



v.10, n.1

Vitória-ES, jan.-mar. 2013

p. 49 - 80

ISSN 1807-734X

DOI: <http://dx.doi.org/10.15728/bbr.2013.10.1.3>

Estimação de betas de ações com baixa liquidez

Ricardo Goulart Serra[†]
Insper / IBMEC-SP e FIA

Roy Martelanc^Ω
Universidade de São Paulo

RESUMO

Este artigo examina o procedimento de estimação de betas para empresas cujas ações não são negociadas todos os dias. Os betas são estimados para 3 métodos: repetição da última cotação (RUC), trade-to-trade (TT) e ajuste de Scholes e Williams (SW). Há 3 periodicidades de retorno: diária, semanal e mensal. O objetivo é verificar a consistência dos betas estimados nos diferentes métodos de cálculo e nas diferentes periodicidades de retorno, com base em dados simulados. Os resultados indicam que, para ações que não negociam todos os dias, os betas podem ser estimados com melhor precisão com o método TT para periodicidade diária.

Palavras-chave: Beta; ações ilíquidas; repetição da última cotação; trade-to-trade; Scholes e Williams; mercado de capitais.

Recebido em 31/08/2010; revisado em 16/10/2011; aceito em 13/04/2012; divulgado em 26/03/2013.

*Autor para correspondência:

[†] Doutor pela Universidade de São Paulo

Vínculo: Professor de Finanças Insper/ IBMEC-SP e FIA.

Endereço: Rua do Roccio, 109,6° andar, São Paulo – SP – Brasil

E-mail: Ricardo.serra@usp.br

Telefone: (11)3818-4020

^Ω Doutor pela Universidade de São Paulo.

Vínculo: Professor de Finanças da Universidade (FEA/USP).

Endereço: Av. Professor Luciano Gualberto, n.908, Cidade Universitária, São Paulo – SP – Brasil

E-mail: rmartela@usp.br

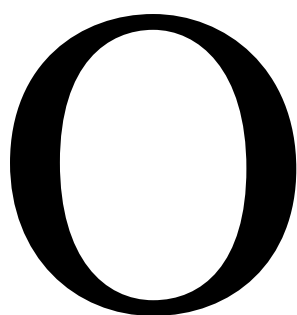
Telefone: (11)3847-3708

Nota do Editor: Esse artigo foi aceito por Bruno Funchal



Este trabalho foi licenciado com uma Licença [Creative Commons - Atribuição 3.0 Não Adaptada](http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/).

1. INTRODUÇÃO



beta é um dos parâmetros fundamentais em finanças. Ele é empregado na estimação do retorno esperado das ações, com quatro aplicações principais. A primeira é a estimação do custo de capital próprio, o custo de capital e, conseqüentemente, da decisão de investimento. A segunda é a decisão de investimento em uma carteira de ativos, especialmente de ações. A terceira é a estimação de retornos esperados em estudos acadêmicos, como os inúmeros testes da hipótese da eficiência de mercado. A quarta é a confecção de tarifas de serviços públicos (Bodie, Kane e Marcus, 2000: 224). A falta de precisão no cálculo do beta pode levar a estimativas erradas do custo de capital próprio (aplicando-se o beta inadequado) e conseqüentemente a decisões ou a conclusões equivocadas.

O beta de uma ação é comumente apurado pela regressão entre o seu retorno e o de uma carteira de mercado, em princípio ambos descontados do retorno de um ativo livre de risco.

Durante a estimação do beta, pode-se deparar, muitas vezes, com o problema da baixa liquidez da ação. Pode haver dias em que a ação não é transacionada, portanto não há informação quanto ao seu retorno; outros dias com baixo volume de negócios, em que o preço, o retorno da ação, é pouco representativo daquilo que teria ocorrido se a liquidez fosse adequada. Podem ocorrer ainda dias com um volume total razoável, mas com baixo volume ao final do dia, que é quando os preços de fechamento são apurados e é calculado o retorno de mercado.

O objetivo do artigo é verificar quais dos métodos e das periodicidades de retorno testados fornecem estimações de betas robustas em séries que têm dias sem negociação. Os métodos testados são o da repetição da última cotação (método RUC), do *trade-to-trade* (método TT) e do ajuste proposto por Scholes e Williams (1977) (método SW). As periodicidades de retorno testadas são a diária, a semanal e a mensal.

Para atender a esse objetivo, foi usado um quasi-experimento simulado em computador, em que os betas de séries incompletas de preços são estimados com vários procedimentos e comparados com o beta subjacente que gerou os dados simulados.

De acordo com os resultados obtidos, pode-se dizer que, para calcular beta de ações com baixa liquidez, a melhor alternativa é o método TT com periodicidade diária.

Este artigo é composto de cinco sessões, incluindo esta sessão: introdução. A segunda sessão apresenta a revisão conceitual sobre beta e os principais parâmetros para seu cálculo. A sessão seguinte apresenta as abordagens para cálculo de beta de ações com baixa liquidez e a metodologia empregada na simulação. A quarta sessão discute os resultados obtidos. A última sessão apresenta as considerações finais.

2 REVISÃO CONCEITUAL

A literatura (Koller, Goedhart e Wessels, 2002; Damodaran, 1994) levanta 3 decisões metodológicas principais para a estimação do beta de uma empresa: (i) índice de mercado (local ou internacional), (ii) histórico de retornos (2, 3 ou 5 anos) e (iii) periodicidade de retornos (diária, semanal ou mensal).

2.1 Índice de mercado

No que tange ao índice de mercado, a prática comum é utilizar o índice de mercado no qual a ação da empresa é negociada, embora o investidor internacional esteja mais bem atendido se for utilizado um índice internacional (Damodaran, 1994). Koller *et. al.* (2002) sugerem os índices MSCI World Index e S&P. Copeland, Koller e Murin (2002: 374) também indicam a utilização de um índice global como o ideal, no entanto, por considerarem que os índices globais são relativamente recentes, recorrem ao índice do mercado dos Estados Unidos (S&P 500).

2.2 Histórico de retornos

No tocante ao histórico de retornos, quanto maior o número de observações, melhor a precisão e menor o erro na estimativa do beta, o que seria favorecido por um histórico de retornos longo. No entanto, quando o período de coleta cresce, aumenta-se também a probabilidade de a empresa ter sofrido mudanças estruturais no período considerado, o que acarretaria em uma mudança do beta. Daves, Ehrhardt e Kunkel (2000) acreditam que menos do que 50% das empresas sofrem mudanças significativas de beta em menos de 3 anos, razão pela qual recomendam a utilização de um histórico menor do que 3 anos. Damodaran (1994) comenta que as bases de dados *Value Line* e *Standard and Poor's* usam um histórico de 5 anos, enquanto a base de dados *Bloomberg* usa um histórico de 2 anos. Kooler *et. al.* (2002) sugerem a utilização de 60 observações mensais, o que equivale a um histórico de 5 anos.

Seguindo a orientação de Davis *et. al.* (2000), optou-se por utilizar, neste artigo, 3 anos de histórico de retornos, tendo em vista que será utilizada, entre outras possibilidades, a

periodicidade mensal. Um histórico menor do que 3 anos levaria a estimação de betas mensais com menos do que 36 observações.

2.3 Periodicidade de retornos

No que diz respeito à periodicidade de retornos, também não há consenso.

Daves *et. al.* (2000) são da opinião de que deve ser usada a periodicidade de retorno diária, pois produz menor erro padrão na estimativa de betas. Eles afirmam que a maioria dos estudos recentes tem utilizado beta diário e recomendam que administradores financeiros optem por essa periodicidade.

O beta de empresas que não são negociadas todos os dias é enviesado para baixo segundo Dimson (1979). Observa-se que o problema do não sincronismo entre os dados de mercado e os dados da ação é especialmente severo quando se utilizam dados diários (Scholes e Williams, 1977). Dado que periodicidades menores podem enviesar o beta de empresas cujas ações não são negociadas todos os dias, Damodaran (1994) e Kooler *et. al.* (2002) recomendam a utilização de periodicidade mensal.

Copeland, Weston e Shastri (2005: 167) comentam que a maioria dos estudos testando o CAPM utiliza periodicidade mensal, listando estudos de 1970 a 1995. Até 1970, os testes eram feitos a partir de séries mensais, uma vez que não existiam séries diárias, que foram disponibilizadas a partir de meados de 1970.

Como o beta é calculado dividindo-se (i) a covariância entre o retorno do mercado e o retorno da ação pela (ii) variância do mercado (eq. 1), e a covariância de uma ação que não negocia todos os dias é enviesada para baixo, o beta calculado é, por consequência, enviesado para baixo.

$$\beta = \frac{\text{COV}_{jm}}{\text{VAR}_m} \quad (1)$$

Em que COV_{jm} é a covariância entre o retorno do mercado e o retorno da ação j e VAR_m é a variância do mercado.

Handa, Kothari e Wasley (1989: 98-99) também mostram que a periodicidade de retornos influencia o beta, pois a covariância dos retornos não varia proporcionalmente à variância do mercado com os diferentes intervalos de retorno. Nas palavras deles: “Betas de

títulos de alto risco aumentam com o aumento do intervalo de retorno enquanto betas de títulos de baixo risco diminuem com o intervalo de retorno”. Os autores sugerem também a utilização de períodos anuais.

Destaca-se também que, para uma mesma série de dados, betas estimados utilizando-se periodicidade diária podem ser diferentes de betas estimados utilizando-se periodicidade mensal. “Em geral, os betas de títulos com valor de mercado abaixo da média de todos os títulos negociados (o mercado) cairão conforme a periodicidade diminui, enquanto betas de títulos com valor de mercado maior que o mercado subirão” (Hawawini, 1983: 73).

Neste artigo, serão utilizadas três periodicidades: diária, semanal e mensal.

3. METODOLOGIA

3.1 Procedimentos para a estimação do beta

O beta de um ativo pode ser estimado regressando-se o retorno do ativo contra o retorno de uma carteira de mercado, como na eq. 2 ou na sua variante da eq. 3.

$$R_{jt} = R_{ft} + \beta_j (R_{mt} - R_{ft}) + \varepsilon_{jt} \quad (2)$$

$$R_{jt} = \alpha_j + \beta_j R_{mt} + \varepsilon_{jt} \quad (3)$$

Em que R_{jt} é o retorno da ação j no período t , R_{ft} é o retorno do ativo livre de risco no período t , R_{mt} é o retorno do índice de mercado no período t , α_j é o intercepto da ação j , β_j é o beta da ação j e ε_{jt} é o erro da ação j no período t . Note-se que a diferença entre os modelos está no fato de o retorno livre de risco depender de t no modelo da eq. 2 e o intercepto ser constante no modelo da eq. 3.

