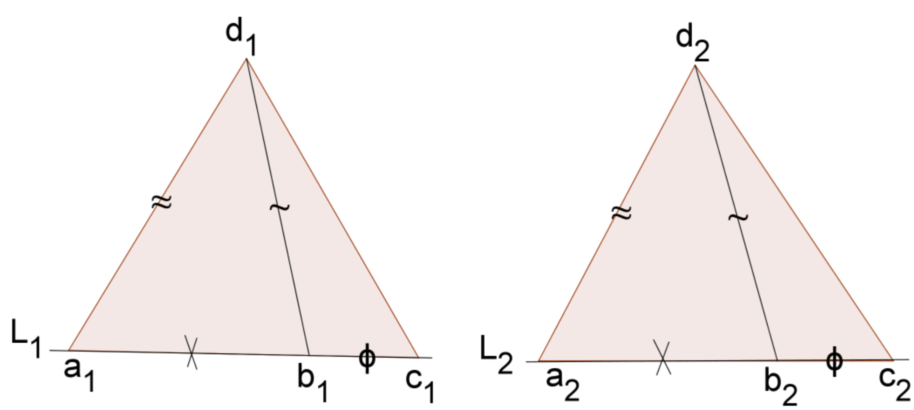


Figura 18

Entonces, también, son congruentes los segmentos d_1c_1 y d_2c_2, esto es $d_1c_1 \equiv d_2c_2$.

C.7 Dado un semiplano W con línea frontera K, un segmento ab contenido en K, y un triángulo (pqr), si ab ≡ pq existe un único punto c en el semiplano W tal que ac ≡ pr y bc ≡ qr.

Este teorema establece que si fijamos el semiplano sobre el que queremos construir una copia congruente de un triángulo con uno de sus lados sobre la recta frontera, tal copia es única. Estos axiomas son ricos en contenidos geométricos ya que hablan de la posibilidad de construir figuras congruentes y de cómo ciertas relaciones de congruencias entre segmentos implican otras congruencias.

2.2.4 Axiomas de Continuidad

C_0. Dados dos conjuntos de puntos X, Y arbitrarios y no vacíos, si existe un punto a tal que:

$$p \in X \quad y \quad q \in Y \ \text{ implica } S(a,p.q)$$

entonces existe un punto b tal que:

$$p \in X - b \ y \quad q \in Y - b \text{ implica } S(p,b,q).$$

Obsérvese que la idea de este axioma es expresar que, si todo el conjunto de puntos X está entre un punto a y el conjunto Y, entonces podemos escoger un punto entre los dos conjuntos. Con esta sencilla idea es posible probar el postulado arquimediano, utilizado por Arquímedes en varias de sus obras.

Al agregar el axioma de continuidad Borsuk prueba 66 nuevos teoremas, algunos de ellos relacionados con el paralelismo. Ejemplo de algunos de estos teoremas son:

Teorema 24

Existe por lo menos una línea y lo más hay dos líneas que pasan por un punto dado a y que sean paralelas a una línea recta L.

En todo triángulo, la suma de los ángulos interiores no es mayor que dos rectos.

Teorema 47

Si existe un triángulo para el cual la suma de los ángulos interiores sean dos rectos, entonces existe un rectángulo.

Teorema 48

Si para un triángulo la suma de los ángulos interiores vale dos rectos, esto sucede en todo triángulo.

2.2.5 Axiomas de Euclides

E. Para cualquier plano P, cualquier línea $L \subset P$ y cualquier punto $a \in P$ que no esté en L, existen a lo más una línea $K \subset P$, que pasa por el punto a y no intersecta la línea L.

2.2.6 Axioma de Bolyai - Lobachevski

BL. Para algún plano P_0, alguna línea $L_0 \subset P_0$ y algún $a_0 \in P_0$ que no está en L_0, existe al menos dos rectas distintas $K_1 \subset P_0$ y $K_2 \subset P_0$, que pasa por el punto y no intersecta la línea L_0.

2.3 Geometría Euclideana

Si agregamos, ahora el v postulado de Euclides, podemos probar teoremas como los siguientes:

Teorema 3

La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos rectos.

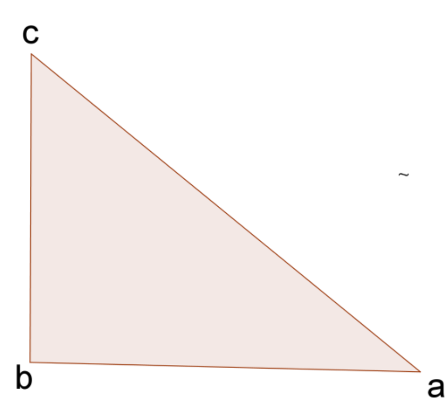
Teorema 6

Dado un punto a y una recta L, existe una única paralela K que pasa por a.

Teorema 16

(Pitágoras). Si en el triángulo (abc) el ángulo b es recto, entonces:

$$d(c,a)^2 = d(b,c)^2 + d(b,a)^2$$



Teorema 18

El Espacio Euclidiano S es isométrico al Espacio Cartesiano C_3.

2.4 Didáctica de la Geometría

La didáctica de la Geometría supone la capacidad del docente para identificar y aplicar los enfoques didácticos que caracterizan la enseñanza de esta rama de la Matemática, a través del análisis de situaciones concretas que despierten la fantasía matemática y estimulen el pensamiento espacial del que aprende; vinculándolo siempre que sea posible con las formas y tamaño del medio donde se desenvuelve el estudiante.

Para que el educador aplique con éxito estos enfoques didácticos de enseñanza, debe saber, con qué objetivo se enseña la Geometría en primaria. Al realizar un análisis a esta interrogante se concluye que las funciones de esta asignatura se pueden formular en las razones siguientes:

1. Dotar a los estudiantes de un instrumento lógico, que le permita pensar y actuar en forma científica en situaciones de la vida real, estimulando así su pensamiento espacial y la fantasía matemática.
2. Facilitarle al estudiante herramientas efectivas de organización y planificación de sus actividades a través de la cuantificación consciente del tiempo y del espacio.

3. Desarrollar la imaginación y creatividad del alumno para la creación de estrategias que le permitan resolver exitosamente situaciones problémicas de la vida real.
4. Valorar los modelos geométricos como aproximación aceptable de las formas, tamaños, elementos y relaciones de los objetos; a través del desarrollo de la sensibilidad científica.
5. Fortalecer las habilidades manuales a través de las construcciones geométricas.
6. Desarrollar los niveles de abstracción del alumno dado que es un cuerpo axiomático bien estructurado.

Para que el docente cumpla con tales propósitos y pueda identificar los enfoques didácticos propio de la enseñanza de la geometría, para su correcta aplicación en la escuela, debe tener presente que la nueva visión de la enseñanza de la geometría no es la de transmisora del conocimiento ya construido, sino más bien la de facilitadora de la adquisición del conocimiento por parte del que aprende. Además, siempre que sea posible, el maestro debe tratar de vincular la enseñanza de esta disciplina, con las formas y tamaños de los objetos de su medio.

No estamos de acuerdo con el maestro o profesor que se caracteriza por esa metodología tradicional de pizarra, esencialmente expositivo, de disertaciones magistrales o brillantes, llenas de buenos ejemplos que las ilustran muy bien, pero que en realidad se traducen en una mera transmisión de información convirtiendo al estudiante en un receptor de reglas y fórmulas olvidándose de la epistemología, la ingeniería didáctica y de las competencias matemáticas. La Ingeniería Didáctica aporta la metodología de investigación que se caracteriza esencialmente por que sus resultados son construidos a partir de un esquema experimental sustentado en las actividades didácticas realizadas en el aula de clase, es decir, sobre la base de una evaluación interna por medio de la realización, observación, concepción y análisis de dichas actividades a priori y a posteriori.

Esto no significa que debemos subestimar la técnica expositiva, dado que la misma se recomienda en aquellos contenidos con los cuales los estudiantes ya están relacionados, por lo que la clase seria sólo de consolidación. Es decir, que el alumno (a) ya tiene un conocimiento o dominio previo del tema, por lo que se le facilita comprender la exposición del docente.

Dada la importancia de la Geometría, su enseñanza merece especial atención, por lo que el docente debe tener total dominio de los conocimientos básicos que imparte para poder conceptualizarla; pero a su vez conocer la metodología adecuada para hacer la clase de geometría más fácil e interesante. La combinación de estos dos elementos permitiría el avance correcto del estudiante, es decir, iniciar de lo concreto por medio de operaciones lógicas y terminar en un punto que permita percibir el proceso abstracto, dado que el conocimiento humano inicia con la percepción.

Por ejemplo, el punto geométrico no existe materialmente siendo sólo un ente de razón. Partir del mundo real para que a través de operaciones lógicas se pueda obtener el concepto teórico de punto supone un proceso complejo que muchas veces el niño no alcanza o no logra dar ese “salto de abstracción”. De esta manera no concibe que el punto que capta visualmente sea el “punto matemático”, por ello para que logre su compresión hay que resaltar que nuestros sentidos son limitados, por lo que no es posible la percepción a nivel intelectual. Esto se logra únicamente cuando el individuo ha alcanzado el **dinamismo intelectual**, que no es más que la capacidad de la inteligencia para continuar un proceso que materialmente ha terminado.

Preguntamos entonces, ¿a qué edad el niño (a) logra ese dinamismo intelectual? En su desarrollo mental (según Piaget) de los 2 a 7 años se encuentra en la etapa que implica desde la acción y la representación imaginada y estática, de los 7 a 12 años el espacio de las operaciones concretas, es decir, con objetos manipulables y después de los 12 años el niño finalmente es capaz de hacer la abstracción de un concepto sin que materialmente el objeto este presente, elaborando así mentalmente sus relaciones y deducciones.

El docente debe saber que la transformación de un cuerpo físico o natural a un cuerpo geométrico es un proceso mental llamado abstracción cuya realización exige la aplicación de ciertas leyes, las cuales están directamente relacionadas con el desarrollo intelectual del alumno. Esto significa que, aunque la Geometría como ciencia es un cuerpo abstracto compuesto por definiciones, axiomas, postulados y teoremas, la Geometría como asignatura, particularmente en primaria, es un conjunto de modelos matemáticos que el alumno a partir de las observaciones y el análisis de las formas de los objetos de un medio, deberá construir considerando las leyes psicológicas del desarrollo intelectual en el proceso de abstracción; pues cada cuerpo o figura geométrica es un bosquejo mental, consiente, como resultado de la abstracción.

Existen algunos modelos didácticos para la enseñanza de la geometría que permiten al educador hacer del acto docente un momento significativo que facilita el aprendizaje de los estudiantes y hacer de sus clases una actividad dinámica e interesante. A continuación, se describen algunos de estos modelos.

2.4.1 El Modelo de Van Hiele

El interés de clasificar el estado de desarrollo cognitivo que posee el estudiante tuvo importantes resultados con la aparición de los “niveles de razonamiento matemáticos” de la pareja Van Hiele.

La expresión “etapa” o “nivel” es indicativa de una partición en fases, como producto de distinguir las características generales de la mayor cantidad de los miembros de un grupo respecto a otro, en relación del cambio que se genera en la estructura intelectual en términos del aprendizaje, es decir, lo que es, o no, capaz de pensar en un momento dado.

El modelo de Van Hiele es una teoría de enseñanza y aprendizaje de la geometría, que se origina en 1957 con el matrimonio holandés formado por Dina

Van Hiele- Geldof y Pierre Van Hiele en sus disertaciones doctorales en la universidad de Utrecht, Holanda.

Se entiende que el niño aprende progresivamente atreves de una secuencia regular de etapas, en una transferencia que va desde la dependencia inicial del mundo real a la habilidad para captar el significado de proposiciones abstractas presentadas de manera simbólica.

Los esposos Van Hiele observan el proceso de aprendizaje como discontinuo, revelando la existencia de niveles, donde cada uno tiene su propio lenguaje y por consiguiente si el educador se está dirigiendo a un nivel superior al del alumno, no existe la posibilidad de una comunicación significativa con él. Según esta pareja, el razonamiento de la elaboración de conceptos geométricos pasa por cinco niveles, los cuales constituyen el principal aporte de este modelo.

2.4.1.1 Niveles de razonamiento del modelo de Van Hiele

Los Van Hiele señalan cinco niveles de razonamiento que a continuación se detallan:

1. **Visual:** Los conceptos son concebido como un todo o en forma global, es decir, no se toma en cuenta elementos ni propiedades de las figuras. Un niño cuyo razonamiento se encuentre en este nivel sólo reconocerá las formas de ciertas figuras geométricas como un todo, ignorando o

confundiendo sus componentes o partes que la forman. Por ejemplo, un rectángulo puede reconocerse por parecerse a una puerta y no por poseer lados paralelos dos a dos.

2. **Descriptivo:** en este segundo nivel se distinguen las partes y atributos de las figuras, estableciéndose ciertas propiedades de manera experimental. Aquí el niño se basa analíticamente en los componentes que forman una figura, como por ejemplo los lados y los ángulos, los cuales son utilizados para describirla o caracterizarla. Un niño que razona analíticamente reconoce que al girar un cuadrado en la página no se afectará su cuadratura.

3. **Abstracto o de relaciones:** a través de razonamientos informales se establecen propiedades o definiciones abstractas que permiten determinar un concepto. En este nivel el niño puede clasificar y ordenar figuras geométricas, es decir, comprende las relaciones abstractas entre clases generales de figuras. Por ejemplo, un niño que razona abstractamente en este nivel reconoce que el cuadrado es un caso especial del rectángulo y este un caso especial de paralelogramo. Aquí se establecen conclusiones lógicas y se puede realizar clasificaciones.

4. **De razonamiento formal:** da inicio el razonamiento matemático formal, operando a través de un conjunto de leyes lógicas, axiomas y teoremas, a partir de los cuales se construyen conceptos matemáticos. En este nivel lo

primordial es la aplicación escrita y correcta, de las leyes lógicas de la matemática.

5. **De rigor o axiomático:** en este nivel el estudiante puede hacer comparaciones de sistemas axiomáticos basándose en un conjunto de axiomas y así estudiar geometría sin la presencia de modelos concretos. De esta manera el estudiante es capaz de operar diversas geometrías y cada una con su propio sistema de axiomas. Este nivel es conveniente para estudiantes universitarios con buena capacidad y formación geométrica, no así para escuelas elementales o estudiantes del nivel medio.

Según los contenidos y logros de aprendizaje de los programas actuales de educación primaria el desarrollo del pensamiento geométrico en primero y segundo grados, corresponden al primer nivel de este modelo, el tercer grado obedece al segundo nivel y cuarto, quinto y sexto grados al tercer nivel. Podemos decir entonces que los niveles no están asignados a una edad específica y que los métodos de enseñanza y la experiencia personal son factores imprescindibles en el proceso de razonamiento.

2.4.1.2 Propiedades del modelo de Van Hiele

Este modelo goza de las siguientes propiedades:

- **Secuencialidad:** no se puede cambiar o alterar la secuencia de adquisición de los niveles de razonamiento, es decir, para pasar a cualquiera de ellos, el estudiante, tiene que haber adquirido los anteriores.

- **Especificad del lenguaje:** el lenguaje de cada nivel es diferente y propio, ya que incluye la interpretación que se le da a algunos vocablos y expresiones, evitando así la incomprensión. Por ejemplo, "demostrar" tiene significado diferente en cada nivel.

- **Paso de un nivel al siguiente**: esto lo hace el estudiante de forma brusca (según los Van Hiele), esto es, inicia en el primer nivel según sus características y en algún momento dado observa la Geometría de otra manera, es decir desde la perspectiva del siguiente nivel.

- **Globalidad o Localidad:** esto significa que un individuo puede razonar a cierto nivel para un concepto, pero posiblemente lo haga en otros niveles para otro concepto.

- **Instrucción:** el paso de un nivel al siguiente no se considera un aspecto biológico, ya que influye en gran medida la instrucción recibida y la experiencia personal. No hay edad específica para la adquisición de los niveles, inclusive hay estudiante que nunca llegan al cuarto nivel y algunos ni siquiera al segundo.

2.4.1.3 Las fases del modelo de Van Hiele

Los Van Hiele elaboran una propuesta constructivista que permite orientar la clase siguiendo este modelo, dado que, para ellos, es el estudiante quien construye su propio conocimiento. Para esto proponen cinco fases secuenciales de aprendizaje, cuyo objetivo es favorecer el avance del estudiante de un nivel al siguiente.

- **Primera fase o de información:** tiene como objetivo obtener información mutua docente- alumno. El docente investiga qué saben los alumnos sobre el tema a tratar y la manera de razonar de los mismos, a través de preguntas exploratorias. Esto permite al profesor identificar los conocimientos de entrada y a los alumnos conocer la dirección u objetivos que el docente se propone alcanzar, con relación al tema abordado.
- **Segunda fase o de orientación dirigida:** los estudiantes van descubriendo lo más importante de ese nivel, dirigidos por el profesor. Esta fase es primordial ya que es aquí donde los alumnos construyen los aspectos más relevantes del nivel, permitiéndole acceder al siguiente. Los contenidos y material se seleccionan en base al nivel de razonamiento de los alumnos.
- **Tercera fase o explicitar:** el propósito de la misma es que los estudiantes fortalezcan el vocabulario propio del nivel y que sean conscientes de las propiedades y características aprendidas con anterioridad. En esta fase la

participación del docente es minimizada y las discusiones son guiadas para que el alumno se apropie del lenguaje geométrico pertinente.

- **Cuarta fase o de orientación libre:** esta fase es orientada a consolidar los elementos básicos del nivel, proporcionándole materiales a los alumnos, y a través de las instrucciones del profesor se le permite al estudiante resolver situaciones nuevas con los conocimientos previos adquiridos.
- **Quinta fase o de interrogación:** en este punto se invita al estudiante a reflexionar sobre su participación en las fases anteriores. Su finalidad es establecer y completar la red de relaciones propias de ese nivel. El docente debe facilitar un resumen de lo aprendido y exigir al alumno memorizar los resultados más importantes.

2.4.2 Modelo de enseñanza de la Geometría por indagación

El estudio de la Geometría ha tenido diferentes enfoques, desde sus orígenes en Egipto, hasta nuestros días. Actualmente en Panamá, se ha dado la transición del enfoque conductista al constructivista, pero al parecer este último no ha llenado las expectativas esperadas, posiblemente por la falta de innovaciones didácticas en el acto docente que permitan mejores avances de esta teoría. Esto implica un cambio en la manera de desarrollar las clases y no continuar con los mismos estilos de enseñanza. Es aquí donde **la enseñanza de la Geometría por indagación** surge como estrategia metodológica de gran importancia, la cual pretende que el alumno a través de experiencias de laboratorio descubra el nuevo conocimiento subordinado en los procesos de construcción del saber matemático, por medio de una búsqueda orientada, mediada, activa, lúcida y heurística. En esta estrategia didáctica es el docente quien debe propiciar un ambiente apropiado para que el estudiante descubra los nuevos conocimientos y a través de una situación problémica puedan dar inicio a un proceso de indagación que les conduzca a la solución.

Hay que resaltar que la situación problémica que plantea el modelo de enseñanza de la geometría por indagación obedece a una situación didáctica bien pensada y elaborada por el maestro o profesor, a través de la cual los alumnos se introducen en los nuevos contenidos. La introducción de los contenidos el docente deberá hacerlo de manera agradable y que exprese el sentido de la orientación de lo se va a estudiar.

El planteamiento de situaciones problémicas y su resolución acostumbra al estudiante a analizar, observar y relacionar de manera precisa, evitando evaluaciones precipitadas y equivocadas.

2.4.2.1 Consideraciones generales para la enseñanza de la Geometría por indagación

Este modelo de enseñanza de la Geometría se fundamenta en los siguientes aspectos:

- ✓ Conocer los conocimientos previos de los estudiantes a través de un diagnóstico, al momento de interactuar con el nuevo saber.
- ✓ La exposición del tema debe ser clara de manera que de una idea especifica de lo que se va a estudiar y no así de manera formal.
- ✓ Presentación de una situación problémica a través de la cual los estudiantes puedan dar inicio a un proceso de indagación que les permita buscar la solución.
- ✓ Presentar actividades secuenciales, a manera de sugerencias, que les permita a los alumnos descubrir las reglas y conceptos que se pretenden.
- ✓ Fijación del nuevo conocimiento.
- ✓ Por medio de situaciones diferentes, validar el nuevo conocimiento.
- ✓ Aplicaciones del nuevo saber en situaciones de la vida real.
- ✓ Evaluación del nuevo conocimiento frente a estrategias equivalentes con los cuales cuentan los alumnos.

2.4.2.2 Competencias que se pretenden lograr con el modelo de Geometría por indagación

Actualmente son muchas las instituciones educativas interesadas por unificar las competencias cognitivas que nuestros estudiantes deben poseer al término de un periodo o carrera de estudio y este modelo no es ajeno a esta situación, por lo que se presenta a continuación una lista de competencias propias de los estudiantes que reciben cursos de Geometría:

- ✓ Desarrollo de la intuición espacial: Perspectiva, medida, longitud, proporción, etc.
- ✓ Capacidad de construcción en diferentes dimensiones y de representación gráfica.
- ✓ Capacidad de identificar inconsistencia.
- ✓ Adquisición del lenguaje matemático básico para una buena expresión matemática.
- ✓ Adquisición de los automatismos de razonamiento lógico.
- ✓ Desarrollo de la agilidad mental en el cálculo o estimación de valores.
- ✓ Capacidad de crear estructuras formales.
- ✓ Capacidad de plantear situaciones problémicas en forma simbólica.
- ✓ Capacidad para la interpretación de tablas y funciones.
- ✓ Capacidad de lectura e interpretación de datos o características cualitativas o cuantitativas.
- ✓ Capacidad para la aplicación de saberes geométricos en la vida real.
- ✓ Capacidad para la representación de problemas concretos en función de variables.
- ✓ Desarrollo de habilidades para la evaluación de los resultados de problemas geométricos resueltos.
- ✓ Valoración de la geometría como herramienta de solución en problemas de la vida real.

También hay que resaltar que los recursos lúdicos son una herramienta didáctica de gran relevancia para el modelo de la enseñanza de la geometría por indagación, ya que obedecen a los intereses de los alumnos conduciéndolos a la expresión y al rigor lógico. De esta manera se someten a las exigencias normativas aceptando las leyes de ordenamientos lógicos en planteamiento y resolución de problemas. Por otro lado, el juego libre les brinda la oportunidad de hacer asociaciones y combinaciones diversas. El juego les enseña a plantear los problemas de manera original y a indagar nuevas alternativas de solución. En este sentido caben dos modalidades de juegos:

- Lógicos- Dirigidos
- Libres- Creativos

En el primer caso, el niño acepta y se ejercita en las reglas establecidas y en el segundo caso busca nuevas vías y procedimientos para hallar soluciones. Estas dos modalidades son de importancia para el quehacer docente, pero para el tema que estamos abordando le es más beneficioso los juegos libres y creativos, ya que los primeros son más de carácter conductista y se busca fortalecer la enseñanza por descubrimiento o búsqueda de las reglas, fórmulas o principios matemáticos. También hay que destacar que una vez se fije el nuevo conocimiento los primeros juegos (lógicos – dirigidos) son beneficiosos para reafirmar el dominio de propiedades ya conocidas.

