

# 数表記知識獲得の基礎としての子どもの数学的理解

古池 若葉  
(児童学科准教授)

## 要約

書字や描画などの表記活動の発達については、1990年代以降、それぞれ他のシンボル表記体系と広く関連づけながら研究されるようになり、領域に固有な知識や共通性の解明を目指す「知識」の観点から新たに捉え直されるようになってきた。書字と描画についてはこうした観点からの知見の積み上げがなされつつあるが、数表記についてはまだ研究が少なく、また領域的知識として子どもが有する数概念、数学的理解についても研究者間で見解に相違が見られる。そこで、本稿では、今後数表記活動の発達を領域的知識から表記活動への写像原理の観点から検討する上で基盤となる、数概念、あるいは数学的理解に関する見解を整理したい。具体的には Bryant & Nuñez (2011) と Tolchinsky (2003) のそれぞれによる数学的理解の発達に関する概観を紹介しながら、両者の共通点、相違点を整理し、数表記知識の獲得と数概念・数学的理解の関係性について考察した。

## 目次

1. はじめに
2. Bryant & Nuñez (2011) による子どもの「数学的理解」  
—数詞の使用は基数性の理解に先行し、数詞の意味の理解は基数性の理解より遅れる—
  2. 1 乳児の馴化実験に基づく生得性の主張への批判、および「関係」の無視への批判
  2. 2 Carey (2004) の理論における「教育の必要性」、および数詞の学習の意

## 義についての評価

2. 3 Piaget の保存研究からの示唆—量の保存理解と数詞の理解の独立性について—
3. Tolchinsky (2003) による子どもの「数概念」  
—ナンバー・センスによる概算を超えるために、文化的数システムの学習が必要。また、ナンバー・センスが数システムの学習を支える—
4. 数表記知識における両知見の示唆
  1. はじめに

書字、描画、数字などの表記活動の発達については、1990年代以降、それぞれ他のシンボル表記体系と広く関連づけられながら研究されるようになってきた（たとえば、Tolchinsky, 2003）。山形（2009）は、近年のシンボル表記体系の研究を概観し、1990年代以降に登場した新たな研究の動向として、文字領域における構成要素や構成要素間の関係、これらの構成要素の意味ならびに指示する対象との関係に関する特徴の理解を知識内容として取り上げ、領域に固有な知識や共通性の解明を目指す観点、すなわち知識の観点から捉え直す新しい展開が見られる、と述べている。

表記活動を知識の観点からとらえ直す視点として、表記の指示対象の属性を表記の属性に写像する原理の獲得という観点から捉える考え方がある。たとえば、事物の諸属性（色、境界、表面など）を色、輪郭線、輪郭線内部の塗りこみに写像したものが描画表記であり、音声言語

におけることばの一音一音の分節性や時間的に展開されるという性質を、一つ一つ分節化された直線的なマークの配列に写像したものが書字表記である、といった写像原理を踏まえた視点である (Brenneman, Massey, Machado, & Gelman, 1996)。これまでの表記活動の発達の研究において、描画表記や書字表記についての実証研究の積み上げはあるが、数表記についてはまだ着手されたばかりである (たとえば, Teubal, Dockrell, & Tolchinsky, 2007)。

写像原理の観点から数表記(数字)を捉えた場合、数表記に写像されるソースとなる知識領域は、数概念や数学的理解であると考えられる。しかしながら、幼児期における数概念や数学的理解についての見解は、研究者によって様ではない。数学的理解の発達に関する研究者の中にも、生得的な数に関するセンスを強調する立場もあれば、社会・文化における数システムの教授・学習の重要性を強調する立場もある。

そこで、本稿は、今後数表記活動の発達を写像原理の観点から検討する上で基盤となる、数概念、あるいは数学的理解に関する見解を整理することを目的とする。まず、子どもの数学的理解に関する発達の研究を概観した Bryant & Nuñez (2011) の見解を紹介し、次に、数表記の発達と関連づけながら数概念の発達の研究を概観している Tolchinsky (2003) の見解を紹介する。最後に、両者の共通点、相違点を整理し、数表記知識の獲得と数概念、数学的知識の関係性について考察したい。