É comum operacionalizar essa regressão, para ações com baixa liquidez, por meio do método da Repetição da Última Cotação (Método RUC). Há pelo menos duas abordagens alternativas para se calcular o beta de ações que não são negociadas todos os dias: (a) calcular a regressão utilizando-se o intervalo de retorno da ação, chamado “*trade-to-trade*”, a partir do casamento do retorno da ação – entre datas que houve negociação – e do retorno do índice de mercado no mesmo período (Marsh, 1979 e Dimson e Marsh, 1983); e (b) introduzir o retorno do índice de mercado defasado e adiantado como variáveis independentes adicionais (Scholes e Williams, 1977, Dimson, 1979 e Cohen, Hawawini, Maier, Schwarz e Whitcomb, 1983).

Neste artigo, serão utilizados, além do método da repetição da última cotação (RUC), o método *trade-to-trade* (TT) e o ajuste de Scholes e Williams (SW).

3.1.1 Método da repetição da última cotação (Método RUC)

O método da repetição da última cotação (RUC) é disponibilizado pelas bases de dados Bloomberg® e Reuters® e é um dos dois métodos disponibilizados pela Economática®. Observe-se que a Reuters calcula o beta apenas para intervalo de retorno mensal, a Bloomberg sugere inicialmente o beta semanal (podendo ser alterado pelo usuário) e a Economática sugere inicialmente o beta mensal (podendo ser alterado pelo usuário). A Economática, como *default*, não calcula beta para ações que não apresentem pelo menos 70% de dias de negociação no histórico utilizado.

Ao se calcular o beta para as empresas cujas ações não são negociadas todos os dias, pode-se ter que atribuir uma cotação para a ação em uma data em que a ação da empresa não foi negociada. Nesses casos, uma possibilidade é a de atribuir, para a data na qual a ação da empresa não foi negociada, o preço do último dia em que houve negócio. Sendo assim, por meio desse método, utilizam-se, no cálculo do beta, cotações em dias que a ação da empresa não foi negociada, o que gera um descasamento entre a cotação da ação e a cotação do índice de mercado. Usar esses períodos nos quais não houve negociação da ação na regressão reduz a variância do retorno da ação e a correlação entre o retorno da ação e o retorno do mercado. Conseqüentemente, o beta da ação (Damodaran, 1997, p. 133) também cai. Portanto, o método RUC pode enviesar para baixo os betas estimados de ações com baixa liquidez.

O procedimento operacional do método RUC é descrito a seguir:

- A partir da data de referência, do histórico de retorno e do intervalo de retorno, obtém-se uma série de datas.
- Para cada data dessa série de datas, são obtidas a cotação do índice e a cotação da ação em questão.
- A cotação da ação em uma determinada data é a cotação da própria data, caso ela tenha sido negociada naquela data, ou, caso ela não tenha sido negociada naquela data, a cotação da última data em que ela tenha sido negociada.
- Com essas duas séries de cotações, calcula-se uma série de retorno do índice e uma série de retorno da ação e, posteriormente, calcula-se o beta da ação.

3.1.2 Método Trade-to-trade (Método TT)

Marsh (1979), em um estudo de eventos, utilizou o método “*trade-to-trade*” (TT) para calcular o beta de ações com baixa liquidez. Nessa abordagem, o retorno da ação deve ser regredido contra o retorno do mercado em datas sincronizadas. Para corrigir um potencial

problema de heteroscedasticidade no componente do erro, Dimson e Marsh (1983: 756) propõem um estimador para melhorar a eficiência do mesmo. Neste artigo, não se utilizou esta última proposta. Maynes e Rumsey (1993) também indicam o uso de *trade-to-trade* para estudos de eventos com ações que não sejam negociadas todos os dias.

O método TT, portanto, utiliza as cotações da ação apenas nas datas em que a ação foi efetivamente negociada. Dessa forma, não há descasamento entre a cotação da ação e a cotação do índice de mercado, pois ambas são relativas a datas nas quais a ação da empresa foi negociada. Por outro lado, os intervalos entre cotações deixam de ser exatamente iguais.

O procedimento operacional adotado neste artigo para o método TT é:

- A partir da data de referência, do histórico de retorno e do intervalo de retorno, obtém-se uma série de datas.
- A data considerada na série de datas é a própria data caso a ação em questão tenha sido negociada naquela data ou é a data imediatamente anterior em que a ação em questão tenha sido negociada.
- Caso a data imediatamente anterior em que a ação em questão tenha sido negociada esteja a uma distância da data original além do intervalo de retorno, esta data será eliminada da série de datas.
- Para cada data da série de datas são obtidas a cotação do índice e a cotação da ação em questão. Observe-se que a nova data servirá para a obtenção da cotação da ação em questão e também para a obtenção da cotação do índice de mercado. Dessa forma, são consideradas apenas datas em que a ação foi negociada. Supõe-se que o índice negocia todos os dias, o que é o caso do Ibovespa.
- Com essas duas séries de cotações, calcula-se uma série de retorno do índice e uma série de retorno da ação e, posteriormente, calcula-se o beta da ação.

3.1.3 Abordagem de Scholes e Williams (1977) (Método SW)

A abordagem de Scholes e Williams (1977) envolve 3 estimações do modelo de fator único, para posteriormente calcular o beta considerando o resultado destas 3 estimações, conforme eq. 4:

$$\begin{aligned}
R_{i,t} &= \alpha_{-1i} + \beta_{-1i} * R_{m,t-1} + \varepsilon_{-1i,t} \\
R_{i,t} &= \alpha_{0i} + \beta_{0i} * R_{m,t} + \varepsilon_{0i,t} \\
R_{i,t} &= \alpha_{+1i} + \beta_{+1i} * R_{m,t+1} + \varepsilon_{+1i,t} \\
\beta_{sw} &= \frac{\beta_{-1i} + \beta_{0i} + \beta_{+1i}}{1 + 2 \times \rho_M} \tag{4}
\end{aligned}$$

Em que, $R_{i,t}$ é o retorno da ação i no período t , $R_{m,t+z}$ é o retorno do índice de mercado no período $t+z$, α_{zi} é o intercepto associado ao retorno do índice de mercado no período $t+z$, β_{zi} é o beta da ação i associado ao retorno do índice de mercado no período $t+z$, $\varepsilon_{zi,t}$ é o termo de erro associado ao retorno do índice de mercado no período $t+z$ e ρ_M é a correlação entre a série de retorno do mercado e a série defasada um período para trás do retorno do mercado.

Além da abordagem de Scholes e Williams (1977), a literatura apresenta a abordagem de Dimson (1979), que envolve a estimação de uma regressão múltipla. Nela, o beta é calculado a partir dos coeficientes betas da regressão múltipla, conforme eq. 5:

$$\begin{aligned}
R_{i,t} &= \alpha_i + \beta_{-1i} * R_{m,t-1} + \beta_{0i} * R_{m,t} + \beta_{+1i} * R_{m,t+1} + \varepsilon_{i,t} \\
\beta_{DIM} &= \beta_{-1i} + \beta_{0i} + \beta_{+1i} \tag{5}
\end{aligned}$$

Em que, $R_{i,t}$ é o retorno da ação i no período t , $R_{m,t+z}$ é o retorno do índice de mercado no período $t+z$, α_i é o intercepto, β_{zi} é o beta da ação i associado ao retorno do índice de mercado no período $t+z$ e $\varepsilon_{i,t}$ é o erro da ação i no período t . Em casos nos quais hajam mais dias sem negociação o número de termos defasados e adiantados deve aumentar.

Fowler e Rorke (1983: 282) mostram que o estimador de Dimson “é inconsistente com o de Scholes e Williams e, portanto, incorreto.” Cohen *et. al.* (1983) também apontam uma pequena inconsistência na derivação de Dimson e propõem um estimador revisado, não utilizado neste artigo.

Bartholdy e Riding (1994: 242 e 243) indicam que os procedimentos de Scholes e Williams (1977) e Dimson (1977) são amplamente usados na literatura e que o procedimento de Marsh (1979) é raramente utilizado.

3.2 Simulação

O maior problema que se encontra para estudar o beta das empresas é que o mesmo não é verdadeiramente conhecido. Em uma simulação, o verdadeiro beta (beta subjacente) é conhecido *a priori* e pode ser comparado ao beta estimado pelos diferentes métodos.

Neste quasi-experimento, considerando variáveis e distribuições controladas, sem a interferência de ruídos ambientais, tem-se a possibilidade de observar o impacto puro de uma variável:

Dado real é desordenado [*messy*] e ninguém sabe realmente todos os aspectos que se camuflam [*lurk*] dentro dele. (...) Simulação é a chance do econométrico de agir como um cientista real, conduzindo experimentos sob condições controladas. (Brooks, 2001: 547)

Dimson (1979) simulou dados de acordo com a eq. 3, Bowie e Bradfield (1993) simularam dados de acordo com a eq. 6, e este artigo simulou dados de acordo com a eq. 2.

$$R_{jt} = R_{mt} + \varepsilon_{jt} \quad (6)$$

Dessa forma, pode-se construir, a partir de um erro aleatório para o mercado, uma série aleatória de retornos para o mercado, e a partir desta, em conjunto com um beta subjacente e um erro aleatório para o ativo, construir uma série aleatória de retornos para um ativo.