2.4.2.3 Actividades que favorecen el estudio de la Geometría por indagación

A continuación, se detallan una serie de actividades que deben ser consideradas por el maestro al momento de enseñar Geometría:

1. **Observación y manipulación**

- Observar y manipular objetos colocados en correspondencia.
- A través de la manipulación establecer correspondencias entre objetos.
- Clasificar y comparar objetos, estableciendo previamente algún criterio (color, forma, tamaño, etc)
- Utilizar la representación gráfica para las correspondencias establecidas.
- Formar y determinar conjuntos.
- Observar hechos y fenómenos, y describirlos considerando lo espacial y temporal.
- Observar cuerpos sólidos y describirlos o caracterizarlos.
- Plegado y desplegado de cartulinas para analizar o construir sólidos.
- Asignar con letras (a, b,c, …) las longitudes de segmentos en una figura.
- Asignar con letras ($\alpha, \beta, \theta, \ldots$) las medidas de los ángulos en una figura.
- Extraer información de gráficas o diagramas presentados.

2. **Reconocimiento y resolución de situaciones problémicas**

- Plantear problemas de la vida cotidiana.
- Distinguir entre hipótesis y tesis.
- Identificar problemas y establecer, de forma gradual, los pasos para resolverlos.
- Comprobar las respuestas de los problemas resueltos.

- Construir diagramas que se ajusten a la realidad del problema dependiendo de la perspectiva matemática y del entorno de su comunidad con el propósito de facilitar su análisis.

3. Intuición espacial

- Realizar movimientos de planos con figuras adecuadas.
- Calcular distancias.
- Observaciones y predicciones de transformaciones de proyecciones, figuras y conceptos.
- Investigar ejes de simetrías.

4. Traducción del pensamiento cuantitativo y cualitativo en términos y expresiones matemáticas.

- Realizar observaciones que puedan traducirse en datos numéricos y clasificarlos.
- Plantear expresiones matemáticas que se ajusten a la vida real.
- Convertir una expresión del lenguaje cotidiano al lenguaje matemático.
- Plantear relaciones matemáticas básicas en los problemas.
- Resolver una variable en función de otra.

TERCER CAPITULO

MARCO METODOLÓGICO

3.1 Definición del problema

Los contenidos sobre Geometría contemplados en los programas de primaria abarcan una gran cantidad de temas cuyo dominio requiere un conocimiento amplio de los mismos. Si analizamos la formación del docente de primaria, observamos que durante su educación superior el conocimiento adquirido en Matemática es muy básico, pues el currículo de la Licenciatura en Educación de la Universidad de Panamá, antes de su reestructuración (año 2013), contemplaba sólo un curso de Matemática y dos de didáctica de esta disciplina. A pesar que el programa actual de esta carrera incluye tres cursos de Matemática y uno de didáctica son pocos los maestros egresados de él que se encuentran laborando. Como todos sabemos la Geometría requiere mucha práctica y un profundo análisis para lograr su dominio, es por esto que ésta investigación plantea responder a la siguiente interrogante:

¿Posee el maestro los conocimientos geométricos básicos y necesarios para facilitar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría en VI° grado?

3.2 Sistematización del problema

- ¿Cuáles son los conocimientos geométricos que posee el maestro de VI° grado al impartir esta asignatura?
- ¿Está preparado el maestro para enseñar Geometría en VI° grado?

- ¿Presenta el maestro de VI° grado dificultad en el dominio de conocimientos y manejo de recursos didácticos para la enseñanza de la Geometría?

3.3. Hipótesis del trabajo

El maestro que imparte clase en VI° grado presenta un bajo nivel de dominio en los conocimientos geométricos básicos y en su didáctica para facilitar el aprendizaje de la Geometría, en este nivel de escolaridad.

3.4 Hipótesis estadística

La media Aritmética obtenida por medio del test de conocimiento sobre el dominio de contenidos geométricos básicos para la enseñanza de la Geometría en VI° grado por los maestros, es significativamente menor que 71 a un nivel de significación de 5%.

3.5 Tipo de investigación

Este estudio es de carácter descriptivo dado que se denotará y connotará las principales características del maestro de primaria que imparte clase en VI° grado en lo referente al tipo de bachillerato, modalidad de estudio del mismo (presencial, semipresencial), turno de estudio, agrado por la Geometría y promedio en matemática. También se quiere analizar si el docente egresado de la Universidad de Panamá, Instituto Pedagógico Superior Juan Demóstenes Arosemena o cualquier otro Centro de Estudios Superiores del país, posee los conocimientos básicos necesarios sobre Geometría con el fin de poder enseñarla en el nivel primario.

Al cursar, los estudiantes del nivel primario a la pre-media, se observa que un gran número de ellos tiene poco o bajo dominio de los conocimientos geométricos básicos y necesarios que deben poseer para hacerle frente a las diferentes exigencias que requiere este nivel, y más dificultades presentarán al ingresar a otros niveles superiores, esto se puede confirmar a través de nuestra propia experiencia como docente , así como con las estadísticas del Ministerio de Educación y sobre todo con la información arrojada por el estudio TERCE, (Tercer estudio regional comparativo y explicativo), en donde los estudiantes que participaron de este estudio no obtuvieron logros mínimos aceptables en las asignatura de Matemática, entre otras. Es decir, si bien el promedio regional de logros de aprendizaje mejoró en todos los grados y áreas evaluados en comparación con el SERCE, **la mayoría de los estudiantes sigue concentrándose en los niveles más bajos de desempeño** y son pocos los que se ubican en el nivel superior. Esto se traduce en que, aunque se logró mejorar el desempeño escolar, a nivel general en casi todos los países participantes de América Latina, todavía "continúan pendientes importantes desafíos en materia de **calidad y equidad**", según afirmó el director de la Oficina Regional de Educación para América Latina y el Caribe, Jorge Sequeira.

Según el TERCE, Panamá presenta **puntajes significativamente más bajos que el promedio regional** en todas las áreas y grados evaluados. En 3°, los promedios en Lectura y Matemática fueron de 670 puntos y 664 respectivamente, lo que se traduce en una Media significativamente inferior al promedio del resto de los países evaluados, que es de 700 puntos en cada prueba; mientras que en 6° en Lectura se alcanzó un promedio de 671 puntos, en Matemática 644 y en Ciencias Naturales 675, lo que también ubica a Panamá en un promedio más bajo que los demás países.

Por otro lado, los resultados de las pruebas de admisión tanto de la Universidad de Panamá como de la Tecnológica reflejan un bajo rendimiento de los estudiantes en Geometría al momento de querer ingresar a estos Centros de Estudios Superiores. De tal manera que se explorará el manejo de conocimientos y recursos didácticos utilizados en la enseñanza de la Geometría por los docentes que imparten VI° grado.

3.6 Variables

3.6.1 Conocimientos básicos de Geometría: Son los conocimientos del área de Geometría que se enseñan en VI° grado, según el programa del Ministerio de Educación. A continuación, se detallan los contenidos:

Área de Geometría

1. Ángulos internos y externos
2. El triángulo
    - ✓ Clasificación
3. Paralelogramo
    - ✓ Concepto

- ✓ Elementos (altura, base, lado, ángulos, Vértice, diagonal)
- ✓ Trazado

4. Círculo y circunferencia
   - ✓ Concepto y diferencia
5. Elementos del círculo
   - ✓ Definición
   - ✓ Sector circular
   - ✓ Segmento circular
   - ✓ Semicirculo
   - ✓ Corona circular
   - ✓ Trapecio circular
6. Perímetro o longitud de la circunferencia.
   - ✓ Concepto
   - ✓ Valor de pi
   - ✓ Fórmula
7. Área del círculo
   - ✓ Concepto
   - ✓ Fórmula
8. Los pitagóricos y sus aportes
   - ✓ El teorema de Pitágoras
   - ✓ El triángulo rectángulo
   - ✓ Concepto
   - ✓ Elementos

- ✓ Aplicaciones

3.6.2 Dominio del área de Geometría que se enseñan en VI° grado en el nivel primario: Para determinar el nivel de dominio se tomará en cuenta los resultados de un test o prueba sobre los temas que incluya el área de Geometría en los programas de primaria. Este examen tendrá un valor de 100 puntos distribuidos en 30 criterios relacionados con contenidos geométricos contemplados por el MEDUCA y el nivel de dominio se ubicará de la siguiente manera:

Nivel de Dominio	Rango (puntos)
Excelente	100,0 a 91,0
Bueno	90,9 a 81,0
Regular	80,9 a 71,0
Bajo	70,9 o menos

3.7 Población y muestra

La población para este proyecto de investigación fueron 89 escuelas pertenecientes a seis zonas escolares de la provincia de Darién las cuales concentran la mayor cantidad de centros educativos, utilizándose para ello la técnica de racimo, tomando como muestra a 31 educadores de 30 escuelas que imparten clase en VI° grado a los que se les aplicó un cuestionario y un test de conocimiento relacionado con los contenidos geométricos que importen en este nivel.

3.8 Instrumentos

Los instrumentos que se utilizarán para conocer el nivel de conocimiento y el manejo de recursos didácticos que poseen los docentes de VI° grado consta de dos partes, las cuales son:

3.8.1 Primera parte: A través de una encuesta se determinará las características académicas del docente de VI° grado en su bachillerato (turno de estudio, modalidad de estudio, promedio de Matemática en el bachillerato, Interés por la Matemática, etc), por medio de un cuestionario que permitirá conocer el manejo y utilización de recursos didácticos en el área de Geometría.

3.8.2 Segunda parte: Se confeccionará una prueba que constará de treinta ítems para determinar el nivel de dominio de los conocimientos en el área de Geometría.

3.9 Procedimiento

Para la realización de este proyecto se seguirán los siguientes pasos:

- ✓ Selección de la muestra
- ✓ Confección del proyecto de investigación
- ✓ Elaboración de los instrumentos
- ✓ Determinación de la Validez y confiabilidad de los instrumentos
- ✓ Aplicación de los instrumentos a los maestros de VI° grado que imparten clase en 30 escuelas primarias seleccionadas
- ✓ Procesamiento de la información

- ✓ Análisis e interpretación de los datos
- ✓ Conclusiones
- ✓ Recomendaciones

3.10 Diseño de la investigación

Se realizará el proceso de investigación, de la enseñanza de la Geometría con un grupo de maestros, con el que se pretende verificar la validez de la hipótesis, utilizando, durante el estudio, los contenidos geométricos y recursos didácticos impartidos y utilizados en los programas de Matemática de primaria con docentes de VI° grado. Este grupo de maestros se evaluará de manera objetiva a través de un test de conocimiento, entrevistas y encuesta; y dichos resultados se compararán de manera estadística para garantizar así la fiabilidad de los resultados.

3.11 Fuente de información

Entre las fuentes primarias utilizadas para recopilar información, podemos mencionar a los docentes de VI° grado que imparten clase en treinta escuelas primarias de la provincia de Darién. Como fuentes secundarias para recabar información se encuentran: Documentos, textos e Internet.

3.12 Técnica e instrumento de recolección de datos

Se confeccionó una encuesta y un test de conocimiento dirigido a maestros que imparten VI° grado en treinta escuelas de la provincia de Darién, conociéndose la opinión, el nivel de conocimiento y el manejo en la aplicación de recursos didácticos en Geometría del docente seleccionado.

La encuesta y el test poseen una estructura lógica que permanece inalterada durante todo el proceso de la investigación. Las respuestas se eligen de manera especial y de la misma forma, se determinan las posibles variantes de respuestas estándares facilitando así el análisis de los resultados por métodos estadísticos.

Las preguntas y criterios se diseñaron con el fin de que se puedan sumar todas las respuestas de los participantes con el propósito de obtener resultados aplicables a toda la muestra. La información brindada está limitada únicamente a lo que nos dice el maestro, es significativa y puede compararse y generalizarse sus resultados. La encuesta y el test se aplicarán a todos los maestros de VI° grado de las treinta escuelas seleccionadas y se tabularán todos los resultados obtenidos en los mismos. Estos instrumentos son auto-administrados, pues se entregan y recogen en un mismo encuentro presencial. Las respuestas a las preguntas serán de opción múltiples, diseñadas de manera que no existan ambigüedades. La encuesta es realizada utilizando preguntas cerradas y abiertas de manera que permitan conocer la motivación, actitudes y opiniones sobre el conocimiento y manejos de recursos didácticos en la enseñanza de la Geometría.

El objetivo es conocer el dominio de conocimiento y aplicación de recursos didácticos para comparar los resultados obtenidos, sometiéndolos a las técnicas estadísticas.

3.13 Análisis estadístico de datos

El análisis de los resultados o de la información obtenida se realizó por medio de la estadística descriptiva e inferencial; a través de las cuales conoceremos, por ejemplo, el nivel de conocimiento y el dominio de recursos didácticos en la enseñanza de la Geometría en VI° grado por los maestros de la provincia de Darién.

Con los resultados obtenidos se aplica un análisis cuantitativo para probar la hipótesis sometiéndolos a la **distribución Normal** la cual permitirá el rechazo o no de la hipótesis estadística.

3.14 Limitaciones

El desarrollo de este proyecto de investigación tuvo las siguientes limitaciones:

- Convencimiento a los Directores de las diferentes escuelas seleccionadas.
- Disponibilidad de los maestros a resolver la prueba y contestar el cuestionario.
- Tiempo o momento para aplicar los instrumentos.
- Visitas a las escuelas debido a que la mayoría de ellas se encuentran en áreas distantes.

CAPÍTULO CUARTO

PRESENTACIÓN, ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE LOS RESULTADOS

Con el objetivo de determinar si el docente tiene conocimientos geométricos y didácticos para impartir clase de Geometría en VI° grado se le aplicó una encuesta y un test de conocimiento. Estos instrumentos se aplicaron a 31 docentes de primaria que imparten clase en VI° grado, en 30 escuelas de la provincia de Darién. Se presenta a continuación el análisis de los instrumentos aplicados:

4.1 Análisis de encuestas aplicadas a los docentes

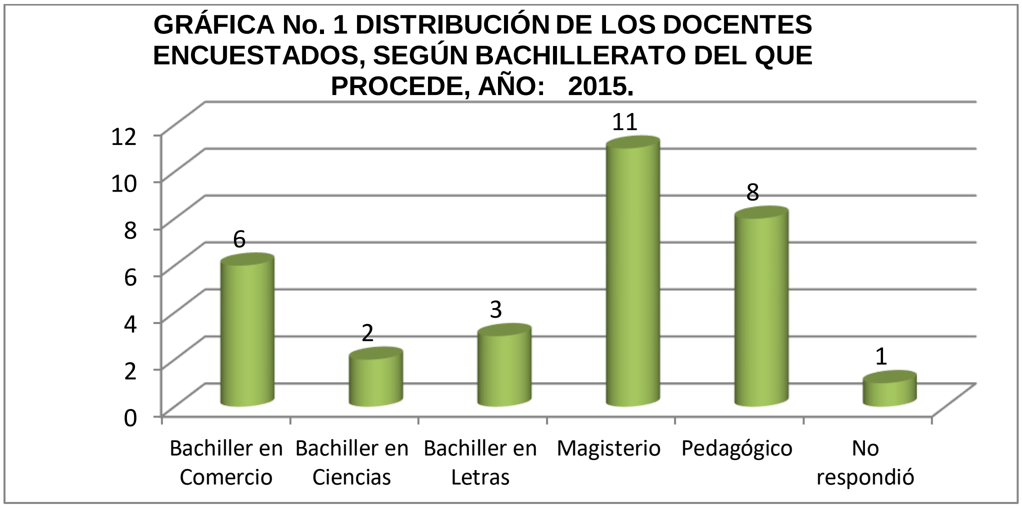
I Parte: Características académicas de los docentes encuestados

En cuanto a la distribución del tipo de bachillerato de los docentes encuestados se observa que la mayoría proviene del Bachiller Pedagógico, como se aprecia en el cuadro y gráfica No 1.

CUADRO N° 1. DISTRIBUCIÓN DE LOS DOCENTES ENCUESTADOS, SEGÚN BACHILLERATO DEL QUE PROCEDE. AÑO: 2015.

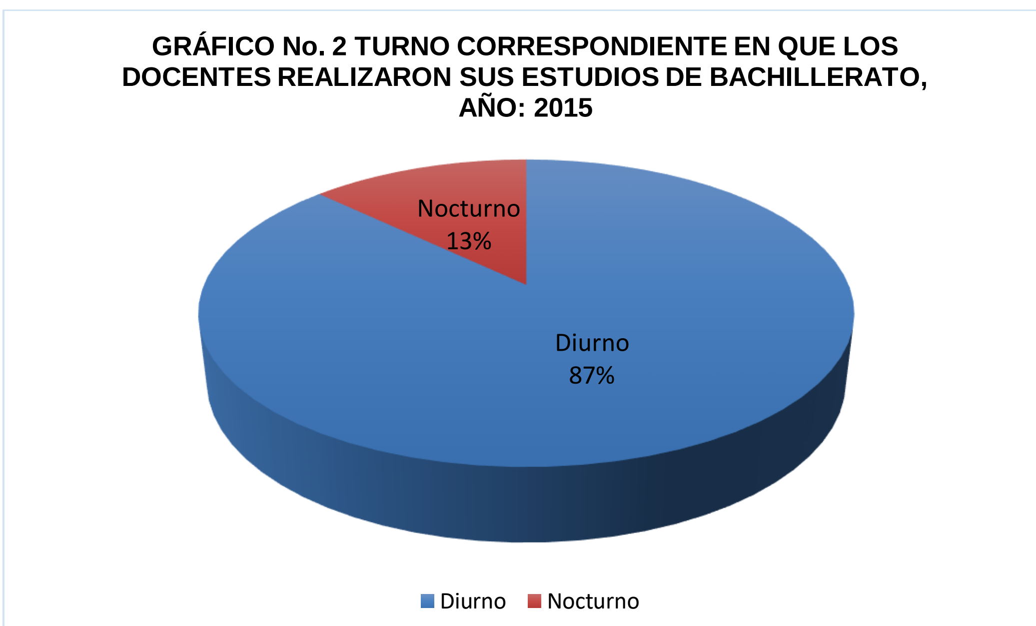
Escala	Total
Comercio	6
Ciencias	2
Letras	3
Magisterio	11
Pedagógico	8
No respondió	1
Total	**31**

Fuente: Encuesta aplicada a los docentes



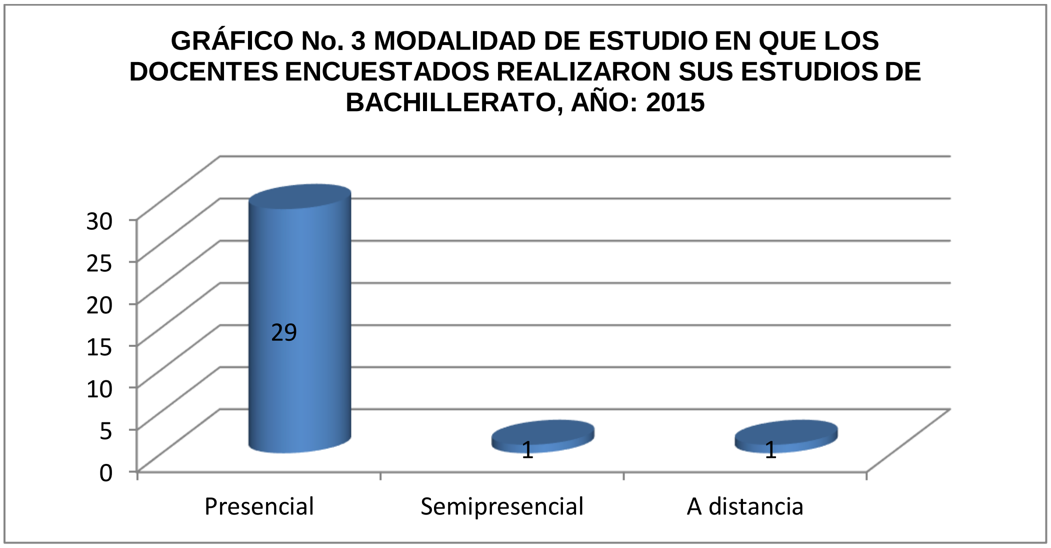
Fuente: Encuesta aplicada a docentes

En la gráfica No 2 se muestra el turno en que los docentes encuestados realizaron sus estudios de bachiller, de los cuales 27 (87%) lo realizaron en turno diurno y 4 (13%), en turno nocturno.



Fuente: Encuesta aplicada a docente

En cuanto a la modalidad de estudio 29 de los docentes encuestados realizaron su bachillerato de manera presencial, 1 semipresencial y 1 a distancia, como se aprecia en la gráfica N° 3.



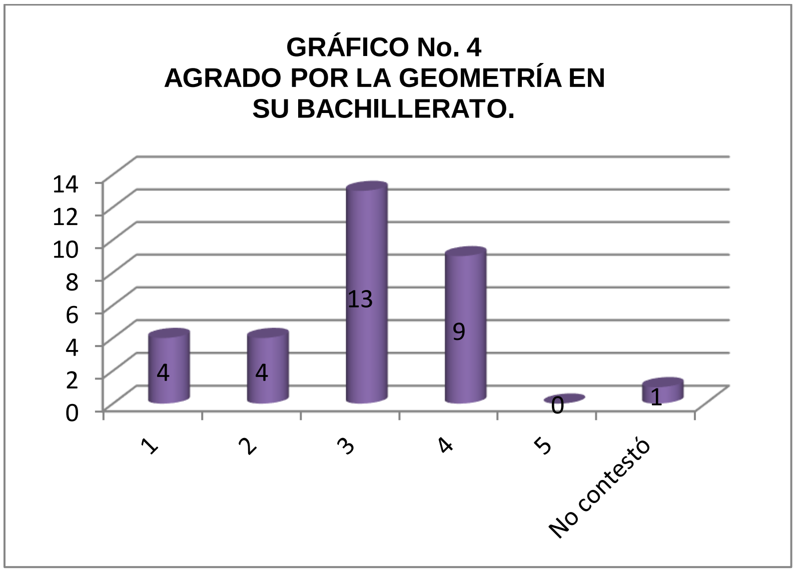
Fuente: Encuesta aplicada a docentes

Se observa en el cuadro 2 y gráfica No 4 que en cuanto al agrado por la Geometría, en una escala de 1 a 5, 21 de los encuestados se ubican en una escala igual o inferior a 3 representando el 67,74% y solo 9 encuestados le agrada la geometría.

