

# Interaksi Jamur Parasit dengan Tumbuhan Perennial : Model Matematika dan Simulasi

F. Ilahi<sup>1, a)</sup>

<sup>1</sup>Jurusan Matematika, UIN Sunan Gunung Djati, Bandung, Indonesia 40614

<sup>a)</sup>email: fadilah.ilahi@uinsgd.ac.id

## Abstrak

Tumbuhan perennial adalah jenis tumbuhan yang hidup lebih dari dua tahun, biasanya berbunga pada saat musim semi dan musim panas. Tumbuhan ini dikenal juga sebagai super ras karena masa hidupnya yang panjang dan bersifat dominasi. Namun hal tersebut tidak terlepas dari serangan jamur parasit yang dapat menginfeksi bagian-bagian dari tumbuhan tersebut. Pada artikel ini, penulis mencoba merepresentasikan interaksi host-pathogen pada tumbuhan perennial. *Carrying capacity* jamur parasit proporsional terhadap *carrying capacity* tumbuhan perennial. Koeksistensi dan kestabilan dari kedua spesies di analisis menggunakan model persamaan diferensial biasa. Simulasi numerik ditampilkan untuk memberikan gambaran secara umum mengenai interaksi yang terjadi antara dua spesies tersebut. Hasil yang diperoleh menyimpulkan bahwa jamur parasit akan memperlambat laju pertumbuhan bahkan menyebabkan kematian pada tumbuhan perennial.

**Kata kunci** : perennial, parasit, *carrying capacity*, host-pathogen

## Pendahuluan

Tumbuhan perennial atau yang biasa disebut sebagai tumbuhan menahun seringkali dianggap sebagai super ras karena memiliki masa hidup yang lama dibandingkan tumbuhan lain. Umumnya tumbuhan ini tahan akan serangan dari luar, baik yang bersifat abiotik seperti perubahan suhu dan iklim, juga serangan yang bersifat biotik seperti jamur dan hama[1]. Namun tidak menutup kemungkinan seringkali jamur yang bersifat parasit hinggap di tumbuhan ini sehingga menyerang bagian-bagian tumbuhan seperti akar, daun, batang, dan buah.

Setelah hinggap pada tumbuhan dan menjadikannya sebagai inang, jamur-jamur ini selanjutnya akan menginfeksi bagian-bagian tersebut sehingga dapat memperlambat pertumbuhan pohon inangnya[2][3]. Dalam hal ini interaksi yang terjadi antara jamur parasit dan tumbuhan menahun bersifat simbiosis parasitisme atau merugikan salah satu pihak, dengan kata lain interaksi semacam ini bisa dikatakan sebagai interaksi host-pathogen[4][5]. Pada artikel ini, penulis mencoba membangun model interaksi antara jamur parasit sebagai pathogen dan tumbuhan menahun sebagai host. Model ini selanjutnya akan dianalisis secara matematis dan numerik sehingga dapat menggambarkan kondisi interaksi yang sebenarnya.

**Metode**

Dalam membangun model interaksi antara jamur parasit dan tumbuhan menahun diberikan beberapa asumsi tanpa mengabaikan faktor-faktor yang penting yang ada di alam. Model ini didasarkan pada fungsi logistik dimana *carrying capacity* jamur sebanding atau proporsional terhadap *carrying capacity* pohon menahun, sehingga jamur parasit ini diasumsikan bahwa sepenuhnya bergantung pada inangnya[6].

Beberapa asumsi yang dilakukan dalam menyederhanakan model diantaranya objek penelitian ini adalah satu pohon, bukan jumlah atau kesatuan dari pohon-pohon. Jamur yang menginfeksi tidak disebutkan jenisnya, sehingga model ini tidak dipengaruhi oleh sifat-sifat spesifik jamur. Bagian yang terinfeksi adalah batang utama pohon (central trunk) sedangkan bagian lainnya dianggap tidak berpotensi untuk terinfeksi (insusceptible). Jamur hanya menginfeksi pohon yang sudah berumur satu tahun atau lebih (pohon dewasa). Penyebaran penyakit dihitung berdasarkan luasan (biomass) dari batang utama, dengan dimensi satuan luas/hari. *Carrying capacity* jamur proporsional terhadap *carrying capacity* batang utama[6]. Adanya kematian pohon akibat terinfeksi jamur. Pohon akan dinyatakan mati jika jamur sudah menginfeksi lebih dari 80% dari *carrying capacity* batang utama.

