

## Análise dos co-movimentos entre os mercados de capitais do Brasil e dos EUA

**Daniel Reed Bergmann<sup>†</sup>**

*Fundação Instituto de Administração (FIA)*

**José Roberto Ferreira Savoia<sup>Ω</sup>**

*Universidade de São Paulo (USP)*

**Wesley Mendes-da-Silva<sup>¥</sup>**

*Fundação Getúlio Vargas (EAESP-FGV)*

**Mauri Aparecido de Oliveira<sup>£</sup>**

*Universidade Federal de São Paulo (UNIFESP)*

**Wilson Toshio Nakamura<sup>Φ</sup>**

*Universidade Presbiteriana Mackenzie*

**RESUMO:** Neste artigo, a teoria de cópulas é utilizada para analisar os co-movimentos entre os mercados de capitais do Brasil e dos EUA. Na finalidade de implementação de uma estratégia de alocação de ativos é importante entender os eventos extremos – tanto os positivos (*booms*) como os negativos (*crashes*) – e seus efeitos sobre os mercados. Os índices de mercado usados são o IBOVESPA e o S&P 500 cobrindo o período de 03/2001 a 04/2007. A aderência aos log-retornos das principais cópulas encontradas na literatura financeira é avaliada. Os seguintes critérios foram escolhidos: o Log-likelihood, o critério de informação de Akaike e o critério de informação bayesiano. Os resultados mostram que a cópula de Joe-Clayton simetrizada é a mais adequada para modelar a estrutura de dependência entre os log-retornos do IBOVESPA e os do S&P500. Este trabalho difere de alguns estudos já realizados [e.g. Mendes e Moretti(2005) e Canela e Collazo(2005)], pois leva em consideração a modelagem de cópulas dinâmicas introduzida por Patton (2006). Finalmente, através dos índices de dependência caudal ao longo do tempo, pode-se concluir que a ocorrência de eventos extremos negativos (*crashes*) no mercado norte-americano tende a afetar mais o mercado brasileiro quando da comparação da ocorrência dos eventos extremos positivos (*booms*).

Recebido em 13/11/2010; revisado em 06/12/2010; aceito em 11/05/2011; disponível em 21/10/2011

### Correspondência autores\*:

<sup>†</sup> Mestre em Ciências Contábeis pela Universidade de São Paulo (USP).  
**Vinculação:** Fundação Instituto de Administração (FIA).  
**Endereço:** Rua Cisplatina, no. 871, apto. 31 São Paulo – SP – Brasil - CEP: 04211-040.  
**E-mail:** danielrb@usp.br  
**Telefone:** (11) 2215-0661

<sup>Ω</sup> Pós-Doutorado em Finanças pela Columbia University (CUNY).  
**Vinculação:** Universidade de São Paulo (USP).  
**Endereço:** Av. Prof. Luciano Gualberto, 908 – sala G 168. Cidade Universitária, São Paulo – SP – Brasil - CEP: 05508-010.  
**E-mail:** jrsavoia@usp.br  
**Telefone:** (11) 3818-4023

<sup>¥</sup> Doutor em Administração pela Universidade de São Paulo (USP).  
**Vinculação:** Fundação Getúlio Vargas (EAESP-FGV).  
**Endereço:** R. Itapeva, 474 – Bela Vista, São Paulo – SP – Brasil - CEP: 01332-000.  
**Email:** mr.mendesdasilva@gmail.com  
**Telefone:** (11) 2615-4705

<sup>£</sup> Pós-doutorado em Estatística Aplicada pela Universidade de São Paulo (USP).  
**Vinculação:** Universidade Federal de São Paulo (UNIFESP).  
**Endereço:** Rua Oliveira Melo, no. 104 São Paulo – SP – Brasil - CEP: 04271-000.  
**E-mail:** mauriao@usp.br  
**Telefone:** (11) 3596-3335

<sup>Φ</sup> Doutor em Administração pela Universidade de São Paulo (USP).  
**Vinculação:** Universidade Presbiteriana Mackenzie.  
**Endereço:** Rua da Consolação, 930 – São Paulo – SP – Brasil – CEP: 01302-907.  
**E-mail:** wtnakamura@uol.com.br  
**Telefone:** (11) 3596-3335

**Nota do Editor:** Esse artigo foi aceito por Antonio Lopo Martinez



Esta obra está licenciada sob a Licença Creative Commons – Atribuição-Use não-comercial-Compartilhamento pela mesma licença 3.0 Unported License

**Palavras-chave:** Co-movimentos; Copula; retornos de ativos; estratégia financeira.

## 1. INTRODUÇÃO

De acordo com Sun, Rachev e Fabozzi (2006) o co-movimento dos mercados de ações internacionais é frequentemente utilizado como barômetro da globalização econômica e da integração financeira. A análise de tais co-movimentos é importante para diversificação do risco e formação de portfólios internacionais. A origem do co-movimento em um mercado de ações internacional está no efeito da volatilidade-em-correlação encontrado em Andersen et al. (2001), em retornos de ações individuais, e por Solnik, Boucrelie e Le (1996) em índices de retornos internacionais. De fato, o efeito da volatilidade-em-correlação pode ser explicado pela dependência das caudas dos respectivos ativos, o qual exhibe eventos extremos simultâneos. O co-movimento, volatilidade-em-correlação, e a dependência de caudas das distribuições são relacionadas quando da análise da estrutura de dependência dos mercados de ações internacionais. Encontra-se também que as correlações entre retornos consecutivos decaem lentamente, isto é, a dependência de longo prazo dos retornos é evidenciada.