CUADRO No 2 VALORACIÓN POR PARTE DE LOS DOCENTES DE SU AGRADO POR LA GEOMETÍA DURANTE SUS ESTUDIOS DE BACHILLERATO, AÑO: 2015

Escala	Total
1 (no me agrada)	4
2 (casi no me agrada)	4
3 (me agrada poco)	13
4 (me agrada)	9
5 (me agrada mucho)	0
No contestó	1
Total	**31**

Fuente: Encuesta aplicada a docentes



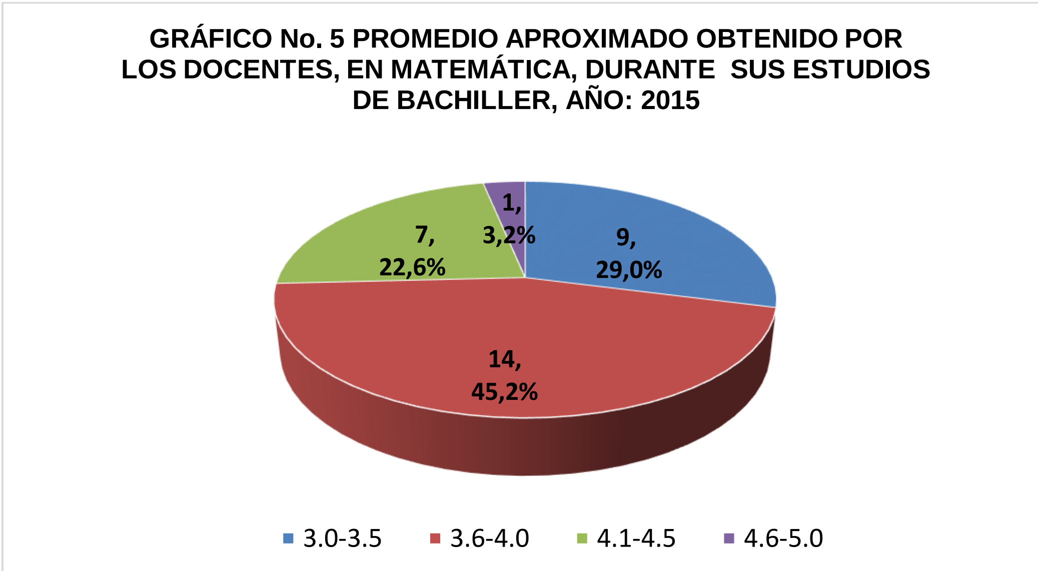
Fuente: Encuesta aplicada a docentes

En cuanto al promedio aproximado obtenido en Matemática durante sus estudios de bachiller, 23 (74,19%) de los docentes se ubicaron en un rango comprendido entre 3,0 y 4,0; esto se observa en el cuadro 3 y gráfica N° 5.

CUADRO No 3: PROMEDIO APROXIMADO OBTENIDO POR LOS DOCENTES, EN MATEMÁTICA, DURANTE SUS ESTUDIOS DE BACHILLER, AÑO: 2015

Escala	Total
3,0-3,5	9
3,6-4,0	14
4,1-4,5	7
4,6-5,0	1
Total	**31**

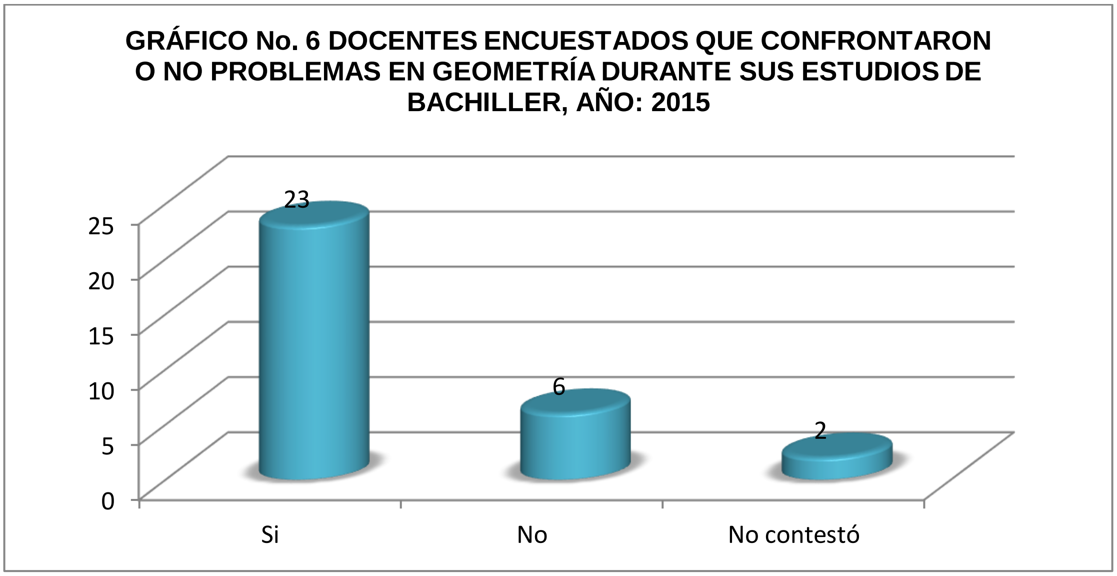
Fuente: Encuesta aplicada a los docentes



Fuente: Encuesta aplicada a docentes

Esto indica la existencia de algunas dificultades durante este período de estudio de los docentes en esta área de la Matemática, lo que pudiera incidir negativamente en el proceso enseñanza aprendizaje de la Geometría.

La gráfica No 6 muestra la cantidad de los docentes que confrontaron problemas en Geometría durante sus estudios de bachillerato de los cuales 23 (74,2%) confirmaron que sí tuvieron dificultades, 6 (19,4%) que no y 2 (6,5%) no respondieron.



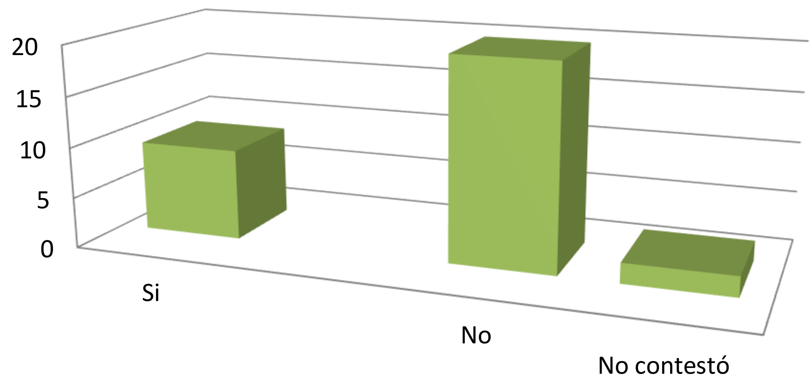
Fuente: Encuesta aplicada a docentes

De los docentes encuestados, 9 consideran que los cursos de matemática recibidos en sus estudios superiores le ayudan a capacitarlo para enseñar Geometría en VI° grado, mientras que 20 respondieron que no y 2 no contestaron, como se aprecia en el cuadro 4 y gráfica N° 7.

CUADRO No 4: OPINIÓN DE LOS DOCENTES ENCUESTADOS REFERENTE A SI LOS CURSOS DE MATEMÁTICA RECIBIDOS EN SUS ESTUDIOS SUPERIORES LE CAPACITARON O NO PARA ENSEÑAR GEOMETRÍA, AÑO: 2015

Opinión	Total
Si	9
No	20
No contestó	2
Total	**31**

GRÁFICO No. 7 OPINIÓN DE LOS DOCENTES REFERENTE A SI LOS CURSOS DE MATEMÁTICA RECIBIDOS EN ESTUDIOS SUPERIORES LE CAPACITARON O NO PARA ENSEÑAR GEOMETRÍA, AÑO 2015.



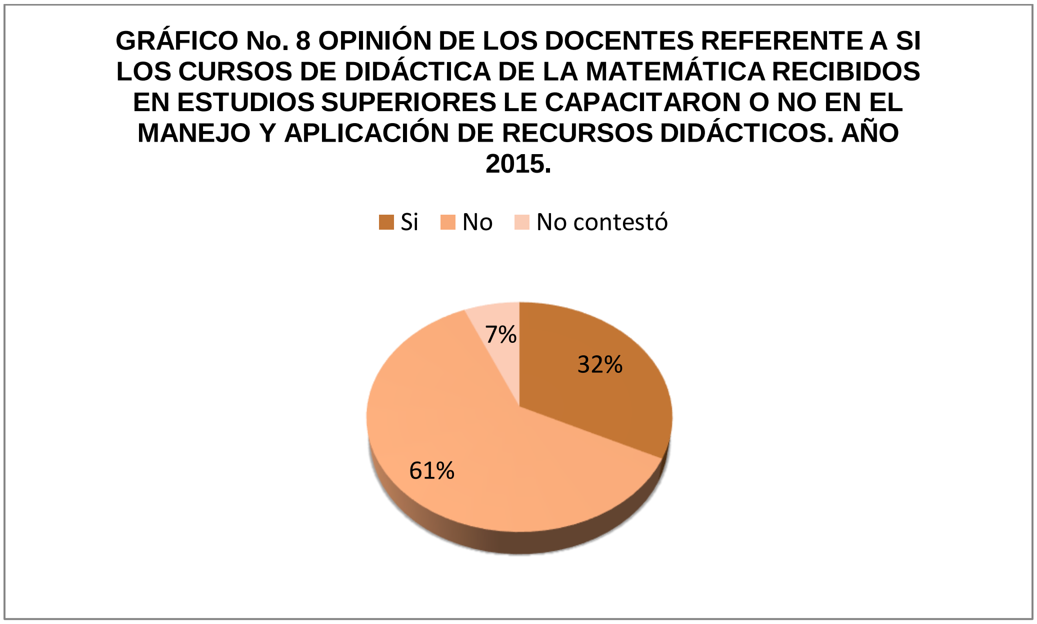
Fuente: Encuesta aplicada a los docentes

El cuadro No. 5 y gráfico No. 8 muestra el total de docentes encuestados que al preguntárseles si los cursos relacionados con Didáctica de la Matemática recibidos en su formación superior le aportaron o no el conocimiento necesario para la aplicación y manejo de recursos didácticos; 10 respondieron que sí, 19 que no y 2 no contestaron.

CUADRO No 5: OPINIÓN DE LOS DOCENTES REFERENTE A SI LOS CURSOS DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA RECIBIDOS EN SUS ESTUDIOS SUPERIORES, LE CAPACITARON O NO EN EL MANEJO Y APLICACIÓN DE RECURSOS DIDÁCTICOS, AÑO: 2015

Opinión	Total
Si	10
No	19
No contestó	2
Total	**31**

Fuente: Encuesta aplicada a los docentes



Fuente: Encuesta aplicada a docentes

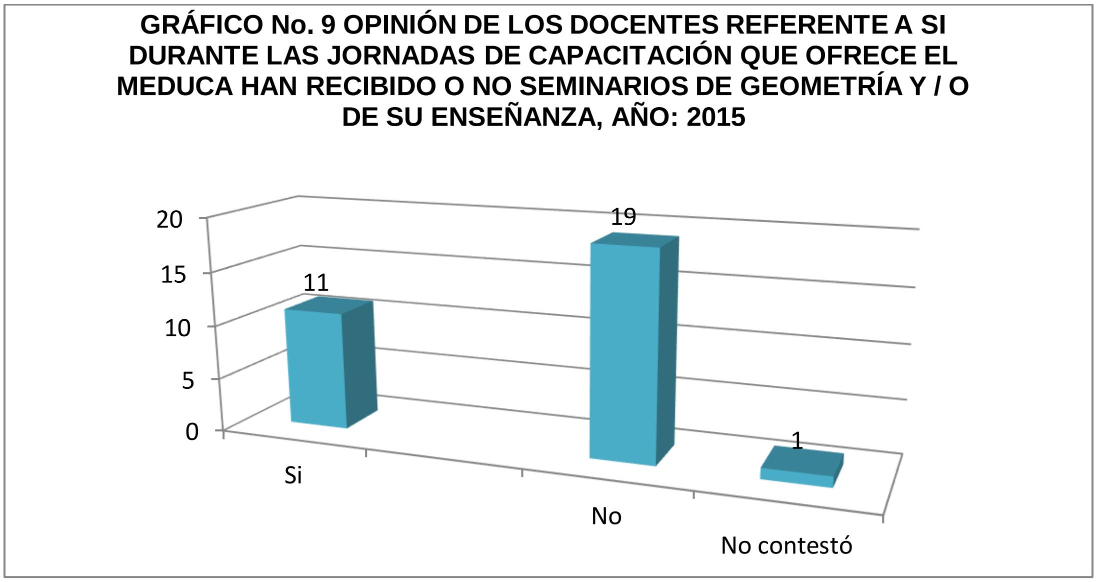
Esto demuestra que los docentes tienen dificultad o desconocen qué recursos pueden utilizar para explicar esta área de la Matemática lo que afectaría, de forma negativa, la formación de los alumnos.

Al momento de responder la encuesta, 11 de los docentes manifestaron que durante las jornadas de capacitación que ofrece el Ministerio de Educación han recibido seminarios sobre Geometría y / o de su enseñanza, 19 respondieron que no han recibido y 1 no contestó; como se aprecia en el cuadro 6 y gráfica N° 9.

CUADRO No 6: OPINIÓN DE LOS DOCENTES REFERENTE A SI DURANTE LAS JORNADAS DE CAPACITACIÓN QUE OFRECE EL MEDUCA HAN RECIBIDO O NO SEMINARIOS DE GEOMETRÍA Y / O DE SU ENSEÑANZA, AÑO: 2015

Opinión	Total
Si	11
No	19
No contestó	1
Total	**31**

Fuente: Encuesta aplicada a los docentes.



Fuente: Encuesta aplicada a docentes

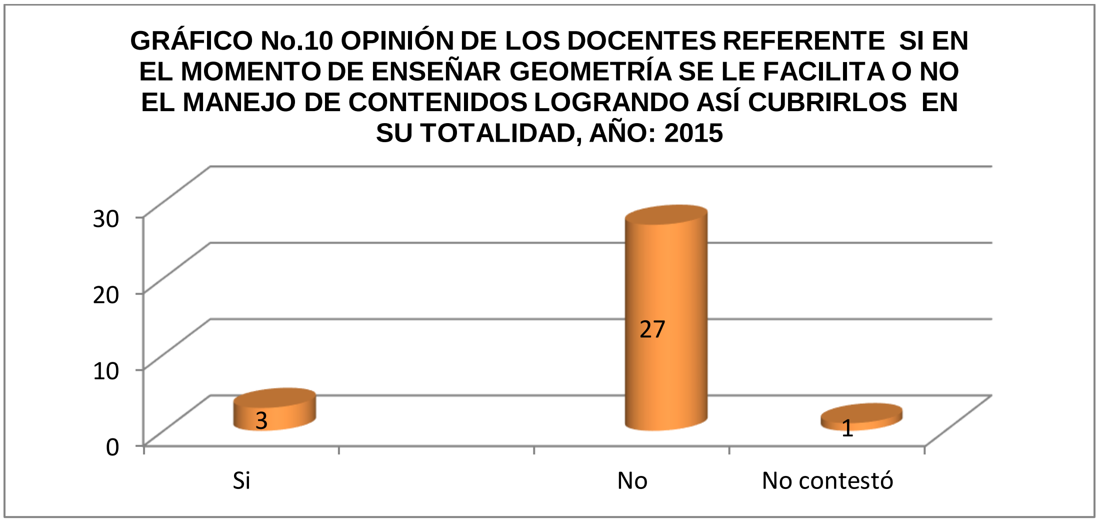
Podría inferirse que esto significa que es poco lo que se hace para fortalecer el conocimiento del docente en esta área de la Matemática, pudiendo implicar dificultades en el proceso enseñanza y aprendizaje de la Geometría.

Al consultársele sobre si al momento de enseñar Geometría se le facilita el manejo de contenidos logrando cubrirlos en su totalidad, 3 de los encuestados respondieron que sí, 27 que no y 1 no contestó como se muestra en el cuadro 7 y gráfica N° 10.

CUADRO No 7: OPINIÓN DE LOS DOCENTES REFERENTE A SI EN EL MOMENTO DE ENSEÑAR GEOMETRÍA SE LE FACILITA O NO EL MANEJO DE CONTENIDOS LOGRANDO ASÍ CUBRIRLOS EN SU TOTALIDAD. AÑO: 2015

Opinión	Total
Sí	3
No	27
No contestó	1
Total	**31**

Fuente: Encuesta aplicada a los docentes



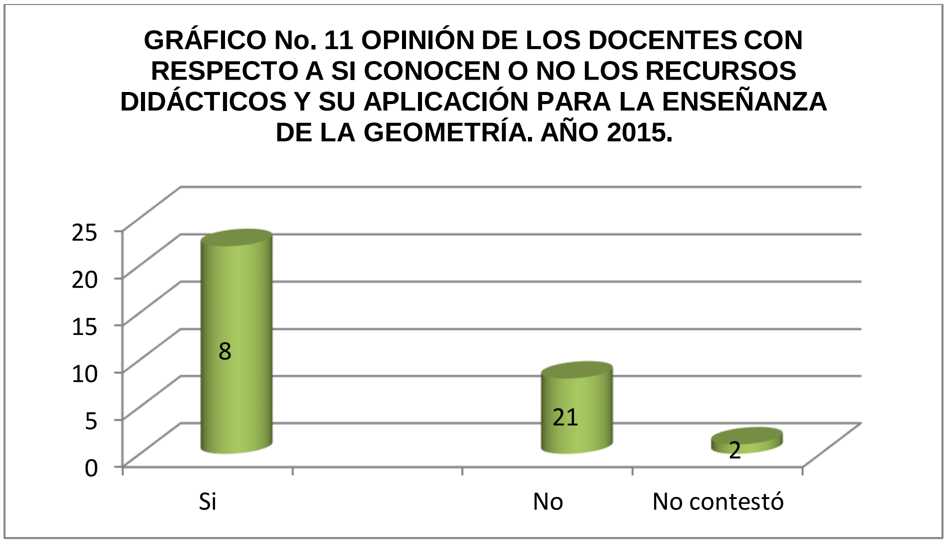
Fuente: Encuesta aplicada a docentes

Esto evidencia algún tipo de desconocimiento y falta de comprensión en estos temas. De los docentes encuestados 8 dicen conocer los recursos didácticos y su aplicación para los contenidos geométricos de los programas de primaria, mientras que 21 de ellos los desconocen y 2 no contestaron; como se aprecia en el cuadro 8 y gráfica N° 11.

CUADRO No 8: OPINIÓN DE LOS DOCENTES CON RESPECTO A SI CONOCEN O NO LOS RECURSOS DIDÁCTOS Y SU APLICACIÓN PARA LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA, AÑO: 2015

Opinión	Total
Sí	8
No	21
No contestó	2
Total	**31**

Fuente: Encuesta aplicada a los docentes



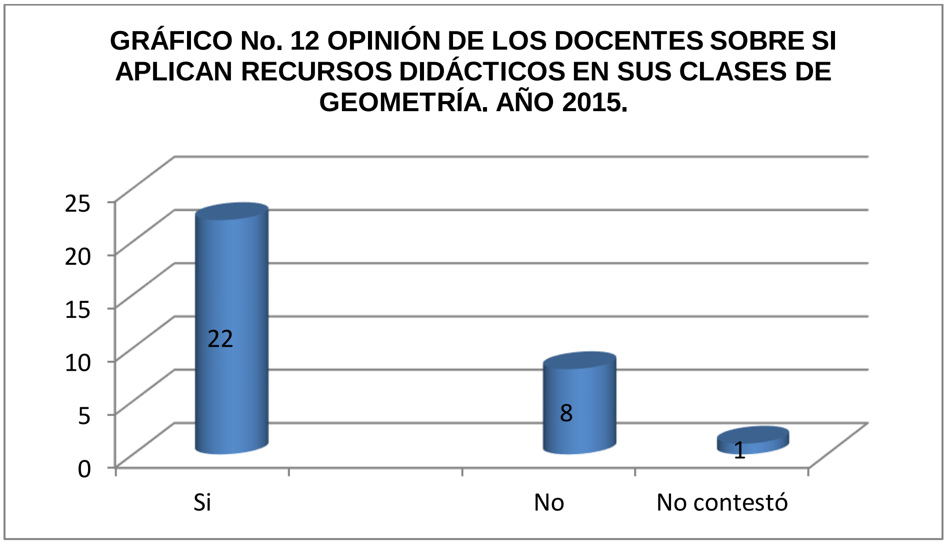
Fuente: Encuesta aplicada a docentes

Al consultárseles si aplican recursos didácticos para enseñar Geometría 22 (70,97%) contestaron que sí, 8 (25,81%) que no y 1 (3,23%) no respondió, lo cual se contradice con el criterio anterior donde 21 (67,74%) de ellos dicen desconocer los recursos didácticos que pueden aplicarse; como lo muestra el cuadro 9 y gráfica N° 12.

CUADRO No 9: OPINIÓN DE LOS DOCENTES SOBRE SI APLICAN O NO RECURSOS DIDÁCTICOS AL MOMENTO DE ENSEÑAR GEOMETRÍA, AÑO: 2015

Opinión	Total
Sí	22
No	8
No contestó	1
Total	**31**

Fuente: Encuesta aplicada a los docentes



Fuente: Encuesta aplicada a docentes

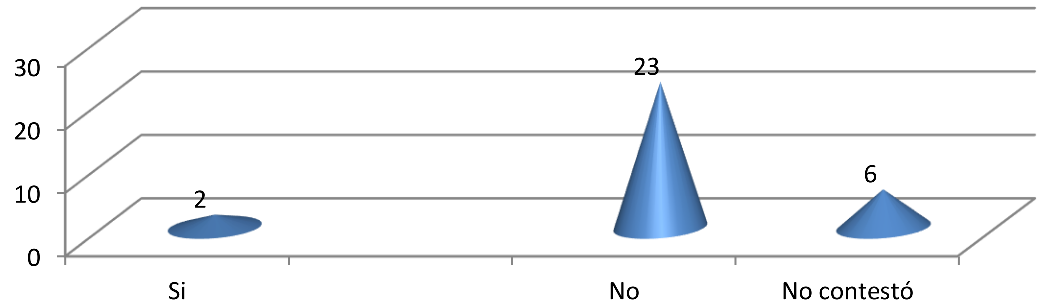
El cuadro 10 y gráfica No.13 muestra la información de los docentes encuestados al consultárseles si dominan contenidos geométricos superiores a los contemplados en los programas de primaria; en donde 2 respondieron que sí, 23 que no y 6 no contestaron.

