ИГРОВАЯ КОНЦЕПЦИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ СО СЛУЧАЙНЫМИ ИСХОДАМИ

УДК 519.2+338.27

Виктор Александрович Власов,
д.т.н., профессор, проф. каф. Автоматики (НИЯУ МИФИ)
Тел.: 8 (495) 343-96-22
Эл. почта: vlasov1941@yandex.ru

Сергей Иванович Алексеев,
к.т.н., доцент, зав. каф. Естественнонаучных, математических и общетехнических дисциплин (ЕАОИ)
Тел.: 8 (495) 434-08-49
Эл. почта: SAlekseev@eaoi.ru

Раиса Ивановна Сорока,
доцент, каф. Математического обеспечения информационных систем и инноватики (МЭСИ)
Тел.: 8 (495) 442-80-98
Эл. почта: RSoroka@mesi.ru

Андрей Олегович Толоконский,
к.т.н., доцент каф. Автоматики (НИЯУ МИФИ)
Тел.: 8 (495) 321-40-75
Эл. почта: toloconne@yandex.ru

Рассматривается дискретный (игровой) процесс многократного принятия решений, состоящий из последовательности различных независимых туров. В каждом туре результат тура является случайным. Выявляется оптимальная игровая стратегия.

Ключевые слова: *прогнозирование значений случайных величин, вероятностные модели, показатели качества, цель прогнозирования, критерии оптимальности, игровая стратегия, оптимальное решение, риски.*

Victor A. Vlasov,
PhD in Technical Sciences, Professor of the Department of Automation; National Research Nuclear Center Moscow Engineering-Physical Institute (MEPhI)
Tel.: 8 (495) 343-96-22
E-mail: vlasov1941@yandex.ru

Sergey I. Alexeev,
PhD in Technical Sciences, Professor; the Head of the Department of Natural-science, mathematical science and general technical disciplines, Eurasian Open Institute (EAOI)
Tel.: 8 (495) 434-08-49
E-mail: SAlekseev@eaoi.ru

Raisa I. Soroka,
Associate Professor of the Department of Mathematical software of information systems and innovations , Moscow State University of Economics, Statistics and Informatics (MESI)
Tel.: 8 (495) 442-80-98
E-mail: RSoroka@mesi.ru

Andrew O. Tolokonski,
PhD in Technical Sciences, Professor of the Department of Automation; National Research Nuclear Center Moscow Engineering-Physical Institute (MEPhI)
Tel.: 8 (495) 321-40-75
E-mail: toloconne@yandex.ru

GAME CONCEPT OF DECISION MAKING IN ECONOMIC CHALLENGES WITH RANDOM OUTCOMES

This article considers discrete (game) multiple decision-making process, which consists of a sequence of independent tours. In each round of the tour the results are of chance. The article identifies best game strategy.

Keywords: *forecasting of random processes, probabilistic models, quality indicators, the purpose of forecasting, optimality criteria, game strategy, the optimal solution, risks.*

1. Введение

Имеется много примеров игровых экономических ситуаций, когда приходится выбирать решения (стратегии): это множество различных деловых и азартных игр, задачи распределения средств (например, формирование портфелей ценных бумаг) и т.д. [1,2].

Обычно, игровой процесс состоит из последовательности (или множества) туров. Задача игрока заключается в получении максимального дохода при многократном участии в играх. Можно рассмотреть и множество различных игр, которые имеют различные правила. В таком случае игрок, участвующий во множестве различных игр, также должен стремиться получить в итоге максимальный доход.

2. Стратегия поиска оптимальных решений

Рассмотрим случай игр со многими турами. Будем считать, что экономический итог S_i в каждом i туре игр является случайной величиной, а S_i характеризуется известной плотностью распределения $p_i(x)$. Тогда суммарный итог $S = \sum_{i=1}^{N} S_i$ от всех N туров и средняя величина суммарного итога $\bar{S} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} S_i$ также являются случайными величинами. Пусть дисперсии $\sigma^2[S_i]$ каждой из случайных величин S_i ограничены максимальным значением σ_m^2. В условиях независимости всех случайных величин S_i (игровые туры происходят независимо друг от друга) дисперсия среднего значения суммарного итога равна $\sigma^2[\bar{S}] = \frac{\sum_{i=1}^{N}\sigma^2[S_i]}{N^2}$. Поэтому справедливо неравенство: $\sigma^2[\bar{S}] \le \frac{N\sigma_m^2}{N^2} = \frac{\sigma_m^2}{N}$. Величина $\sigma^2[\bar{S}]$ стремится к нулю при неограниченном увеличении N. В этих условиях следует стремиться к максимизации среднего значения суммарного итога. Понятно, что для этого в каждом туре следует выбирать решение, приводящее к наибольшему математическому ожиданию $M[S_i]$. Такая простая стратегия при больших N реально обеспечит максимальный суммарный итог S [3].