Conforme Mendes e Moretti (2005), o co-movimento reflete as inter-correlações entre os respectivos retornos dos ativos (ou retornos em diferentes mercados) e a dependência de longo prazo exhibe a auto-correlação em relação a um retorno de ativo único (ou retorno de um único mercado). Portanto, quando analisamos os mercados de ações internacionais, há duas estruturas de dependência: a correlação em relação a um mercado isolado e a correlação entre muitos mercados.

Conforme Genest (2009), correlação é um conceito amplo nas áreas de finanças e seguros e é usada como uma medida de dependência linear entre variáveis aleatórias. Todavia, este termo é frequentemente utilizado de forma incorreta para significar qualquer noção de dependência. A correlação é uma medida muito particular de dependência entre muitas outras. No mundo das distribuições elípticas (e.g. distribuição normal multivariada ou distribuição t multivariada) esta é uma medida aceitável. Como as teorias financeiras e a análise de gerenciamento de risco se utilizam da estrutura de dependência dos ativos, torna-se importante a introdução de uma medida alternativa que supere tal limitação. Para tanto, utilizaremos a metodologia de cópulas, que foi primeiramente utilizada por Sklar (1959). O autor provou que uma coleção de distribuições marginais pode ser agrupada conjuntamente através de uma cópula a fim de formar a distribuição multivariada das mesmas.

Conforme Morettin e Tolo (2004, p. 10), Cont (2001, p. 224) e Pagan (1996, p. 18-21), os principais fatos estilizados dos retornos financeiros são:

- Os retornos são, em geral, não auto-correlacionados serialmente, mas dependentes ao longo do tempo;
- Decaimento lento da função de auto-correlação dos quadrados dos retornos;
- A distribuição de probabilidades dos retornos apresenta caudas mais pesadas do que uma normal;
- As séries dos log-retornos apresentam clusters de volatilidade ao longo do tempo;

Conforme Cherubini, Luciano e Vecchiato (2004), a Teoria de Cópulas pode ser utilizada, em Finanças e Econometria para tratar de duas questões relacionadas aos fatos estilizados declarados acima:

- A não-normalidade dos retornos dos ativos financeiros (existência de assimetria e/ou de “caudas pesadas” nas distribuições de probabilidade);
- A existência de dependência não-linear entre os retornos dos ativos financeiros;

Basicamente, uma cópula pode ser definida como uma função que acopla distribuições marginais univariadas formando distribuições multivariadas. Para tanto, faz-se necessário apenas definir a função de dependência entre as variáveis. Cópulas nos permitiram criar distribuições multivariadas que possuam marginais com distribuições diferentes. Isto é de grande valia neste trabalho uma vez que algumas séries financeiras podem apresentar assimetria e curtose nos mais diversos graus [Pagan (1996); Morettin e Tolo (2004)].

Apesar do conceito de copulas ter surgido há um longo tempo com Sklar (1959), suas aplicações em finanças e economia começaram a ser publicadas a partir do ano de 1999. Conforme Genest (2009, p. 3), 41% das publicações relacionadas ao tema de cópulas se relacionam ao estudo na área de finanças. Este autor, agrupou os estudos em grandes quatro áreas, que são:

1. **Gerenciamento de risco:** desenvolvimentos nesta área foram estimulados pelo Acordo de Basiléia II e pelas contribuições acadêmicas de Embrechts, McNeil e Strausmann (1999) e Li (2000);

2. **Gestão de carteiras:** os trabalhos tratam da dependência entre os mercados financeiros internacionais. O trabalho de Patton (2006) cai nesta categoria;

3. **Precificação de derivativos:** os trabalhos nesta área procuram tratar de opções exóticas, swaps de crédito etc. Detalhes podem ser encontrados em Cherubini, Luciano e Vecchiato (2004)

4. **Mensuração de risco:** os temas deste grupo se referem ao VaR (*Value-at-Risk*), contágio entre os mercados financeiros e *expected shortfall*. O trabalho de Rodrigues (2005) propõe uma aplicação no tema de contágio, por exemplo.

## 2. QUESTÃO DE PESQUISA

Segundo Cherubini, Luciano e Vecchiato (2004) e Rachev, Menn e Fabozzi (2005), quando pelo menos uma distribuição marginal (de um determinado ativo) não é uma normal, a medida tradicional de correlação de Pearson é inadequada, pois só há a captura de dependência linear pela mesma. Como os retornos dos ativos financeiros são tipicamente não-Normais com dependência não-linear, torna-se mais prudente a utilização de uma medida robusta de associação. Tal medida que mostra ser particularmente conveniente na modelagem de cópulas é o  $\tau$  de Kendall.