## 2. Bryant & Nuñez (2011) による子どもの「数学的理解」

—数詞の使用は基数性の理解に先行し、数詞の意味の理解は基数性の理解より遅れる—

Bryant & Nuñez (2011) は、数学的知識の源泉として(1)フォーマルな教育、(2)インフォーマルな経験、(3)生得的な数の理解の3つを指摘し、近年の乳児を対象とした数理解の発達研究が(3)のみを強調していることについて批判し、(1)のフォーマルな教育の意義について主張している。また、子どもの数学的理解に関する近年

の発達心理学的研究において、Piaget (1952) が強調していた数的な関係 (numerical relations) の理解が無視されてきたことについても批判し、子どもの数学的理解の発達において数的な関係の理解を検討することの意義について再評価を行っている。以下では、彼らの主張のポイントについて紹介したい。

### 2. 1 乳児の馴化実験に基づく生得性の主張への批判、および「関係」の無視への批判

Piaget (1952) および Thompson (1993) は、数学的理解において、数、量、関係(複数の数や量の間の関係のこと)が重要であることを強調している。それにもかかわらず、近年の数学発達に関する研究(たとえば、Gelman & Gallistel, 1978; Starkey & Cooper, 1980)が関係の側面を無視していると Bryant & Nuñez は批判している。すなわち、Starkey & Cooper (1980) は馴化実験を用いて、4か月児が4より小さい数を区別していることを報告しており、この事実を確認するその後の研究報告も多い。しかし、これらの実験では、乳児は数を区別しているのではなく、連続的な量(物体やその輪郭が占める空間の総量のようなもの)を区別しているのだという。Clearfield & Mix (1999) はこの仮説を検証する実験を行っており、乳児は物体の数が馴化前後で変わらないときも、物体の総量の変化に反応しているという、上記の仮説を支持する結果を報告している。また、Starkey & Cooper の実験は、Piaget と Thompson が強調した数的な関係を検討しておらず、単一量の検出の検討にとどまっている点も批判している。

また、序数の理解についても乳児を対象とした馴化実験が行われており、11か月児が先に昇順(または降順)で提示された3枚のカードとは逆順に提示されたカードをより好んで見ていたことから、序数がある程度理解していると報告されている (Brannon, 2002)。しかし、この結果についても、乳児が「より多い」と「より少ない」の関係にある程度気づいていることを示してはいても、各系列における3つの量の全

ての間の関係を理解していることを立証しておらず、序数性を理解するためには、 $A > B > C$ の系列において、 $B < A$ 、かつ同時に $B > C$ ということを理解していなければならないと批判している。

さらに、計数 (counting) の研究については、カウントの仕方を知っているだけで、その知識が量的関係にしっかりと結びついていなければ、計数の知識は、数学上あまり重要ではないという立場を Bryant & Nuñez はとっている。他方、Gelman & Gallistel (1978) を代表とする計数研究は、量的な関係を考慮せずに子どもの計数システムの理解を検討していると指摘されている。Gelman & Gallistel は子どもが正しく計数できるために必要な5つの原理として、(1)一対一対応の原理、(2)安定した順序の原理、(3)基数性の原理、(4)抽象の原理、(5)順序無関連の原理を挙げているが、(1)~(3)が計数に関係している。Gelman & Gallistel は2歳から5歳の子どもが、2~19の数の異なる1つの集合のモノをうまく数えていたことから、小さな数の集合については、幼児が5つの原理を考慮しているらしいと報告している。しかし、Bryant & Nuñezによれば、基数性とはある数のモノの集合 (ex. 3つのリンゴ) が、同じ数の他のモノの集合 (ex. 3枚の皿) と量において同じである、という原理であり、集合間の関係についての原理である。その意味で、Gelman & Gallistel の研究は集合間の関係を扱っていないので、基数性の理解を十分に検討していないと批判されている。