Para obter as séries aleatórias, consideraram-se as seguintes premissas gerais, consistentes com os parâmetros gerais do mercado financeiro:

- Taxa livre de risco (R_f): 0,0238% a.d., equivalente a uma premissa de 6,0% a.a.. Optou-se por manter a taxa livre de risco constante devido à sua baixa variabilidade em comparação à variabilidade do retorno do mercado e da ação.
- Prêmio de Mercado ($R_m - R_f$): 0,0198% a.d., equivalente a uma premissa de 5,0% a.a..
- Erro aleatório para o mercado (ε_m): com distribuição normal, média nula e desvio-padrão σ_{ε_m} de 1,6% a.d., consistentes com o desvio-padrão do Ibovespa no período de 31/12/2004 a 31/12/2007. Alternativamente, simulou-se uma distribuição t com 10 graus de liberdade, para considerar a característica do mercado de apresentar distribuições com caudas largas.
- Beta da ação (β_j): três cenários, 0,75, 1,00 e 1,25.
- Erro aleatório para o ativo (ε_{jt}): com distribuição normal, média nula e desvio-padrão σ_{ε_j} de 2,5% a.d.. O desvio-padrão utilizado é consistente com o desvio-padrão médio

da diferença entre o retorno da ação e o retorno esperado da ação (calculado como $\beta_i * R_{m_t}$) calculado para diversas ações no período de 31/12/2004 a 31/12/2007, em que β_i é o beta do ativo i calculado para um período de retorno de 3 anos e periodicidade mensal. Alternativamente, simulou-se uma distribuição t com 10 graus de liberdade para considerar a característica do mercado de apresentar distribuições com caudas largas.

A partir da série aleatória de retorno diário de uma ação, calculou-se uma série de preços, a partir da qual, foram calculadas séries de preços para 4 diferentes cenários de dias com negociação: 60%, 70%, 80% e 90%, tendo-se em vista que a série original já é a própria série com 100% de dias com negociação. Tomando-se, por exemplo, o cenário com 70%, para cada dia da série de dados foi gerado um número aleatório com 70% de probabilidade de ser 1 (correspondendo a ação ter sido negociada naquele dia) e 30% de probabilidade de ser 0 (correspondendo a ação não ter sido negociada naquele dia). Para os dias em que a ação é negociada, utilizou-se o preço a partir da série original, e para os dias em que a ação não é negociada, ignorou-se o seu preço da série original. Dessa forma, obteve-se uma série de preços para a ação para os 70% de dias de negociação, à qual foi aplicado cada um dos métodos (RUC, TT e SW) e das periodicidades (diária, semanal e mensal) testados.

Para cada um dos 15 cenários (3 níveis de betas e 5 níveis de dias com negociação) foram geradas 10.000 séries de 3 anos de cotações para o índice de mercado e suas correspondentes cotações para a ação. Essas 10.000 séries de pares de cotações foram, então, submetidas ao cálculo do beta conforme os três métodos (RUC, TT e SW) e as três periodicidades testados (diária, semanal e mensal).

3.3 Abordagem estatística

A hipótese nula – H_0 – do teste de hipótese para o presente trabalho é que a média dos betas estimados é igual ao beta subjacente, ou seja:

$$H_0: \beta_{\text{estimado}} = \beta_{\text{subjacente}}$$

A hipótese alternativa complementar – H_a – é a de que as médias dos betas estimados segundo os diferentes métodos e premissas são diferentes, ou seja:

$$H_a: \beta_{\text{estimado}} \neq \beta_{\text{subjacente}}$$

Será testada a hipótese, esperando-se não rejeitar H_0 para as 135 combinações de:

- níveis de beta: 0,75; 1,00 e 1,25;

- níveis de dias com negociação (liquidez): 60%, 70%, 80%, 90% e 100%;
- método: TT, RUC e SW; e
- periodicidade: diária, semanal e mensal.

Cada combinação foi testada com uma simulação de 10.000 casos.

4 ANÁLISE DE DADOS

4.1 Análise do beta estimado em relação ao beta subjacente

Para cada uma das 135 combinações possíveis (3 níveis de beta x 5 níveis de liquidez x 3 métodos x 3 periodicidades) foram estimados 10.000 betas, para os quais (a) foram calculados: a média, o desvio-padrão e o coeficiente de variação (desvio-padrão/média); e (b) foram destacadas aquelas médias que são diferentes do beta subjacente, com significância de 1%. Adicionalmente, construiu-se o intervalo de confiança de cada beta, individualmente calculado com 1% de significância para verificar se esse intervalo de confiança conteria o beta subjacente. Essa última análise foi realizada para os métodos RUC e TT. Esses resultados estão apresentados na tabela 1.

Tabela 1 - Análise dos Betas Estimados

Painel (a): Beta subjacente 0,75

	<i>Trade-to-Trade</i>			Repetição da Última Cotação			Scholes e Williams			
	Diário	Semanal	Mensal	Diário	Semanal	Mensal	Diário	Semanal	Mensal	
60%	média	0,750	0,752	0,744	0,450*	0,652*	0,718*	0,630*	0,747	0,815
	desvio-padrão	0,087	0,134	0,276	0,064	0,134	0,278	0,105	0,232	5,631
	coef. de variação	0,116	0,178	0,371	0,142	0,206	0,387	0,167	0,311	6,909
	% casos no I.C.	97,0%	96,3%	98,9%	1,5%	98,7%	99,0%	n.a.	n.a.	n.a.
70%	média	0,750	0,751	0,746	0,526*	0,686*	0,731*	0,683*	0,747	0,826
	desvio-padrão	0,077	0,131	0,275	0,062	0,131	0,277	0,102	0,232	7,299
	coef. de variação	0,103	0,174	0,369	0,118	0,191	0,379	0,149	0,311	8,837
	% casos no I.C.	97,8%	97,9%	99,0%	13,8%	98,6%	98,9%	n.a.	n.a.	n.a.
80%	média	0,751	0,750	0,745	0,601*	0,713*	0,735*	0,720*	0,747	0,797
	desvio-padrão	0,069	0,131	0,276	0,061	0,131	0,277	0,101	0,230	4,173
	coef. de variação	0,092	0,175	0,370	0,101	0,184	0,377	0,140	0,308	5,236
	% casos no I.C.	98,1%	98,6%	98,9%	52,0%	99,0%	99,0%	n.a.	n.a.	n.a.
90%	média	0,750	0,751	0,745	0,675*	0,735*	0,741*	0,743*	0,747	0,794
	desvio-padrão	0,062	0,130	0,276	0,059	0,130	0,276	0,100	0,229	3,996
	coef. de variação	0,083	0,173	0,370	0,087	0,177	0,372	0,135	0,307	5,033
	% casos no I.C.	98,6%	98,9%	98,8%	89,7%	99,0%	98,9%	n.a.	n.a.	n.a.
100%	média	0,751	0,751	0,745	0,751	0,751	0,745	0,750	0,746	0,800
	desvio-padrão	0,056	0,129	0,276	0,056	0,129	0,276	0,099	0,229	4,539
	coef. de variação	0,075	0,172	0,370	0,075	0,172	0,370	0,132	0,307	5,674
	% casos no I.C.	99,0%	99,1%	98,9%	99,0%	99,1%	98,9%	n.a.	n.a.	n.a.

Painel (b): Beta subjacente 1,00

	<i>Trade-to-Trade</i>			Repetição da Última			Scholes e Williams			
				Cotação						
	Diário	Semanal	Mensal	Diário	Semanal	Mensal	Diário	Semanal	Mensal	
60%	média	1,000	0,998	0,996	0,599*	0,865*	0,964*	0,838*	0,996	0,988
	desvio-padrão	0,087	0,134	0,279	0,069	0,138	0,281	0,109	0,236	1,466
	coef. de variação	0,087	0,134	0,280	0,115	0,160	0,291	0,130	0,237	1,484
	% casos no I.C.	97,2%	93,9%	98,7%	0,1%	98,6%	98,8%	n.a.	n.a.	n.a.
70%	média	1,000	0,998	0,995	0,699*	0,911*	0,974*	0,909*	0,999	0,983
	desvio-padrão	0,078	0,131	0,278	0,067	0,134	0,280	0,106	0,234	1,669
	coef. de variação	0,078	0,131	0,279	0,096	0,147	0,287	0,117	0,234	1,698
	% casos no I.C.	97,6%	96,9%	98,8%	2,2%	98,9%	98,8%	n.a.	n.a.	n.a.
80%	média	1,000	0,997	0,995	0,800*	0,947*	0,983*	0,959*	0,998	0,982
	desvio-padrão	0,070	0,130	0,278	0,065	0,132	0,279	0,103	0,232	1,560
	coef. de variação	0,070	0,130	0,279	0,081	0,139	0,284	0,107	0,232	1,589
	% casos no I.C.	98,0%	98,1%	98,7%	25,2%	98,9%	98,8%	n.a.	n.a.	n.a.
90%	média	1,000	0,997	0,995	0,900*	0,975*	0,990*	0,990*	0,997	0,982
	desvio-padrão	0,063	0,129	0,278	0,061	0,130	0,279	0,100	0,231	1,482
	coef. de variação	0,063	0,129	0,279	0,068	0,133	0,282	0,101	0,232	1,509
	% casos no I.C.	98,5%	98,9%	98,7%	80,3%	99,0%	98,8%	n.a.	n.a.	n.a.
100%	média	1,000	0,997	0,995	1,000	0,997	0,995	0,999	0,997	0,980
	desvio-padrão	0,058	0,128	0,278	0,058	0,128	0,278	0,099	0,230	1,595
	coef. de variação	0,058	0,128	0,279	0,058	0,128	0,279	0,099	0,231	1,628
	% casos no I.C.	98,9%	98,9%	98,9%	98,9%	98,9%	98,9%	n.a.	n.a.	n.a.

Painel (c): Beta subjacente 1,25

	<i>Trade-to-Trade</i>			Repetição da Última Cotação			Scholes e Williams			
	Diário	Semanal	Mensal	Diário	Semanal	Mensal	Diário	Semanal	Mensal	
	60%	média	1,251	1,250	1,248	0,750*	1,085*	1,207*	1,051*	1,247
	desvio-padrão	0,088	0,134	0,281	0,075	0,142	0,285	0,114	0,238	1,405
	coef. de variação	0,070	0,107	0,225	0,100	0,131	0,236	0,108	0,191	1,145
	% casos no I.C.	96,7%	91,1%	98,7%	0,0%	98,4%	98,8%	n.a.	n.a.	n.a.
70%	média	1,251	1,250	1,248	0,875*	1,142*	1,223*	1,139*	1,247	1,229
	desvio-padrão	0,078	0,132	0,279	0,072	0,137	0,283	0,109	0,234	1,543
	coef. de variação	0,062	0,106	0,224	0,082	0,120	0,231	0,096	0,188	1,255
	% casos no I.C.	97,5%	96,1%	98,8%	0,3%	98,7%	98,9%	n.a.	n.a.	n.a.
80%	média	1,250	1,249	1,248	1,000*	1,186*	1,233*	1,200*	1,247	1,231
	desvio-padrão	0,070	0,131	0,280	0,067	0,134	0,281	0,106	0,233	1,243
	coef. de variação	0,056	0,105	0,224	0,067	0,113	0,228	0,088	0,187	1,010
	% casos no I.C.	98,0%	98,1%	98,8%	9,8%	98,6%	98,7%	n.a.	n.a.	n.a.
90%	média	1,251	1,249	1,249	1,126*	1,222*	1,242*	1,239*	1,247	1,228
	desvio-padrão	0,063	0,129	0,280	0,063	0,131	0,281	0,102	0,231	1,266
	coef. de variação	0,050	0,103	0,224	0,056	0,107	0,226	0,082	0,185	1,031
	% casos no I.C.	98,7%	98,8%	98,9%	68,8%	99,0%	98,9%	n.a.	n.a.	n.a.
100%	média	1,251	1,250	1,249	1,251	1,250	1,249	1,251	1,247	1,228
	desvio-padrão	0,057	0,129	0,280	0,057	0,129	0,280	0,100	0,230	1,282
	coef. de variação	0,046	0,103	0,224	0,046	0,103	0,224	0,080	0,184	1,044
	% casos no I.C.	98,9%	98,9%	98,8%	98,9%	98,9%	98,8%	n.a.	n.a.	n.a.