Стремление к нулю дисперсии среднего значения $\bar{S} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} S_i$ при увеличении N есть известный результат математической статистики, заключающийся в том, что среднее значение случайных величин определяется тем точнее, чем больше независимых выборочных значений применяется для его оценивания [4].

Может показаться, что этот вывод недостаточно обоснован, поскольку, если N стремится к бесконечности, то, как математическое ожидание суммарного итога, так и его дисперсия одновременно стремятся к бесконечности. Однако, это сомнение может быть отклонено с помощью следующих рассуждений. Согласно центральной предельной теореме закон распределения суммарного дохода тем ближе к нормальному закону, чем больше число N слагаемых, причем $M[S]=\sum_{i=1}^{N} M[S_i]$ и $\sigma^2[S]=\sum_{i=1}^{N}\sigma^2[S_i]$. Пусть $\varepsilon > 0$ любое малое число. Тогда вероятность P_ε того, что относительное отклонение величины S, равное εS, от математического ожидания $M[S]$ стремится к нулю при увеличении N для любых сколь угодно малых значениях ε. Действительно, имеют место соотношения

$$P_\varepsilon = F\left(\frac{M[S]-M[S]\varepsilon - M[S]}{\sigma[S]}\right) \le$$
$$\le F\left(\frac{-M[S]\varepsilon}{\sigma_m\sqrt{N}}\right) \le F\left(\frac{-\varepsilon\tilde{m}N}{\sigma_m\sqrt{N}}\right) =$$
$$= F\left(\frac{-\varepsilon\tilde{m}\sqrt{N}}{\sigma_m}\right), \qquad (1)$$

где $\tilde{m}$ – наименьшее из всех m_i, $F(u)$ – символ функции Лапласа, характеризующей функцию распределения нормально распределенной случайной величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Величина P_ε стремится к нулю по мере увеличения N, поскольку значение аргумента, равного $\frac{-\varepsilon\tilde{m}\sqrt{N}}{\sigma_m}$, при этом стремится к минус бесконечности. Поэтому вероятность относительного, даже очень малого, значения отклонения S величины от своего математического ожидания $M[S]$ становится очень малой при достаточно больших N.

Поскольку при любых ситуациях, требующих выбора решения в условиях случайного характера экономического исхода, следует стремиться к максимизации среднего значения итога, то сформулированная выше стратегия (правило выбора оптимального решения) является достаточно универсальной.

3. Задачи поиска оптимальных решений

Обсудим правило выбора решений в известной стохастической задаче формирования портфеля ценных бумаг, где имеется риск получения убытков. Эта задача имеет следующую постановку [1,2].

Требуется распределить имеющиеся средства объемом K на составляющие $x_1, x_2, ..., x_n$, каждая из которых означает величину вклада средств в соответствующую статью расходов (например, покупку бумаг определенного вида). При этом окончательный экономический итог R рассчитывается по формуле

$$R=\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i, \qquad (2)$$

где коэффициенты β_i означают эффективность вложения средств в каждую статью расходов с номером i (например, во сколько раз подорожает соответствующая ценная бумага).

Если коэффициенты $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ являются случайными, то величина R, как функция от них, также случайна. Можно говорить о вероятности P наступления неблагоприятного события, например: $R < K$, то есть ожидания возможности убытков. В такой вероятностной постановке считаются известными математические ожидания $M[\beta_1]$ коэффициентов $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ и, при необходимости, другие сведения о законах распределения этих величин (например, дисперсии).

На составляющие $x_1, x_2, ..., x_n$ могут быть наложены ограничения (обычно линейные).

Если коэффициенты $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ являются не случайными, то при наличии линейных ограничений на величины $x_1, x_2, ..., x_n$ максимальное значение величины R легко находится методами линейного программирования (решается детерминированная задача). Когда же $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ – случайные величины, то возникают особенности при принятии решения, то есть выбора величин $x_1, x_2, ..., x_n$. Особенность, например, может заключаться в том, что при принятом решении вероятность получения убытков оказывается недопустимо высокой. В этом случае рекомендуется для каждого выбранного среднего значения $M[S]$ (фактически это еще одно линейное ограничение на величины $x_1, x_2, ..., x_n$ вида $M[R]=\sum_{i=1}^{n}M[\beta_i]x_i$) искать оптимальные значения переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, при которых вероятность выполнения неравенства $R < K$ будет минимальной и приемлемой.

Эту вероятность связывают с величиной риска (обозначают символом Var [1,2]).