CUADRO No 10: OPINIÓN DE LOS DOCENTES CON RESPECTO A SI DOMINAN O NO CONTENIDOS GEOMÉTRICOS SUPERIORES AL DEL NIVEL PRIMARIO, AÑO: 2015

Opinión	Total
Sí	2
No	23
No contestó	6
Total	**31**

Fuente: Encuesta aplicada a los docentes

GRÁFICO No. 13 OPINIÓN DE LOS DOCENTES REFERENTE A SI DOMINAN O NO CONTENIDOS GEOMÉTRICOS SUPERIORES AL DEL NIVEL PRIMARIO, AÑO 2015.



Fuente: Encuesta aplicada a docentes.

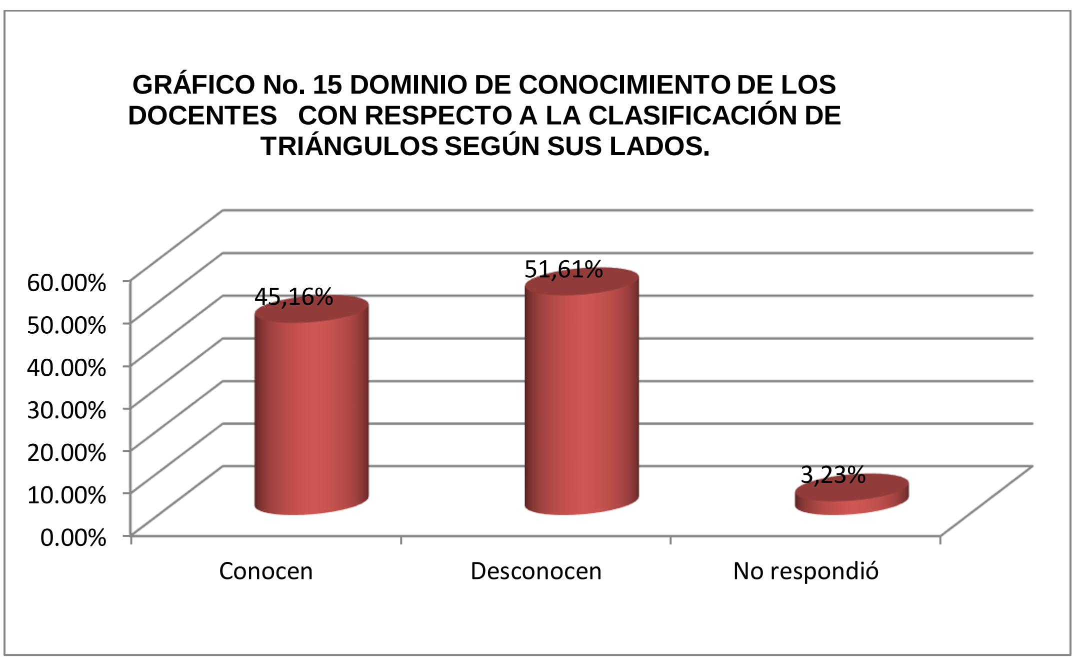
4.2 Análisis del test aplicado a los docentes

Con el objetivo de conocer el nivel de conocimientos en Matemática en lo referente a los programas de primaria, se aplicó un test de dominio de la geometría a los docentes consultados. El mismo contaba de 30 problemas de selección múltiple los cuales resolvieron en las escuelas donde laboraban previa cita solicitada al director del plantel y entregado en ese mismo momento una vez resuelto el test.

La gráfica No 14 muestra el dominio de conocimiento de los docentes consultados en lo referente a la clasificación de los ángulos formados por dos rectas paralelas cortadas por una transversal, en donde el 38,71% de los docentes conoce el tema, mientras que el 61,29% de ellos no lo conoce.

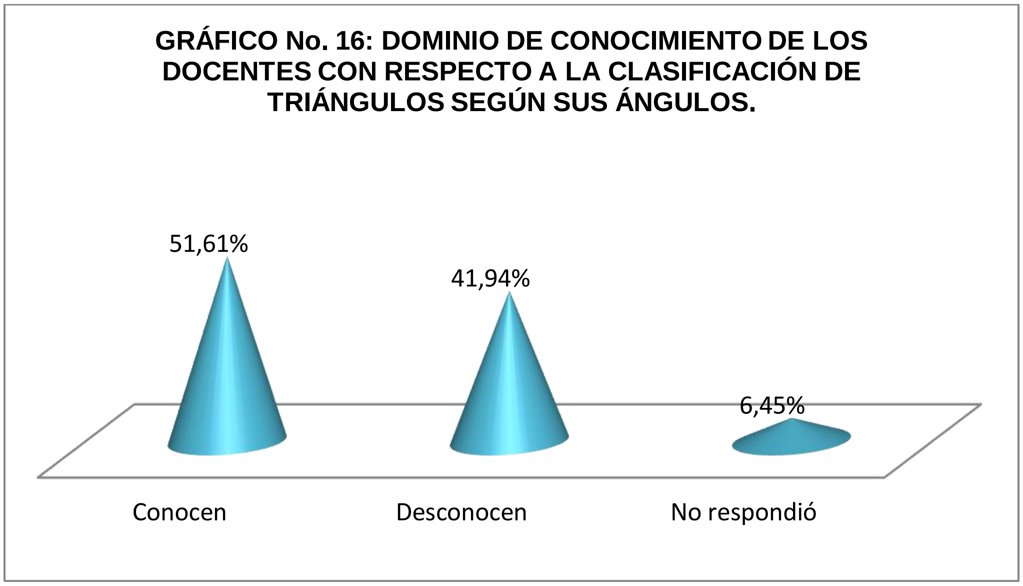
Fuente: Test aplicado a los docentes, año 2015.

La gráfica No 15 muestra el dominio de conocimiento de los docentes referente a la clasificación de los triángulos según sus lados, de los cuales el 45,16% de ellos lo conocen, mientras que un 51,61% lo desconoce y el 3,23% de ellos no respondió.



Fuente: Test aplicado a los docentes, año 2015

De acuerdo a la clasificación de los triángulos según sus ángulos, el 51,61% de los docentes opinó que manejan el contenido; pero el 41,94% no y un 6,45% no respondió; como lo muestra la gráfica No.16.

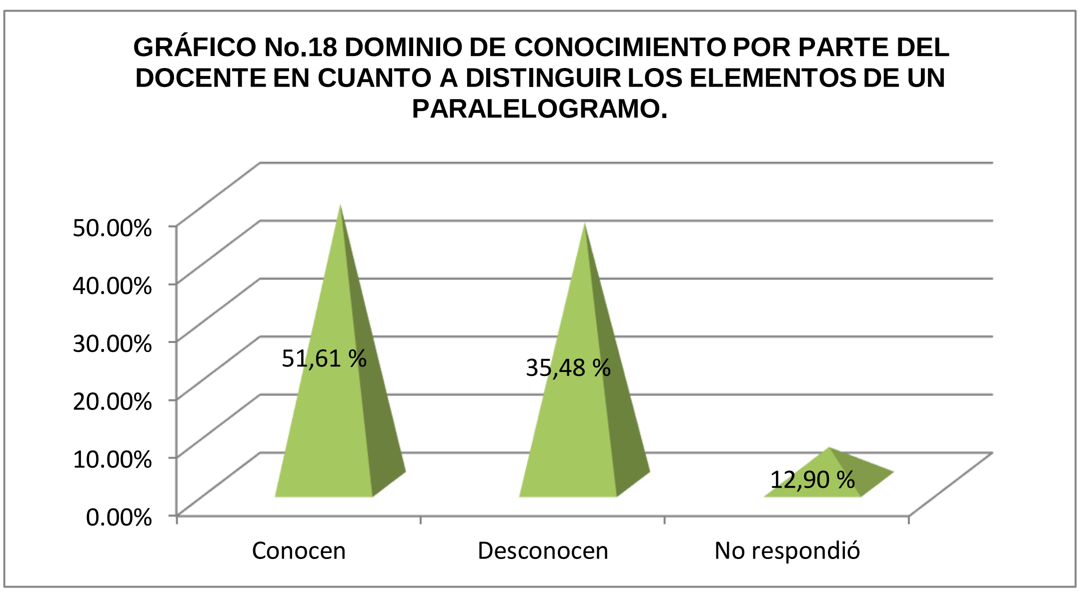


Fuente: Test aplicado a los docentes, año 2015

Se aprecia en la gráfica No.17, que el 41,94% de los docentes conocen el concepto de paralelogramo y que el 58,06% no lo conoce.

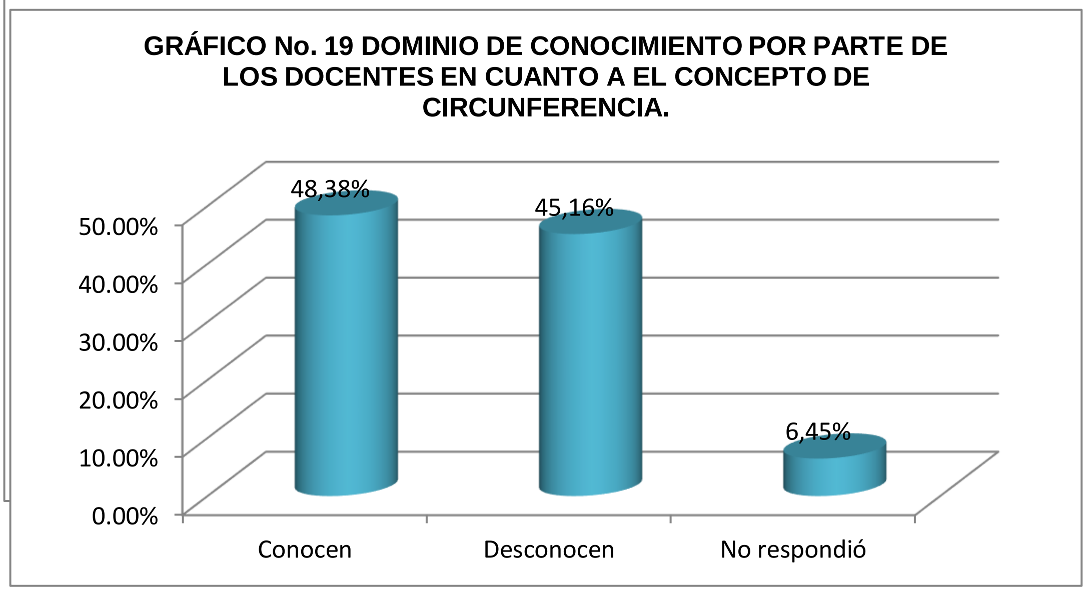
Fuente: Test aplicado a los docentes, año 2015.

La gráfica No 18 muestra que el 51,61% de los docentes consultados saben distinguir los elementos de un paralelogramo, que el 35,48% de ellos no saben y que un 12,90% no respondió.



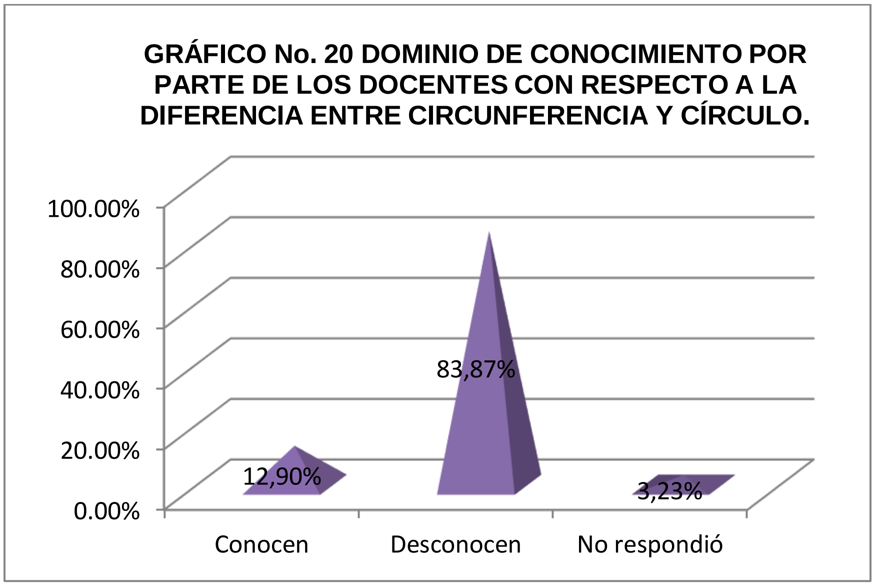
Fuente: Test aplicado a los docentes, año 2015.

En la gráfica No 19 se observa que un 48,38% de los docentes consultados conocen el concepto de circunferencia, que un 45,16% de ellos no lo conoce y un 6,45% no respondió.



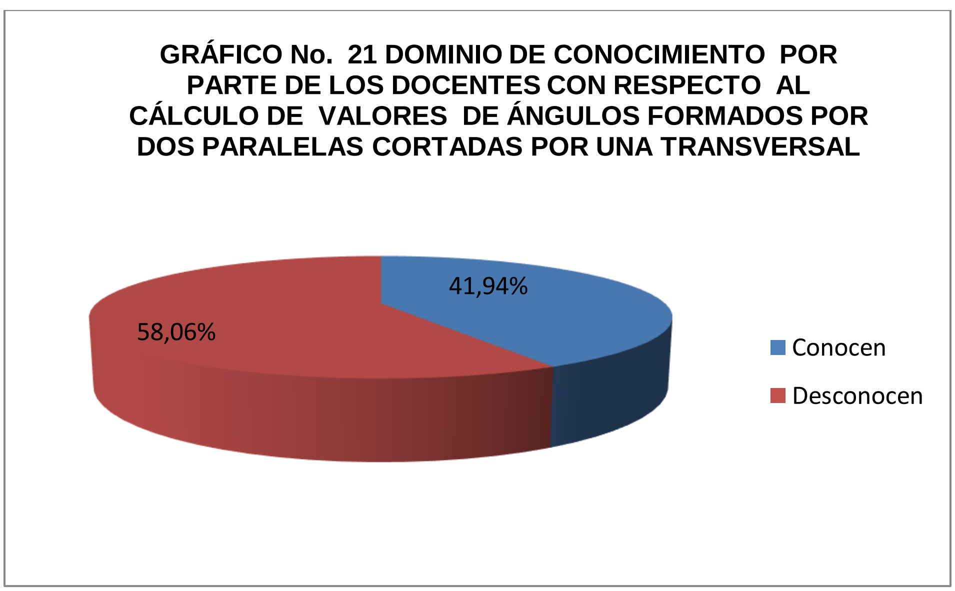
Fuente: Test aplicado a los docentes, año 2015.

Al distinguir entre circunferencia y círculo el 12,90% de los docentes lo hizo correctamente, el 83,87% se equivocó en la respuesta y un 3,23% no respondió el ítem, como lo muestra la gráfica No.20.



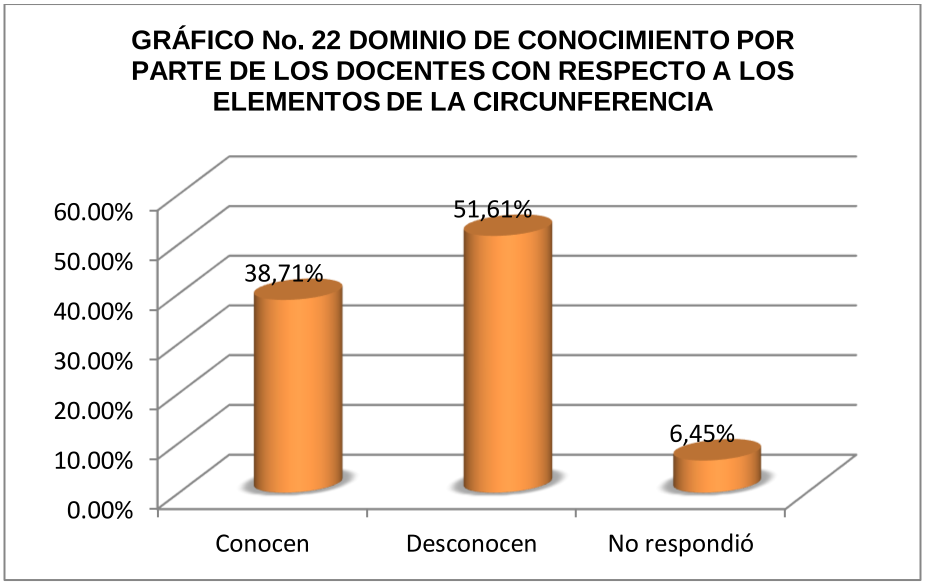
Fuente: Test aplicado a los docentes, año 2015

En la gráfica No 21 observamos el dominio de conocimiento de los docentes referente al valor de los ángulos formado por dos rectas paralelas cortadas por una transversal en donde el 41,94% de ellos manejan el contenido, pero el 58,06% no lo saben.



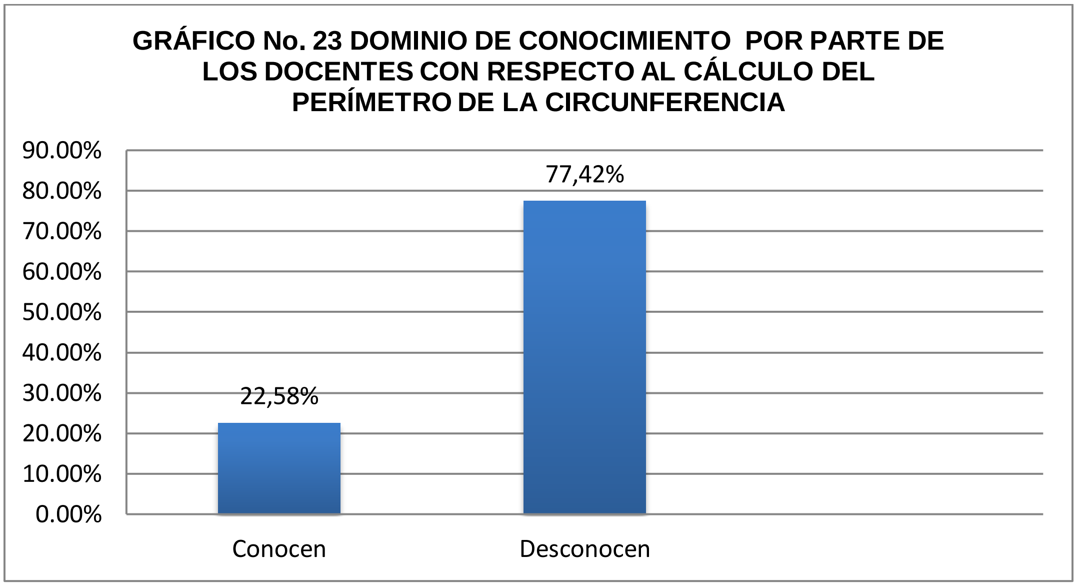
Fuente: Test aplicado a los docentes, año 2015.

Al preguntárseles por los elementos de la circunferencia, el 38,71% de los consultados lo conocen, el 51,61% no los conocen y el 6,45% no respondió, como lo muestra la gráfica No. 22.



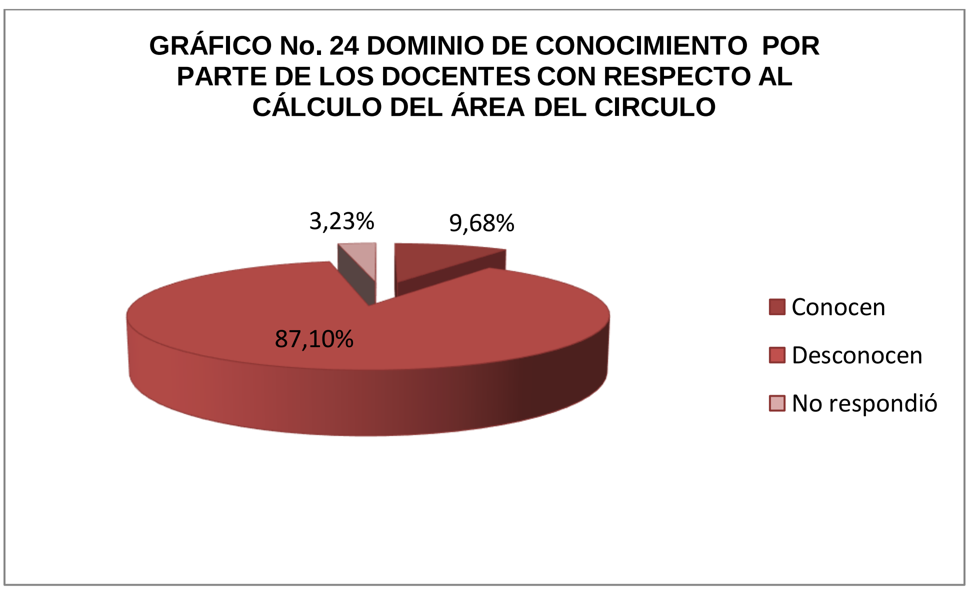
Fuente: Test aplicado a los docentes, año 2015.

La gráfica No 23 muestra que el 22,58% de los docentes conocen y saben aplicar la fórmula para calcular el perímetro de la circunferencia y que el 77,42% no lo sabe.



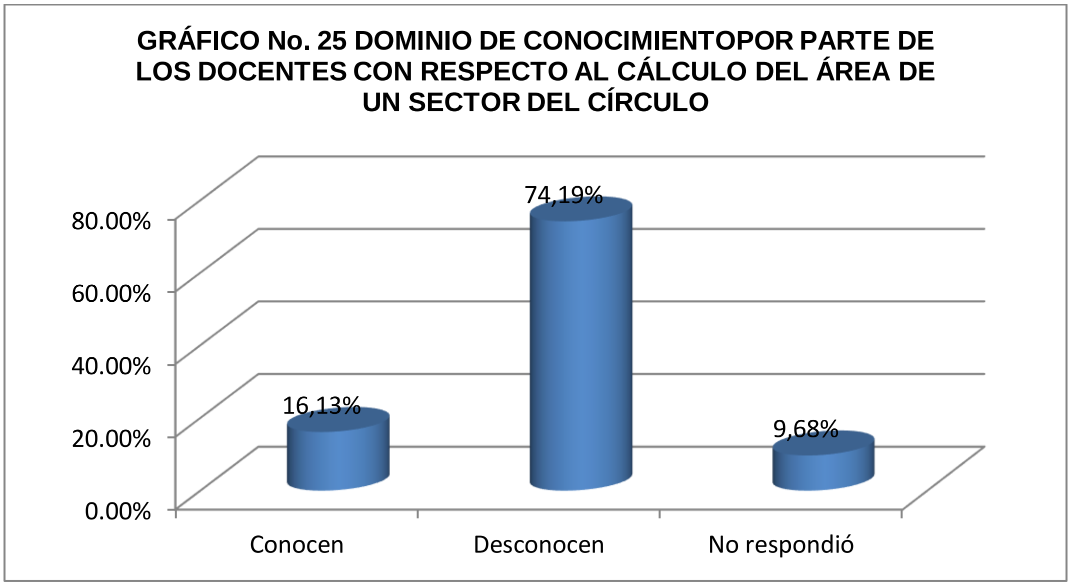
Fuente: Test aplicado a los docentes, año 2015.