Para cada conjunto de 10.000 casos das 135 combinações testadas, foram calculadas a média (indicada com * quando a diferença entre a média e o beta subjacente é significativa a 1%), o desvio-padrão e o coeficiente de variação (desvio-padrão/média). Além disso, verificou-se o percentual de vezes que o beta subjacente estaria contido no intervalo de confiança de 99% do beta calculado, apresentado na linha % casos no I.C.. O painel (a) apresenta os dados para o beta subjacente 0,75, o painel (b) apresenta os dados para o beta subjacente 1,00, e o painel (c) apresenta os dados para o beta subjacente 1,25. Calculou-se o beta por meio do método *trade-to-trade* (apresentado na coluna *Trade-to-Trade*), por meio do método repetição da última cotação (apresentado na coluna Repetição da Última Cotação) e por meio do ajuste de Scholes e Williams (1977) (apresentado na coluna Scholes e Williams). Cada uma destas colunas é subdividida conforme a periodicidade de retorno considerada para o cálculo do beta (Diária, Semanal e Mensal). As linhas estão agrupadas pelo nível de liquidez (60%, 70%, 80%, 90% e 100% de dias com negociação).

Fonte: Elaborada pelos autores.

As evidências, conforme apresentadas na tabela 1, confirmam que as médias dos betas estimados das séries líquidas (100% de dias com negócios) não são diferentes dos betas subjacentes que originaram as respectivas séries aleatórias de retornos das ações nos diversos cenários, ao nível de 1% de significância. Esse resultado é o esperado da construção dos dados. Observa-se que, para 100% de dias com negócio, o método TT e o método RUC se igualam em termos operacionais, portanto, são iguais.

Os resultados também indicam que as médias dos betas das séries ilíquidas (60% a 90% de dias com negociação) estimados pelo método TT, são estatisticamente iguais aos betas subjacentes.

No entanto, ainda para as séries ilíquidas, a tabela 1 evidencia que as médias dos betas estimados pelo método RUC são, para todas as periodicidades, estatisticamente diferentes dos betas subjacentes, chegando a aproximadamente 40% de diferença para os betas diários. Verifica-se que o beta diário do método RUC para o cenário de 60% de dias com negociação é: no painel (a) de 0,450 (para um beta subjacente de 0,75), no painel (b) de 0,599 (para um beta subjacente de 1,00) e no painel (c) de 0,750 (para um beta subjacente de 1,25). Esses resultados corroboram o viés do beta de ações ilíquidas.

O método SW, para as séries ilíquidas, apresenta todos os casos de betas diários médios estimados diferentes do beta subjacente, ao nível de significância de 1%, portanto enviesados, com diferenças que chegam a 16%. Os betas médios semanais e mensais apresentam-se estatisticamente iguais ao beta subjacente. No entanto nota-se que as médias dos betas mensais chegam a ser até 8% diferentes do beta subjacente (beta subjacente de 0,75 para 70% de dias com negociação estimado em 0,826). Verificou-se, portanto, que o método SW não foi capaz de corrigir o viés para a periodicidade diária.

Além da análise da média dos 10.000 casos, a tabela 1 também fornece informações sobre a dispersão dos betas individualmente estimados em torno desta média. O desvio-padrão é especialmente alto para betas estimados com periodicidade mensal por meio do método SW.

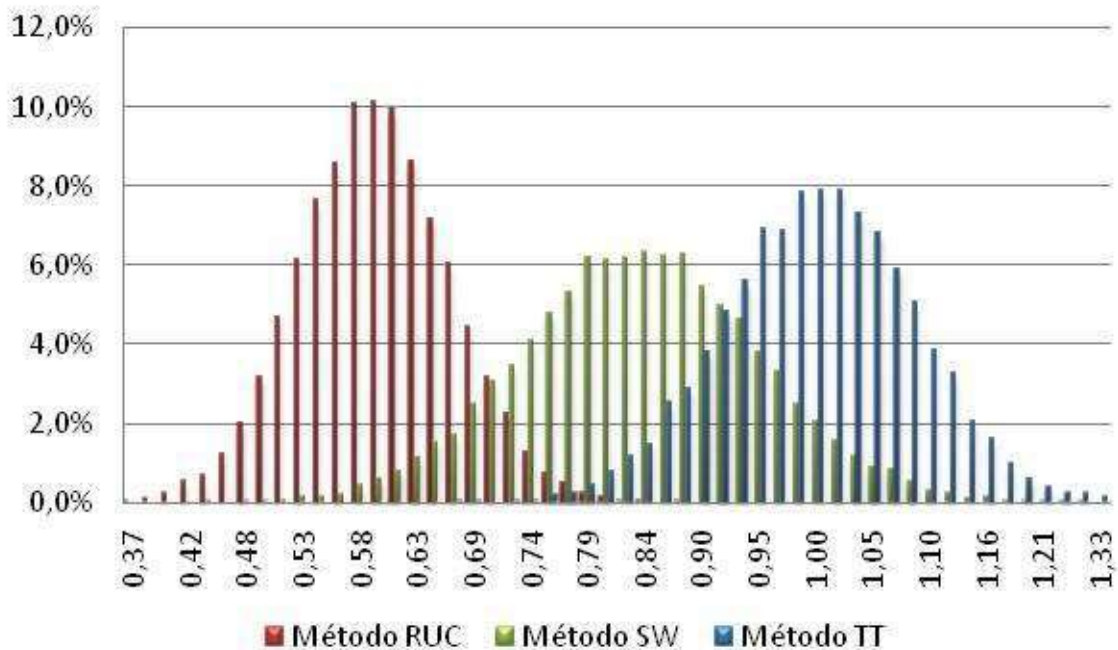
No que diz respeito à porcentagem de vezes em que um beta subjacente estaria contido no intervalo de confiança de cada beta calculado, verifica-se que (a) para a periodicidade diária, o método RUC apresenta vários cenários com menos de 50% dos casos (alguns com menos de 1% dos casos), e o método TT apresenta todos os cenários acima de 95% dos casos;

e (b) para a periodicidade semanal e mensal, ambos os métodos apresentam todos os cenários acima de 95% dos casos. Contudo é importante destacar que o método RUC produziu uma média de beta semanal para 60% de dias com negociação aproximadamente 13% abaixo do beta subjacente, para os 3 níveis de beta.

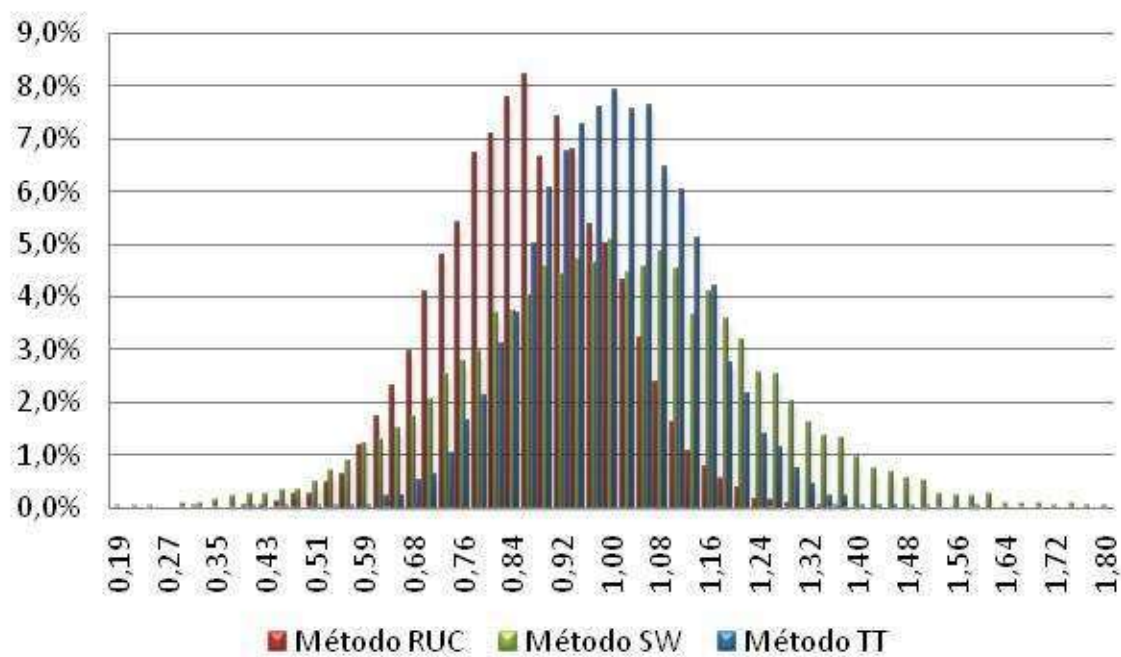
Observa-se que o menor coeficiente de variação, para todos os cenários, é o do beta estimado pelo método TT, e o maior é o do beta estimado pelo método SW. O coeficiente de variação é, especialmente, alto para betas estimados pelo método SW para periodicidade mensal, quando se observa um alto desvio-padrão para a série de 10.000 casos.

O gráfico 1 apresenta o histograma dos 10.000 casos para cada um dos métodos (TT, RUC e SW) e periodicidades (diária, semanal e mensal), analisados considerando-se a menor liquidez testada (60% de dias com negociação) e o beta subjacente 1,00.