Neste trabalho, foram considerados dois índices de mercado, o IBOVESPA e o S&P 500, a fim de analisar a dependência entre o mercado acionário brasileiro e o americano por meio de cópulas. Segundo Cherubini, Luciano e Vecchiato (2004, p. 112-120) há diversos tipos de cópulas, tanto condicionais quanto não-condicionais que podem ser utilizadas para modelagem de dependência (e.g. cópula Normal, t de Student e Gumbel).

Para que os gestores de portfólio realizem suas estratégias internacionais *ex-ante* de alocação de ativos, torna-se importante uma avaliação da probabilidade de ocorrência de eventos extremos de repercussão negativa nos mercados sob sua análise (CANELA; COLLAZO, 2005).

Pretende-se verificar qual dos dois tipos de eventos extremos, positivo (*boom*) ou negativo (*crash*), ocorrido no mercado acionário norte-americano que mais poderia afetar o mercado acionário brasileiro.

Para responder à pergunta lançaremos mão da teoria de cópulas. A estrutura de dependência será medida pelo  $\tau$  de Kendall e pelos índices de dependência nas caudas.

Neste artigo, descreveremos os tipos de cópulas existentes na literatura de finanças e classificaremos as cópulas de acordo com sua aderência estatística. Da mesma forma que Patton (2006), Canela e Collazo (2005) e Breymann, Dias e Embrechts (2003), mediremos tal aderência por meio de dos conceitos econométricos de log-verossimilhança (LL), critério de informação de Akaike (AIC) e critério bayesiano de informação (BIC).

Este trabalho proporciona uma contribuição valiosa para a literatura de finanças, pois mostra a possibilidade de utilizarmos um indicador que consiga captar diariamente o impacto de eventos extremos nos mercados (este indicador é o índice de cauda das cópulas). Tal possibilidade se restringe apenas a uma determinada classe específica de cópulas (Joe-Clayton simetrizada). Assim, no contexto de crises financeiras, esta abordagem torna-se importante.

### 3. METODOLOGIA

Uma sequência de procedimentos quantitativos serão aplicados nas séries dos log-retornos do BOVESPA e do S&P 500. São eles:

1. Primeiramente, encontra-se a distribuição univariada não-paramétrica dos log-retornos. Este procedimento foi também realizado por Patton (2006) nas séries de câmbio.

2. Um segundo passo, já com as distribuições marginais determinadas, é escolher qual família de funções de cópula é mais indicada para representar a dependência particular entre cada uma das séries.

3. Com as distribuições e a função de cópula definida, passamos para a estimação dos parâmetros do modelo. Esses parâmetros se referem tanto às distribuições marginais quanto à função de cópula que será utilizada. Pelo critérios LL, AIC e BIC seleciona-se a cópula cujo ajuste seja mais significativo do ponto de vista estatístico;

4. Calcula-se os índices de cauda a fim de verificar os impactos extremos nos dois mercados financeiros em questão.

Uma cópula é uma função que relaciona duas ou mais distribuições marginais a fim de construir uma distribuição conjunta. Por meio de uma cópula tentou-se representar a estrutura de dependência exata entre as variáveis estudadas, de forma que possamos separar numa distribuição conjunta a estrutura de dependência e o comportamento marginal de cada uma dessas variáveis.

O teorema principal que é base na teoria de cópulas foi desenvolvido por Sklar (1959), e define a relação entre cópulas e funções de distribuição de variáveis aleatórias. O resultado

acima implica na possibilidade de expressar uma distribuição multivariada através de suas marginais. Como uma cópula pode capturar diversas estruturas de dependência entre séries mesmo quando as distribuições marginais não são da mesma família, a utilização desse tipo de função na modelagem torna-se extremamente útil quando estamos num mundo multivariado onde as variáveis têm alguma forma de dependência entre si.

Segundo Rachev, Menn e Fabozzi (2005, p. 73), uma função cópula  $C$  é uma função de distribuição de probabilidades (f.d.p.) de um hiper-cubo  $d$ -dimensional

$$\begin{aligned} I_d &= [0,1] \times [0,1] \times \dots \times [0,1]: \\ C &: I_d \rightarrow [0,1] \\ &(x_1, \dots, x_d) \rightarrow C(x_1, \dots, x_d) \end{aligned}$$

Sklar (1959) mostrou que qualquer f.d.p. multivariada  $F_Y$  de qualquer vetor aleatório  $Y = (Y_1, \dots, Y_d)$  pode ser representada pela ajuda de uma função cópula  $C$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} F_Y(y_1, \dots, y_d) &= P(Y_1 \leq y_1, \dots, Y_d \leq y_d) = C(P(Y_1 \leq y_1), \dots, P(Y_d \leq y_d)) = \\ &C(F_{Y_1}(y_1), \dots, F_{Y_d}(y_d)) \end{aligned}$$

onde  $F_{Y_i}$ ,  $i = 1, \dots, d$  denota as funções de distribuições marginais das variáveis aleatórias  $Y_i$ ,  $i = 1, \dots, d$ .