En cuanto a la aplicación de la fórmula para calcular el área del círculo el 9,68% de los docentes consultados domina el contenido, el 87,10% no lo domina y un 3,23% no respondió; como se aprecia en la gráfica No 24.



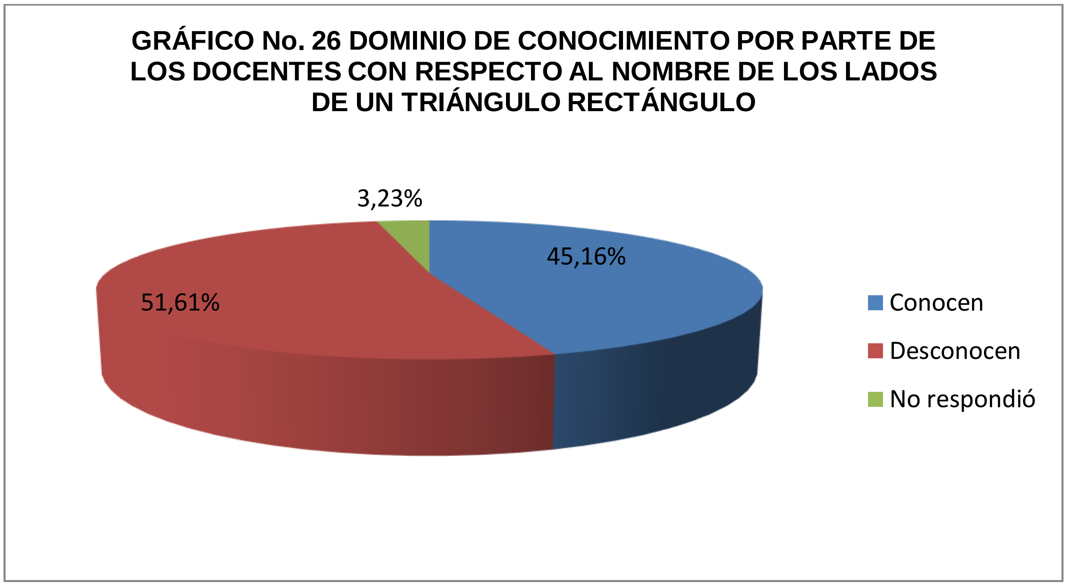
Fuente: Test aplicado a los docentes, año 2015

En la gráfica No 25 se observa lo que opinaron los docentes con respecto al dominio de conocimiento que poseen en el cálculo del área de un sector del círculo relacionando su fórmula. En este caso el 16,13% de los consultados lo hizo correctamente, el 74,19% se equivocó al responder y un 9,68% no respondió.



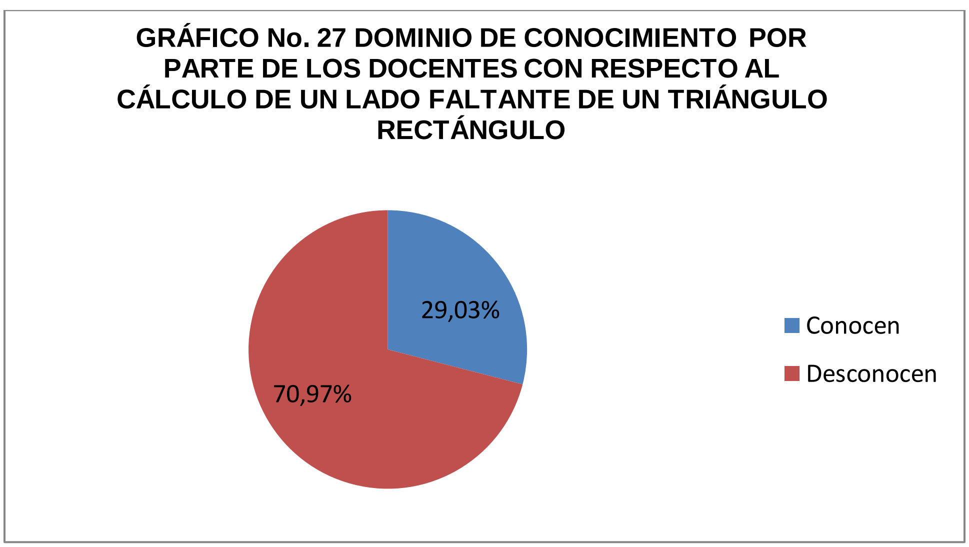
Fuente: Test aplicado a los docentes, año 2015.

El 45,16% de los maestros examinados conocen el nombre de los lados de un triángulo rectángulo, el 51,61% de ellos no los conocen y el 3,23% no respondió; como lo muestra la gráfica No.26.



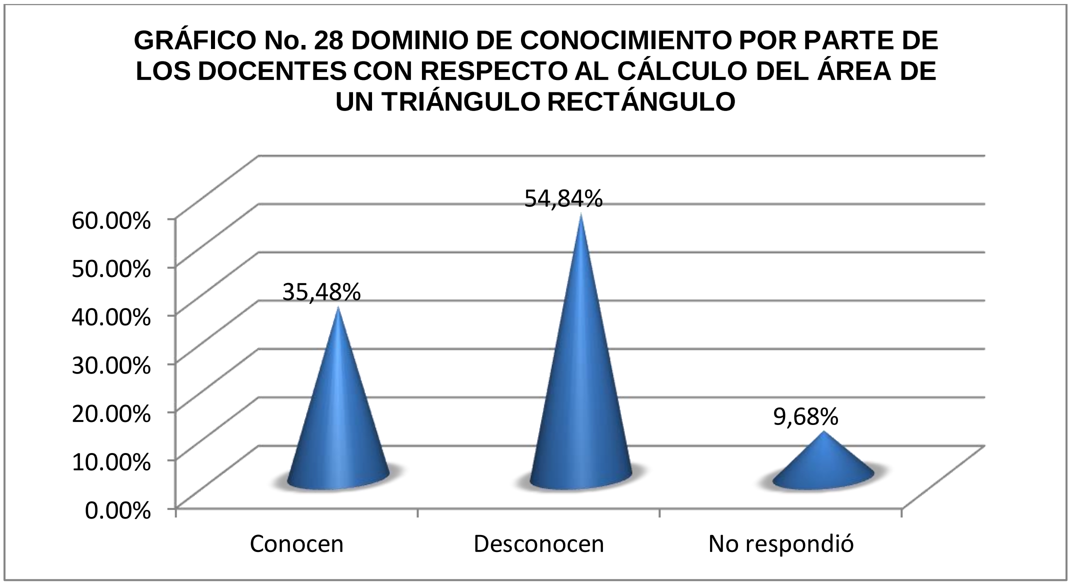
Fuente: Test aplicado a los docentes, año 2015.

La mayoría de los docentes consultados no saben aplicar el teorema de Pitágoras para calcular el lado faltante de un triángulo rectángulo, ya que un 29,03% de ellos respondió correctamente, pero el 70,97% lo hizo en forma incorrecta. Véase gráfica No 27.



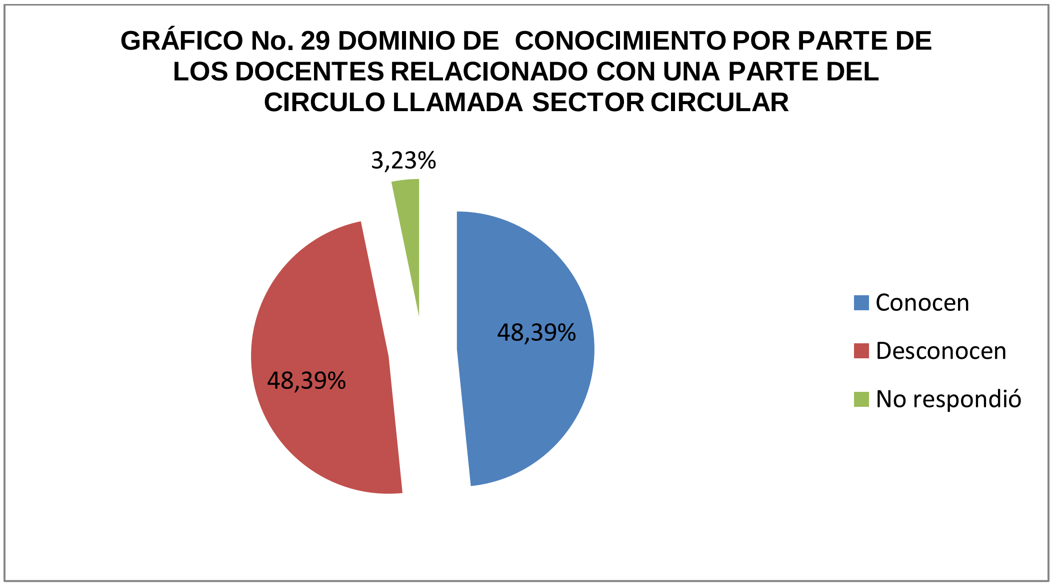
Fuente: Test aplicado a los docentes, año 2015.

En la gráfica No 28 se muestra el dominio de conocimiento de los docentes en cuanto al cálculo del área de un triángulo, en donde el 35,48% de los docentes saben calcularla, el 54,84% no lo sabe y un 9,68% prefirió no contestar el ítem.



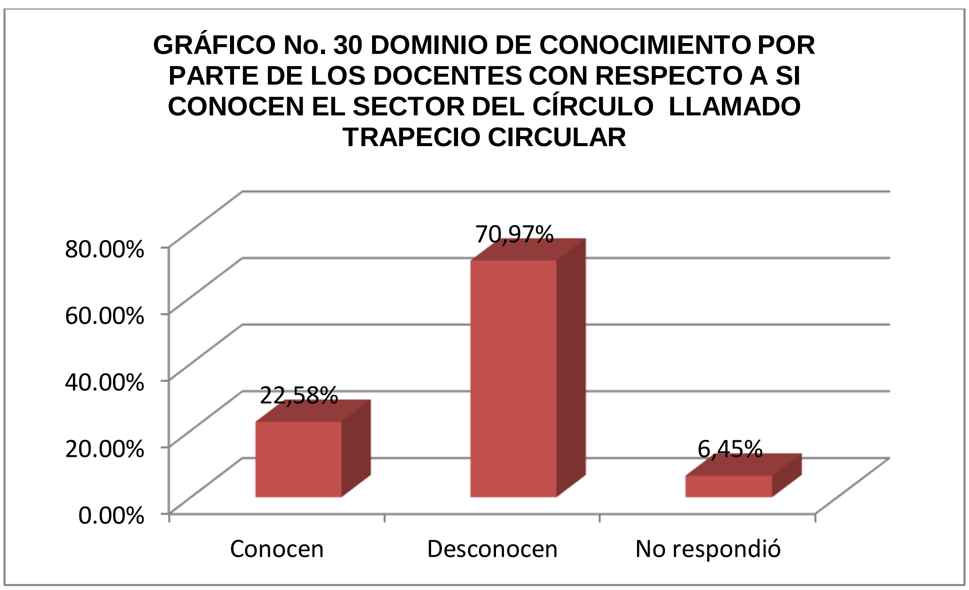
Fuente: Test aplicado a los docentes, año 2015

El 48,39% de los docentes conocen la parte del círculo denominada sector circular, el 48,39% de ellos no lo conoce y el 3,23% no respondió; como lo muestra la gráfica No. 29.



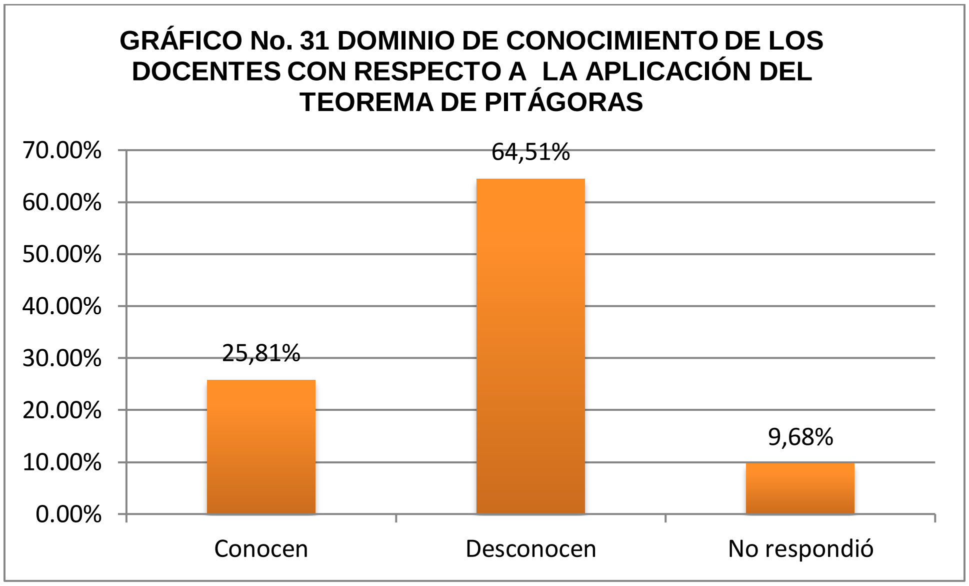
Fuente: Test aplicado a los docentes, año 2015.

La gráfica No 30 muestra que el 22,58% de los docentes conocen el sector del círculo denominado trapecio circular, que el 70,97% no lo conoce y que el 6,45% no respondió el ítem.



Fuente: Test aplicado a los docentes, año 2015

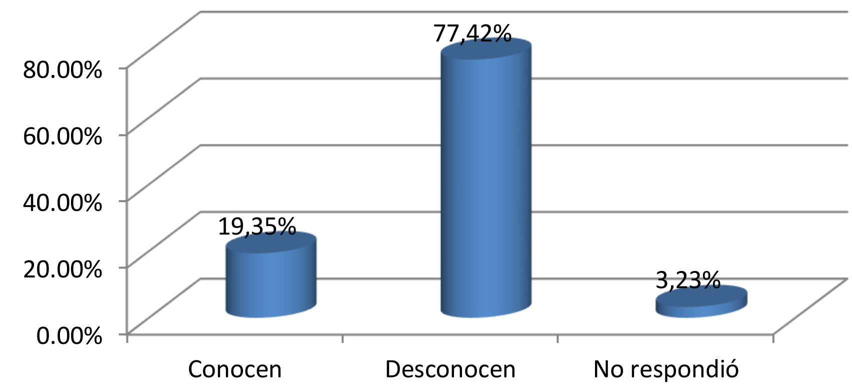
Al aplicar el Teorema de Pitágoras para calcular el área de un cuadrado construido sobre un lado de un triángulo rectángulo, el 25,81% de los docentes examinados lo hizo correctamente, el 64,51% se equivocó al responder y un 9,68% no respondió; como lo muestra la gráfica No. 31.



Fuente: Test aplicado a los docentes, año 2015.

En cuanto a la aplicación del Teorema de Pitágoras para resolver problemas de la vida real, la gráfica No 32 muestra que el 19,35% de los docentes consultados lo hizo correctamente, que un 77,42% se equivocó al responder y que un 3,23% no respondió.

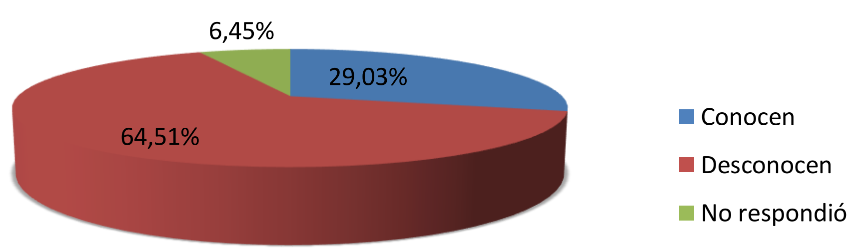
GRÁFICO No. 32 DOMINIO DE CONOCIMIENTO DE LOS DOCENTES RELACIONADO CON LA APLICACIÓN DEL TEOREMA DE PITÁGORAS A SITUACIONES DE LA VIDA REAL



Fuente: Test aplicado a los docentes, año 2015

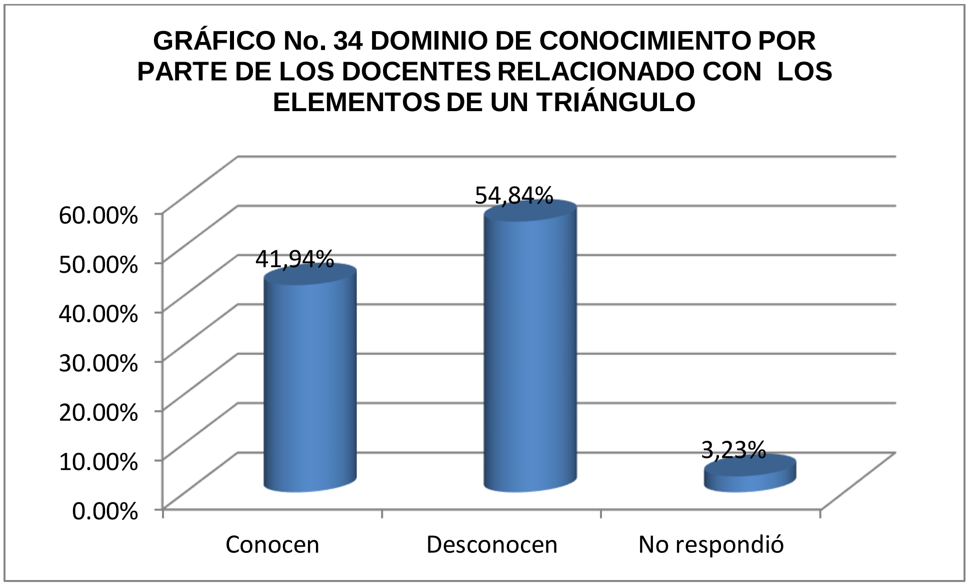
La gráfica No 33 muestra que el 29,03% de los docentes conocen el valor de la suma de los ángulos internos de un triángulo, que el 64,51% desconoce el tema y que un 6,45% no respondió.

GRÁFICO No. 33 DOMINIO DE CONOCIMIENTO DE LOS DOCENTES CON RESPECTO AL VALOR DE LA SUMA DE LOS ÁNGULOS INTERNOS DE UN TRIÁNGULO



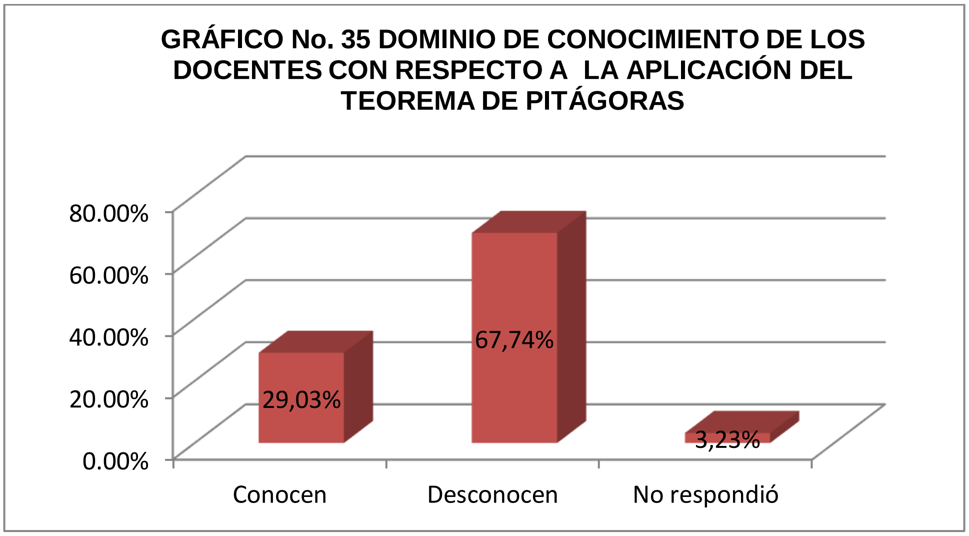
Fuente: Test aplicado a los docentes, año 2015.

En lo referente a si conocen o no los elementos de un triángulo, un 41,94% de los examinados los conocen, un 54,84% los desconocen y el 3,23% no respondió el criterio, como se aprecia en la gráfica No 34.



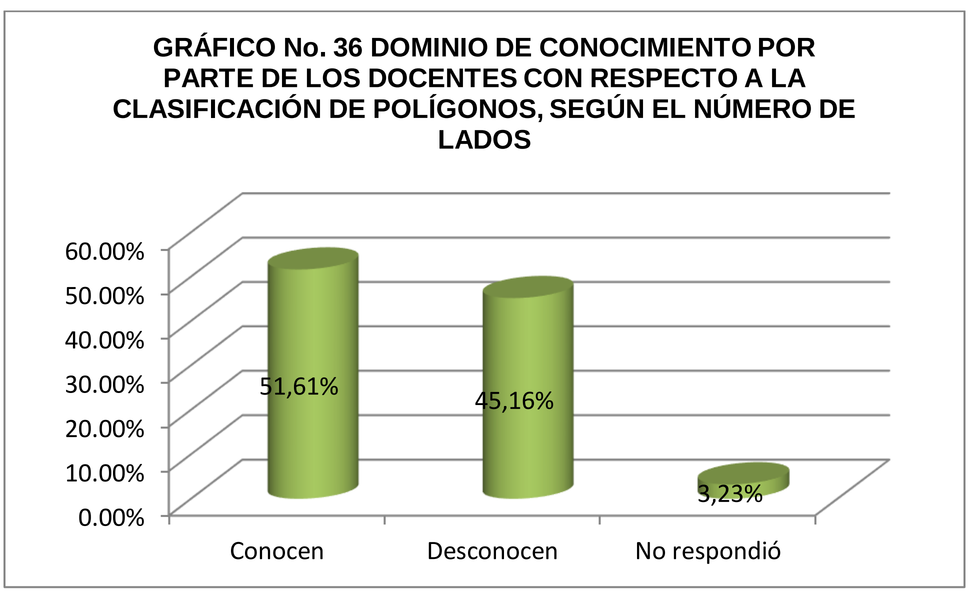
Fuente: Test aplicado a los docentes, año 2015.

En la gráfica No 35 se aprecia el dominio de conocimiento relacionado con la aplicación del Teorema de Pitágoras en donde tenía que calcular un lado faltante de un triángulo rectángulo. El 29,03% de los docentes examinados respondió correctamente, el 67,74% se equivocó y un 3,23% prefirió no responder.