Misalkan  $P$  menyatakan luasan batang utama dari pohon menahun, dan  $F$  menyatakan luasan jamur yang menginfeksi. Parameter  $\alpha, \beta, \eta$  secara berturut-turut menyatakan laju pertumbuhan intrinsik pohon pada saat  $t$ , laju interaksi antara batang pohon dan jamur parasit pada saat  $t$ , serta laju pertumbuhan intrinsik jamur pada saat  $t$ . Selanjutnya parameter  $K$  dan  $C$  berturut-turut menyatakan *carrying capacity* pohon dan *carrying capacity* jamur.

Berdasarkan asumsi yang telah dibuat, maka model matematika untuk interaksi ini adalah sebagai berikut:

$$\frac{dP}{dt} = \alpha P \left(1 - \frac{P}{K}\right) - \beta PF \tag{1}$$

$$\frac{dF}{dt} = \eta F \left(1 - \frac{F}{C}\right) \tag{2}$$

Sistem tersebut memiliki dua titik kritis ( $E(P, F)$ ) yaitu

$$E_1 = (0, K) \text{ dan } E_2 = \left(\frac{\alpha K}{\alpha + \beta CK}, \frac{C\alpha K}{\alpha + \beta CK}\right) \tag{3}$$

Selanjutnya kedua titik kritis tersebut akan diuji kestabilannya menggunakan matriks Jacobi dan nilai eigen. Secara umum, matriks Jacobi yang dihasilkan adalah sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} \alpha \left(1 - \frac{P}{K}\right) - \frac{\alpha P}{K} - \beta F & -\beta P \\ \frac{\eta F^2}{C P^2} & \eta \left(1 - \frac{F}{C}\right) - \frac{\eta F}{C P} \end{bmatrix} \tag{4}$$

dan persamaan karakteristik yang diperoleh secara umum adalah

$$\lambda^2 + \frac{\lambda(-\eta K C P + 2\eta K F - C P K \alpha + 2 C P^2 \alpha + C P \beta F K)}{C P K} + \frac{(\eta(3 F^2 \beta K + C P K \alpha - 2 C P^2 \alpha - C P F K \beta - 2 F K \alpha + 4 F P \alpha))}{C P K}$$

Dengan mensubstitusi setiap titik kritis kepada matriks Jacobi, maka nilai eigen untuk titik kritis pertama yaitu  $\lambda_1(E_1) = -\alpha$  dan  $\lambda_2(E_1) = \eta$  yang membuatnya tidak stabil. Sedangkan nilai eigen untuk titik kritis yang kedua adalah  $\lambda_{1,2}(E_2) = -A$  adalah stabil dengan

$$A = \frac{1}{2(\alpha + \beta CK)}$$

$$B = \eta\alpha + \eta\beta CK + \alpha^2 + \sqrt{\eta^2\alpha^2 + 2\eta^2\alpha\beta CK - 2\eta\alpha^3 + \eta^2\beta^2 C^2 K^2 - 6\eta\beta CK\alpha^2 + \alpha^4 - 4\beta^2 C^2 K^2 \eta\alpha}$$

dan syarat  $-2\eta\alpha^3 - 6\eta\beta CK\alpha^2 - 4\beta^2 C^2 K^2 \eta\alpha < 0$   
 atau  $\eta^2\alpha^2 + 2\eta^2\alpha\beta CK + \eta^2\beta^2 C^2 K^2 + \alpha^4 > 2\eta\alpha^3 + 6\eta\beta CK\alpha^2 + 4\beta^2 C^2 K^2 \eta\alpha$

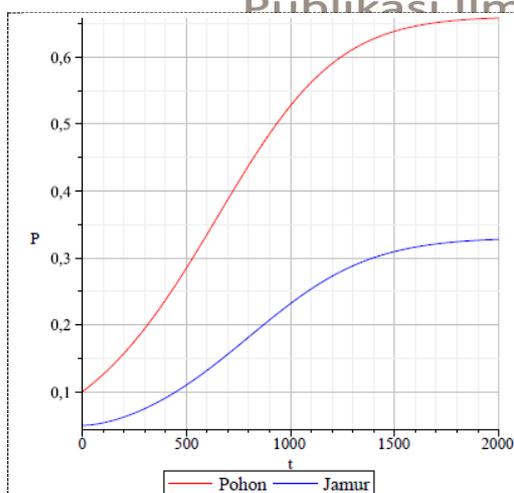
**Hasil dan Diskusi**

Hasil yang akan ditampilkan pada bagian ini berupa simulasi numerik dengan maksud memberikan kesesuaian antara hasil analisis dengan hasil simulasi[7]. Selain itu, simulasi numerik ditampilkan untuk mengetahui pola pertumbuhan dari dua spesies di atas. Simulasi ini dibantu oleh software MAPLE 13 yang meliputi simulasi dinamik, simulasi kestabilan titik kritis, dan simulasi analisis sensitivitas. Parameter yang dipilih untuk menjalankan simulasi tersebut akan ditampilkan pada Table 1.