Painel (a): Periodicidade Diária



Painel (b): Periodicidade Semanal



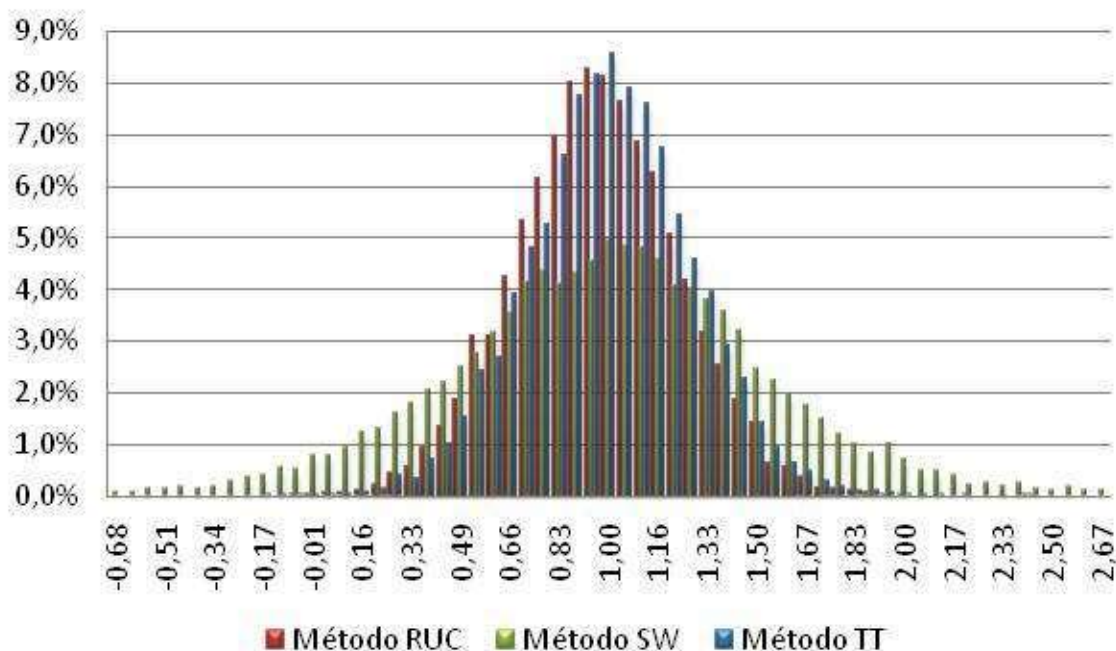
Painel (c): Periodicidade Mensal

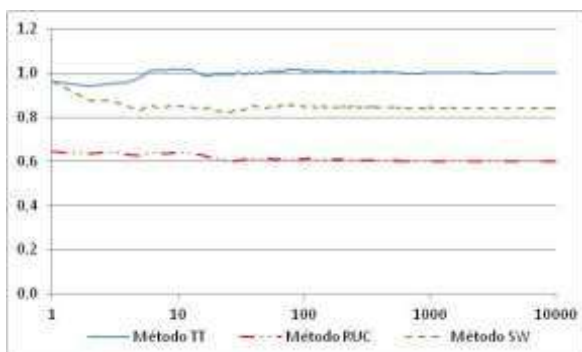
Gráfico 1 – Histograma – Histograma dos 10.000 betas estimados para 60% de dias negociados e beta subjacente 1,00. O painel (a) apresenta o histograma para a periodicidade diária e os três métodos (TT, RUC e SW), o painel (b) apresenta o histograma para a periodicidade semanal e os três métodos (TT, RUC e SW), e o painel (c) apresenta o histograma para a periodicidade mensal e os três métodos (TT, RUC e SW). O teste Kolmogorov-Smirnov para normalidade rejeitou a hipótese de ser normal, a 10% de significância, apenas para o beta mensal calculado pelo método SW.

Fonte: Elaborada pelos autores.

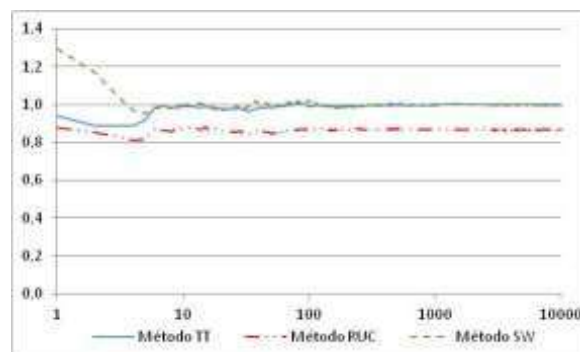
Como era esperado, pela construção das séries aleatórias, a distribuição dos betas é, para a maioria dos casos destacados no gráfico 1, normal (o teste Kolmogorov-Smirnov para normalidade rejeitou a hipótese da normalidade, a 10% de significância, apenas para a distribuição dos betas mensais estimados pelo método SW). O histograma corrobora o que já havia sido identificado na tabela 1: (a) para periodicidade diária, apenas o beta calculado pelo Método TT tem média igual ao beta subjacente, sendo que os outros 2 métodos produzem betas médios viesados para baixo; (b) para periodicidade semanal, os métodos TT e SW produzem betas médios iguais ao beta subjacente, porém a distribuição do beta SW tem uma maior dispersão e o beta RUC continua viesado para baixo; e (c) para periodicidade mensal, os três métodos produzem betas médios próximos ao beta subjacente (o beta calculado pelo método RUC ainda é estatisticamente diferente do beta subjacente a 1%), sendo a dispersão do beta SW também maior do que a dos outros 2 métodos. Para os casos não apresentados, a média e o desvio-padrão podem ser obtidos diretamente na tabela 1.

A figura abaixo apresenta o gráfico da evolução da média do beta para os 10.000 casos simulados, em que a abscissa apresenta o número de casos considerados no cálculo da média (em escala logarítmica), e a ordenada apresenta a média para aquele número de casos. Foi considerada a menor liquidez testada (60% de dias com negociação) e o beta subjacente 1,00.

Painel (a): Periodicidade diária



Painel (b): Periodicidade Semanal



Painel (c): Periodicidade Mensal

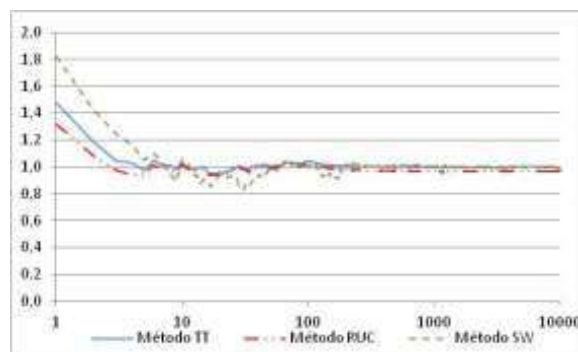


Gráfico 2 – Convergência da média – Gráfico da evolução da média do beta considerando-se os 10.000 casos simulados, estimados para 60% de dias negociados e beta subjacente 1,00. O eixo x está em escala logarítmica. O painel (a) apresenta o gráfico para a periodicidade diária e para os três métodos (TT, RUC e SW), o painel (b) apresenta o gráfico para a periodicidade semanal e para os três métodos (TT, RUC e SW) e o painel (c) apresenta o gráfico para a periodicidade mensal e para os três métodos (TT, RUC e SW). Elaborada pelos autores.

Observa-se, no gráfico 2, que (a) para periodicidade diária, apenas a média do beta calculado pelo método TT converge para o beta subjacente, (b) para periodicidade semanal, as médias dos betas estimados pelos métodos TT e SW convergem para o beta subjacente, e (c) para periodicidade mensal, os três métodos produzem betas médios que convergem para o beta subjacente, não obstante o beta médio calculado pelo método RUC seja estatisticamente diferente do beta subjacente, a 1% de significância. Exceto para o beta mensal calculado pelo método SW, o beta médio se estabiliza (considerando seu impacto econômico) a partir de aproximadamente 10 casos.

Outra discussão relevante é a do impacto econômico na imprecisão da estimação dos betas. Na tabela 2, apresenta-se a diferença entre o custo de capital próprio que seria obtido a partir do beta estimado e o custo de capital próprio que seria obtido a partir do beta subjacente (consideradas as premissas utilizadas na simulação: taxa livre de risco de 6,0% a.a. e prêmio de mercado de 5,0% a.a.).

Tabela 2 - Diferença no Custo de Capital Próprio

Painel (a): Beta subjacente 0,75

	Trade-to-Trade			Repetição da Última Cotação			Scholes e Williams		
	Diário	Semanal	Mensal	Diário	Semanal	Mensal	Diário	Semanal	Mensal
média	0,0%	0,0%	0,0%	-1,5%	-0,5%	-0,2%	-0,6%	0,0%	0,3%
desvio-padrão	0,4%	0,7%	1,4%	0,3%	0,7%	1,4%	0,5%	1,2%	28,2%
60% mínimo	-1,8%	-2,6%	-5,4%	-2,8%	-3,2%	-5,4%	-2,8%	-4,9%	-
máximo	1,7%	2,6%	5,1%	-0,2%	2,4%	5,4%	1,6%	5,4%	164,7%
amplitude	3,5%	5,2%	10,5%	2,6%	5,6%	10,8%	4,4%	10,3%	2.568%
média	0,0%	0,0%	0,0%	-1,1%	-0,3%	-0,1%	-0,3%	0,0%	0,4%
desvio-padrão	0,4%	0,7%	1,4%	0,3%	0,7%	1,4%	0,5%	1,2%	36,5%
70% mínimo	-1,5%	-2,4%	-5,3%	-2,2%	-2,8%	-5,5%	-2,3%	-5,3%	-
máximo	1,5%	2,4%	6,0%	0,2%	2,2%	5,7%	1,9%	6,4%	150,6%
amplitude	3,0%	4,8%	11,3%	2,4%	5,0%	11,2%	4,2%	11,7%	3.467%
média	0,0%	0,0%	0,0%	-0,7%	-0,2%	-0,1%	-0,1%	0,0%	0,2%
desvio-padrão	0,3%	0,7%	1,4%	0,3%	0,7%	1,4%	0,5%	1,1%	20,9%
80% mínimo	-1,4%	-2,6%	-5,3%	-1,9%	-2,4%	-5,5%	-1,9%	-4,7%	-
máximo	1,3%	2,7%	5,6%	0,3%	2,5%	5,7%	2,1%	5,1%	165,9%
amplitude	2,7%	5,3%	10,9%	2,2%	4,9%	11,2%	4,0%	9,8%	1.744%
média	0,0%	0,0%	0,0%	-0,4%	-0,1%	0,0%	0,0%	0,0%	0,2%
desvio-padrão	0,3%	0,7%	1,4%	0,3%	0,7%	1,4%	0,5%	1,1%	20,0%
90% mínimo	-1,3%	-2,5%	-5,5%	-1,5%	-2,4%	-5,4%	-1,9%	-5,1%	-
máximo	1,2%	2,5%	5,6%	0,6%	2,4%	5,5%	2,3%	4,8%	168,6%
amplitude	2,5%	5,0%	11,1%	2,1%	4,8%	10,9%	4,2%	9,9%	1.628%
média	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,2%
desvio-padrão	0,3%	0,6%	1,4%	0,3%	0,6%	1,4%	0,5%	1,1%	22,7%
100% mínimo	-1,2%	-2,2%	-5,4%	-1,2%	-2,2%	-5,4%	-1,9%	-5,0%	-
máximo	1,2%	2,5%	5,5%	1,2%	2,5%	5,5%	2,1%	5,2%	174,2%
amplitude	2,4%	4,7%	10,9%	2,4%	4,7%	10,9%	4,0%	10,2%	1.965%