Следует заметить, что каждое дополнительное ограничение на искомые переменные сокращает область допустимых значений переменных и может быть причиной исключения оптимальной точки из рассмотрения (это очевидно, например, если рассматривается детерминированная задача распределения средств, то есть при неслучайных значениях коэффициентов $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$). Кроме того, использование величины Var имеет ряд других недостатков [6]:

- не совсем ясно, как выбрать окончательно среднее значение $M[R]$, и, соответственно, на каком значении вероятности получения убытков следует остановиться (то есть решение задачи выбора окончательного единственного решения $x_1, x_2, ..., x_n$ не формализовано и оставлено на интуицию владельца средств);
- каким бы ни было принято значение вероятности P наступления неблагоприятного события, всегда остаются риски получения больших убытков (хотя и с меньшей вероятностью);
- не рассматриваются такие рисковые ситуации, при которых не получается желаемый (достаточно большой) выигрыш, то есть не учитываются возможности получения больших экономических итогов;
- если случайные величины $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ зависимы, то приходится вести громоздкий анализ их закона распределения;
- при зависимых величинах $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ поиск решения $x_1, x_2, ..., x_n$ для выбранного значения $M[P]$ приходится проводить с применением громоздких алгоритмов квадратичного программирования (даже при использовании только их корреляционных моментов);
- имеются и другие недостатки [6].

Главной причиной всех этих недостатков является попытка применения вероятностных методов к решению разовых вероятностных задач, повторения которых реально может и не быть. Эта причина заключается в том, что вероятностные закономерности проявляются при большом числе повторяющихся однотипных ситуаций. Например, при небольшом числе бросаний несимметричного игрального кубика не удается точно определить вероятности выпадения различных чисел (понятно, что это вообще невозможно при реализации всего одного бросания). В теории вероятностей есть соответствующий закон больших чисел, согласно которому наблюдаемая в опытах частота появления случайного события близка к вероятности события при большом числе испытаний [6].

4. Формирование оптимальной игровой стратегии

В данной работе рассматривается возможность устранения упомянутых недостатков на основе формирования оптимальной игровой стратегии в условиях, когда приходится принимать решения в большом числе различных игровых ситуаций. Рассуждения ориентированы, в частности, на анализ известной задачи формирования портфеля ценных бумаг.

Согласно предлагаемому алгоритму для каждого выбранного значения $M[R]$ ищется оптимальное значение величин x_1, x_2, ..., x_n, при которых дисперсия величины R является минимальной. Это обеспечивает минимальную вероятность P_r неблагоприятного события: $R < R_\partial$, где R_∂ – выбранная неслучайная величина (обычно, она выбирается исходя из определения неблагоприятного события). Чтобы избавить владельца средств от необходимости выбора окончательного решения (это либо $M[R]$, либо P_r) из множества возможных решений обратимся к процедуре оценивания случайной величины ξ при заданной плотности $p_\xi(x)$ ее распределения [6,7]. Сущность этой процедуры состоит в следующем. Какое бы не было выбрано прогнозное значение q для непрерывной случайной величины, вероятность нулевой ошибки прогноза равна нулю. Поэтому вводится вес (например, стоимость) ошибки $\varphi(\xi - q)$ и величина q находится из условия минимума среднего веса $M[\phi] = \int \phi(x-q)p_\xi(x)dx$ ошибки. Это условие может быть записано в виде

$$\frac{dM[\phi]}{dq} = 0. \qquad (3)$$

Пусть совместная плотность распределения величин β_1, β_2, ..., β_n равна $p_\beta(y_1, y_2, ..., y_n)$.Тогда, как бы ни были выбраны значения величин x_1, x_2, ..., x_n, закон распределения окончательного итога R (это функция от случайных величин β_1, β_2, ..., β_n) будет зависеть от x_1, x_2, ..., x_n как от параметров, то есть $p_R(u, x_1, x_2, ..., x_n)$, где u – аргумент плотности распределения. Учитывая, что оцениванию подлежит величина R, выберем в качестве функции веса ошибки выражение

$$\tilde{\phi}(R-K) = \lambda(R-K), \qquad (4)$$

где λ – вещественное число.

Теперь среднее значение ошибки оценивания величины R, задаваемое выражением (4) равно

$$M[\tilde{\phi}(R-K)] = \\ = \int \lambda(u-K)\,p_R(u, x_1, x_2 ..., x_n)du. \qquad (5)$$

Пользуясь свойством линейности интеграла (5) и учитывая, что $\int p_R(u, x_1, x_2, ..., x_n)du = 1$ при любых значениях величин $x_1, x_2, ..., x_n$, получим

$$M[\tilde{\phi}] = \lambda(M[R]) - K). \qquad (6)$$

где $M[R]$ зависит от величин x_1, x_2, ..., x_n как от параметров.

На основе анализа выражения (6) можно заключить, что при $\lambda > 0$ среднее значение ошибки оценивания величины R следует выбирать максимальным. Это приведет к достижению наибольшего значения $M_m[R]$ величины $M[R]$.