Neste caso, as cópulas servirão como uma forma de representar a estrutura de dependência entre os mercados e os seus fatores de risco, enquanto preservam a especificação da distribuição marginal de cada um dos mercados envolvidos. Segundo Cherubini, Luciano e Vecchiato (2004, p. 41), a representação dos co-movimentos em um mundo no qual as distribuições dos retornos não são normais origina alguns problemas que podem ser novos para alguns estudiosos ou praticantes de finanças.

Uma limitação da utilização de cópulas no contexto de avaliação dos co-movimentos dos mercados financeiros é extrapolar os resultados para o longo prazo.

A seguir apresentaremos as cópulas bivariadas que serão utilizadas neste trabalho. Todas as definições abaixo podem ser encontradas em Cherubini, Luciano e Vecchiato (2004, p. 112-128).

### 3.1 CÓPULA GAUSSIANA BIVARIADA

É extraída através da distribuição normal multivariada. Entretanto, basta que ao menos

uma das distribuições marginais não seja Gaussiana para que a distribuição conjunta resultante seja diferente. Esse tipo de cópula não admite dependência extrema em nenhuma das caudas, tratando-se, portanto, de uma cópula simétrica.

A cópula Gaussiana é definida a seguir:

$$C^{Ga}(v, z) = \Phi_{\rho_{XY}}(\Phi^{-1}(v), \Phi^{-1}(z))$$

sendo que  $\Phi_{\rho_{XY}}$  é a função de distribuição conjunta de um vetor normal padrão bivariado, com coeficiente de correlação linear  $\rho_{XY}$ ,  $\Phi$  é a função de distribuição normal padrão. Portanto,

$$F_{r_{XY}}(F^{-1}(v), F^{-1}(z)) = \int_{-\infty}^{F^{-1}(v)} \int_{-\infty}^{F^{-1}(z)} \frac{1}{2\rho\sqrt{1-r^2XY}} \exp\left(\frac{2r_{XY}st - s^2 - t^2}{2(1-r^2XY)}\right) dsdt \quad (1)$$

Uma vez que a expressão (1) é parametrizada pelo coeficiente de correlação linear, pode-se também escrever  $C_{\rho}^{Ga}$ . A seguinte representação, mostrada logo abaixo, demonstrada por Roncalli (2001) é equivalente a expressão (1):

$$C^{Ga}(v, z) = \int_0^v \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(z) - \rho_{XY}\Phi^{-1}(t)}{\sqrt{1-\rho_{XY}^2}}\right) dt \quad (2)$$

A versão condicional de (2) pode ser expressa por:

$$C_{2|1}^{Ga}(v, z) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(z) - \rho_{XY}\Phi^{-1}(v)}{\sqrt{1-\rho_{XY}^2}}\right) \quad (3)$$

A cópula Gaussiana gera uma função de distribuição multivariada normal se as margens (distribuições marginais) forem normais-padrão (SKLAR, 1959).

### 3.2 COPULA T DE STUDENT BIVARIADA

É extraída, por sua vez, a partir distribuição t-Student multivariada. Difere da cópula normal ao permitir algum grau de dependência extrema nas caudas da distribuição. No entanto, apresenta a característica comum de ser simétrica, ou seja, de somente admitir um mesmo grau de dependência em ambas as caudas.

Seja  $t_{\nu} : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  a função de distribuição t de Student univariada com  $\nu$  graus de liberdade:

$$t_\nu(x) = \int_{-\infty}^x \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\sqrt{\pi\nu}\Gamma(\nu/2)} \left(1 + \frac{s^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} ds \quad (4)$$

sendo que o  $\Gamma(\cdot)$  é a função de Gama. Seja  $\rho \in I$  e  $t_{\rho,\nu}$  a função de distribuição bivariada correspondente a  $t_\nu$  é:

$$t_{\rho,\nu}(x,y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \left(1 + \frac{s^2+t^2-2\rho st}{\nu(1-\rho^2)}\right)^{-\frac{\nu+2}{2}} ds dt \quad (5)$$

A versão condicional de (5) pode ser expressa por:

$$C_{2|1}^S(\nu, z) = \Phi\left(\frac{\sqrt{\frac{\nu+1}{\nu+t_\nu^{-1}(\nu)^2}} t_\nu^{-1}(z) - \rho t_\nu^{-1}(\nu)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \quad (6)$$

### 3.3 CÓPULA PLACKETT

A família de cópulas Plackett é dada por:

$$C_\theta(u,v) = \frac{[1+(\theta-1)(u+v)] - \sqrt{[1+(\theta-1)(u+v)]^2 - 4uv\theta(\theta-1)}}{2(\theta-1)} \quad (7)$$

Sendo que para  $\theta=1$ , temos que  $C_1(u,v) = uv$ , ou seja, obtemos a tão conhecida cópula-produto. Sua utilização ocorre quando há duas variáveis aleatórias independentes.