Painel (b): Beta subjacente 1,00

	<i>Trade-to-Trade</i>			Repetição da Última			Scholes e Williams		
				Cotação					
	Diário	Semanal	Mensal	Diário	Semanal	Mensal	Diário	Semanal	Mensal
média	0,0%	0,0%	0,0%	-2,0%	-0,7%	-0,2%	-0,8%	0,0%	-0,1%
desvio-padrão	0,4%	0,7%	1,4%	0,3%	0,7%	1,4%	0,5%	1,2%	7,3%
mínimo	-1,7%	-2,9%	-5,9%	-3,2%	-3,4%	-5,4%	-2,8%	-5,2%	-581,4%
máximo	2,0%	2,9%	6,9%	-0,6%	1,9%	7,3%	1,3%	6,5%	110,8%
amplitude	3,7%	5,8%	12,8%	2,6%	5,3%	12,7%	4,1%	11,7%	692,2%
média	0,0%	0,0%	0,0%	-1,5%	-0,4%	-0,1%	-0,5%	0,0%	-0,1%
desvio-padrão	0,4%	0,7%	1,4%	0,3%	0,7%	1,4%	0,5%	1,2%	8,3%
mínimo	-1,4%	-2,8%	-5,3%	-2,8%	-2,8%	-5,7%	-2,5%	-5,2%	-736,5%
máximo	1,7%	2,6%	8,2%	-0,3%	2,0%	8,2%	2,2%	6,1%	134,0%
amplitude	3,1%	5,4%	13,5%	2,5%	4,8%	13,9%	4,7%	11,3%	870,5%
média	0,0%	0,0%	0,0%	-1,0%	-0,3%	-0,1%	-0,2%	0,0%	-0,1%
desvio-padrão	0,4%	0,7%	1,4%	0,3%	0,7%	1,4%	0,5%	1,2%	7,8%
mínimo	-1,3%	-2,5%	-5,1%	-2,4%	-3,2%	-5,5%	-2,0%	-5,2%	-664,2%
máximo	1,3%	2,6%	8,7%	0,2%	2,0%	8,5%	2,0%	7,1%	162,4%
amplitude	2,6%	5,1%	13,8%	2,6%	5,2%	14,0%	4,0%	12,3%	826,6%
média	0,0%	0,0%	0,0%	-0,5%	-0,1%	-0,1%	-0,1%	0,0%	-0,1%
desvio-padrão	0,3%	0,6%	1,4%	0,3%	0,6%	1,4%	0,5%	1,2%	7,4%
mínimo	-1,2%	-2,6%	-5,6%	-1,6%	-2,6%	-5,7%	-2,1%	-5,2%	-617,4%
máximo	1,2%	2,3%	9,6%	0,7%	2,0%	8,4%	2,0%	6,2%	156,0%
amplitude	2,4%	4,9%	15,2%	2,3%	4,6%	14,1%	4,1%	11,4%	773,4%
média	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	-0,1%
desvio-padrão	0,3%	0,6%	1,4%	0,3%	0,6%	1,4%	0,5%	1,2%	8,0%
mínimo	-1,2%	-2,5%	-5,5%	-1,2%	-2,5%	-5,5%	-2,0%	-5,0%	-682,8%
máximo	1,1%	2,3%	8,4%	1,1%	2,3%	8,4%	1,6%	6,1%	154,5%
amplitude	2,3%	4,8%	13,9%	2,3%	4,8%	13,9%	3,6%	11,1%	837,3%

Painel (c): Beta subjacente 1,25

	Trade-to-Trade			Repetição da Última			Scholes e Williams		
				Cotação					
	Diário	Semanal	Mensal	Diário	Semanal	Mensal	Diário	Semanal	Mensal
média	0,0%	0,0%	0,0%	-2,5%	-0,8%	-0,2%	-1,0%	0,0%	-0,1%
desvio-padrão	0,4%	0,7%	1,4%	0,4%	0,7%	1,4%	0,6%	1,2%	7,0%
mínimo	-2,0%	-3,1%	-6,3%	-4,1%	-4,2%	-6,4%	-3,2%	-4,7%	-447,3%
máximo	1,7%	2,5%	5,4%	-1,1%	2,3%	5,8%	1,2%	5,8%	74,9%
amplitude	3,7%	5,6%	11,7%	3,0%	6,5%	12,2%	4,4%	10,5%	522,2%
média	0,0%	0,0%	0,0%	-1,9%	-0,5%	-0,1%	-0,6%	0,0%	-0,1%
desvio-padrão	0,4%	0,7%	1,4%	0,4%	0,7%	1,4%	0,5%	1,2%	7,7%
mínimo	-1,6%	-2,7%	-6,0%	-3,3%	-3,3%	-6,7%	-2,6%	-4,9%	-573,3%
máximo	1,6%	2,3%	5,4%	-0,4%	2,2%	5,2%	1,7%	4,9%	142,1%
amplitude	3,2%	5,0%	11,4%	2,9%	5,5%	11,9%	4,3%	9,8%	715,4%
média	0,0%	0,0%	0,0%	-1,3%	-0,3%	-0,1%	-0,2%	0,0%	-0,1%
desvio-padrão	0,4%	0,7%	1,4%	0,3%	0,7%	1,4%	0,5%	1,2%	6,2%
mínimo	-1,5%	-2,7%	-6,0%	-2,7%	-2,9%	-6,3%	-2,3%	-4,5%	-352,8%
máximo	1,5%	2,6%	5,7%	-0,1%	2,5%	5,3%	1,8%	5,4%	139,8%
amplitude	3,0%	5,3%	11,7%	2,6%	5,4%	11,6%	4,1%	9,9%	492,6%
média	0,0%	0,0%	0,0%	-0,6%	-0,1%	0,0%	-0,1%	0,0%	-0,1%
desvio-padrão	0,3%	0,6%	1,4%	0,3%	0,7%	1,4%	0,5%	1,2%	6,3%
mínimo	-1,5%	-3,1%	-6,1%	-1,9%	-3,1%	-6,4%	-2,2%	-5,0%	-361,1%
máximo	1,2%	2,7%	5,4%	0,5%	2,5%	5,5%	2,2%	4,9%	128,9%
amplitude	2,7%	5,8%	11,5%	2,4%	5,6%	11,9%	4,4%	9,9%	490,0%
média	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	-0,1%
desvio-padrão	0,3%	0,6%	1,4%	0,3%	0,6%	1,4%	0,5%	1,1%	6,4%
mínimo	-1,2%	-2,8%	-6,6%	-1,2%	-2,8%	-6,6%	-1,8%	-5,3%	-397,4%
máximo	1,1%	2,6%	5,5%	1,1%	2,6%	5,5%	2,0%	5,0%	142,5%
amplitude	2,3%	5,4%	12,1%	2,3%	5,4%	12,1%	3,8%	10,3%	539,9%

Os valores do corpo da tabela referem-se à diferença entre custo de capital próprio que seria obtido com o beta estimado e o custo de capital próprio que seria obtido com o beta subjacente, para cada um dos cenários. Os dados são estimados por meio da simulação, com 10.000 casos gerados para cada cenário (60%, 70%, 80%, 90% e 100% de dias com negociação), considerando-se um período de retorno de 3 anos. Consideraram-se as premissas utilizadas na simulação: taxa livre de risco de 6,0% a.a. e prêmio de mercado de 5,0% a.a. As colunas indicam os métodos (*Trade-to-Trade*, Repetição da Última Cotação e Scholes e Williams) e estão subdivididas conforme a periodicidade de retorno considerada para o cálculo do beta (Diária, Semanal e Mensal). As linhas estão agrupadas pelo nível de liquidez (60%, 70%, 80%, 90% e 100% de dias com negociação).

Fonte: Elaborada pelos autores.

A tabela 2 oferece duas análises: (a) a análise da diferença obtida utilizando-se a média dos betas dos 10.000 casos e (b) a análise dos casos individuais por meio da diferença mínima, da diferença máxima e da amplitude da diferença.

A partir da análise da diferença obtida com a média dos 10.000 casos, verifica-se que:

- As diferenças econômicas do custo de capital próprio para o método TT são nulas;
- O método RUC produz diferenças dos betas diários e semanais significativas, de até 2,5 pontos percentuais a menos do que o custo de capital próprio que seria obtido com o beta subjacente (cenário de 60% de dias com negociação, para o beta subjacente de 1,25, e o beta médio estimado de 0,750);
- As diferenças econômicas dos betas mensais estimados pelo método RUC são desprezíveis;
- O método SW produz diferenças economicamente desprezíveis, exceto para periodicidades diárias e níveis de dias com negociação abaixo de 80%.