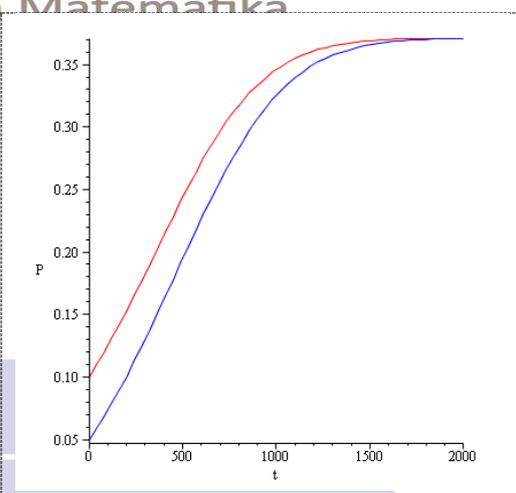
**Table 1.** Parameter yang dipilih untuk menjalankan simulasi numerik

Parameter	Deskripsi	Interval
$\alpha$	Laju pertumbuhan intrinsik pohon	$0 < \alpha < 1$
$\beta$	Laju interaksi antara jamur dan pohon	$0 < \beta < 1$
$\eta$	Laju pertumbuhan intrinsik jamur	$0 < \eta < 1$
$K$	Carrying capacity batang pohon	$K > 0$
$C$	Carrying capacity jamur parasit	$C > 0$

Simulasi dinamik mengilustrasikan hubungan antara kedua spesies, yaitu batang pohon dan jamur parasite pada waktu  $t$  [8]. Berdasarkan Gambar 1, *carrying capacity* jamur berada di bawah *carrying capacity* batang pohon, namun seiring dengan berjalannya waktu, *carrying capacity* jamur akan terus mengejar *carrying capacity* inanya sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 2. Ketika kurva jamur dan batang pohon berpotongan, itu artinya bahwa seluruh batang pohon sudah tertutupi oleh jamur parasit. Berdasarkan asumsi, hal ini akan mengakibatkan kematian pada pohon tersebut.



**Gambar 1.** Simulasi dinamik kedua spesies dengan  $K = 2, C = 0.5$

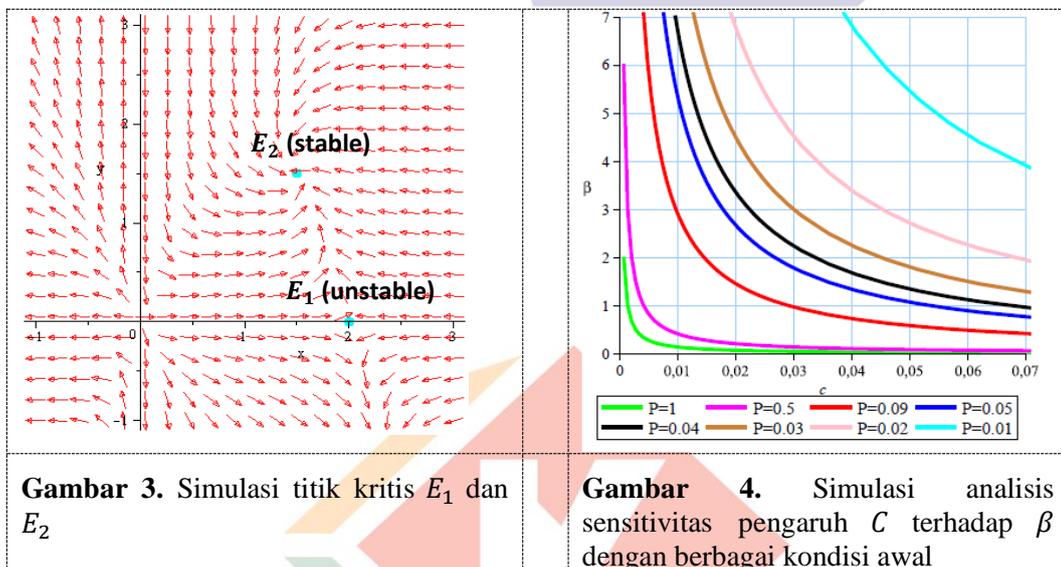


**Gambar 2.** Simulasi dinamik kedua spesies dengan  $K = 2, C = 1$

Simulasi kestabilan memberikan kesesuaian untuk setiap titik kritis antara hasil yang diperoleh dari perhitungan analisis dan hasil simulasi. Berdasarkan hasil analisis, diketahui bahwa titik kritis pertama

