ウェーブレット変換による画像解析

藤　川　久　寿*　　西　畑　有　輝**　　飯　塚　昌　之***

Digital Image Processing by Wavelet Transforms

Hisatoshi FUJIKAWA*　Yuuki NISHIHATA**　Masayuki IIZUKA***

Abstract　The digital signal processing techniques in connection with the development of availability of internet, multi-channel TV broadcast, etc. become important in the 21th century. In this paper, we discuss the characterisrics and problems on the digital image processing by using the discrete wavelet transform, which has been come into notice with the Fourier transform and/or the cosine transform analysis.

【1】画像情報のディジタル表現

画像信号は２変数関数で表すことができる。例えば、モノクロ写真の場合、輝度の強い所は白く、弱い所は黒く表現されるが、この輝度信号 Yは、水平方向の変位 i と垂直方向の変位 j で、次式のように書ける。

$$Y=f(i,j) \quad ①$$

カラー画像の場合、多くのコンピュータでは、色をRGBの３チャンネルの合成として表す。また、カラー画像の表現に関しては、それぞれの目的に応じて、YC_RC_B、YIQ 等々が用いられる。これらの方式は相互変換が可能であり例えば、RGB信号からYC_RC_B信号への変換は②式のような行列演算で実現できる。

$$\begin{bmatrix} Y \\ C_R \\ C_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.299 & 0.587 & 0.114 \\ 0.500 & -0.419 & -0.081 \\ -0.169 & -0.331 & 0.500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix} \quad ②$$

*　大学院２年学生電子工学専攻
**　大学院１年学生電子工学専攻
***工学部電子工学科教授
1997年9月17日　受理

【2】ディジタル画像信号の周波数解析

電気信号をスペクトラムアナライザーなどを用いて解析すると、その信号がどの様な周波数成分から構成されているのかを知ることができる。画像信号に関しても、コンピュータによる数値演算によって、画像信号を実空間領域から空間周波数領域に変換することができる。

これを可能にする理論がフーリエ変換をもとにした数学理論で、ディジタル信号処理の基礎として最も重要かつ基礎的なものである。

フーリエ変換の式は、

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt \quad ③$$

と表されるが、これは１変数関数の変換であり、画像信号に用いるには２次元に拡張しなくてはならない。すなわち２次元フーリエ変換である。さらに、コンピュータを用いて計算するには、積分計算を離散化し有限値に制限する必要がある。これは一般にDFTと呼ばれており、④で定義できる。

$$X(u,v) = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} x(m,n)e^{-2\pi j(mu/M+nv/N)}$$

（M、Nは水平および垂直方向の画素数）④

また、逆フーリエ変換は⑤式で定義できる。

$$x(m,n)=\frac{1}{\sqrt{MN}}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}X(u,v)e^{2\pi j(mu/M+nv/N)}$$

⑤

実際に画像に対してフーリエ変換を行った様子を示す。図１は原画像である。画像は５１２×５１２画素の 256 色カラー画像を①式を用いて Y 信号に変換したものである。

フーリエ変換は、輝度信号という実数の数値から、複素数の数値に変換されるので、変換後の信号 $X(u,v)$は、フーリエスペクトラムと位相信号からなる。図２がフーリエスペクトラムであり、図４が位相成分である。

なお、図 2 は計算の結果を直接表示したものであり、外側にいくほど周波数が低くなり、中央が高周波成分に相当する。図 3 はこれを修正して、中心部を直流成分にし、外側にいくほど周波数が高くなるように調整したものである。

図 3 から画像信号は低周波方向に電力が集中するということが分かる。これは特殊な画像を用いなければ一般的に言えることである。この性質を利用することで画像信号の圧縮が可能となる。