Nos casos individuais, verifica-se que: (a) a amplitude das diferenças é menor para os betas diários, tendo-se em vista que o erro padrão de betas diários é menor do que para outras periodicidades, consistente com Daves *et. al.* (2000); (b) que as menores amplitudes são aquelas produzidas por betas estimados pelo método RUC. No entanto os betas estimados pelo método RUC não seriam a melhor alternativa tendo-se em vista que, na média, apresentam um custo de capital próprio inferior àquele que seria obtido com o beta subjacente (enviesados). Portanto, deve-se olhar para o módulo da diferença produzida (i) pelo mínimo e (ii) pelo máximo beta calculado por cada método. Essa análise indica que a melhor alternativa para o cálculo do custo de capital próprio seria o beta calculado pelo método TT e mais especificamente aquele calculado com periodicidade diária, por apresentar a menor diferença absoluta mínima ou máxima.

Adicionalmente, calculou-se o intervalo de confiança do beta para 99% (2,58 desvios para mais e para menos) e posteriormente a diferença de custo de capital para os extremos

desse intervalo de confiança. A tabela 3 apresenta o máximo entre (a) o módulo da diferença do extremo superior e (b) o módulo da diferença do extremo inferior para os três métodos e para as três periodicidades.

A construção do intervalo de confiança acima definido considerou que as distribuições dos betas para as diversas séries de 10.000 casos são distribuições normais. O teste Kolmogorov-Smirnov não rejeitou a hipótese da normalidade a 10% para a maioria das séries, exceto para: (a) as séries de betas estimados com periodicidade mensal pelo método SW (valor p de 0%); (b) as séries de betas estimados com periodicidade semanal pelo método SW e beta subjacente de 1,25 (valor p de 4,5% para 60% e 70% de dias com negociação, 2,8% para 80% de dias com negociação, 2,9% para 90% de negociação e 3,5% para 100% de dias com negociação); e (c) a série de betas estimados com periodicidade semanal pelo método TT com beta subjacente 1,25 e 90% de dias com negociação (valor p de 8,2%).

Tabela 3 - Diferença Máxima no Custo de Capital Próprio

Painel (a): Periodicidade Diária

Dias com negociação	Beta Subjacente 0,75			Beta Subjacente 1,00			Beta Subjacente 1,25		
	TT	RUC	SW	TT	RUC	SW	TT	RUC	SW
60%	1,12%	2,33%	1,95%	1,12%	2,90%	2,22%	1,14%	3,47%	2,47%
70%	0,99%	1,92%	1,65%	1,01%	2,37%	1,82%	1,01%	2,80%	1,96%
80%	0,90%	1,53%	1,45%	0,90%	1,84%	1,53%	0,90%	2,11%	1,62%
90%	0,80%	1,14%	1,33%	0,81%	1,29%	1,34%	0,82%	1,43%	1,37%
100%	0,73%	0,73%	1,28%	0,75%	0,75%	1,28%	0,74%	0,74%	1,30%

Painel (b): Periodicidade Semanal

Dias com negociação	Beta Subjacente 0,75			Beta Subjacente 1,00			Beta Subjacente 1,25		
	TT	RUC	SW	TT	RUC	SW	TT	RUC	SW
60%	1,74%	2,22%	3,01%	1,74%	2,46%	3,06%	1,73%	2,66%	3,09%
70%	1,69%	2,01%	3,01%	1,70%	2,17%	3,02%	1,70%	2,31%	3,03%
80%	1,69%	1,87%	2,98%	1,69%	1,97%	3,00%	1,69%	2,05%	3,02%
90%	1,68%	1,75%	2,97%	1,68%	1,80%	2,99%	1,67%	1,83%	2,99%
100%	1,67%	1,67%	2,97%	1,67%	1,67%	2,98%	1,66%	1,66%	2,98%

Painel (c): Periodicidade Mensal

Dias com negociação	Beta Subjacente 0,75			Beta Subjacente 1,00			Beta Subjacente 1,25		
	TT	RUC	SW	TT	RUC	SW	TT	RUC	SW
60%	3,59%	3,75%	72,96%	3,62%	3,80%	18,97%	3,63%	3,89%	18,24%
70%	3,57%	3,67%	94,54%	3,61%	3,74%	21,62%	3,61%	3,79%	20,01%
80%	3,59%	3,65%	54,07%	3,61%	3,68%	20,21%	3,62%	3,71%	16,13%
90%	3,59%	3,61%	51,77%	3,61%	3,65%	19,21%	3,62%	3,66%	16,44%
100%	3,59%	3,59%	58,80%	3,61%	3,61%	20,68%	3,62%	3,62%	16,65%

Com os extremos do intervalo de confiança de 99% do beta estimado (2,58 desvios para mais e para menos), foram calculados os custos de capital e as diferenças entre esses custos de capital e o que seria obtido utilizando-se o beta subjacente correspondente (diferença mínima e máxima). Em seguida, obteve-se o máximo entre (a) o módulo da diferença mínima e (b) o módulo da diferença máxima, apresentado na tabela. Consideraram-se as premissas utilizadas na simulação: taxa livre de risco de 6,0% a.a. e prêmio de mercado de 5,0% a.a. O painel (a) apresenta os dados para os betas estimados com periodicidade diária, o painel (b) apresenta os dados para os betas estimados com periodicidade semanal e painel (c) apresenta os dados para os betas estimados com periodicidade mensal. As colunas indicam os betas subjacentes 0,75, 1,00 e 1,25) e estão subdivididas conforme o método considerado para o cálculo do beta (TT: *Trade-to-Trade*, RUC – repetição da última cotação e SW – Scholes e Williams). As linhas estão agrupadas pelo nível de liquidez (60%, 70%, 80%, 90% e 100% de dias com negociação).

Fonte: Elaborada pelos autores.

Observa-se, na tabela 3, que o método TT foi capaz de produzir a menor diferença de custo de capital para todos os cenários analisados, sendo menor para betas estimados com periodicidade diária. Tomando-se por base o beta calculado com periodicidade diária, a diferença produzida pelo método TT é sempre inferior a 1,15%, sendo que o método RUC produziria diferença máxima de aproximadamente 3,50% e o método SW produziria diferença máxima de aproximadamente 2,50%. As análises considerando que a distribuição dos erros aleatórios (do retorno do mercado e do retorno do ativo) é uma distribuição t com 10 graus de liberdade (“sensibilidade cauda larga”), para simular a cauda larga dos retornos, são similares às análises acima discutidas (exceto pelo fato de a média dos betas mensais estimados pelo método RUC não serem estatisticamente diferentes do beta subjacente, a 1% de significância, em um cenário: 90% de dias com negociação e beta subjacente 1,00). Portanto, elas não serão apresentadas. O mesmo pode ser dito para as análises considerando que os retornos dos ativos fossem obtidos por meio de procedimento alternativo (“sensibilidade procedimento alternativo”): calculando-se primeiro o número aleatório utilizado para atribuir a cada dia a existência ou não de negócio e, em seguida, calculando-se o retorno para os períodos acumulados entre dias com negociação – sendo cada retorno acumulado calculado a partir do retorno médio diário geométrico do mercado no período sem negociação do ativo e do erro aleatório do retorno do ativo durante o período de dias sem negociação (calculado

multiplicando-se o erro aleatório diário, assumido neste trabalho pela raiz do número de dias no período sem negociação). O apêndice apresenta a tabela 3 para a “sensibilidade cauda larga” (tabela 3A), e para a “sensibilidade procedimento alternativo” (tabela 3B).

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O beta é um dos parâmetros mais importantes em finanças. Por isso, seu cálculo tem sido bastante estudado. Como o verdadeiro beta não é conhecido, este artigo optou por uma simulação, o que possibilita a comparação do beta estimado com o beta subjacente, conhecido *a priori*. Por construção, observa-se que o índice de mercado simulado é completamente eficiente. Por meio da simulação, foram estudados 3 métodos de cálculo - repetição da última cotação (RUC), *trade-to-trade* (TT) e ajuste por Scholes e Williams (1977)(SW) - e 3 periodicidades de retorno (diária, semanal e mensal), para 5 níveis de dias com negociação: 60%, 70%, 80%, 90% e 100% e 3 níveis de beta: 0,75, 1,00 e 1,25.

O resultado mostra, claramente, que o método TT é superior aos métodos RUC e SW para estimação de beta de ações que não negociam todos os dias. Esse método, embora pouco usado, é o único que é capaz de estimar corretamente o beta calculado com periodicidade de retorno diária, semanal ou mensal. Deve ser usado preferencialmente com periodicidade diária, pois apresenta o menor erro de estimação, o que produz menores distorções no custo de capital. A distorção no custo de capital produzida por betas estimados com periodicidade mensal dobra em relação àquela produzida por betas estimados com periodicidade semanal, que, por sua vez, também pode, em alguns casos, dobrar em relação àquela produzida por betas estimados com periodicidade diária.

O método SW não resolveu o problema do viés para baixo, quando calculado com periodicidade diária, mas não apresentou, para o beta médio, viés significativo com periodicidade semanal e mensal. A grande dispersão das estimativas individuais torna esse método pouco confiável quando aplicado a pequenos números de ações. Essa dispersão pode acarretar severos equívocos na estimação do custo de capital e, conseqüentemente, no valor de empresas, na decisão de investimento, nos testes de eficiência de mercado e na confecção de tarifas de serviços públicos.

Esse resultado está em linha com o obtido por Bowie e Bradfield (1993), que, simulando retornos mensais para séries não líquidas, mostram que o método TT produz um estimador do beta superior ao obtido pelo método de Cohen *et. al.* (1983), que é considerado

pelos autores um método mais geral do qual o método Scholes e Williams (1977) e Dimson (1979) são casos especiais.

O método RUC, mais tradicional e disponível nos sistemas de informação, mostrou-se clara e severamente inconsistente, sendo enviesado quando calculado com periodicidade diária e semanal. Embora o erro de estimação esteja economicamente próximo àquele produzido pelo método TT, o viés para baixo o torna pouco confiável na aplicação a carteiras com pequeno número de ações, na estimação do custo de capital e nas aplicações decorrentes.

Para uma periodicidade mensal, quando o viés para baixo torna-se não significativo economicamente, o método mostra-se equiparável ao método TT para a mesma periodicidade.

Futuros estudos poderiam estudar empiricamente o que aqui se estudou por meio de simulação.

REFERÊNCIAS

BARTHOLDY, J.; RIDING, A. Thin trading and the estimation of betas: the efficacy of alternative techniques. **The Journal of Financial Research**, v. 17, n. 2, p. 241-254, 1994.

BODIE, Z.; KANE, A.; MARCUS, A. J. **Fundamentos de investimentos**. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2000.