### 3.4 CÓPULA DE GUMBEL

Segundo Gumbel (1960), a cópula é dada por:

$$C_\theta(u,v) = \exp\left(-\left[\ln(1/u)^{1/\theta} + \ln(1/v)^{1/\theta}\right]^\theta\right), \theta \in [1, +\infty[ \quad (8)$$

### 3.5 CÓPULA DE FRANK

Segundo Frank (1979), a cópula é dada por:

$$C_\theta(u,v) = -\frac{1}{\theta} \ln\left(1 + \frac{(\exp(-\theta u) - 1)(\exp(-\theta v) - 1)}{\exp(-\theta) - 1}\right), \theta \neq 0 \quad (9)$$

### 3.6 CÓPULA DE CLAYTON

Segundo Clayton (1978), a cópula é dada por:

$$C_{\theta}(u, v) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}, \quad \theta > 0 \quad (10)$$

### 3.7 CÓPULA DE GUMBEL ROTACIONADA

A rotação permite à cópula exibir uma dependência na cauda inferior, ao contrário, da não rotacionada (4.4) que só exibe dependência na cauda superior. A função de distribuição nesse caso é dada por:

$$C(u_1, \dots, u_n) = \left( \sum_{j=1}^n u_j - n + 1 \right) + \exp \left\{ - \left[ \left( -\ln(1-u_1)^\alpha + \dots + (-\ln(1-u_n)^\alpha) \right) \right]^{1/\alpha} \right\} \quad (11)$$

### 3.8 CÓPULA DE JOE-CLAYTON SIMETRIZADA

Patton (2006) utilizou uma forma modificada da cópula de Joe-Clayton para modelar os retornos das taxas de câmbio. A Cópula de Joe-Clayton é dada por:

$$C_{JC}(u, v | \tau_U, \tau_L) = 1 - \left( \left[ \left[ 1 - (1-u)^\kappa \right]^{-\gamma} + \left[ 1 - (1-v)^\kappa \right]^{-\gamma} - 1 \right]^{-1/\gamma} \right)^{1/\kappa} \quad (12)$$

sendo que

$$\kappa = 1/\log_2(2 - \tau_U)$$

$$\gamma = -1/\log_2(\tau_L)$$

$$\tau_U \in (0, 1), \quad \tau_L \in (0, 1)$$

Esta cópula tem dois parâmetros,  $\tau_U$  e  $\tau_L$ , que permitem a modelagem da dependência na cauda superior e inferior, respectivamente (PATTON, 2006). A cópula de Joe-Clayton ainda tem uma assimetria suave quando  $\tau_U = \tau_L$ . Tal fato não é conveniente no ambiente de finanças. Para sobrepor este problema é necessário modificar a forma da cópula, conhecida como cópula de Joe-Clayton simetrizada, dada por:

$$C_{SJC}(u, v | \tau_U, \tau_L) = 0,5C_{JC}(u, v | \tau_U, \tau_L) + 0,5C_{JC}(1-u, 1-v | \tau_L, \tau_U) + u + v - 1 \quad (13)$$

sendo simétrica quando  $\tau_U = \tau_L$ .

### 3.9 CÓPULA DINÂMICA OU CONDICIONAL

Para o caso bivariado, Patton (2006) estende a definição padrão de cópula para o caso condicional. Para tanto, levou-se em conta o padrão de heterocedasticidade, amplamente utilizado na literatura de finanças, para a volatilidade de qualquer retorno financeiro. Além

disso, há muitas situações em que é necessária uma densidade condicional conjunta generalizada no estudo de apreçamento de opções financeiras com múltiplos ativos subjacentes, ou no cálculo do VaR de uma carteira de ativos.

Patton (2006), na modelagem das distribuições marginais, assume que as médias condicionais evoluem de acordo com um processo auto-regressivo, e que as variâncias condicionais evoluem de acordo com um processo GARCH(1,1). Similarmente a evolução de  $C_t$  deve ser também considerada. Pode-se considerar apenas o caso no qual os parâmetros estão variando no tempo (ou seja, somente a forma funcional da cópula condicional permanece fixa), ou casos cujas variações ocorrem tanto na forma funcional da cópula quanto nos seus parâmetros. A modelagem das cópulas condicionais segue os mesmos pressupostos de Patton (2006).

Nelsen (1999) mostra que qualquer combinação linear convexa de cópulas também é uma cópula e, portanto, uma forma funcional variando no tempo para a cópula condicional poderia ser uma soma convexa de vários tipos de cópulas.

#### **4. MEDIDAS DE DEPENDÊNCIA**

Existe certo número de conceitos sobre associação, nesta seção apresentaremos alguns destes conceitos. Entre as medidas de associação mais utilizadas podemos destacar a concordância (como sendo distinta de dependência), correlação linear, dependência de cauda e dependência de quadrante positivo. E algumas medidas associadas com estas,  $\tau$  de Kendall,  $\rho$  de Spearman, coeficiente de correlação linear e os índices de dependência de cauda.