図１　原画像（５１２×５１２画素）

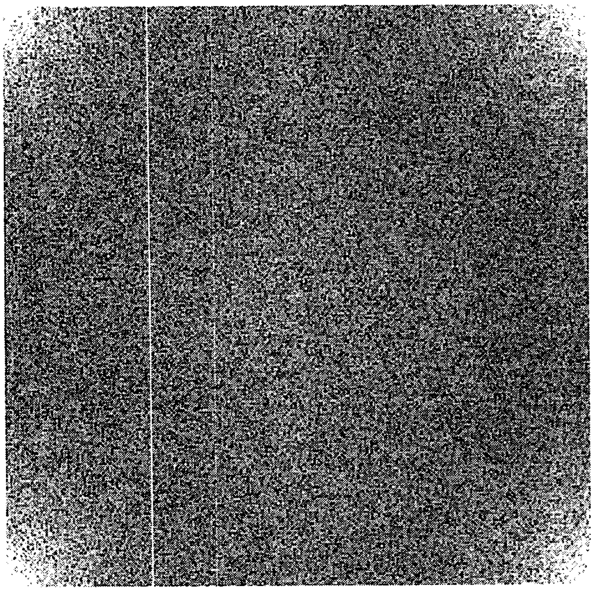


図２　フーリエスペクトラム

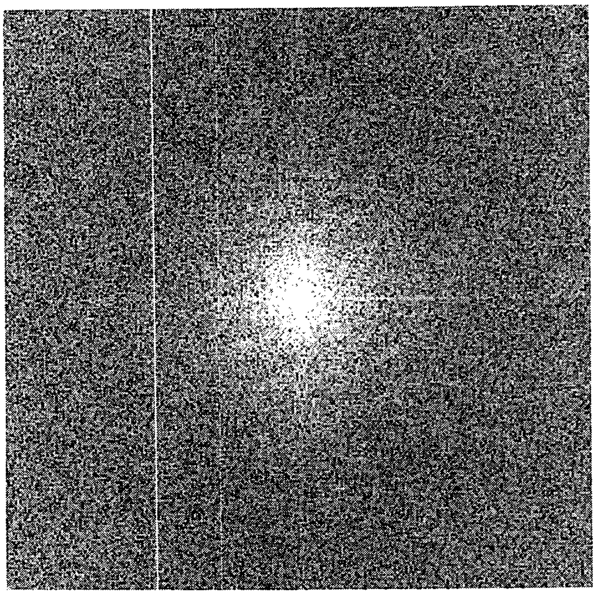


図３　修正後のスペクトラム

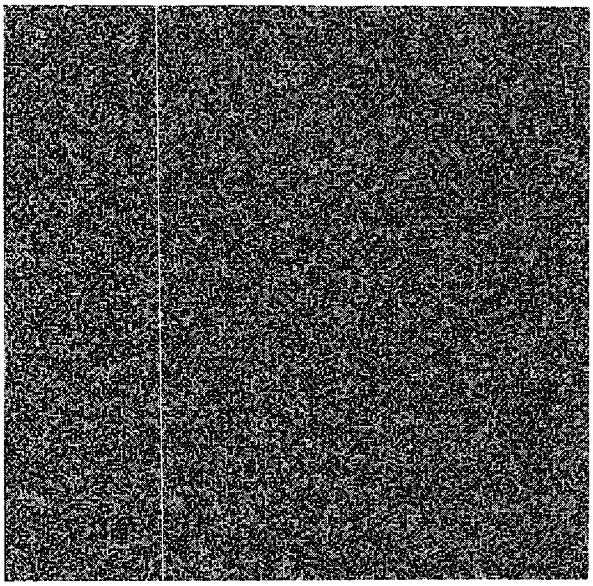


図４　位相成分

図５　再合成した画像

位相成分は、視覚的な特徴はないが再合成する際は必要なものである。図５が再合成された画像であるが、数値計算による若干の誤差がみられる。再合成する際、図６のようにスペクトラムの低周波成分をカットしておくと、再合成された画像は低周波部分が欠如しているため、ちょうどハイパスフィルタをかけたように輪郭線が抽出される。さらに、図７のように高周波部分をカットし再合成すると、雑音除去フィルタ（ローパスフィルタ）をかけたときと同じ効果が得られる。

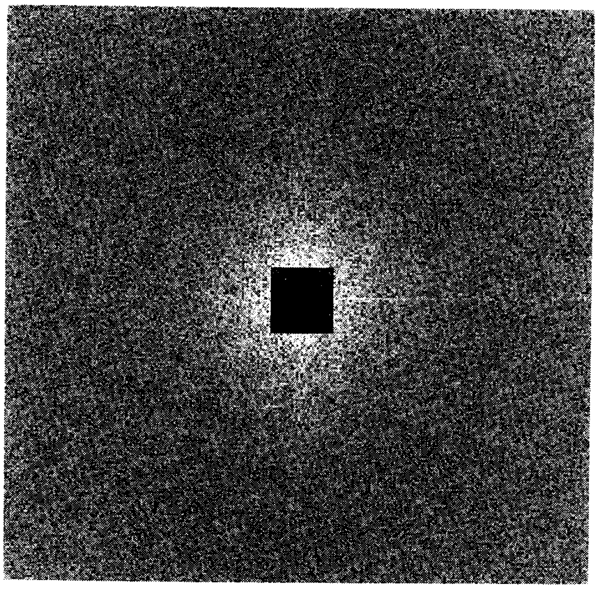


図６　低周波成分カット

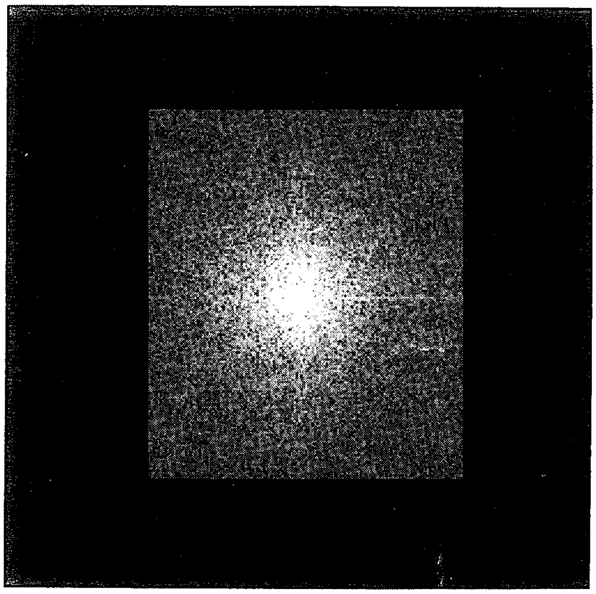


図７　高周波成分のカット

【3】離散コサイン変換（DCT）

【2】で画像信号の圧縮について触れたが、国際的な標準規格である JPEG（Joint Photographic coding Experts Group）では、離散コサイン変換が用いられている。フーリエ変換は複素数に変換されるのでデータ圧縮には適さないが DCT は実数演算の範囲でおこなわれる。１次元 DCT は⑥式で表される。