## 2. 2 Carey (2004) の理論における「教育の必要性」、および数詞の学習の意義についての評価

Carey (2004) の研究については、Bryant & Nuñez は子どもの基数性の理解の測定が不十分であることを指摘しつつも、Carey が3歳までの幼児が少なくとも2つの異なる方法で数を表象しているという理論 (①アナログシステム、②並列的個体化 (parallel individuation) システム) に基づいてカウンティングの発達を説明している点では評価している。

Le Corre & Carey (2007) は、3歳になるまでの幼児は、少なくとも2つの異なる方法で数を表象していると主張している。その1つは「アナログ・システム」であり、乳児は不正確だが強力なアナログ・システムにアクセスする。それは、アイテムの数を表象するのに、そのシグナルとして大きさを用いるというものである (すなわち、数が大きいほど、シグナルも大きくなるというものである)。もう1つのシステムは、「並列的個体化システム」であり、子どもはこれによって計数システムについて学ぶことができる。このシステムによって、乳児はごく小さな数を (アナログ・システムとは異なり) 正確に認識し、表象することができる。

この2つのシステムによる計数の発達は、以下のように記述できる。(1)乳児は顕著な量として、1つからなる集合を認識する。「いち」ということばは最初は知らない。(2)1つのモノからなる集合と2つのモノからなる集合を区別して認識できるようになる。3-4歳までには、たいていの子どもが1, 2, 3のモノからなる集合を顕著な量として区別する。(3)同時に、子どもは数詞 (number words) も学び、正しい計数語 (count words) (「いち」「に」「さん」) を正しい量に関連づけるようになる。並列的な個体化 (parallel individuation) と計数リストの間の関連づけによって、Carey (2004) が呼ぶところの“bootstrapping” がもたらされる。すなわち、計数リストにおける数詞の変わることのない順序に助けられて、子どもは数の序数的な性質について学び始めるのである。(4)最終的に、子どもたちは、数詞は「さん」を超える顕著な量の連続体を表象するのだということを推論するようになる。Carey (2004) は、この新たな理解を「豊かな並列的個体化」 (“enriched parallel individuation”) と呼んでいる。Carey は「Give a number」課題 (子どもにある特定の数のモノをとらせる課題) によってこれらの主張を検証しており、その結果、3, 4, 5歳児たちが「one-knowers」「two-knowers」「three-knowers」「計数原理knowers」に分類できることを示している。

Careyによる「Give a number」課題は、カウントした最後の数とその集合の数とわかるという基準を採用していることから、子どもの基数性の理解を完全には測定していないとBryant & Nuñezは指摘している。しかし、この研究が計数における興味深い発達を示している点は評価している。

また、数詞という、数の概念を表す音声言語的なシンボルが子どもの計数の発達を促すというCareyの主張は、表記発達を考える上でも注目すべき視点である。

### 2. 3 Piagetの保存研究からの示唆—量の保存理解と数詞の理解の独立性について—

Bryant & Nuñezは、Piagetが幼児が保存課題に失敗する現象について、幼児の計数は子どもが意味を理解せずにことば(words)を用いている例の1つとして捉えている点に注目し、保存課題の再検討を行っている。子どもの数学的理解に関するPiagetの理論は、保存、推移律、系列化の実験に基づいている。保存の実験において、就学前の子どもが一对一対応を理解していないことから、就学前児は基数性を理解していないと考えられる。また、系列化と推移律の実験において、子どもは一連の関係をとり扱うことができない(すなわち、 $A > B$ ,  $B > C$ ならば $A > C$ という推論ができない)ことから、彼らは数の系列(number sequence)を昇順の大きさとして理解することができない(すなわち、序数性が理解できない)と考えられる。

Greco (1962)が行った保存研究は、数詞に関する子どもの使用と理解を直接扱っており、興味深い。Grecoは、4-8歳児を対象に、3つの異なるタイプの数の保存課題を行った:(1)伝統的な保存問題、(2)一方の集合を変化させた後で、子どもに2つの集合のうち1つを数えさせ、その後で2番目の集合の数を推論させる。(3)一方の集合を変化させた後で、両方の集合を数えさせ、その後でそれらの量が等しいかを尋ねる。その結果、6歳より幼い子どものほとんどは、3つの課題全てに失敗しており、3番目の課題で、最後に両方の集合を数え、同じ数