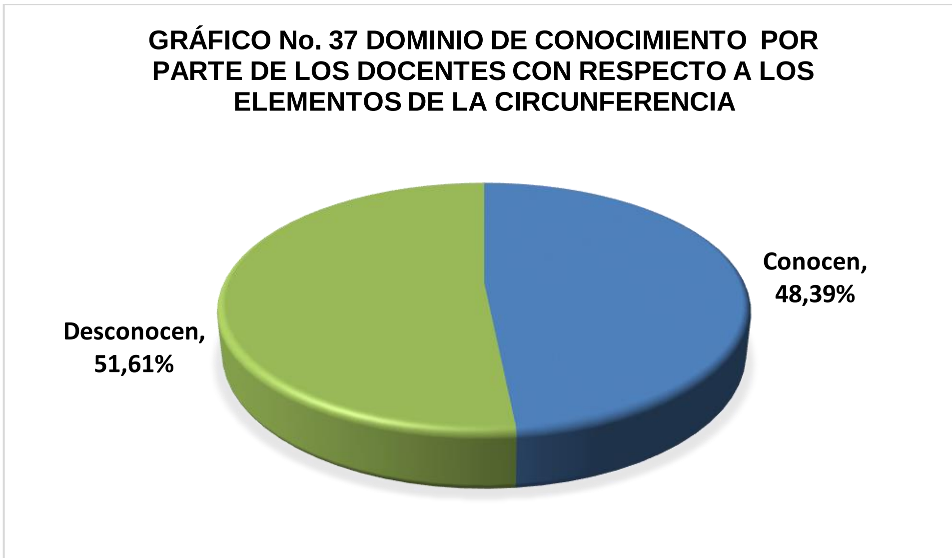
Fuente: Test aplicado a los docentes, año 2015

En la gráfica No 36 se aprecia el porcentaje de docentes consultados relacionado con el dominio de conocimiento en el tema de la clasificación de polígonos regulares, según el número de lados, en donde el 51,61% de ellos saben clasificarlos, el 45,16% no lo sabe y un 3,23% no respondió.



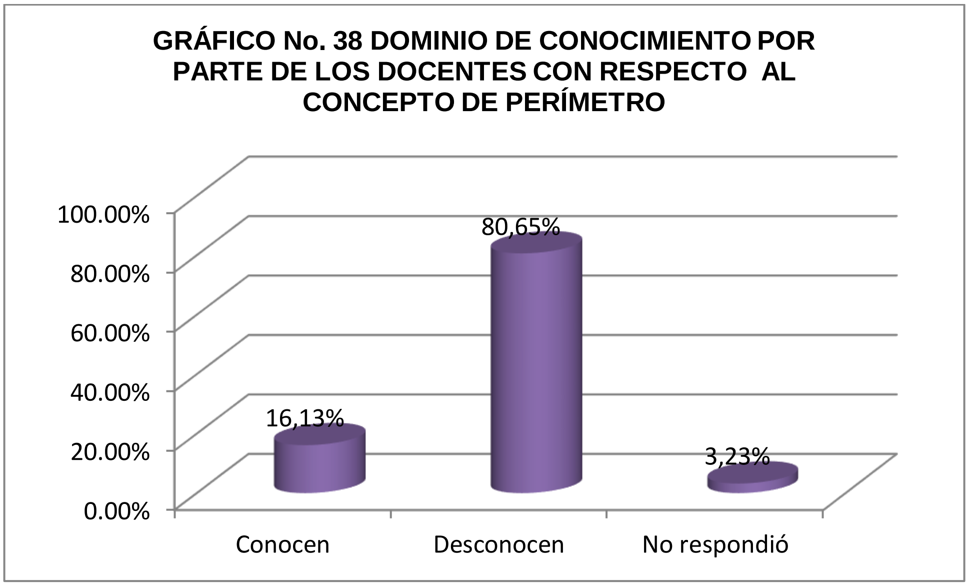
Fuente: Test aplicado a los docentes, año 2015.

El dominio de conocimiento relacionado con los elementos de la circunferencia se muestra en la gráfica No 37 cuyos resultados reflejaron que el 48,39% de los docentes consultados los conocen, pero el 51,61% de ellos no los conocen.



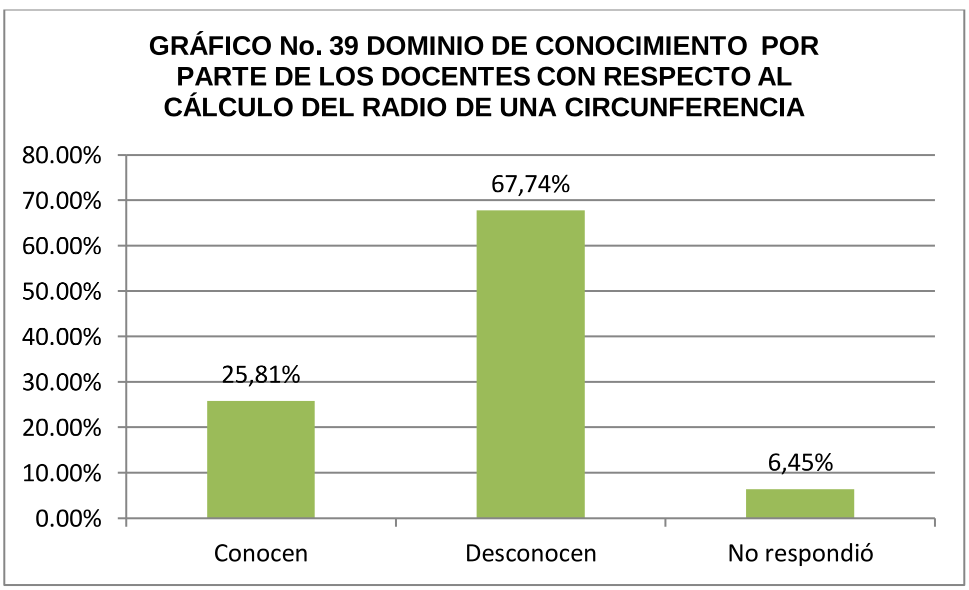
Fuente: Test aplicado a los docentes, año 2015.

En la gráfica No 38 se muestra el nivel de conocimiento relacionado con el concepto de perímetro de una figura geométrica de los docentes consultados, los cuales reflejan tener un bajo dominio del mismo; es decir, un 16,13% conocen el concepto, un 80,65% no lo conoce y el 3,23% no respondió.



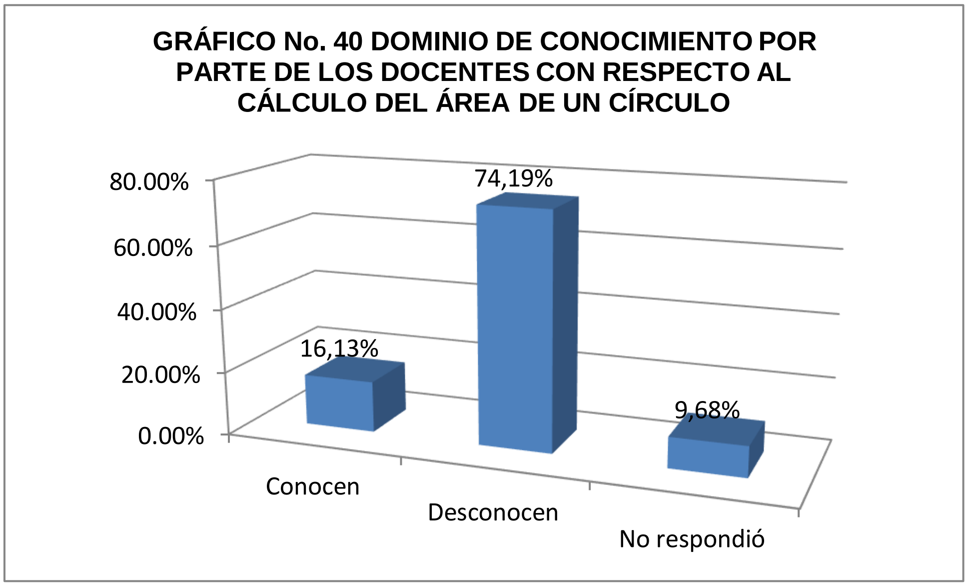
Fuente: Test aplicado a los docentes, año 2015

Al observar la gráfica No 39 se aprecia el dominio de conocimiento de los docentes consultados relacionado con el cálculo del radio de una circunferencia dada su longitud, de los cuales un 25,81% de ellos saben calcularlo, un 67,74% no lo sabe y un 6,45% no respondió.



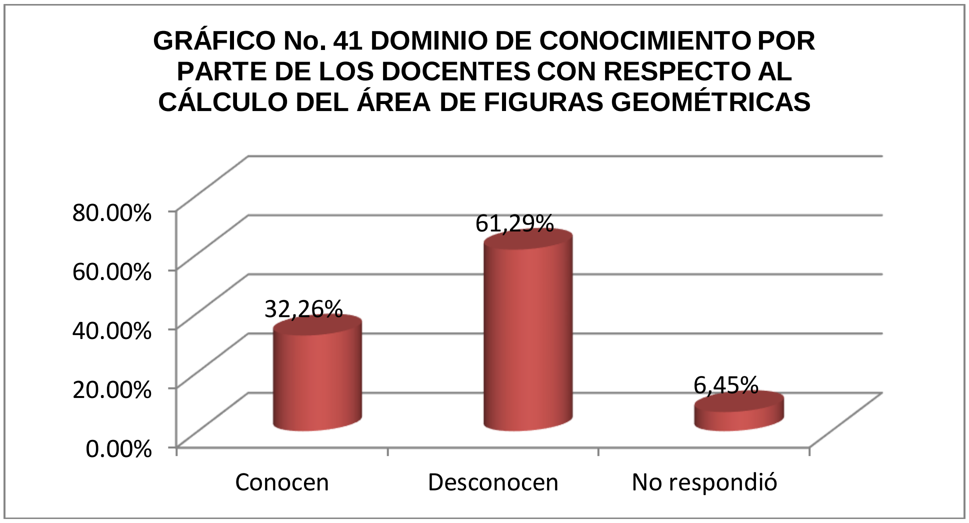
Fuente: Test aplicado a los docentes, año 2015.

En la gráfica No 40 se muestra el dominio de conocimiento de los docentes, referente al cálculo del área de un círculo, en donde los porcentajes de conocimiento son bajos; es decir, un 16,13% de los consultados lo hizo correctamente, un 74,19% se equivocó al responder y el 9,68% no respondió.



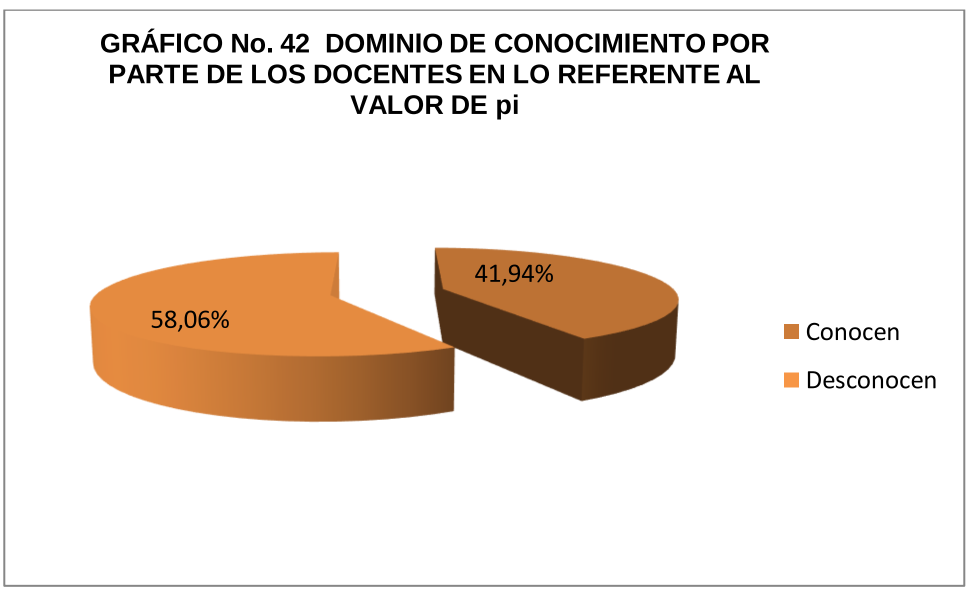
Fuente: Test aplicado a los docentes, año 2015.

La gráfica No 41 demuestra que la mayoría de los docentes consultados tienen dificultad para calcular el área de una figura geométrica, ya que los resultados del test revelaron que el 32,26% de ellos lo saben; el 61,29% no lo sabe y un 6,45% no respondió.



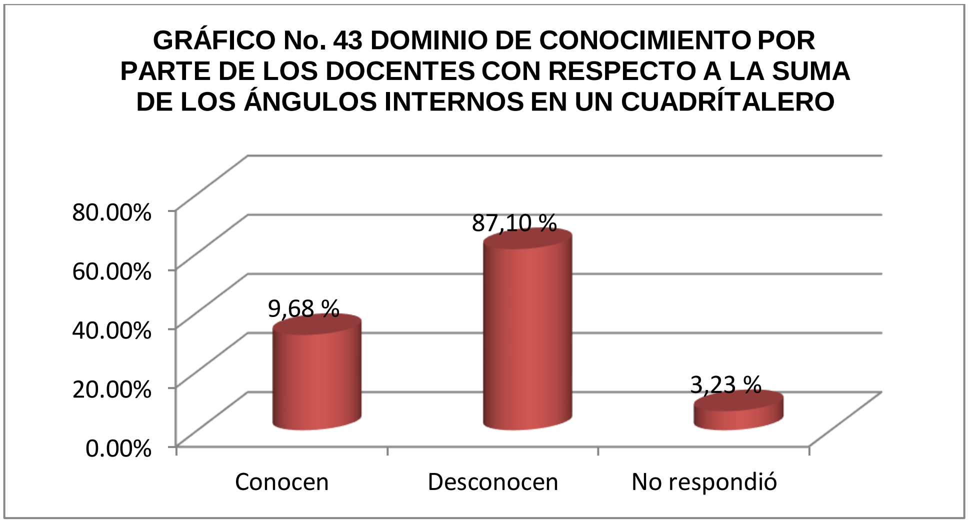
Fuente: Test aplicado a los docentes, año 2015.

El nivel de conocimiento referente al valor de π se observa en la gráfica No 42 la cual muestra que a pesar de ser algo tan básico o elemental, la mayoría de los docentes no lo dominan; es decir, el 41,94% de ellos lo conocen ; pero el 58,06% lo desconoce.



Fuente: Test aplicado a los docentes, año 2015

La gráfica No 43 muestra el nivel de conocimiento de los docentes, relacionado con el valor de la suma de los ángulos internos de un cuadrilátero, en donde los porcentajes de dominio son bajos; es decir, el 9,68% de ellos conocen el valor, el 87,10% lo desconoce y el 3,23% no respondió.



Fuente: Test aplicado a los docentes, año 2015.

El cuadro No 11 muestra los puntajes obtenidos por los docentes consultados, en el test de conocimiento, los cuales son muy bajos en comparación con la media esperada (71%), quedando en evidencia el bajo dominio de conocimientos geométricos por parte de estos 31 educadores.

CUADRO No 11

PUNTUACIONES OBTENIDAS (EN BASE A 100) POR LOS DOCENTES EN EL TEST DE CONOCIMIENTOS GEOMÉTRICOS REFERENTE A CONTENIDOS CONTEMPLADOS EN LOS PROGRAMAS DE PRIMARIA, AÑO: 2015

NO. DE DOCENTES	PUNTUACIÓN OBTENIDA EN EL TEST
1	33
2	27
3	37
4	53
5	60
6	47
7	43
8	20
9	63
10	43
11	50
12	30
13	10
14	23
15	30
16	40
17	27
18	30
19	3
20	7
21	13
22	43
23	20
24	30
25	43
26	43
27	37
28	60
29	13
30	23
31	43

Fuente: Test aplicado a los docentes, año 2015

$\bar{x} = 34$

Prueba de Hipótesis

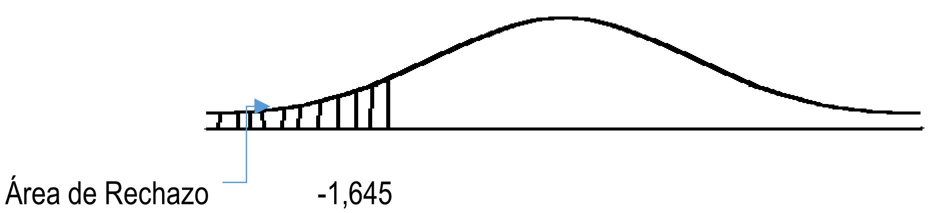
Hipótesis

Ho: La media aritmética obtenida a través del test de conocimiento sobre el dominio de contenidos geométricos básicos para la enseñanza de la Geometría en VI° grado por los maestros, es significativamente mayor que 71 a un nivel de significación de 5%.

Ha: La media aritmética obtenida a través del test de conocimiento sobre el dominio de contenidos geométricos básicos para la enseñanza de la Geometría en VI° grado por los maestros, es significativamente menor que 71 a un nivel de significación de 5%.

Nivel de Significación: α = 0,05 Z= 1,645

Región crítica



Estadístico de Prueba:

$$Z_c = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{34 - 71}{\frac{15.5}{\sqrt{31}}} = \frac{-37}{2.784} = -13.29$$

Decisión y **Conclusión**

Se rechaza Ho debido a que la Z calculada (-13,29) cae en la zona de rechazo (menor a Z de la tabla -1,645) por lo que se tiene que la media aritmética obtenida a través del test de conocimiento sobre el dominio de contenidos geométricos básicos para la enseñanza de la Geometría en VI° grado por los maestros, es significativamente menor que 71 a un nivel de significación de 5%.

Observación: El porcentaje de maestros que domina algunos de los contenidos es muy bajo, casi inferior al 50%.

Conclusiones

- Los docentes tienen dificultades en el dominio de los contenidos geométricos de los programas de primaria, así como en la aplicación de recursos didácticos.

- Los docentes reciben poca capacitación en temas de Geometría y de su enseñanza, siendo esto uno de los posibles factores que no permite mejorar el dominio de estos contenidos por parte del educador.

- Los curos de Didáctica de la Matemática son, en su mayoría, de un tipo general y no abordan la forma de hacer fácil, asequible y atractivo el ejercicio de aprender Geometría.

- El docente de primaria proviene de diferentes modalidades de bachilleratos, además que para ellos la Matemática no era precisamente la asignatura de mayor agrado o dominio, por lo que, en términos generales, pareciera no poseer aptitud para la Geometría.

- Son pocos los contenidos de los programas de primaria conocidos o dominados por los docentes, lo que plantea una gran interrogante sobre la enseñanza de la Geometría en este nivel.

- Un 67,74 % manifestó tener de poco a regular agrado por la Geometría, lo cual demuestra que 21 de ellos posiblemente presentó problemas en esta área durante sus estudios de bachiller; indicando esto deficiencias en su formación en esta rama de la matemática.

- Ninguno de los docentes examinados logró alcanzar un promedio igual 71%, considerado como regular, lo que pudiera incidir negativamente en el proceso enseñanza y aprendizaje de la Geometría, en el nivel de primaria.

- Es necesario revisar la formación en Geometría de los docentes y fortalecer sus conocimientos en esta área de la Matemática para mejorar así la calidad de la educación que reciben los estudiantes en el nivel primario.

- A pesar de haber algunos porcentajes de dominios un poco altos en comparación con el desconocimiento de algunos temas, los mismos siguen siendo bajos en relación con la media esperada (71%) considerada como regular; lo que demuestra la necesidad de implementar políticas educativas que permitan fortalecer los conocimientos geométricos de los docentes.

- El área de Geometría es una de las menos impartidas en los niveles de primaria debido al bajo dominio que tienen los docentes en los temas contemplados en los programas establecidos por el Ministerio de Educación y, muchas veces, por el desconocimiento el educador prefiere evitarla.

Dificultades de los docentes en el área de geometría

- ✓ El 71,0% desconocen el valor de la suma los ángulos internos de un triángulo.

- ✓ El 90,3% desconocen el valor de la suma de los ángulos internos de un paralelogramo.

- ✓ El 59,7% desconocen los nombres y valores de los ángulos formados por dos rectas paralelas cortadas por una transversal.

- ✓ El 58,6% tienen dificultad para entender conceptos geométricos básicos.

- ✓ El 53,2% no saben clasificar triángulos de acuerdo al tipo de ángulo y lados.

- ✓ El 55,6% desconocen las rectas notables del triángulo y otras figuras geométricas, así como los elementos de la circunferencia.

- ✓ El 70,2% no comprenden ni sabe aplicar el Teorema de Pitágoras.

- ✓ El 78,4% desconocen el concepto de perímetro y área de figuras planas.

- ✓ Un 3,3% desconocen la existencia de algunos contenidos geométricos contemplados en los programas de primaria.

Recomendaciones

- Que en el proceso de Transformación Curricular que lleva a cabo la Universidad de Panamá, el Instituto Pedagógico Superior Juan Demóstenes Arosemena u otros Centros de Estudios Superiores, donde se forman docentes del nivel primario, se reestructure el Plan de Estudio de la Licenciatura en Educación Primaria de forma tal que se mejore la formación geométrica recibida por los estudiantes de esta carrera o de lo contrario preparar un profesional especialista en Matemática, exclusivamente para el nivel de primaria.

- Equiparar las horas semanales dedicadas a la formación geométrica en el Plan de Estudios actual de Licenciatura en Primaria, con las horas de Geometría que se imparten en el nivel primario, de acuerdo al plan de estudio de este nivel.

- Que los cursos de Matemáticas contemplados en los planes de estudio de la Licenciatura en Educación Primaria de la Universidad de Panamá u otros Centros de Estudios Superiores sean facilitados únicamente por especialistas en Matemática Educativa.

- Ofrecer seminarios de actualización y capacitación sobre Geometría y / o de su enseñanza a los docentes que imparten clases de Matemática, en las escuelas primarias.

- Que dichos seminarios sean continuos y obligatorios durante cada período escolar para todos los docentes que imparten clase en el nivel primario.

- Elaborar recursos didácticos y bibliografía actualizada que estén disponibles al docente de primaria.

Bibliografía

- Ardila, A., Tejada, G., y Agard, E. (2002). *Nociones de Aritmética y Geometría para el Maestro en Formación*. Costa Rica: Editorial CECC/ SICA.

- Arriaga, M. (1970). *Didáctica De La Matemática Moderna*. México: Ediciones Oasis, S. A.

- Aizpun, A. (1967). *Guía Didáctica De La Matemática Moderna En La Escuela Primaria*. España: Editorial Vicens Vives.

- Ballús, p. (2013). *Consultor Enciclopedia Temática*. Barcelona: Thema Equipo Editorial, S. A.

- Beitía, G. (2001). Los Recursos Didácticos y la Formación Docente. Un punto de vista Histórico- Cultural. En E. Coiro (Ed), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 14, 3-13. México: Grupo Editorial Iberoamericana y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, CLAME.

- Beitía, G. (2001). Ingeniería didáctica. Un ejemplo construido para la función 2^x. En R. Márquez (Ed), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 14, 408-415. México: Grupo Editorial Iberoamericana y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, CLAME.