$$F(u) = \frac{2}{N} C(u) \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \cos \frac{(2x+1)u\pi}{2N} \quad ⑥$$

$$u = 0 \rightarrow C(u) = 1/\sqrt{2}$$
$$u \neq 0 \rightarrow C(u) = 1$$

③式と⑥式を比較すると、DCT では、フーリエ変換の exp(-j2 π xu/N)の代りにコサインを乗算し、実数計算だけを行う。exp(-j2 π xu/N)やコサインのように、変換の際に用いられる重み関数を基底関数と呼ぶ。⑦⑧式に２次元 DCT と IDCT を示す。（ I は inverse を意味する。）

$$F(u,v)=\frac{2}{N}C(u)C(v)\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\cos\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\cos\frac{(2y+1)v\pi}{2N} \quad ⑦$$

$$f(x,y)=\frac{2}{N}\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1}C(u)C(v)F(u,v)\cos\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\cos\frac{(2y+1)v\pi}{2N} \quad ⑧$$

（C(x)は⑥式と同じ）

Nは水平及び垂直方向の画素数である。Nが大きいほど平均二乗誤差が小さくなる。図８はDCTをかける前の原画像である。512×512画素の256色カラー画像を①式によりＹ信号に変換したものを用いた。図９がDCTをかけた後の変換結果である。このとき、⑦式でNは8とした（よって全体で６４×６４ブロック）。フーリエ変換では画像全体に対して変換を行うのに対し、DCTでは通常、画像をブロック分割し、それぞれのブロックで変換を行う。こうすることで、計算速度をあげることができる。この場合、左上方向が低周波成分になる。変換結果はDCT係数と言われており、F(０，０)をDC成分（直流成分）、それ以外をAC成分と呼ぶ。フーリエ変換の結果と同じく電力は低周波方向に集中していることが分かる。

図８　原画像(５１２×５１２画素)