tidak stabil, sedangkan titik kritis kedua stabil untuk sistem ini. Selanjutnya hasil ini akan kita simulasikan secara numerik. Berdasarkan Gambar 3, titik  $E_1$  tidak stabil sedangkan titik  $E_2$  stabil. Hal ini dapat terlihat dari phase portrait bahwa dari kondisi awal manapun selalu mengarah pada titik  $E_2$ , dan arahnya selalu keluar dari titik  $E_1$ . Artinya, hasil perhitungan analisis sesuai dengan hasil simulasi numerik.

Perlu diketahui bahwa dalam model interaksi ini ada beberapa parameter yang sangat penting dan berpengaruh terhadap pertumbuhan kedua spesies pada waktu  $t$  [9]. Parameter yang dianggap paling berpengaruh yaitu *carrying capacity* jamur  $C$  dan parameter interaksi antara jamur dan batang pohon  $\beta$ . Analisis sensitivitas dilakukan untuk mengetahui pengaruh  $C$  terhadap  $\beta$  (Gambar 4).



Gambar 3. Simulasi titik kritis  $E_1$  dan  $E_2$

Gambar 4. Simulasi analisis sensitivitas pengaruh  $C$  terhadap  $\beta$  dengan berbagai kondisi awal

Interpretasi yang dapat diketahui dari analisis sensitivitas di atas bahwa interaksi antara pohon menahun dan jamur parasit memiliki interaksi simbiosis-parasitisme. Semakin besar interaksi dua spesies tersebut, maka pertumbuhan pohon akan terhambat. Demikian juga halnya dengan *carrying capacity* jamur, semakin tinggi *carrying capacity* jamur, maka luasan batang utama akan semakin berkurang dan menghambat pertumbuhan pohon itu. Hal ini sesuai dengan asumsi bahwa *carrying capacity* jamur proporsional terhadap *carrying capacity* pohon. Dari simulasi analisis sensitivitas tersebut, dapat diketahui bahwa pertumbuhan pohon berbanding terbalik dengan parameter interaksi dan *carrying capacity* jamur.

### Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian, model ini cukup baik untuk merepresentasi fenomena alam dimana terjadi interaksi antara pohon menahun dengan jamur parasit yang menginfeksi. Seiring berjalannya waktu, jika suatu jamur menginfeksi satu titik di batang utama, maka kemungkinan besar jamur tersebut akan terus mengejar *carrying capacity* batang utama pohon mengingat *carrying capacity* jamur proporsional terhadap *carrying capacity* pohon.

### Referensi

- [1] X. Xu, "Super-races are not likely to dominate a fungal population within a life time of a perennial crop plantation of cultivar mixtures: a simulation study," *BMC Ecol.*, vol. 12, no. 1, p. 16, 2012.
- [2] J. J. Burdon, A. M. Jarosz, and G. C. Kirby, "Pattern and patchiness in plant-pathogen interactions-causes and consequences," *Annu. Rev. Ecol. Syst.*, vol. 20, no. 1, pp. 119–136, 1989.
- [3] C. J. Mode, "A mathematical model for the co-evolution of obligate parasites and their hosts,"

- Evolution (N. Y.)*, vol. 12, no. 2, pp. 158–165, 1958.
- [4] J. N. Thompson and J. J. Burdon, “Gene-for-gene coevolution between plants and parasites,” *Nature*, vol. 360, no. 6400, pp. 121–125, 1992.
- [5] J. E. Vanderplank, *Host-pathogen interactions in plant disease*. Elsevier, 2012.
- [6] A. Dobson, “Population dynamics of pathogens with multiple host species,” *Am. Nat.*, vol. 164, no. S5, pp. S64–S78, 2004.
- [7] A. Calonnec, P. Cartolaro, J. Naulin, D. Bailey, and M. Langlais, “A host-pathogen simulation model: powdery mildew of grapevine,” *Plant Pathol.*, vol. 57, no. 3, pp. 493–508, 2008.
- [8] Y. Iwasa and D. Cohen, “Optimal growth schedule of a perennial plant,” *Am. Nat.*, vol. 133, no. 4, pp. 480–505, 1989.
- [9] S. A. Frank, “Models of plant-pathogen coevolution,” *Trends Genet.*, vol. 8, no. 6, pp. 213–219, 1992.