- Beitía, G. (2001). Transformación Curricular de Matemática en la Educación Básica General Panameña. En A. Ardila (Ed), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 14, 82-.83 México: Grupo Editorial Iberoamericana y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, CLAME.

- Beitía, G. (2001). Influencia de la percepción y actitudes en la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática. En M. Sarasty (Ed), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 14, 565-570. México: Grupo Editorial Iberoamericana y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, CLAME.

- Beitía, G. (2001). Didáctica de la Noción de Simetría. En J. Nole (Ed), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 14, 143-146. México: Grupo Editorial Iberoamericana y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, CLAME.

- Camarena, J. (2011, abril 20). Modelo de enseñanza de la Geometría por indagación. *Didáctica De La Matemática*, *1*(1), 27- 30.

- Camarena, J. (2012, abril 20). El modelo de Van Hiele. *Didáctica De La Matemática II*, *1* (2), 25- 32.

- Castro, J. (1992). El maestro de educación primaria en la construcción de conceptos matemáticos. Recuperado el 20 de febrero de 2013 de http:/ www. inee.edu.mx/mape/themes/TemaInee/.

- Cattaneo, L., Lagreca, N., Filipputti, S. B., De Hinrichsen, S. S., y Buschiazzo, N. (1996). *Matemática hoy en la E. G. B*. Rosario, Argentina: Homo Sapiens Ediciones.

- Clemente, F. y Llinares, S. (2014). Relación entre el conocimiento de geometría y el "truncamiento" del razonamiento configural. Recuperado el 1 de noviembre de 2014 de http://www.google Characteristics of pre-service primary school teachers' configural reasoning. ... RELIME. ...

- C. Sáenz y A Lebrija. (2014). La formación continua del profesorado de matemáticas: una práctica reflexiva. Recuperado el 1 de noviembre de 2014 de http://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1724.

- Flores, R. (2013). Colección bicentenario: una mirada desde los libros de matemática. En A. Duarte (Ed), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26, 23-30. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

- Flores, R. (2013). Las transformaciones isométricas en los libros didácticos del 6° año recomendados por el PNLD. En M. Fontes y D. Fontes (Eds.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26, 335-366. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

- Flores, R. (2013). Hacia una formación docente con la mirada en el aula. En P. Lestón (Ed), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26, 1761-1772. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

- Flores, R. (2013). Aprender a enseñar matemáticas desde la planificación.
  En A. Zuluaga y J. Buitrago (Eds.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26, 381-390. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

- García B, L. (s.f). *Compendio De Historias de las Matemáticas*. Madrid: Editorial Dossat.

- Gutiérrez, L. (2002). *Didáctica de la Matemática para la Formación Docente*. San José, Costa Rica: Editorial CECC/SICA.

- Gutiérrez, A. (1991). *Didáctica De La Matemática*. Madrid: Editorial Síntesis S. A.

- Lidman, S. (1972). *Enciclopedia Combi Visual*. Barcelona: Ediciones Danae- Editorial Éxito, S. A.

- Molina, U. (2017, diciembre 27). Fracasos se sitúan entre el 5% y 17%, según Meduca. Recuperado de http: // www. m. prensa. com /

- MA. Sánchez y LC. Garrote. (2014). Análisis de los procesos de Justificación y generalización de la Fórmula del área del rectángulo por Alumnos del grado de educación Primaria. Recuperado el 1 de noviembre de 2014 de http://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1724.

- Sampieri, R., Collado, C., y Lucio, P. (2010). *Metodología de la Investigación*. México: Ediciones Mc Graw Hill.

- Vega, J. (2018, enero 9). Jóvenes con deficiencias graves para ingresar a la UP. Recuperado de http: // www. El siglo. com. Pa /

- Yagüe, E. (1998). *Didáctica e Historia de la Geometría Euclidiana*. México: Grupo Editorial Iberoamérica, S. A. de C. V.

ANEXOS

TEST DE CONOCIMIENTO
UNIVERSIDAD DE PANAMÁ
PROGRAMA DE MAESTRÍA EN MATEMATICA EDUCATIVA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTA Y TECNOLOGÍA

Estimado colega:

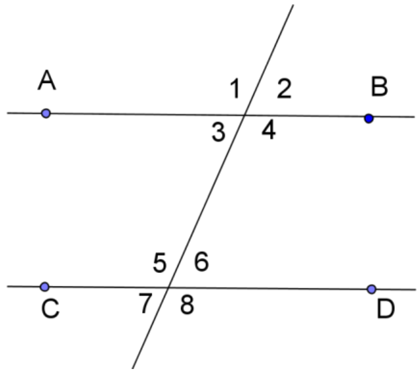
El presente test se enmarca en un proyecto de investigación sobre la enseñanza de la Geometría por lo que se hace necesario lo conteste en forma reflexiva y objetiva como docente que imparte esta asignatura en el nivel primario. Su cooperación, al igual que la de un grupo de docentes de diferentes Centros Educativos de la provincia de Darién, nos permitirá contar con la información necesaria y confiable para culminar con éxito este proyecto. El propósito de dicha investigación radica en brindarles alternativas que les ayuden a mejorar la enseñanza de la Matemática y por ende, de la Geometría en el nivel primario.

Agradezco de antemano su colaboración.

TEST PARA MEDIR CONOCIMIENTO A DOCENTES DE VI° GRADO EN LA PROVINCIA DE DARIÉN.

1. Los ángulos 1, 2,7 y 8 de la figura reciben el nombre de ángulos.

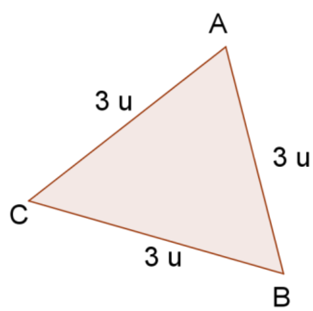
A. Alternos - Internos
B. Externos
C. Internos
D. Correspondientes
E. N.A.



Con esta pregunta se desea saber si conocen la clasificación de los ángulos formados por dos rectas paralelas cortadas por una secante.

2. El ∆ ABC cuyas medidas son 3 u cada lado se clasifica, según sus lados, como triángulo:

A. Rectángulo
B. Equilátero
C. Isósceles
D. Escaleno
E. N.A.

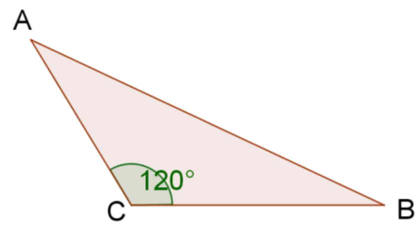


Con esta pregunta se desea conocer si saben clasificar los triángulos de acuerdo a la longitud de sus lados.

3. El ∆ ABC de la figura se clasifica de acuerdo a la medida de sus ángulos, en triángulo:

A. Obtusángulo
B. Acutángulo
C. Rectángulo
D. Equiángulo, Escaleno

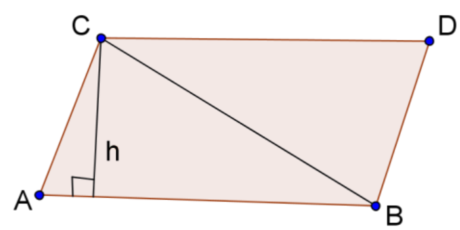
E. N. A



Con esta pregunta se desea saber si conocen la clasificación de los triángulos según sus ángulos.

4. El polígono que aparece en la figura cuyas características son AB| |CD, AC| | BD, CD = AB, AC = DB y h $\perp$ AB representa un.

A. Paralelogramo
B. Rectángulo
C. Hexágono
D. Cuadrado
E. N. A



El objetivo de esta pregunta es determinar si conocen la clasificación de los cuadriláteros.

5. En la figura del problema 4 el segmento h representa la:

A. Diagonal
B. Mediatriz
C. Bisectriz
D. Altura
E. N. A

Con esta pregunta se desea saber si conocen los elementos de un paralelogramo.

6. La figura definida como una curva cerrada, cuyos puntos están en un mismo plano y a igual distancia de un punto fijo llamado centro se llama:

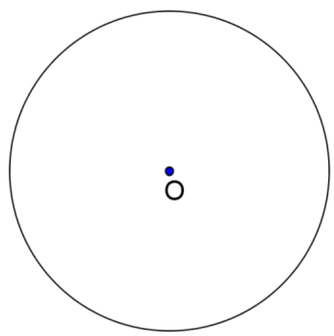
A. Círculo
B. Cilindro

C. Circunferencia
D. Esfera
E. N.A

Esta pregunta pretende averiguar si reconocen la circunferencia, dada su definición.

7. En la circunferencia adjunta, el conjunto de puntos interiores a la misma se llama:

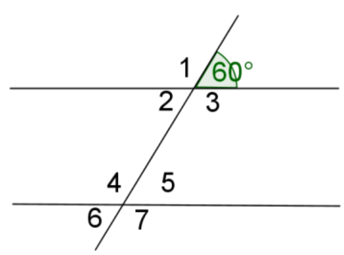
A. Sector circular
B. Circulo
C. Centro
D. Ortocentro
E. N.A.



Con esta pregunta se desea saber si conocen la diferencia entre circunferencia y círculo.

8. Los ángulos 2 y 5 de la figura tienen el valor de:

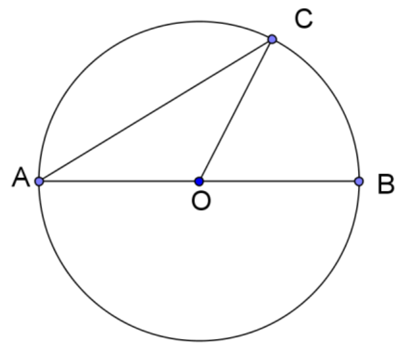
A. 90°
B. 45°
C. 60°
D. 30°
E. N.A



Con esta pregunta, deseamos conocer si saben encontrar el valor de los ángulos formado por dos rectas paralelas cortadas por una secante, dado el valor de uno de ellos.

9. Los segmentos AC, OC y A B de la figura reciben el nombre respectivamente de:

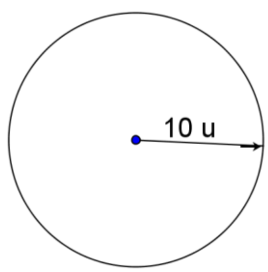
A. Cuerda, radio y arco
B. Cuerda, radio y diámetro
C. Diámetro, arco y tangente
D. N.A



Con esta pregunta, deseamos averiguar si reconocen los elementos de la circunferencia.

10. El perímetro de la circunferencia adjunta mide aproximadamente.

A. 62.8 u^2
B. 62.8 u
C. 68.2 u^2
D. 68.2 u
E. N.A



Esta pregunta pretende averiguar si conocen la fórmula para hallar el perímetro de una circunferencia.

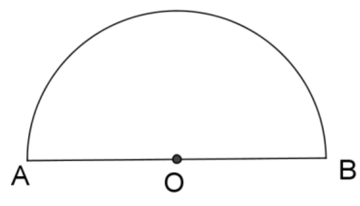
11. El área de un círculo, cuya longitud del radio es de 3 u es aproximadamente:

A. 26.82 u^2
B. 28.20 u^2
C. 22.86 u^2
D. 28.26 u^2
E. N.A

Esta pregunta pretende averiguar si conocen la fórmula para calcular el área de un círculo.

12. El sector circular de la figura adjunta representa la mitad de una circunferencia de radio igual a 10 u. El área de este sector es aproximadamente igual a.

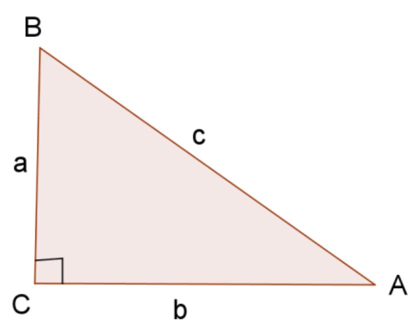
A. 157.5 u^2
B. 157.0 u
C. 150.7 u^2
D. N.A



Esta pregunta tiene como objetivo saber si relacionan la fórmula del área del círculo para calcular un sector de el.

13. En el triángulo rectángulo de la figura adjunta los lados a, b y c (con a y b menor que c) reciben el nombre de.

A. Catetos e hipotenusa
B. Catetos y altura
C. Catetos y base
D.N.A

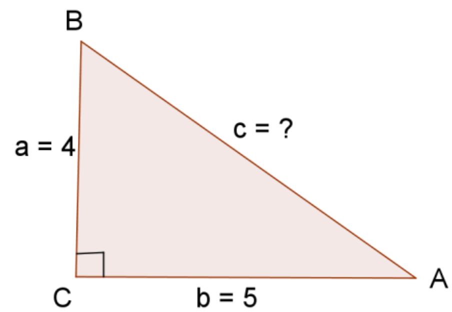


Esta pregunta pretende investigar si conocen el nombre de los lados de un triángulo rectángulo.

14. El valor del lado faltante en el triángulo de la figura adjunta mide.

A. 10 u

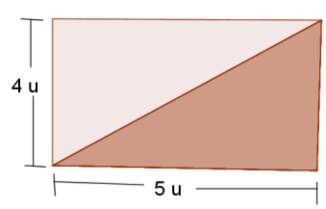
B. 5 u
C. 15 u
D. 3 u
E. N.A



Esta pregunta pretende averiguar si saben aplicar el Teorema de Pitágoras.

15. Al calcular el área de la parte sombreada del rectángulo obtenemos.

F. 10 u^2
G. 15 u^2
H. 20 u^2
I. 5 u^2
J. N.A

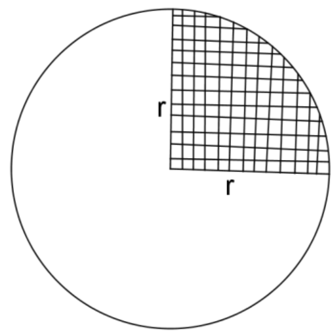


Esta pregunta pretende conocer si saben calcular el área de un triángulo rectángulo.

16. El área del círculo comprendida entre dos radios y el arco, como el de la figura se llama.

K. Corona circular

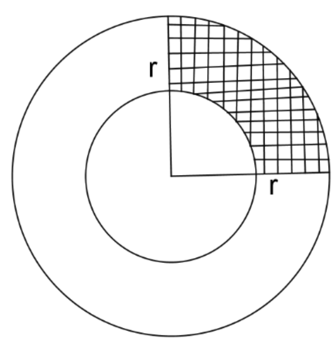
L. Sector circular
M. Cuerda
N. Semicircunferencia
O. N.A



Esta interrogante tiene como propósito saber si conocen el sector circular del círculo.

17. El área del círculo rayada en la figura adjunta se llama

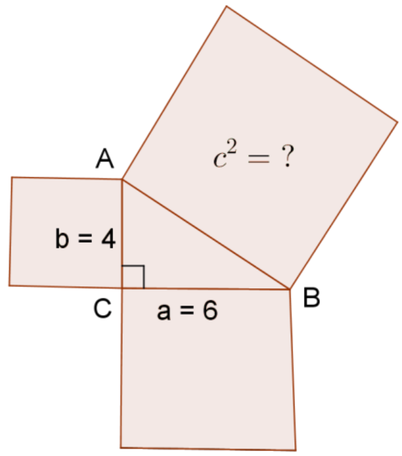
P. Sector circular
Q. Corona circular
R. Trapecio circular
S. Sector circular
T. N.A



Esta pregunta pretende averiguar si conocen la parte del círculo llamada trapecio circular.

18. El área del cuadrado construido sobre la hipotenusa del triángulo que aparece en la figura es igual a.

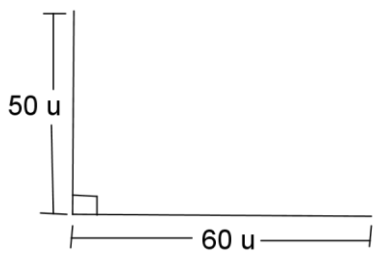
A. 45 u^2
B. 52 u^2
C. 55 u^2
D. 54 u^2
E. N.A



Esta pregunta pretende conocer si saben aplicar geométricamente el Teorema de Pitágoras.

19. Una torre de 50 unidades de altura, proyecta una sombra de 60 unidades de largo. Si determinamos la distancia que hay desde la parte superior de la torre hasta donde llega la sombra, esta mide aproximadamente.

A.78.1 m
B.70.0 m
C.75.0 m
D.N.A

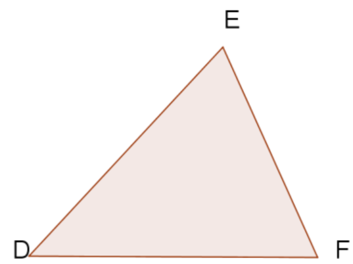


Esta pregunta tiene como propósito averiguar si saben aplicar el Teorema de Pitágoras en situaciones reales.

.

20. Si en el triángulo DEF: $\angle$D=40º y $\angle$E=60º, ¿Cuál es la medida del ángulo F?

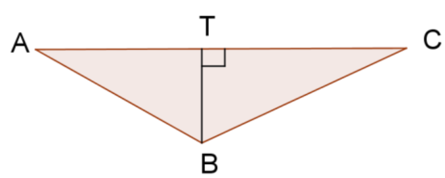
A. 100º
B. 80º
C. 180º
D. 20º
E. N.A.



Esta pregunta tiene como propósito saber si reconocen el valor de la suma de los tres ángulos interno de un triángulo.

21. En el ∆ ABC de la figura, el segmento BT representa la:

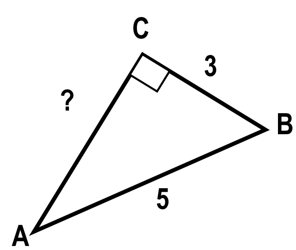
A. Altura
B. Bisectriz
C. Mediana
D. Mediatriz
E. N.A.



Esta interrogante pretende averiguar si conocen los elementos de un triángulo.

22. En el triángulo rectángulo, que se muestra en la figura, determine el valor faltante:

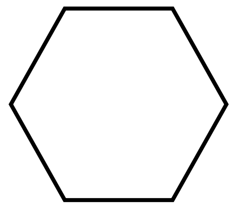
A. 2
B. 4
C. 8
D. 16
E. N.A.



Esta pregunta pretende conocer si saben aplicar el Teorema de Pitágoras.

23. La figura adjunta representa un:

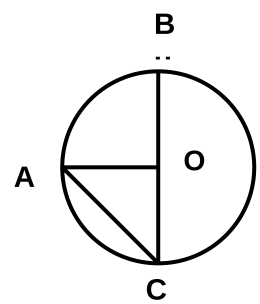
A. Hexágono
B. Pentág0no
C. Eneágono
D. Trapecio Isósceles
E. N.A.



Esta pregunta pretende averiguar si conocen la clasificación de los polígonos regulares según el número de lados.

24. En la circunferencia de centro O: el segmento que representa al diámetro es:

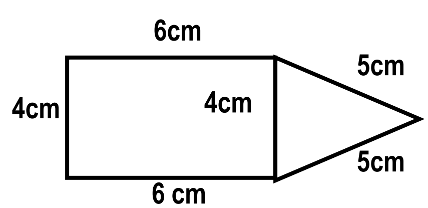
A. $\overline{OC}$
B. $\overline{OA}$
C. $\overline{AC}$
D. $\overline{BC}$
E. N.A.



Esta pregunta tiene como propósito averiguar si conocen los elementos de la circunferencia.

25. Corresponde al perímetro de la figura adjunta:

A. 22 cm
B. 26 cm
C. 30 cm
D. 34 cm
E. N.A.



Con esta pregunta se desea saber si conocen el concepto de perímetro.

26. Si la longitud de una circunferencia es $L=10\pi$ unidades, su radio mide:

A. $\frac{1}{5}$ u
B. 2 u
C. 5 u

D. 10 u
E. N.A.

Esta pregunta pretende averiguar si saben encontrar el radio de una circunferencia dada la longitud de la mista.

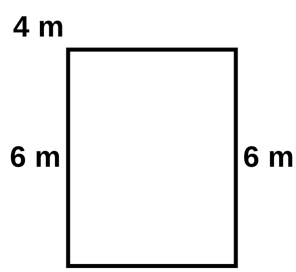
27. El área de un círculo de radio igual a 5 cm es.

A. 5π cm^2
B. 10π cm^2
C. 20π cm^2
D. 25π cm^2
E. N.A.

Esta pregunta desea determinar si conocen la fórmula para el área de un círculo y su aplicación.

28. El área del rectángulo de la figura adjunta es:

A. 10 m^2
B. 12 m^2
C. 20 m^2
D. 24 m^2



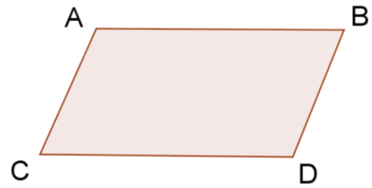
Esta interrogante pretende averiguar si conocen la fórmula para encontrar el área de un rectángulo.

29. La relación entre la longitud de la circunferencia y su radio se establece con el valor de:

A. π = 3.00000
B. π = 3.1416
C. π = 3.15 16
D. π = 3.1414
E. N.A

30. En el cuadrilátero ABCD de la figura $\angle$C=60º, la suma de la medida de los ángulos$\angle$ A,$\angle$B y $\angle$D es:

A. 270°
B. 180°
C. 300°
D. 380°
E. N.A



Este criterio tiene como propósito averiguar si los docentes reconocen el valor de la suma de los ángulos de un cuadrilátero.