だったにもかかわらず、より広がった集合の方が物の数が多いと言っていた。PiagetとGrecoによれば、このことは、子どもがその数詞(ex.「はち」)の意味を本当は知らないことを意味する。もう1つの興味深い結果は、もう少し年上の子どもが、第1の課題に失敗し、第2の課題に正答したことであり、彼らは、1つの集合のモノを拡げることによって、その量が変わったと判断するが、その数は変わらないと判断したのである。

Piagetは、幼児が保存課題において、それぞれの集合の個々の対応物を直線で結び付けて強調しているときにできえ、アイテムの数を比較するために一对一対応をすることができなかったことから、幼児は一对一対応を理解していないと主張している。しかし、4歳児でも2人以上の人の間で飴玉などを均等に分けることができることから、Bryant & Nuñezは、この結論に対しては慎重である。

Frydman & Bryant (1988)は、シングル/ダブル課題を用いて子どもの分配行動を検討している。同じ色のブロック(単体のもの、二連につなげたもの)を「チョコレート」に見立てて子どもに与え、2人の人の間で同じ数に分けるように求める課題を実施した。このとき、一方の人にはダブルのチョコレート、他方の人にはシングルのチョコレートを与えるよう、合わせて求めた。その結果、たいていの4歳児は均等に分けることに失敗した一方(ダブルを与えた人には、他方の人2倍の量を分配していた)、たいていの5歳児は均等に分けることができた(5歳児は、一方にダブルのチョコレートを与えたら、すぐに他方にシングルを2つ与える方法で分けていた)。次に、4歳児を対象に、一对一対応を強調するために、異なる色のブロック(ダブルの「チョコレート」は青と黄色からなり、シングルは青と黄色が等数ずつ用意された)を用いて、同様の課題を実施した。その結果、ほとんどの4歳児はこの問題を解くことができ、しかもこの経験の後、1色のみのブロックを用いた課題でも好成績を示した。したがって、4歳児でも、一对一の分配が等しい

量をもたらす理由についての基本的な理解はできていると結論できる。したがって、数の基数性についての基本的な理解をしていると考えられる。

他方、Frydman & Bryant は、4歳児がこの理解を数詞についても示すかどうかを検証するために、均等に分けることが上手な4歳児グループを対象に、「スイーツ」に見立てたブロックを2人の間で均等に分けるよう求めた。その際、子どもが分けた後で、実験者が一方のスイーツの数を声に出して数えた後で、もう一方の人にはいくつあげたかを子どもに尋ねた。その結果、正しい推論を即座にできた子どもは皆無であり、全員が2番目の人のスイーツを数えようとした。実験者がそれを制止して同じ質問をすると、正しい推論ができたのは半数足らずであった。このことから、幼児は分配において数の基数性を理解しているが、はじめはこの理解を数詞に適用していないと Frydman & Bryant は結論づけている。

Bryant らは、子どもは計数の意味を本当に知るようになる前に、また、一対一対応の論理を数詞に適用するようになる前に、カウントすることを学んでいること（すなわち、数詞を学び、それらに慣れ親しんでいること）に注目している。しかしながら、数詞の知識と数学的知識の獲得との間の関係について積極的な仮説は提示していない。本稿の2.2において、数詞の学習に支えられて計数発達が促進されるという Carey (2004) の仮説に触れた。Frydman & Bryant の上記の報告は、計数という音声言語的な数概念の表現と基数性の理解が乖離していることを示している。両者がどのようなプロセスでつながっていくのかを明らかにすることが今後の検討課題である。