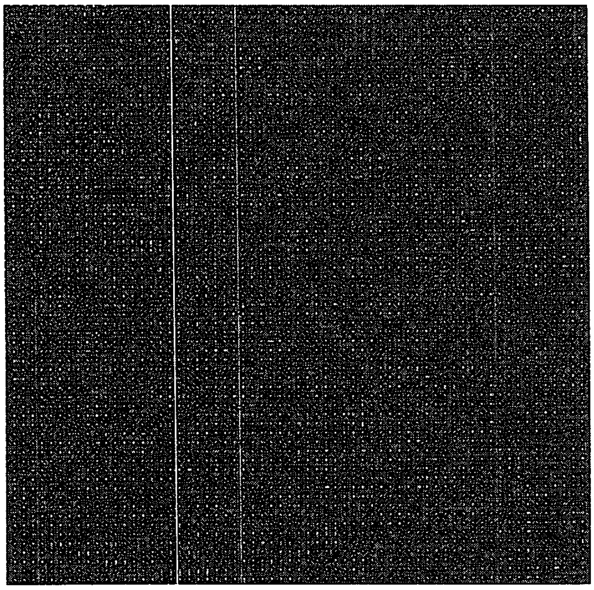


図9-1　DCT変換結果

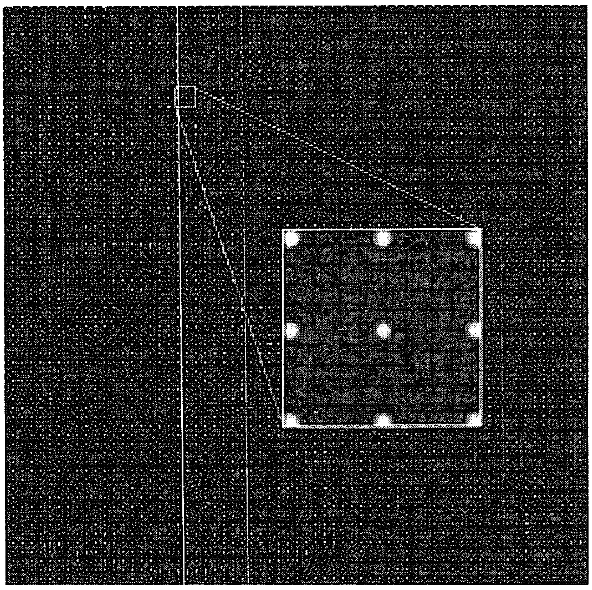


図9-2　図9-1の一部拡大

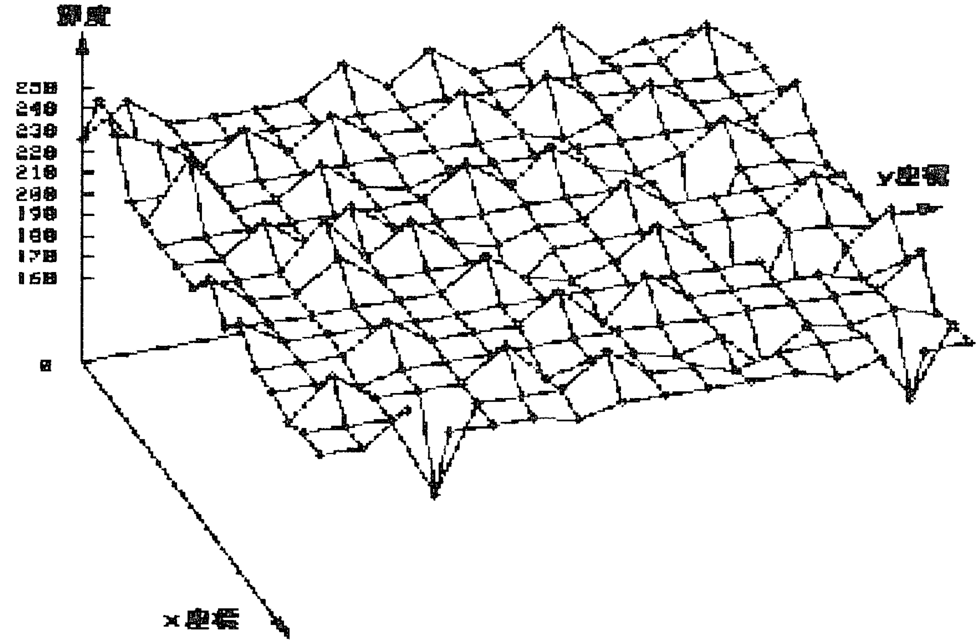
図１０は⑧式によるIDCTで再合成した画像で、後に説明するMSは０．９９９９３であった。逆変換で原画像に復元できているといえる。

図１０　IDCT による再合成画像

図9-2は左上から右方向へ（２０，１０）（２１，１０）（２０，１１）（２１，１１）のブロックを拡大した様子である。これを３次元グラフで表したものを示す。グラフ１はDCT変換前の輝度の分布のようすで、グラフ２に変換後のDCT係数を示した。グラフ２を見るとAC成分がゼロに見えるが、これはAC成分がDC成分に比べて十分小さいためで、実際はゼロではない。輝度信号の変化の激しいブロックを選べばもう少しAC成分も大きく出ると考えられる。

*MS*は原画像との類似度を表し以下のように定義される。

$$MS=\frac{\sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{N-1}[f(i,j)\cdot\hat{f}(i,j)]}{\sqrt{\sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{N-1}[f(i,j)]^2\cdot\sum_{i=0}^{M-1}\sum_{j=0}^{N-1}[\hat{f}(i,j)]^2}}$$



グラフ１　変換前の輝度分布

結合正方行列　$T_n = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} L_n \\ \hline H_n \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2^{n-1} \times 2^n \\ \hline 2^{n-1} \times 2^n \end{bmatrix} (n \geq 1)$

第２表はD2係数、D4係数を用いた場合の空間的なローパスフィルタおよびハイパスフィルタの構成例を示したものである。
結合正方行列は　$2^{n-1} \times 2^n$ の要素から構成される空間的なローパスフィルタおよびハイパスフィルタの係数をおのおの上半分および下半分に巡回的に配置していくことで作成することができる。
結合正方行列は上式のように表すことができ、表２のようにして求めた L_n、H_n が代入される。表１の展開係数を用い表２のように T_n を構成することで結合正方行列を作成できる。なおウェーブレット変換後の数値を修正するため１／２が必要である。

【4－2】D２係数による変換

図 11 は原画像である。これにウェーブレット変換（N＝２の場合）を再帰的に 4 回行った結果が図 12 である。それぞれの成分は下記の様に呼ばれる。「再帰的に変換する」とはＬＬを原画像として繰り返し分解することを意味する。