MUCHAS GRACIAS

UNIVERSIDAD DE PANAMÁ
PROGRAMA DE MAESTRÍA EN MATEMATICA EDUCATIVA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTA Y TECNOLOGÍA

Respetado(a) Educador(a): Con el objetivo de determinar algunas de las dificultades que usted podría confrontar para enseñar Geometría en la escuela primaria y poderle ofrecerle algunas alternativas de solución, le solicitamos, muy respetuosamente, nos conteste el siguiente cuestionario:

Sección 1:

1. Tipo de Bachillerato que le permitió ingresar a la Universidad de Panamá o cualquier otro Centro de Estudios Superiores: ___________________________.
2. Turno en que realizó los estudios de bachillerato.
   - ☐ Diurno
   - ☐ Nocturno
3. Modalidad de estudio del bachillerato:
   - ☐ Presencial
   - ☐ Semi Presencial
   - ☐ A distancia
4. En una escala de 1 a 5, cómo ubicaría su agrado por la Geometría:
   - ☐ Uno (no me agrada)
   - ☐ Dos (casi no me agrada)
   - ☐ Tres (me agrada muy poco)
   - ☐ Cuatro (me agrada)
   - ☐ Cinco (me agrada mucho)

5. Indique el promedio aproximado obtenido en Matemática en sus estudios de bachillerato:

- ☐ 3.0 – 3.5
- ☐ 3.6 – 4.0
- ☐ 4.1 – 4.5
- ☐ 4.6 – 5.0

6. ¿Confrontó problemas en el aprendizaje de la Geometría durante el bachillerato?
   - ☐ Sí Especifique ____
   - ☐ No Especifique ____

7. ¿Cree usted que los aprendizajes obtenidos en los cursos de Matemática en la Universidad o Centro de Estudio Superior (por ejemplo: ¿Matemática y su Lenguaje, Estadística Descriptiva, Estadística Inferencial, Didáctica de la Matemática I, Didáctica de la Matemática II, ¿etc) le ayudan a capacitarlo para que usted pueda enseñar Geometría en VI° grado?
   - ☐ Sí Especifique ____
   - ☐ No Especifique ____

8. ¿Cree usted que los aprendizajes obtenidos en los cursos sobre Didáctica de la Matemática impartidos en la Universidad o Centro de Estudio Superior le facilitaron el conocimiento necesario para el manejo y aplicación de recursos didácticos en el área de Geometría?
   - ☐ Sí Especifique ____
   - ☐ No Especifique ____

9. ¿Durante las jornadas de capacitación que ofrece el Ministerio de Educación ha recibido usted algún seminario sobre Geometría y / o de su enseñanza?
   - ☐ Sí ____
   - ☐ No____

10. ¿Al momento de enseñar Geometría, considera usted que se le facilita el manejo de los contenidos del programa y logra cubrirlos en su totalidad?

- ☐ Sí Explique____
- ☐ No Explique____

11. Para los contenidos geométricos de los programas del nivel primario, ¿Conoce usted el recurso didáctico que debe utilizarse y la aplicación del mismo?

- ☐ Sí Especifique____
- ☐ No Especifique____

12. Al momento de impartir Geometría aplica usted algún recurso didáctico para su enseñanza.

- ☐ SÍ Especifique ____
- ☐ No Especifique ____

13. Domina usted contenidos geométricos de un nivel superior a los que se imparten en primaria como por ejemplo 7°, 8° o 9° grado.

- ☐ SÍ Especifique ____
- ☐ No Especifique ____

Muchas gracias

EVIDENCIAS FOTOGRÁFICAS
(ESCUELAS ENCUESTADAS)

Escuela Bijagual

Escuela Quebrada Félix

Escuela Punuloso

Escuela Nicanor

Escuela Arretí

Escuela Santa Fe

Directora de la Escuela Sansón

Docente de la Escuela Sansón

Directora de la Escuela Portuchada

Escuela Emberá Puru

Escuela Pueblo Nuevo

Escuela Gerardo Bacorizo

Escuela El Tirao

Escuela Alto de Buenos Aires

Escuela Arusa Arriba

Escuela El Porvenir

Escuela Santa Librada

Escuela Nuevo Bijao

Escuela Nuevo Progreso

Escuela Alto del Cristo

Escuela La Cantera

Escuela Quebrada Muerto

Escuela Sansoncito

Noticia de la Prensa 22 de octubre de 2015

Panamá salió mal posicionado en el Tercer Estudio Regional Comparativo y Explicativo, que evalúa el nivel de aprendizaje en 15 países de América Latina y el Caribe, así como una región del estado mexicano.

LA PRENSA/Luis García
22 de octubre de 2015.

La provincia de Veraguas, donde se forman la mayoría de los docentes del país, fue el escenario escogido por el Ministerio de Educación (Meduca) para revelar los resultados del **Tercer Estudio Regional Comparativo y Explicativo (TERCE)**.

Esta investigación evaluó el aprendizaje de 15 países de América Latina y el Caribe en matemática, lectura y ciencias naturales, arrojando una conclusión clara para Panamá: **el nivel de la educación es bajo y debe mejorarse.**

De hecho, para el estudio se realizaron pruebas académicas en 187 escuelas del país entre públicas y privadas, durante el año 2013. Además, se adoptó como promedio base para valorar a la región latinoamericana 700 puntos.

En el caso de Panamá siempre registró promedios por debajo de ese puntaje.

Por ejemplo, en matemática los estudiantes de tercer grado de primaria obtuvieron, en promedio, 664 puntos y los de sexto grado, 644 puntos. En esta asignatura el país mostró puntajes similares a Nicaragua y Honduras, mientras que fue superado por Chile, Costa Rica, Uruguay, entre otros.

En otra área de la enseñanza como la lectura, los alumnos de tercer grado alcanzaron 670 puntos en promedio y los de sexto grado, 671. Asimismo, en ciencias naturales, la puntuación fue de 675.

El informe fue presentado por Nivia Rossana Castrellón, vicepresidenta del Grupo Unidos por la Educación, quien señaló que el documento servirá a las autoridades para establecer sus políticas públicas en materia de educación.

Según Castrellón, el informe fue elaborado por el Laboratorio de Calidad de Educación de la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (Unesco, por sus siglas en inglés).

En medio de su exposición, planteó que, mientras mayor independencia administrativa tengan las escuelas, habrá mejores resultados académicos.

A la vez, explicó que las mejores calificaciones las obtuvieron los planteles con docentes especializados en determinadas materias.

“La jornada extendida es otro factor que ayudará a los estudiantes, ya que mientras más expuestos están a los procesos de enseñanza, mayor será su capacidad de aprendizaje”, agregó.

Por otra parte, lamentó que los resultados no fueran los mejores, pero dijo estar más inquieta porque el país presenta uno del producto interno bruto más elevados de la región ($46 mil 212 millones al cierre de 2014) como para presentar esos resultados. “Eso hay que analizarlo y ver lo que está pasando”, puntualizó.

RETOS DEL SISTEMA

Moritz Bilagher, especialista de la Unesco en el tema, subrayó que el país está mejorando; sin embargo, necesita prestar atención a estas estadísticas. “El sistema educativo no está estancado, pero los niños presentan bajos niveles de desempeño. Eso significa que, aunque hubo progreso, queda trabajo por hacer”, acotó.

Precisó que se debe reforzar matemática en los alumnos de sexto grado y, lectura en los menores de tercer grado de enseñanza primaria.

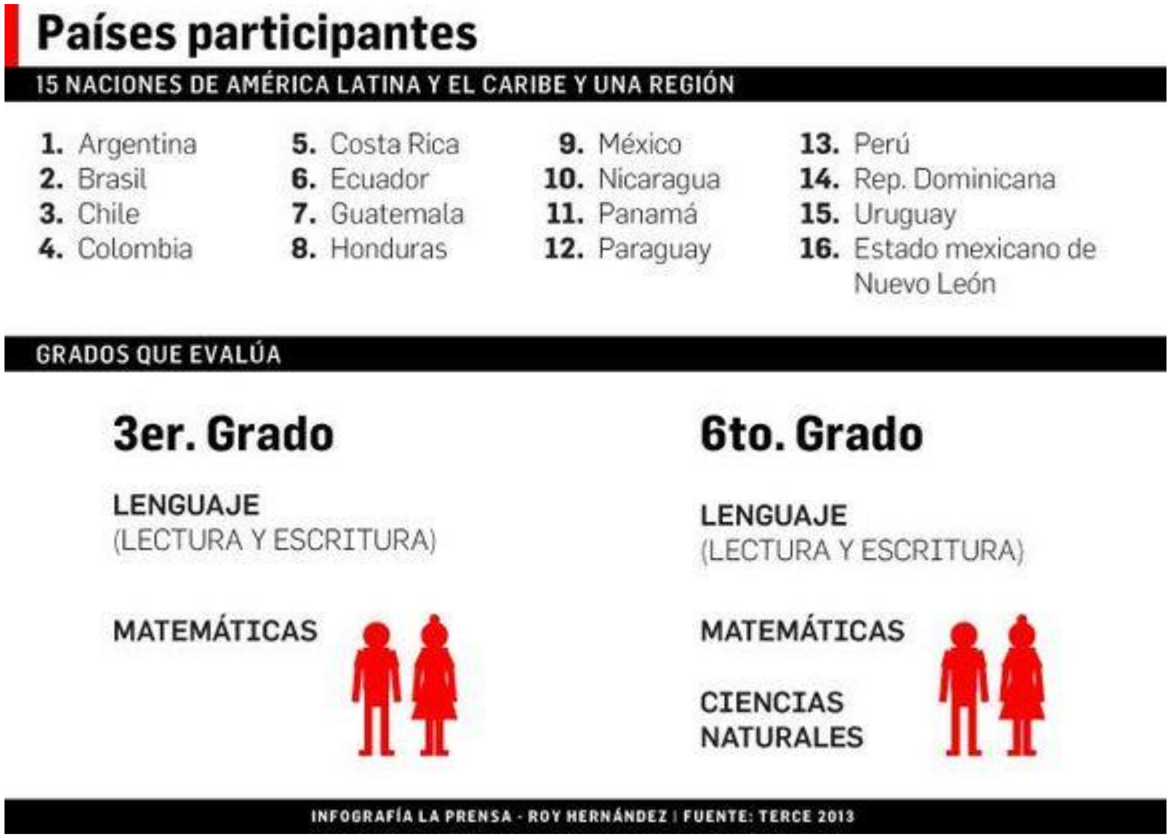
Bilagher resaltó que **en escritura los estudiantes de primaria están casi a la altura del promedio establecido en la región.**

A la vez, especificó que la interpretación de los datos que surgieron en el informe queda a discreción de cada país, ya que la Unesco no se inmiscuye en asuntos internos de las naciones.

En tanto, Yira Garcés, directora de Evaluación Educativa del Meduca, destacó que tras la presentación del documento deben centrarse en mejorar la preparación del docente y ofrecer las herramientas a los estudiantes para cambiar esa realidad.

“Necesitamos hacer un análisis de la parte curricular. Nuestro proyecto Aprende al Máximo es para desarrollar asignaturas como español, matemática y ciencias naturales”, añadió.

Reiteró que se deben reforzar las habilidades de los docentes, ya que los mejores resultados del informe surgieron en los colegios donde había educadores preparados y capacitados.



TERCE LA PRENSA/Roy Hernández

No obstante, Yadira Pino, dirigente de la Asociación de Educadores Veragüenses, reconoció que se deben hacer ajustes en la política educativa, porque el problema va más allá de la relación estudiante-docente.

“Avanzamos en algunas cosas, pero necesitamos más. Para esto el docente necesita mayor formación y atención, así como las herramientas para realizar mejor su trabajo”, destacó.

También señaló la necesidad de mayor recurso en el tema educativo, porque en Panamá solo se asigna un 3% del producto interno bruto, cuando la cifra en otros países oscila entre el 6% y el 10%.

“Hay que crear las condiciones para que estudiantes y docentes se sientan cómodos en las escuelas, pues solo en el sector público estamos hablando de 800 mil estudiantes”, especificó.

En la presentación del documento participó Juan Bosco Bernal, exministro de Educación y rector de la Universidad Especializada de las Américas, quien argumentó que pese a los resultados hay que mirar el futuro con “optimismo” y lograr que todos los sectores participen en la construcción de un sistema educativo “equitativo” y de “calidad”.

“Todos tenemos que aportar. Lo más importante de estas cifras es que nos revelan en qué momento estamos y nos dicen que nos estamos quedando atrás por lo que hay que dar un salto cualitativo para mejorar”, dijo.

En ese sentido, mencionó que no solo se trata de más presupuesto, sino de determinar el sitio de donde provienen esos niños con deficiencias, cuál es su condición económica, quiénes son sus padres, qué tipo de escuelas tenemos y quiénes son los docentes y su grado de formación.

“Hay que definir el perfil del docente que queremos como país y de los directores de escuelas. En fin, hay mucho trabajo”, concluyó.

Respecto a la formación de los docentes, la exviceministra de Educación y actual rectora de la Universidad Latina, Mirna de Crespo, sugirió la utilización de estrategias pedagógicas participativas y analíticas.

Indicó que, en lugar de imponer operaciones mecánicas, deben aplicar pruebas y problemas analíticos para que los estudiantes no memoricen, sino que razonen y debatan.

El TERCE fue aplicado a 3 mil 631 estudiantes de tercer grado y 3 mil 775 alumnos de sexto grado de Panamá.

A la espera de reunión con Varela

YARITZA GRICEL MOJICA | 22 oct 2015 - 00:05h

La Unión Nacional de Educadores por la Calidad de la Educación Panameña (Unecep) pidió al presidente de la República, Juan Carlos Varela, una reunión en la que participen los 16 gremios magisteriales para analizar la situación del sistema.

Humberto Montero, subsecretario de la Unecep, manifestó que el pasado 4 de agosto le solicitaron a la titular de Educación, Marcela Paredes de Vásquez, establecer un diálogo con el mandatario, pero transcurridos dos meses y medio no han recibido respuesta.

Montero prevé que para el próximo año la crisis en las instalaciones educativas será mayor, ya que no se han otorgado los fondos necesarios para cubrir programas como Mi Escuela Primero, la Jornada Única y Panamá Bilingüe.

El presupuesto de la entidad para 2016 será de mil 381 millones de dólares para cubrir más de 3 mil escuelas y atender a los más de 800 mil estudiantes, detalló el dirigente gremial. Ante estos señalamientos, desde el Meduca se informó que no se emitirían comentarios.

UNIVERSIDAD DE PANAMÁ
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y TECNOLOGÍA
DIRECCIÓN DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO
TEL. 523-6249

Panamá, 28 de julio de 2015.
FCENT/DIP/M-213-15.

Señores
Directores de Escuela
Ministerio de Educación
Provincia del Darién
E. S. D.

Estimado Profesor:

Me dirijo a usted con mucho respeto, afín de participarle que el profesor Enrique Ortega, portador de la cédula de identidad personal 2-130-104, se encuentra realizando su Proyecto de Tesis en el programa de Maestría en Matemática Educativa. El profesor Ortega planea desarrollar su propuesta sobre "El Maestro y la Enseñanza de la Geometría En VI° Grado en la Provincia de Darién", que tiene el código CE-PT-327-07-07-16-04. El profesor asesor es el Prof. Germán Beitía.

Mucho agradezco el apoyo que le pueda ofrecer al profesor Ortega para el éxito de su trabajo, el cual redundará en beneficios para el sector educativo.

Muy atentamente,

Dr. Juan A. Jaén
Director de Investigación y Postgrado

2015: "Año de la Reafirmación de la Autonomía Universitaria".
Ciudad Universitaria Octavio Méndez Pereira
Estafeta Universitaria, Panamá, Rép. De Panamá

UNIVERSIDAD DE PANAMÁ
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTAS Y TECNOLOGÍA
DIRECCIÓN DE INVESTIGACIÓN Y POSTGRADO
TEL. 523-6249

Panamá, 28 de julio de 2015.
FCENT/DIP/M-213-15.

Señores
Directores de Escuela
Ministerio de Educación
Provincia del Darién
E. S. D.

Estimado Profesor:

Me dirijo a usted con mucho respeto, afín de participarle que el profesor Enrique Ortega, portador de la cédula de identidad personal 2-130-104, se encuentra realizando su Proyecto de Tesis en el programa de Maestría en Matemática Educativa. El profesor Ortega planea desarrollar su propuesta sobre "El Maestro y la Enseñanza de la Geometría En VI° Grado en la Provincia de Darién", que tiene el código CE-PT-327-07-07-16-04. El profesor asesor es el Prof. Germán Beitía.

Mucho agradezco el apoyo que le pueda ofrecer al profesor Ortega para el éxito de su trabajo, el cual redundará en beneficios para el sector educativo.

Muy atentamente,

Dr. Juan A. Jaén
Director de Investigación y Postgrado

Recibido:
Directora
5/8/2015
Hora: 10:40 am

Esc. Amayanci
Directora Encargada
6-8-15

10-8-15

Director
10-8-15

Escuela Río Iglesias
Encargada

Esc. Boca de Cupe
7-8-2015

10-8-2015

4-8-2015

11-8-2015
Director

6/8/15

2015: "Año de la Reafirmación de la Autonomía Universitaria".
Ciudad Universitaria Octavio Méndez Pereira
Estafeta Universitaria, Panamá, Rép. De Panamá

UNIVERSIDAD DE PANAMÁ
PROGRAMA DE MAESTRÍA EN MATEMATICA EDUCATIVA
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES, EXACTA Y TECNOLOGÍA
LISTADO DE ESCUELAS VISITADAS PARA LA APLICACIÓN DEL TEST Y ENCUESTAS

CENTRO EDUCATIVO	DIRECTOR	FIRMA	FECHA
CEBG. Portuchada	María de Marín	[illegible]	5/08/2015.
C.E.B.G Marco Alarcón P.	Pablo Murillo	x [illegible]	5-8-2015
Escuela Punuloso	Jaryseth Rubido	Rubido	6-8-2015
Esc. Guayangi	Jackeline M. Delgado B.	Jackeline M. Delgado B.	6-8-2015
Esc. San Vicente	Alicia E. Sánchez	[illegible]	7-8-2015.
Esc. Ricanor	Fulvia Torres	[illegible]	10-8-2015
Esc. La Moneda	Rubí G. Guerra	[illegible]	10-8-2015
Esc. Arretí	Angelina Cortez	[illegible]	10-8-2015
Esc Alto del Cristo	Damarys Marín	Damarys Marín M.	11-8-2015
Esc. Qda. Muerto	Dania Flaco Q.	[illegible]	14/8/2015
Esc Qda Honda	Adriana A. de Ramos	[illegible]	11/8/2015

C.E.B.G. Santa Fe	José A. Bazán	José A. Bazán	11-8-2015.
C.E. Zapallal, Primaria	Adela R. de Sánchez	[illegible]	12-8-2015
Esc. Bijagual	Fredeslinda Ortega	[illegible]	18-8-2015
Esc. Rio Iglesia	María Esther Ojo	[illegible]	18-8-2015
Esc Sansón	Marisol Alvarado	Marisol Alvarado	25-8-2015
Esc. Sansoncito	Aminta Otero.	Aminta A. Otero A.	24-8-2015
Esc. Qda. Félix	Melissa Rodríguez A.	Melissa Rodríguez	1-9-2015
Esc. Cangilón	María d. Cedeño	María Cedeño	1-9-2015
Es. Altos Bnos Aires	Blasina Ruiz	Blasina Ruiz	3/9/2015
Esc. Cruza Arriba	Olimpia Gorra	[illegible]	4-9-2015
Esc. Pueblo Nuevo	Marcelino	M Díaz	7-9-2015
Esc. Gerardo Bacorizo	Emmanuel Valdespino	[illegible]	9/9/15
Esc. Emberá Purú	Jairo Zambrano M	[illegible]	11-9-15
Esc. El Tirado	María Murillo R.	María Murillo R.	14/9/2015
Esc. El Porvenir	Luis C. Barsallo.	[illegible]	16-9-15
C.E.B.G. Santa Librada	Susana García	[illegible]	18-9-2015
C.E.B.G. Nuevo Bijao	Marisol de Moreno	[illegible]	21-9-2015
C.E. Nuevo Progreso	Tulio Alvarez	[illegible]	24/9/15
Esc. La Cantera	Gladys E. Batista.	Gladys E. Batista	28/9/15

MEDUCA
MINISTERIO DE EDUCACIÓN

DIRECCIÓN REGIONAL DE EDUCACIÓN DE DARIÉN

DISTRUBUCIÓN DE LAS ZONA ESCOLARES 2017

6893-8899

SUPERVISORES REGIONALES

65060071

	FREED CAMPOS	ANA JULIA MARTÍNEZ	NEFTALÍ CHAVARRÍA	ZOILA R. DE PITTI	CECILIA ATENCIO	JOHN GONZÁLEZ	ABILIO BATISTA	FULVIA TORRES	YENI CONCEPCIÓN	LADYS CENTELLA	VICTO CONCEPC
N°	ZONA N° 1	ZONA N° 2	ZONA N° 3	ZONA N°4	ZONA N° 5	ZONA N° 6	ZONA N° 7	ZONA N° 8	ZONA N° 9	ZONA N° 10	ZONA N°
1	Río Congo	Buenos Aires	Anayansi	La Cantera	Walla	Buena Vista	Aguas Calientes	Emilia Valdelamar	Matugantí	José De La C. Herrera	Marcos Medin
2	Río Mogue	Vasco Núñez de Balboa	La Moneda	Cucunatí	Nurra	Arenal	Altos de Buenos Aires	Pinogana	Payita	Críspulo Leoteau	El Mamey
3	Punta Alegre	Nueva Galilea	Arretí	Agua Buena 1	Mortí	Monterrico	Aruza Arriba	Pirre 1	Sobiaquirú	Cémaco	Biroquerá
4	Llano Bonito de Mogue	Pueblo Nuevo	Altos del Cristo	Agua Buena 2	Agua Fría 1	Valle Rico	Río Iglesia	El Mamey	Balsal	Nueva Estancia	Puerto Piña
5	La India	Llano Bonito	Quebrada Honda	Tamarindo	Agua Fría 2	Qda. Limón	Marcos Alarcón	José Del C. Mejía	Púcuru	Calle Larga	Guayabito
6	Quintín	Chuletí	Boca de Lara	Coredó	Palmira	Río Bonito	IPT Marcos Alarcón	Nuevo Progreso	Paya	Río de Jesús	El Coco
7	Seteganti	Bacao	Zapallal Primaria	El Marañón	Río Pavo	Salto Tres Piedras	Chatí	Nuevo Bijao	Boca de Cupe	Altos de Jesús	Pavarandó
8	Chepigana	Inocencio Quintanar	Zapallal Secundaria	Río Román	Paraíso	Unión Interiorana	Punuloso	Santa Librada	Cupe	Valle Bijagual	Peñita
9	Josepagantí	Nueva Activa	Afnatí	Qda. Muerto	Platanillo	La Reserva	Sansón	El Totumo	Mi Pueblito	Sambú	Llano Bonito
10	La Quebrada	Las Cumbres	Chucurtí	El Caoba de Cucunatí	Vista Alegre	Villa Flor	Sansón Arriba	Canglón	Boca de Yape	Cerro Naipe	Qda. Lucas
11	Bajo Bonito	La Marea	Santa Fe	Candelilla	Río Sabana	Fe y Esperanza	Sansón Abajo	Peñita	Aruza		Cocalito
12	Maquencal	Pigüila	Qda. Tanque	Santa Rosa	Guayabillo	Las Peñitas	Qda. Félix	El Porvenir			
13	Río Congo	Aldea Emberá	Relojera	Qda. Eusebio	Qda. Jabón	Edamia Mendoza	Portuchada	IFAD			
14	Mogocénega	Eugenio Pérez	Pueblo Nuevo	Nicanor	El Tirado	Santa Bárbara					
15	Colorado	Alejandro Castillo	Gerardo Bacorizo	San Vicente	Emberá Puru	El Puerto					
16	Caña Blanca			El Pijibá	Zimba	Sierpe					
17						El Caoba de Río Congo					

Luis Rosmeri Degracia
8-189-962

Glorivel Soto Guiyer
5-716-811