BOWIE, D. C.; BRADFIELD, D. J. Improved beta estimation on the Johannesburg stock exchange: a simulation study. **South African Journal of Business Management**, v. 24, n. 4, p. 118-123, 1993.

BROOKS, C. **Introductory econometrics for finance**. 2. ed. Cambridge, UK: University Press, 2008.

COHEN, K. J. et al. Friction in the trading process and the estimation of systematic risk. **Journal of Financial Economics**, v. 12, p. 263-278, 1983.

COPELAND, T.; KOLLER, T.; MURRIN, J. **Avaliação de empresas: valuation: calculando e gerenciando o valor das empresas**. 3. ed. São Paulo: Pearson, 2002.

COPELAND, T.; WESTON, J. F.; SHASTRI, K. **Financial Theory and Corporate Policy**. 4. ed. Boston: Pearson, Boston, 2005.

DAMODARAN, A. **Damodaran on valuation: security analysis for investment and corporate finance**. New York: John Wiley & Sons, 1994.

DAMODARAN, A. **Corporate Finance: theory and practice**. New York: John Wiley & Sons, 1997.

DAVES, P. R.; EHRHARDT, M. C.; KUNKEL, R. A. Estimating systematic risk: the choice of return interval and estimation period. **Journal of Financial and Strategic Decisions**, v. 13, n. 1, p. 7-13, 2000.

DIMSON, E. Risk measurement when shares are subject to infrequent trading. **Journal of Financial Economics**, v. 7, n. 2, p. 197-226, 1979.

DIMSON, E.; MARSH, P. The stability of UK risk measures and the problem of thin-trading. **Journal of Finance**, v. 38, n. 3, p.753-783, 1983.

FOWLER, D. J.; RORKE, C. H. Risk measurement when shares are subject to infrequent trading. **Journal of Financial Economics**, v. 12, n. 2, p. 279-283, 1983.

HANDA, P.; KOTHARI, S. P.; WASLEY, C. The relation between the return interval and betas implication for size effect. **Journal of Financial Economics**, v. 23, n. 1, p. 70-100, 1989.

HAWAWINI, G. Why beta shifts as the return interval changes. **Financial Analysts Journal**, v. 39, n. 3, p. 73-77, 1983.

MARSH, P. Equity rights issues and the efficiency of the UK stock market. **Journal of Finance**, v. 34, n. 4, p. 839-862, 1979.

MAYNES, E.; RUMSEY, J. Conducting event studies with thinly traded stocks. **Journal of Banking and Finance**, v. 17, n. 1, p. 145-157, 1993.

KOLLER, T.; GOEDHART, M. H.; WESSELS, D. **Valuation**: measuring and managing the value of companies. 4. ed. New Jersey: John Wiley & Sons, 2005.

SCHOLLES, M.; WILLIAMS, J. Estimating betas from nonsynchronous data. **Journal of Financial Economics**, v. 5, n. 3, p. 309-327, 1977.

STAMBAUGH, R. F. On the exclusion of assets from tests of the two-parameter model: a sensitivity analysis. **Journal of Financial Economics**, v. 10, n. 3, p. 237-268, 1982.

APÊNDICE

Apresentação da tabela 3, em que o cálculo se faz a partir da “sensibilidade cauda larga”, quando se supõe que a distribuição de erros seja uma distribuição t com 10 graus de liberdade, e a partir da “sensibilidade procedimento alternativo”, quando se simulam preços apenas para os dias em que houve negociação.

Tabela 3A – Apêndice Sensibilidade Cauda Larga – Idem a tabela 3, porém calculada para a “sensibilidade cauda larga”. Elaborada pelos autores.

Painel (a): Periodicidade Diária

Dias com negociação	Beta Subjacente 0,75			Beta Subjacente 1,00			Beta Subjacente 1,25		
	TT	RUC	SW	TT	RUC	SW	TT	RUC	SW
60%	1,13%	2,34%	1,96%	1,13%	2,91%	2,21%	1,14%	3,52%	2,50%
70%	1,01%	1,95%	1,68%	1,00%	2,40%	1,83%	0,99%	2,84%	1,99%
80%	0,92%	1,55%	1,47%	0,90%	1,85%	1,54%	0,90%	2,17%	1,60%
90%	0,83%	1,16%	1,36%	0,82%	1,30%	1,36%	0,81%	1,47%	1,38%
100%	0,74%	0,74%	1,30%	0,74%	0,74%	1,30%	0,74%	0,74%	1,28%

Painel (b): Periodicidade Semanal

Dias com negociação	Beta Subjacente 0,75			Beta Subjacente 1,00			Beta Subjacente 1,25		
	TT	RUC	SW	TT	RUC	SW	TT	RUC	SW
60%	1,75%	2,23%	3,07%	1,76%	2,42%	3,02%	1,76%	2,67%	3,08%
70%	1,72%	2,04%	3,03%	1,72%	2,18%	3,02%	1,72%	2,34%	3,06%
80%	1,71%	1,88%	3,04%	1,69%	1,96%	2,99%	1,71%	2,05%	3,03%
90%	1,69%	1,77%	3,02%	1,69%	1,81%	2,97%	1,69%	1,84%	3,01%
100%	1,69%	1,69%	3,02%	1,67%	1,67%	2,96%	1,68%	1,68%	3,00%

Painel (c): Periodicidade Mensal

Dias com negociação	Beta Subjacente 0,75			Beta Subjacente 1,00			Beta Subjacente 1,25		
	TT	RUC	SW	TT	RUC	SW	TT	RUC	SW
60%	3,60%	3,73%	10,76%	3,55%	3,76%	55,85%	3,65%	3,94%	14,87%
70%	3,59%	3,69%	10,85%	3,54%	3,67%	51,44%	3,66%	3,83%	14,02%
80%	3,59%	3,64%	10,99%	3,55%	3,62%	54,64%	3,67%	3,76%	13,92%
90%	3,59%	3,63%	10,66%	3,55%	3,57%	52,76%	3,66%	3,70%	13,37%
100%	3,59%	3,59%	10,79%	3,55%	3,55%	50,54%	3,67%	3,67%	14,50%

A construção do intervalo de confiança da tabela 3A considerou que as distribuições dos betas para as diversas séries de 10.000 casos são distribuições normais. O teste Kolmogorov-Smirnov não rejeitou a hipótese da normalidade a 10% para a maioria das séries exceto para: (a) as séries de betas estimados com periodicidade mensal pelo método SW (valor p de 0%); (b) a série de betas estimados com periodicidade mensal pelo método RUC com beta subjacente 0,75 e 60% de dias com negociação (valor p de 7,5%); (c) a série de betas

estimados com periodicidade mensal pelo método TT com beta subjacente 1,00 e 70% de dias com negociação (valor p de 7,2%); e (d) a série de betas estimados com periodicidade mensal pelo método TT com beta subjacente 1,25 e 90% de dias com negociação (valor p de 9,6%).

Tabela 3B – Apêndice Sensibilidade Procedimento Alternativo – Idem a tabela 3, porém, calculada para a “sensibilidade procedimento alternativo”. Elaborada pelos autores.

Painel (a): Periodicidade Diária

Dias com negociação	Beta Subjacente 0,75			Beta Subjacente 1,00			Beta Subjacente 1,25		
	TT	RUC	SW	TT	RUC	SW	TT	RUC	SW
60%	1,12%	2,34%	1,97%	1,13%	2,89%	2,21%	1,11%	3,47%	2,44%
70%	1,02%	1,93%	1,67%	1,01%	2,36%	1,78%	1,02%	2,79%	1,97%
80%	0,91%	1,54%	1,46%	0,91%	1,84%	1,53%	0,89%	2,11%	1,60%
90%	0,82%	1,14%	1,32%	0,80%	1,27%	1,35%	0,82%	1,45%	1,38%
100%	0,74%	0,74%	1,27%	0,74%	0,74%	1,30%	0,74%	0,74%	1,30%

Painel (b): Periodicidade Semanal

Dias com negociação	Beta Subjacente 0,75			Beta Subjacente 1,00			Beta Subjacente 1,25		
	TT	RUC	SW	TT	RUC	SW	TT	RUC	SW
60%	1,74%	2,24%	3,02%	1,73%	2,43%	3,04%	1,72%	2,64%	3,02%
70%	1,69%	2,01%	2,98%	1,73%	2,16%	3,06%	1,69%	2,32%	3,07%
80%	1,69%	1,87%	2,98%	1,71%	1,96%	2,98%	1,68%	2,04%	3,03%
90%	1,68%	1,76%	2,99%	1,66%	1,78%	3,00%	1,69%	1,82%	2,97%
100%	1,63%	1,63%	2,96%	1,67%	1,67%	2,99%	1,66%	1,66%	3,04%

Painel (c): Periodicidade Mensal

Dias com negociação	Beta Subjacente 0,75			Beta Subjacente 1,00			Beta Subjacente 1,25		
	TT	RUC	SW	TT	RUC	SW	TT	RUC	SW
60%	3,63%	3,76%	11,06%	3,57%	3,78%	11,87%	3,63%	3,87%	423,20%
70%	3,55%	3,65%	104,34%	3,56%	3,65%	9,65%	3,67%	3,84%	23,40%
80%	3,58%	3,63%	572,24%	3,59%	3,66%	13,14%	3,60%	3,71%	15,07%
90%	3,55%	3,59%	39,29%	3,61%	3,66%	10,48%	3,61%	3,61%	10,95%
100%	3,56%	3,56%	8,37%	3,62%	3,62%	18,10%	3,58%	3,58%	39,27%

A construção do intervalo de confiança da tabela 3B considerou que as distribuições dos betas para as diversas séries de 10.000 casos são distribuições normais. O teste Kolmogorov-Smirnov não rejeitou a hipótese da normalidade a 10% para a maioria das séries exceto para: (a) as séries de betas estimados com periodicidade mensal pelo método SW (valor p de 0%); (b) a série de betas estimados com periodicidade diária pelo método SW com beta subjacente 0,75 e 70% de dias com negociação (valor p de 6,9%); (c) a série de betas estimados com periodicidade mensal pelo método TT com beta subjacente 1,25 e 80% de dias com

negociação (valor p de 3,0%); (d) a série de betas estimados com periodicidade mensal pelo método RUC com beta subjacente 1,25 e 80% de dias com negociação (valor p de 5,4%); e (e) a série de betas estimados com periodicidade mensal pelo método TT com beta subjacente 1,25 e 90% de dias com negociação (valor p de 9,2%).