Todas estas medidas estão relacionadas às propriedades das cópulas, desde que, acoplando uma função de distribuição com suas marginais, a cópula “captura certos aspectos do relacionamento entre as variáveis, de modo que os conceitos de dependência são propriedades das cópulas” (NELSEN, 1999).

Este estudo possui a limitação de se utilizar de apenas uma única medida para avaliar o co-movimentos dos ativos. Há a possibilidade de se realizar outros estudos considerando outras teorias estatísticas (e.g. teoria dos valores extremos).

##### **4.1. DEPENDÊNCIA DE CAUDA**

As medidas de dependência nas caudas são utilizadas para capturar a dependência na cauda da distribuição bivariada. Serve para descrever o quanto grandes (ou pequenos) valores

de uma variável aleatória acompanham valores grandes (ou pequenos) de outra variável aleatória.

Sejam  $X$  e  $Y$  variáveis aleatórias contínuas com funções de distribuição  $F$  e  $G$ , respectivamente. O parâmetro de dependência na cauda superior  $\lambda_U$  é o limite (se existir) da probabilidade condicional de  $Y$  ser maior que o  $100t$ -ésimo percentil de  $G$  dado que  $X$  é maior que o  $100t$ -ésimo percentil de  $F$  quando  $t$  se aproxima de 1 pela esquerda, ou seja:

$$\lambda_U = \lim_{t \rightarrow 1^-} P \left[ Y > G^{(-1)}(t) \mid X > F^{(-1)}(t) \right] \quad (14)$$

De forma similar, o parâmetro de dependência na cauda inferior  $\lambda_L$  é o limite (se existir) da probabilidade condicional de  $Y$  ser menor ou igual que o  $100t$ -ésimo percentil de  $G$  dado que  $X$  é menor ou igual que o  $100t$ -ésimo percentil de  $F$  quando  $t$  se aproxima de 0 pela direita, ou seja:

$$\lambda_L = \lim_{t \rightarrow 0^+} P \left[ Y \leq G^{(-1)}(t) \mid X \leq F^{(-1)}(t) \right] \quad (15)$$

Estes parâmetros são não-paramétricos e dependem apenas da cópula formada por  $X$  e  $Y$ .

## 5. ANÁLISE DE RESULTADOS

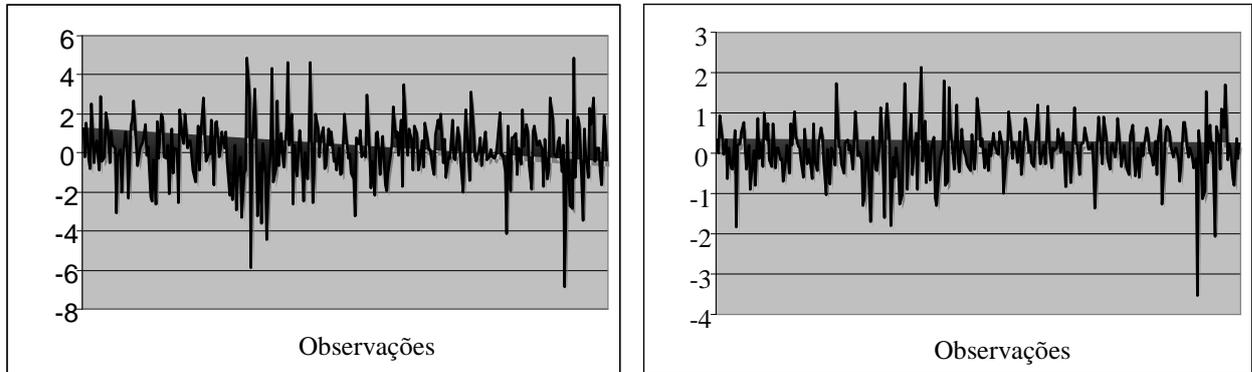
Vamos supor que a verdadeira cópula pertença a uma determinada família paramétrica  $C = \{C_\theta, \theta \in \Theta\}$ , com determinadas propriedades matemáticas. Então, as estimativas,  $\theta$ , obtidas pelo método de verossimilhança (MV) via otimização da função de verossimilhança de cada cópula são consistentes e distribuídas segundo uma normal.

Segundo Roncalli (2001) o método MVC estima a associação dos parâmetros  $\theta$  da cópula sem assumir qualquer forma paramétrica para as distribuições marginais dos retornos do IBOVESPA e do S&P 500. Desta forma temos a vantagem de que não precisamos especificar tais distribuições marginais e, portanto, a abordagem selecionada é robusta e livre dos erros de especificação relacionados às distribuições marginais. Todos os algoritmos foram desenvolvidos no software MATLAB®.

Foram selecionados 2044 valores de log-retornos do IBOVESPA e do índice S&P 500 com início em 3/01/2001 e término em 31/12/2007 mostrados na figura abaixo.