### 3. Tolchinsky (2003) による子どもの「数概念」

—ナンバー・センスによる概算を超えるために、文化的数システムの学習が必要。また、ナンバー・センスが数システムの学習を支える—

Tolchinsky は、Piaget が子どもの数の理解のプロセスにおいて、論理的思考のみを重視し、計数や声に出して数唱するなどの活動を軽視していたことを問題視している。この視点は、Bryant には見られない指摘である。Piaget が考案した保存課題に見られる数の等価性 (numerical equivalence) の保存は、数概念にとって必須と見なされる。Piaget は、対応づけや等価性の進展において言語的な要素が何の役割も果たしていないと考えていた (Piaget & Szmeniska, 1941/1967)。他方、Tolchinsky は、言語 (数詞の名前) や表記システム (written system) が数概念の発達に果たす役割を主張している。

Tolchinsky は、乳児を対象とした研究を紹介しながら、小さい数の集合についてのみ、乳児は提示された異なる数のアイテム (たとえば、3個のドットと4個のドット) の違いに気づいていることを指摘している。乳児が数について示すことは全て、4つのアイテムよりも少ない集合に限られている。この能力は、subitizing または subitization と呼ばれる。Tolchinsky は、subitizing に関する理論として、Gallistel & Gelman (1992)、Dehaene (1997) のそれぞれの理論を紹介している。

Gallistel & Gelman (1992) によれば、subitize をするとき、人は常に全ての物を1つ1つ数えるが、それは非常に迅速にことばを用いずに行うという。つまり、プレバーバルな、あるいはノンバーバルな計数手続だという。他方、Dehaene (1997) は、迅速で継時的なモノの計数は存在せず、視界にある全てのモノは同時に、注意を必要とすることなく処理されると主張している。Dehaene らは、コンピュータシミュレーションによってこの仮説を検証しており、また、脳損傷患者に見られる神経心理学

的な証拠（4～6個のドットを瞬間提示されてもそれらを数えられないが、1～3個のドットは難なく数えられる）を示している。Gallistel & Gelman (1992) と Dehaene (1997) の両者は、生得的に数を把握するセンスを我々が持っているとは想定しており、Tolchinsky もこの考えを支持している。

さらに、Gallistel & Gelman (1992) と Dehaene (1997) らによれば、人間は上述したある種の数検出メカニズムだけでなく、内的累算器 (internal accumulator) を備えており、これによって数に関する情報を数量的に解釈していると仮定される。この累算器は、離散的な要素（数えられる要素）を大きさ（連続的なもの）に変換するものであり、Gallistel & Gelman (1992) は、乳児と人間以外の動物の両者における数的なプレパリアル・プロセスが「ヒストグラムの算数 (histogrammic arithmetic)」に似ているのではないかと提案している。増加と減少がヒストグラムの柱によってアナログ的に表象されるため、この表象ではいくつの要素が表象されているのかを正確に知ることは難しい。しかし、概算したり（ヒストグラムの複数の柱の量的な）違いを評価したりすることができる。

Tolchinsky は、人間が創造した音声言語的数システム (spoken numeration system) や表記的数システム (written numeration systems) という文化的な人工物は、これらの概算についてのより正確な表象をもたらすことができるかと主張している。subitizing に見られる数のセンスが数に関連する入力へと人間の注意を方向づけるのと同じように、それらの数システムは、総計、大きさ、量についての大人の語りへと子どもの注意を導くと想定しているのである。乳児は非常に早期から、こうした語りが適用される世界の側面を認識しており、こうした感受性が助けとなって、その他の言語的入力や視覚的入力の塊から音声言語的な数のメッセージや表記的な数のメッセージが選り出され、非常に早期から、これらのメッセージが世界の数量化可能な側面に関連づけられるというのが

Tolchinsky の仮説である。Tolchinsky によれば、この議論は以下のことを説明する助けとなっている。すなわち、子どもが表記的数システムを理解できるようになるまでの途上で、様々な形式のアナログ的な表象が繰り返し現れるであろうということである。数字 (numerals) について知っているという事実にもかかわらず、子どもは量を表象するのに直接数字を使わず、他の表象的な方略（より直接的なアナログ的な手段によって数の量的な意味を示す方略）を探ることになるというのである。