平滑画像 ＬＬ	垂直成分 ＨＬ
水平成分 ＬＨ	対角成分 ＨＨ

図 11　原画像（５１２×５１２画素）

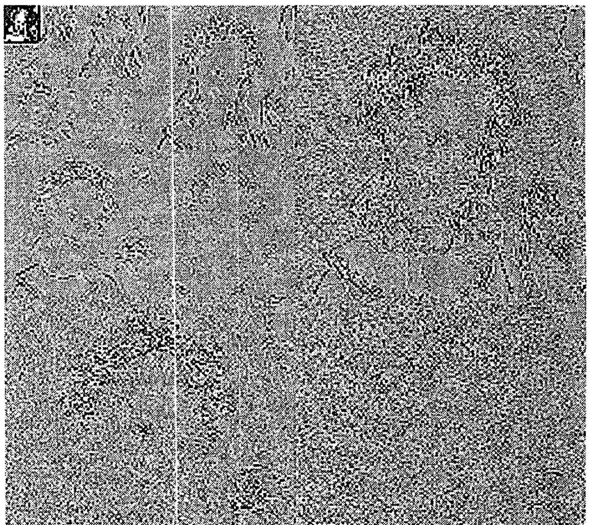
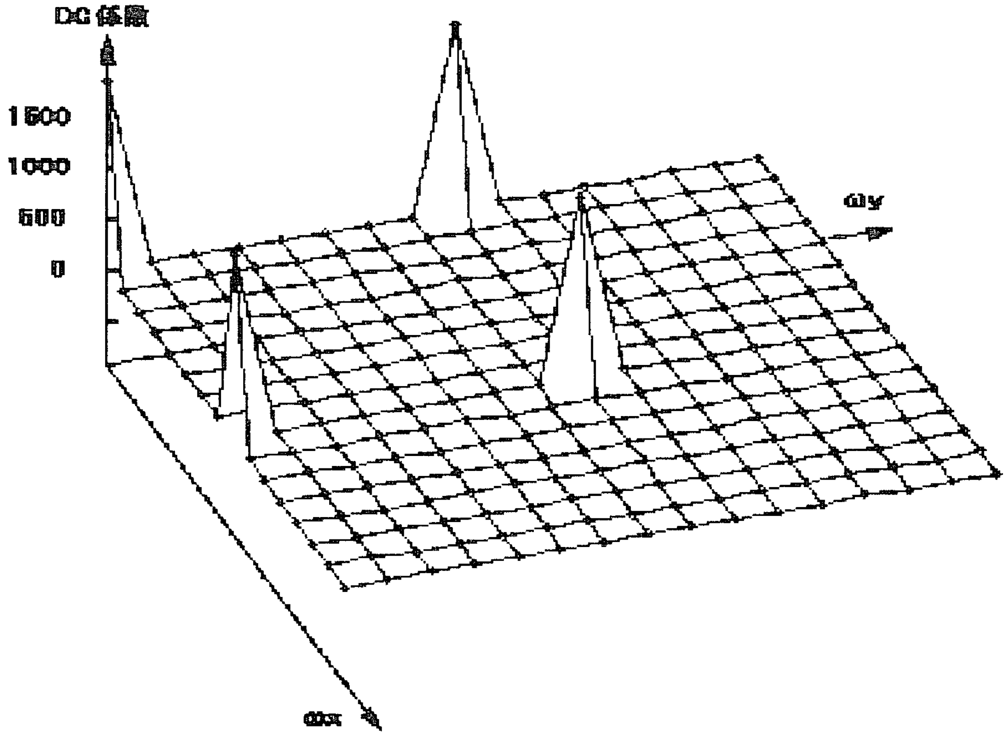


図 12　ＤＷＴ変換後の画像（解像度レベル４）



グラフ2　DCT 変換後の DCT 係数の様子

【4】画像信号に対するウェーブレット変換の適用

DCT が空間的に広がった三角関数を基底関数に用いたのに対して、ウェーブレット変換は空間的に局在した関数を基底関数に用いる。この基底関数の組は、ウェーブレットと呼ばれる基本波形を空間的に伸ばしたり、平行移動して得られる。DCT は変換するブロックが固定されていたのに対して、ウェーブレット変換では低周波ではブロックが大きくなり、高周波ではブロックが小さくなるという特徴がある。

基底関数は、空間的なローパスフィルタとハイパスフィルタ係数から構成され、フーリエ変換やコサイン変換と比較して特別なアルゴリズムを必要とせず、行列演算で高速に処理することができる。さらに、フーリエ変換やコサイン変換が実空間領域から空間周波数領域への変換であるのに対し、ウェーブレット変換は実空間領域での変換であるため、変換結果を直感的に把握できる。本研究ではこのウェーブレット変換を画像信号に適用し、分解、再合成を行う。

【4－1】結合正方行列の構成

コサイン変換などを実行する際は⑦式のような数式を直接計算する方法と、行列演算による方法がある。ウェーブレット変換を画像信号に適用する場合も原画像を一つの行列と考えこれに行列演算を行うことでできる。いま、原画像を F、結合正方行列を T、ウェーブレット変換の結果を Wとすると、画像の分解は、

$$W=\left[\frac{1}{2}T\times F\right]\times\left[\frac{1}{2}T\right]^{t} \quad ⑨$$

で実行できる。ここで、t は転置を意味する。再合成は

$$F=T^{t}\times W\times T \quad ⑩$$

となる。ここで、結合正方行列 T の構成方法を述べる。

第１表　展開係数

N	係数	N	係数
N=2	c(0)=1 c(1)=1	N=8	c(0)=0.325803 c(1)=1.010946 c(2)=0.892200 c(3)= - 0.039575 c(4)= - 0.264507 c(5)=0.043616 c(6)=0.046504 c(7)= - 0.014987
N=4	c(0)=0.68306 c(1)=1.18301 c(2)=0.31699 c(3)= - 0.183012		

第２表　空間的なローパス、ハイパスフィルタの構成例

<D ２係数>

$$L_1 = [c(0) \quad c(1)]$$

$$H_1 = [-c(1) \quad c(0)]$$ または $$H_1 = [c(1) \quad -c(0)]$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} c(0) & c(1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c(0) & c(1) \end{bmatrix}$$

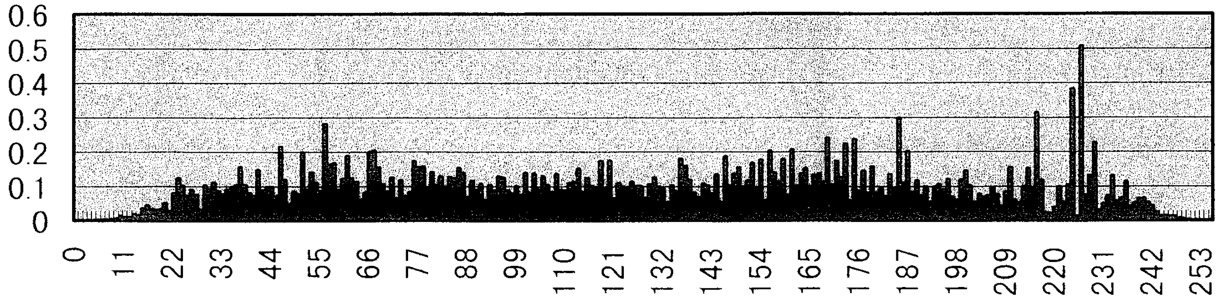
$$H_2 = \begin{bmatrix} -c(1) & c(0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c(1) & c(0) \end{bmatrix}$$ または $$H_2 = \begin{bmatrix} c(1) & -c(0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c(1) & -c(0) \end{bmatrix}$$