Foram estimados os parâmetros pelo método MVC das seguintes cópulas: cópula gaussiana (CG), cópula de Clayton (CC), cópula de Plackett (CP), cópula de Frank (CF),

cópula de Gumbel (CGU), cópula de Gumbel rotacionada (CGUR), cópula t de Student (CS), cópula de Joe-Clayton simetrizada (CJCS), cópula gaussiana cujos parâmetros variam no tempo (CGt), cópula de Gumbel rotacionada cujos parâmetros variam no tempo (CGURt), cópula de Joe-Clayton simetrizada cujos parâmetros variam no tempo (CJCSt).



(a)

(b)

Figura-1 (a) Série dos log-retornos do IBOVESPA, (b) Série dos log-retornos do S&P 500.

Fonte: Base de dados do Economática

Da mesma forma que Patton (2006), Canela e Collazo (2005) e Breyman, Menn e Embrechts (2003), criaremos uma hierarquia de aderência através dos conceitos econométricos de log-verosimilhança (LL), critério de informação de Akaike (AIC) e critério bayesiano de informação (BIC). Os resultados são evidenciados a seguir

**Tabela-1 Resultados relacionados ao critério de LL, AIC e BIC das cópulas estimadas.**

Cópulas	LL	AIC	BIC
<b>CJCSt</b>	<b>-134,2724</b>	<b>-268,5046</b>	<b>-268,4301</b>
CGt	-133,4771	-266,9341	-266,8968
CJCS	-131,1759	-262,3384	-262,3136
CS	-129,6637	-259,3139	-259,2891
CG	-127,5608	-255,1149	-255,1025
CGU	-124,3768	-248,7469	-248,7345
CGURt	-121,6835	-243,3468	-243,3096
CGUR	-119,0534	-238,1234	-238,0876
CP	-113,9197	-227,8327	-227,8203
CF	-109,9087	-219,8106	-219,7982
CC	-97,5238	-195,0409	-195,0285

Fonte: elaborada pelos autores

O que se pode verificar é que as cópulas dinâmicas se aderem melhor aos retornos dos ativos segundo a Tabela-1. Pela Tabela-1, os critérios utilizados apontam que a cópula mais adequada para modelar a estrutura de dependência dos log-retornos do IBOVESPA e do S&P 500 é a de Joe-Clayton simetrizada cujos parâmetros variam no tempo. Patton (2006) chegou também ao mesmo resultado em relação à cópula de Joe-Clayton simetrizada, com parâmetros variando no tempo na modelagem de taxas de câmbio internacionais.

Utilizamos um teste não-paramétrico de Wilcoxon (*Rank Sum*) para amostras independentes através do software MATLAB® a fim de comparar se há diferenças significativas da mediana entre as duas séries de caudas mostradas acima. O teste revelou um p-valor igual a 0.000 e, portanto, não devemos aceitar a hipótese nula de que as medianas das duas séries são iguais ao nível de significância de 5%. Além do mais, percebe-se que a série relacionada à cauda inferior é muito mais informativa do que a série representada pelos valores da cauda superior, pois a volatilidade da mesma é muito mais evidenciada. Percebe-se que há uma forte correlação condicional negativa entre os retornos durante o ano de 2007 (ano que antecede a crise econômica do *subprime*). Dado que há diferenças significativas entre as medianas das duas séries de caudas (inferior e superior), utilizaremos os índices estáticos de dependência nas caudas relacionados à cópula de Joe-Clayton simetrizada a fim de responder a questão de pesquisa. Os resultados são mostrados na Tabela-2.

**Tabela-2. Resultados obtidos para os índices  $I_L$  e  $I_U$  em relação às cópulas não-condicionais.**

Cópulas	$I_L$	$I_U$
CG	0	0
CC	0,6448	0
CP	0	0
CF	0	0
CGU	0	0,6148
CGUR	0,608	0
CS	0,2757	0,2757
<b>CJCS</b>	<b>0,605</b>	<b>0,5548</b>

Fonte: elaborada pelos autores

A dependência nas caudas inferior (ou superior) da distribuição multivariada das variáveis aleatórias é capturada pelas medidas de correlações extremas denominadas de lambda inferior,  $I_L$  (ou superior,  $I_U$ ). Assim, pode-se medir se os valores extremos positivos (ou negativos) de uma determinada variável aleatória (e.g. índice de ações) são acompanhados pelos valores extremos positivos (ou negativos) de outra variável aleatória através do lambda superior (ou inferior). Caso o  $I_L$  seja superior ao  $I_U$ , pode-se afirmar que os choques negativos num determinado mercado afeta muito mais o outro mercado analisado quando da comparação dos choques positivos e vice-versa. Pela Tabela-2, pode-se verificar que a ocorrência de eventos extremos negativos, *crashes*, no mercado norte-americano tende a afetar mais o mercado brasileiro do que a ocorrência de eventos extremos positivos, *booms*, naquele mercado; pois  $I_L(0,6055) > I_U(0,5548)$ .