#### 4. 数表記知識における両知見の示唆

Bryant & Nuñez (2011) は、子どもの数学的理解の発達においては、まず計数という活動を通して、数詞が獲得され、その後保存課題における一対一対応に見られるように基数性が理解されるようになり、さらにそれに遅れて、一対一対応を数詞にも適用し、数詞の真の意味、すなわち、計数における数詞が基数的な性質を持つことの理解に至ると結論づけている。Bryant & Nuñez は明言していないが、この移行過程においては、Carey が言うように、計数語が重要な役割を果たしていることが想定される。

他方、Tolchinsky (2003) は、4より小さい数に対する生得的なナンバー・センスの存在は認めつつも、ナンバー・センスによる概算という限界を超えた正確な数の表象のために、文化的数システムの学習、すなわち数詞や数表記が助けとなることを想定している。また、数表記知識の発達については、数字に代表される正規の表記ではなく、数のアナログ的な表象を外化するための、多様な表象的方略を検討すべきであることを指摘している。

以上を踏まえれば、数表記の発達を検討する上では、ソースとなる知識領域として、数の関係性も視野に入れた Piaget 流の数概念を想定するとともに、数概念のみならず、数詞、および基数性と数詞の乖離をも視野に入れながら、それらと数表記とがどのように関連しながら発達が進んでいくのかを検討していく必要がある

と結論づけることができる。

引用文献

- Brannon, E. M. (2002). The development of ordinal numerical knowledge in infancy. *Cognition*, **83**, 223–240.
- Brenneman, K., Massey, C. Machado, S. E., & Gelman, R. (1996). Young children's plans for writing and drawing. *Cognitive Development*, **11**, 397–419.
- Bryant, P., & Nuñez, T. (2011). Children's understanding of mathematics. In U. Goswami (Ed.), *The Wiley-Blackwell handbook of childhood cognitive development*. WILEY-BLACKWELL. pp. 549–573.
- Carey, S. (2004). Bootstrapping and the origin of concepts. *Daedalus*, **133**, 59–69.
- Clearfield, M. W., & Mix, K. S. (1999). Number vs. contour length in infants' discrimination of small visual sets. *Psychological Science*, **10**, 408–411.
- Dehaene, S. (1997). *The number sense*. London : Penguin.
- Frydman, O., & Bryant, P.E. (1988). Sharing and the understanding of number equivalence by young children. *Cognitive Development*, **3**, 323–339.
- Gallistel, C. R., & Gelman, R. (1992). Preverbal and verbal counting and computation. *Cognition*, **44**, 43–74.
- Gelman, R., & Gallistel, C. R. (1978). *The child's understanding of number*. Cambridge, MA : Harvard University Press.
- Greco, P. (1962). Quantité et quotité : Nouvelles recherches sur la correspondance terme-a-terme et la conservation des ensembles. In P. Greco & A. Morf (Eds.), *Structures numeriques elementaires : Etudes d'epistemologie genetique* (Vol. 13, pp. 35–52). Paris : Presses Universitaires de France.
- Le Corre, M., & Carey, S. (2007). One, two, three, nothing more : An investigation of the conceptual sources of verbal number principals. *Cognition*, **105**, 395–438.
- Piaget, J. (1952). *The child's conception of number*. London : Routledge & Kegan Paul.
- Piaget, J., & Szmeniska, A. (1967). *La génesis del número en el niño* [The child's conception of number]. Buenos Aires : Guadalupe. (原典は1941年に公刊)
- Starkey, P., & Cooper, R. (1980). Perception of numbers by human infants. *Science*, **210**, 1033–1034.
- Teubal, E. L., Dockrell, J., & Tolchinsky, L. (2007). *Notational Knowledge : Historical and developmental perspectives*. Rotterdam / Taipei : Sense Publishers.
- Thompson, P. W. (1993). Quantitative reasoning, complexity, and additive structures. *Educational Studies in Mathematics*, **3**, 165–208.
- Tolchinsky, L. (2003). *The cradle if culture and what children know about writing and numbers before being taught*. Psychology Press.
- 山形恭子 (2009). 表記活動の発達 児童心理学の進歩 2009年版 金子書房 pp. 81–110.