<D ４係数>

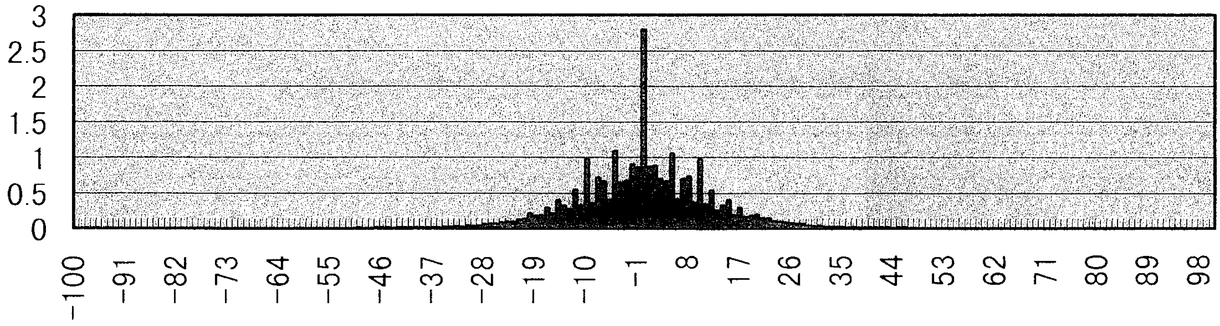
$$L_2 = \begin{bmatrix} c(0) & c(1) & c(2) & c(3) \\ c(2) & c(3) & c(0) & c(1) \end{bmatrix}$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} -c(3) & c(2) & -c(1) & c(0) \\ -c(1) & c(0) & -c(3) & c(2) \end{bmatrix}$$

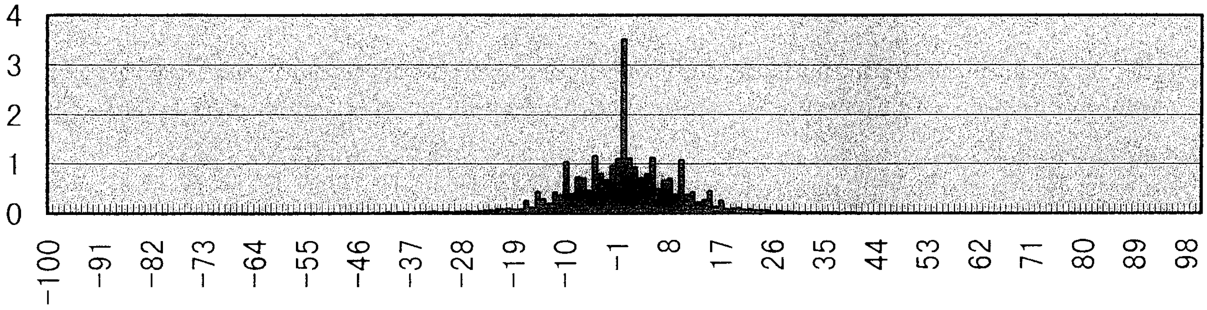
Y信号(レベル1 LL)



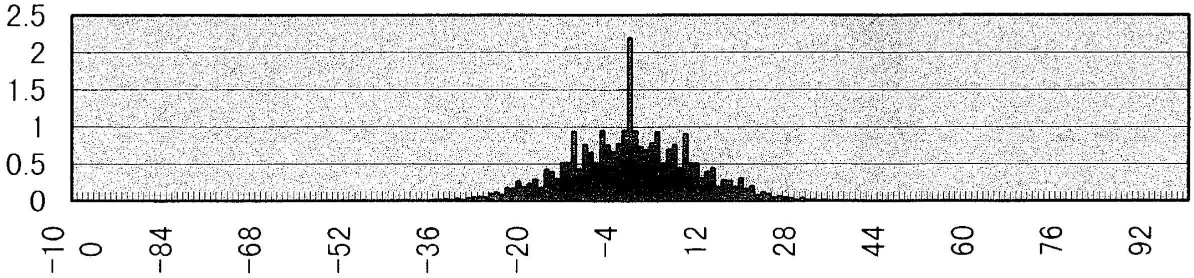
Y信号(レベル1 HL)



Y信号(レベル1 LH)



Y信号(レベル1 HH)



【4－3】変換結果のヒストグラム

前項の四つのグラフは、ウェーブレット変換を行うことによって得られた、各領域のヒストグラムである。横軸が、変換後によって得られた濃度レベルの数値であり、縦軸がその度数である（面積で割って規格化してある）。平滑画像は原画像のように、輝度が０から２５５まで広がっている。平滑画像は、変換前の画像の平均的な値を出す。これは簡便な解像度変換に利用できる。水平、垂直、対角画像は、０付近に信号が集中している。【3】で述べたＤＣＴにおける、ＤＣ成分への信号の集中と通ずるものである。