## 6. CONCLUSÃO

A habilidade das cópulas em capturarem a dependência nas caudas é fundamental para o estudo. O estudo da dependência nas caudas pode permitir uma análise a fim de verificar se há a possibilidade de *boom* ou *crash* de forma simultânea aos dois mercados. Para que os gestores de carteiras realizem suas estratégias internacionais *ex-ante* de alocação de ativos, torna-se importante uma avaliação da probabilidade de ocorrência de eventos extremos de repercussão negativa (cauda inferior) nos mercados sob sua análise (CANELA; COLLAZO, 2005). Finalmente, através dos índices de dependência caudal ao longo do tempo, pode-se concluir que a ocorrência de eventos extremos negativos (*crashes*) no mercado norte-americano tende a afetar mais o mercado brasileiro quando da comparação da ocorrência dos eventos extremos positivos (*booms*).

Pesquisas futuras podem ser realizadas a fim de verificar a utilização do índice de cauda inferior determinado pela cópula de Joe-Clayton Simetrizada como medida de risco nos momentos de crises econômicas ou de grandes choques que impactam negativamente os mercados. É de se esperar que o índice de cauda inferior ao longo do tempo possa capturar dependências significativas entre os mercados a fim de auxiliar os investidores na alocação de ativos.

## REFERÊNCIAS

- ANDERSEN, T.G.; BOLLERSLEV, T.; DIEBOLD, F. X.; EBENS, H. The distribution of realized stock return volatility. **Journal of Financial Economics**, v.61, p.43-76, 2001.
- ANDRADE, M. M. Como Preparar Trabalhos para Cursos de Pós-Graduação. São Paulo: Atlas, 1999.
- BREYMAN, W.; DIAS, A.; EMBRECHTS, P. Dependence Structures for Multivariate High-Frequency Data in Finance. **Quantitative Finance**, v.3, p.1-14, 2003.
- CANELA, M. A.; COLLAZO, E. P. **Modelling Dependence in Latin American Markets using Copulas Functions**. Working Paper, 2005.
- CHERUBINI, U.; LUCIANO, E.; VECCHIATO, W. **Copula Methods in Finance**. London: John Wiley & Sons Inc., 2004. 293p.
- CLAYTON, L.G. A model for association in bivariate life tables and its application in epidemiological studies of familial tendency in chronic disease incidence. **Biometrika**, v.65, p. 141-151, 1978.
- CONT, R. Empirical Properties of Asset Returns: Stylized Facts and Statistical Issues. **Quantitative Finance**, v. 2, p. 223-36, 2001.
- EMBRECHTS, P.; MCNEIL, A. J.; STRAUSMANN, D. Correlation: Pitfalls and alternatives. **Risk Magazine**, 12, no. 5, p. 69-71, 1999.
- FRANK, M. J. On the simultaneous associativity of  $F(x,y)$  and  $x + y - F(x,y)$ . **Aequationes Mathematicae**, v.19, p.194-226, 1979.

GENEST, C.; GENDRON, M.; BORDEAU-BRIEN, M. The Advent of Copulas in Finance. **The European Journal of Finance**, v.00, p. 1-10, 2009.

GUMBEL, E. J. Bivariate Exponential Distributions. **Journal of American Statistical Association**, v.55, p.698-707, 1960.

LEHMANN, E. Some concepts of dependence. **Annals of Mathematical Statistics**, v.37, p.1137-1153, 1966.

LI, D. X. On default correlation: A copula function approach. **Journal of Fixed Income**, v.9, p. 43-54, 2000.

MENDES, B. V. M.; MORETTI, A. R. Medindo a Influência do Mercado Americano nas Interdependências observadas na América Latina. *Revista Brasileira de Finanças*, v.3, n.1, p.15-29, 2005.

MORETTIN, P. A.; TOLOI, C. M. C. *Análise de Séries Temporais*. São Paulo: Edgard Blucher, 2004.

NELSEN, R. B. **An introduction to copulas**. New York: Springer-Verlag, 1999.

PAGAN, A. The Econometrics of Financial Markets. **Journal of Empirical Finance**, v.3, p. 15-102, 1996.

PATTON, A. Modelling Asymmetric Exchange Rate Dependence. **International Economic Review**, v.47, n.2, p.527-556, 2006.

RACHEV, S.; MENN, C.; FABOZZI, F. J. **Fat-Tailed and Skewed Asset Return Distributions**. New Jersey: John Wiley & Sons Inc., 2005. 369p.

RODRIGUEZ, J. C. Measuring Financial Contagion: A Copula Approach. **Journal Of Empirical Finance**, v. 14, 2007

RONCALLI, T. **Copulas: A Tool for Dependence in Finance**. Working Paper, 2001.

SCARSINI, M. On measures on concordance. **Stochastica**, v.8, p.201-218, 1984.

SKLAR, A. Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. **Publications de l'Institut Statistique de l'Université de Paris** 8, p.229-231, 1959.

SOLNIK, B.; BOUCRELIE, C.; LE, Y. F. International Market Correlation and Volatility. **Financial Analysts Journal**, v.52, p.17-34, 1996.

SUN, W.; RACHEV, S.; FABOZZI, F. **Unconditional Copula-Based Simulation of Tail Dependence for Co-Movement of International Equity Markets**. Germany: Technical Report, University of Karlsruhe, 2006.