Поскольку справедливо равенство $M[R] = \sum_{i=1}^{n} x_i M[\beta_i]$, то для принятия оптимального решения следует использовать только значения $M[\beta_1]$ и ограничения на переменные x_1, x_2, ..., x_n. Если эти ограничения являются линейными, то оптимальные значения величин x_1, x_2, ..., x_n, которые и составляют цель выбора оптимального решения, находятся методами линейного программирования. Если ограничения носят нелинейный характер, то в силу ограниченности области допустимых решений оптимальные значения переменных могут находиться на границе этой области. В этом случае их следует искать методом неопределенных множителей Лагранжа.

5. Заключение

Уместно заметить, что подходы, связанные с выбором оптимальной стратегии игры, применяются, например, при реализации матричных игр, когда формируется оптимальная смешанная стратегия. Сущность ее состоит в выборе чистых стратегий с определенными вероятностями. Понятно, что реализация любой смешанной стратегии, в том числе и оптимальной, предполагает большое число туров игры.

Поиск оптимального решения может быть значительно более трудоемким, если функция веса ошибок имеет более сложный вид по сравнению с выражением (4). Однако, введение другого вида функции веса ошибок требует дополнительного обоснования. Выражение (4) имеет простой смысл: на сколько рублей ошибся при прогнозе, столько рублей и заплати (или получи), а коэффициент λ можно трактовать, например, как переводной от одних денежных единиц к другим.

Следует отметить, что отклонение от оптимальной стратегии в процессе участия в большом числе игровых туров приведет к снижению суммарного итога. Причиной такого отклонения может являться использование ограничений на допустимое значение величины риска – Var (если придется применять условие $M[R] < M_m[R]$). Это не позволит в полной мере реализовывать оптимальную игровую стратегию и является неоправданным при участии в большом числе различных игровых туров [8,9]. Поэтому использование этого ограничения можно рассматривать как волевое административное решение, которое направлено на защиту владельца средств при его участии в единственном туре игры (когда, вообще говоря, вероятностные методы применять нет оснований).

Литература

1. Первозванский А. А., Первозванская Т. Н. Финансовый рынок: расчет и риск. М.: Инфра-М, 1994.
2. Роберт В. Колб, Рикардо Дж. Родригес. Финансовый менеджмент. М.: Финпресс, 2001.
3. Власов В. А. Игровой подход к задаче распределения средств. Научная сессия НИЯУ МИФИ-2013, том 3, М, 2013.
4. Уилкс С. Математическая статистика: пер. с англ. М.: Наука, 1967.
5. Королюк В.С., Портенко Н. И., Скороход А. В., Турбин А. Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука,1985.
6. Власов В. А. Оценки, решения, риски. М.: БИНОМ, 2012.
7. Власов В.А. Статистический контроль состояния объектов с распределенными параметрами. М.: МИФИ, 1987.
8. Власов В.А., Власов С.В., Алексеев С.И., Сорока Р.И. Var и оптимальная стратегия инвестирования в банке // Деньги и кредит. Теоретический, научно-практический журнал. – М.: Центральный банк Российской Федерации. №8 / 2013.
9. Власов В.А., Алексеев С.И., Сорока Р.И., Толоконский А.О. Прогнозирование и принятие решений с применением законов распределения случайных экономических показателей // Экономика, статистика и информатика. Вестник УМО МЭСИ: Научно-практический журнал. – М.: МЭСИ, №2 /2013.

References

1. Pervozvanski A.A., Pervozvanskaya T.N. The financial market: the calculation of the risk. M.: Infra-M, 1994.
2. Robert W. Kolb, Ricardo J. Rodriguez. Financial management. M. Finpress. 2001.
3. Vlasov V.A. Game approach to the problem of resource allocation. Scientific session MEPhI 2013, Volume 3, M, 2013.
4. Wilkes S. Mathematical Statistics: trans. from English. M.: Nauka, 1967 .
5. Korolyuk V. S., Portenko N. I., Skorokhod A. V., Turbin A. F. Handbook on probability theory and mathematical statistics. M.: Nauka, 1985.
6. Vlasov V.A. Assessment, decisions, risks. M.: BINOM, 2012.
7. Vlasov V.A. Statistical monitoring of the status of objects with distributed parameters. M.: MIFI, 1987.
8. Vlasov V.A., Vlasov S.V. , Alekseev S.I. , Soroka R.I. Var and optimal investment strategy in the bank. // Dengi i kredit. Teoreticheskij, nauchno-prakticheskij zhurnal. – M.: Centralnyj bank Rossijskoj Federacii. №8 / 2013.
9. Vlasov V.A., Alekseev S.I. , Soroka R.I., Tolokonski A.O. Forecasting and decision-making via use of statistical laws of random economic indicators. // Ekonomika, statistika i informatika. Vestnik UMO MESI: Nauchno-prakticheskij zhurnal. – M.: MESI, №2 /2013.