【4－4】展開係数の違いの変換画像に対する影響

結合正方行列の構成法の所で述べたように、ローパスフィルタ及びハイパスフィルタの係数は表１に示す通り数種類ある。この係数の違いが変換結果にどの様な変化をもたらすか実験を行った。用いた係数は、Ｄ２、Ｄ４、Ｄ８係数と、それぞれのハイパスフィルタの構成を変えた場合の６種である。「ハイパスフィルタの構成を変えた場合」とは、ハイパスフィルタは、係数に対する正負の符号の配置によって、2種類のフィルタを構成できることから、その違いによる影響も見るためである。

図13から図18までがウェーブレット変換画像に関する結果である（図13から順にＤ２、Ｄ２'、Ｄ４、Ｄ４'、Ｄ８、Ｄ８'）。なお、比較を容易にするためHL成分に着目して２倍に拡大してある。

まず、同じ係数を用いハイパスフィルタの構成を変えた場合を比較すると、輪郭線が抽出される高周波成分（ＬＬ以外の領域）で、影の方向が逆になることが分かる。それ以外には、顕著な違いは見られない。異種係数どうしのちがいをみると、係数が大きいほど輪郭線の出方が薄くなる傾向にある。係数の違いで、輪郭の出方に変化を見ることができ、画像解析などに利用できる。

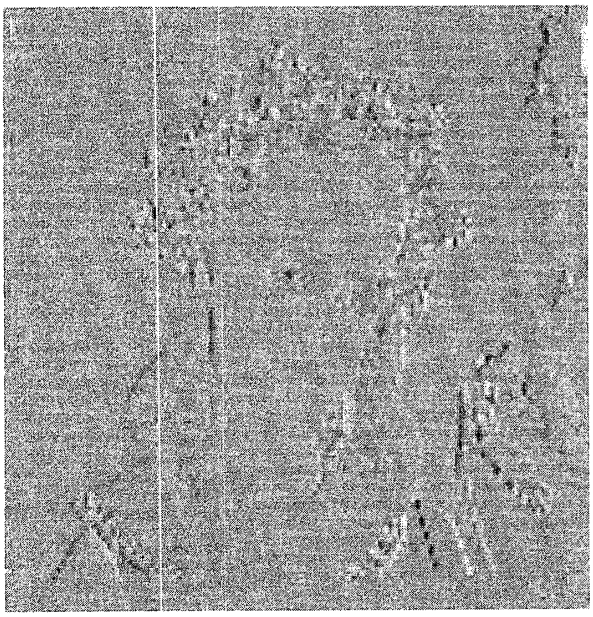


図13　Ｄ２係数（ レベル３　ＨＬ）

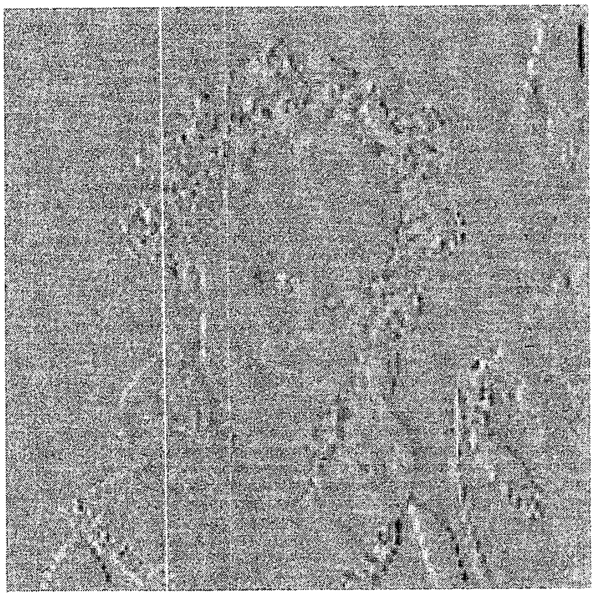


図14　Ｄ２'係数（レベル３　ＨＬ）

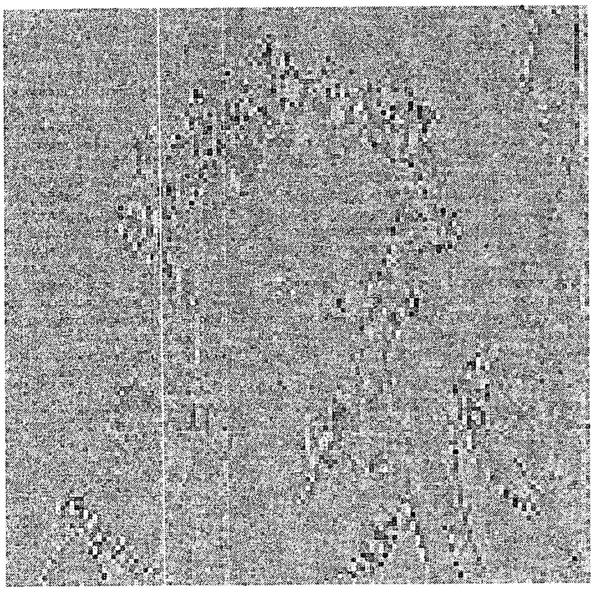


図15　Ｄ４係数（ レベル３　ＨＬ）

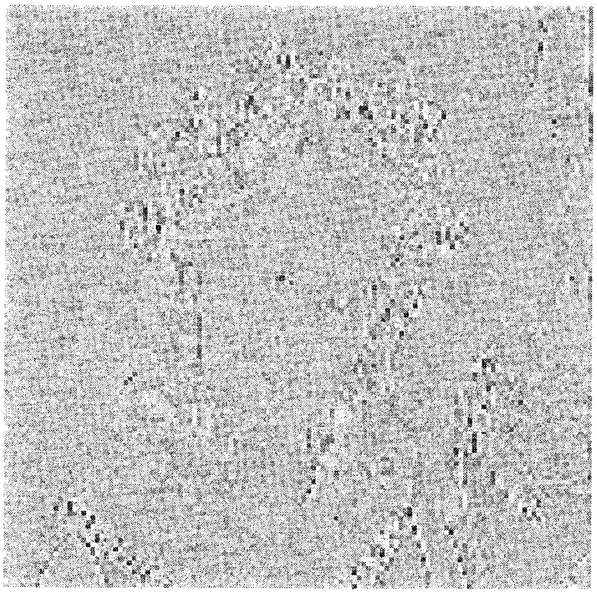


図16 Ｄ４'係数（ レベル３ ＨＬ）

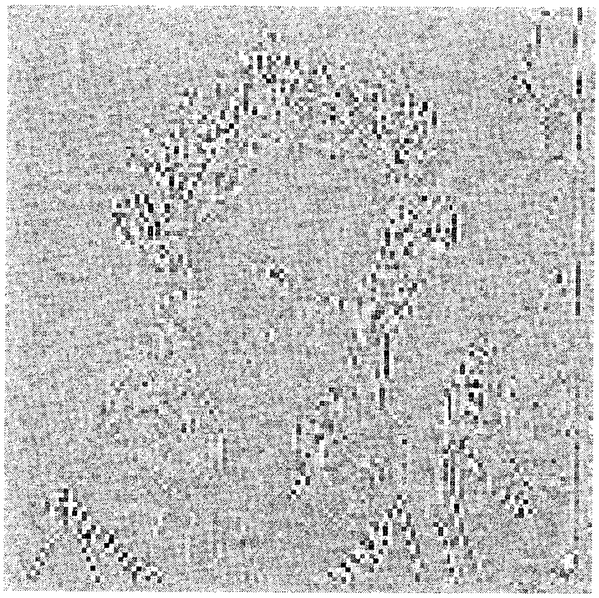


図17 Ｄ８係数（レベル３ ＨＬ）

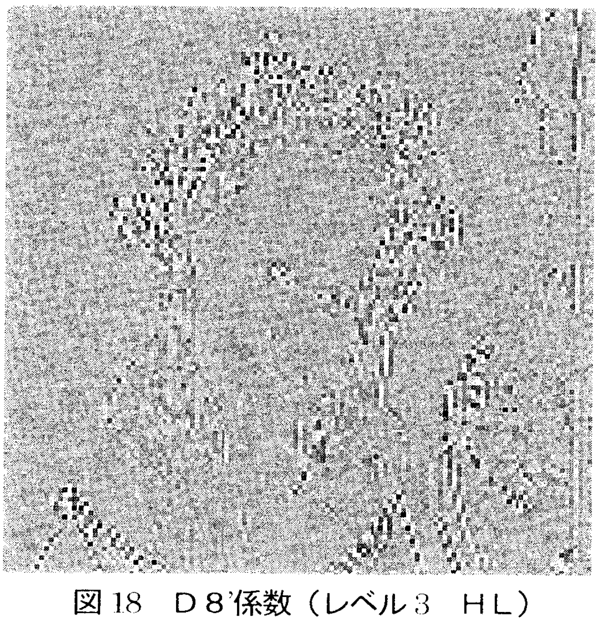


図18 Ｄ８'係数（レベル３ ＨＬ）

【5】まとめ

第１表に基づくウェーブレット変換用展開係数を用いて、変換結果の比較を行った。画像信号の圧縮という面から考えると、ハードウェア化が容易であり、整数演算で高速に処理できるハールウェーブレットが望ましい。画像に対する特殊効果や医用の画像解析等には、他の係数も有用である。

【6】今後の課題

ウェーブレットを画像圧縮以外に利用するとすれば、変換係数の数値に人為的に変化を与え再合成した場合どのような効果が得られるか、またＤ２係数で分解し、Ｄ４係数で再合成を行った場合の影響、輪郭抽出に利用するなど種々考えられる。

参考文献

1) 八木 信行 著　C言語で学ぶ実践ディジタル映像処理 1996年5月10日（オーム社）

2) 磯 博 著　ディジタル画像処理入門 1997年9月27日（産能大学出版部刊）

3) 榊原 進 著　ウェーブレット ビギナーズガイド 1995年5月20日（東京電気大学出版）

4) 貴家 仁二 著　インターフェース92年8月号 p147～p169 「サブバンド符号化とウェーブレット変換」（ＩＱ出版）

5) Lngrid Daubechies　Lectures on Wavelets 1992年5月（Siam）