

学生実験のための検光子回転法による偏光測定

中 楯 末 三*¹ 石 川 和 夫*² 畑 田 豊 彦*³ 一 色 真 幸*³

Polarization measurement using a rotating analyzer for opticts laboratory

Suezou NAKADATE Kazuo ISHIKAWA
Toyohiko HATADA Masaki ISSHIKI

Polarization measurement system using a rotating analyzer is analyzed for well understanding of polarization phenomena. Principle of the polarization measurement using Jones matrix, rotating analyzer and optical scanning methods is well explained. The method is applied to half and quarter wave plates whose principal axes are rotated. The amplitude ratio angle α , the phase difference δ , the azimuth angle ϕ and the ellipticity angle χ of an ellipse of polarization are derived theoretically in cases of the wave plates rotated. The theoretical values of them are plotted in graphs and displayed as trajectories on Poincare' spheres. A simplified experimental setup is shown and experimental results are also given.

1. まえがき

光の性質の中で偏光が大きな位置を占めていることは言うまでもない。しかし、偏光現象が直感的に分かりにくいために、偏光の諸性質を理解することは難しいことになっている。最近、光の性質を利用した多くの工業製品が作り出されるようになり、光ディスクに代表されるように、光の偏光現象を使ったものが多くある。大学の高学年でさらに偏光の理解を深めるためには、学生実験の1テーマとして行う必要がある。そこで我々は、検光子回転法¹⁾による偏光の測定実験を行うことにした。そこで使われている測定の手法は特に目新しいものではないが、なるべく偏光を理解しやすくするために記述方法や実験方法を整理した。したがって、光を使ってみたい人や、光の簡単な実験を考えている人にとって参考になるのではと

思い、我々の方法を報告することにした。

我々が目指している目的は以下のとおりである。

- 1) 偏光とは何かを理解し、実際に偏光状態を測定する方法について学ぶ。
- 2) コヒーレント光の偏光状態を表現するジョーンズ・ベクトル(Jones Vector)を理解する。
- 3) 移相子や波長板を理解し、偏光状態を表現するジョーンズ・マトリックス(Jones Matrix)を理解する。
- 4) 偏光干渉強度を理解し、その計算法を学ぶ。
- 5) 検光子回転法による位相差(リターデーション retardation)と楕円率の関係を理解する。
- 6) 1/2波長板、1/4波長板の性質を理解し、実験により確認する。
- 7) フーリエ級数を用いた走査測光を理解する。

以下に偏光の表現方法、測定の基本原理や実験結果などについて順を追って述べることにする。

2. 偏光測定の原理

*¹ 本学光工学科, 助教授

*² 本学光工学科, 講師

*³ 本学光工学科, 教授

1995年10月9日受理

2. 1 ジョーンズ・ベクトル²⁾

光は電磁波と考えられ、特にコヒーレント光は単一の電界ベクトルと磁界ベクトルで表現できる。したがってFig.1に示すように電界ベクトルは x 、 y 座標の各成分に分解することができる。光波の電界ベクトル $\mathbf{E}(t)$ の x 軸、 y 軸成分をそれぞれ、 $E_x(t)$ 、 $E_y(t)$ (t は時間) とすると、電界ベクトル \mathbf{E} は

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x(t) \\ E_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x \exp(i\omega t + i\phi_x) \\ A_y \exp(i\omega t + i\phi_y) \end{pmatrix} \quad (1)$$

と書ける。ここで、光波の角周波数は ω [rad] であり、 x 、 y 成分の初期位相がそれぞれ ϕ_x 、 ϕ_y [rad] である。また、 A_x 、 A_y は x 、 y 軸の振幅である。光波では絶対位相より、 x 軸の位相 $\omega t + \phi_x$ に対する y 軸の相対位相(位相差) $\delta = \phi_y - \phi_x$ が重要であるので、(1)式から $\exp(i\omega t + i\phi_x)$ を省略すると電界ベクトルは、

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \exp(i\delta) \end{pmatrix} \quad (2)$$

と書くことができる。これがジョーンズ・ベクトル(Jones Vector)であり、電界ベクトルの列ベクトル表現と言える。ジョーンズ・ベクトルでは、係数を省略できることになっている。したがって、単位振幅を持つ水平(x 軸) 垂直(y 軸) 及び 45° 方向の直線偏光を表すジョーンズ・ベクトルは、

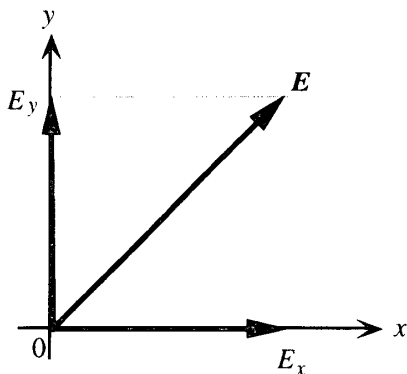


Fig.1 x and y components of an electric vector

$$\mathbf{E}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_{45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

と書ける。また単位振幅の右周り円偏光は、 y 軸の位相が $\pi/2$ だけ進んでいることから、

$$\mathbf{E}_R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad (3)$$

と書け、同様に左円偏光は、 y 軸の位相が $-\pi/2$ だけ位相が進んでいることから

$$\mathbf{E}_L = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

となる。ジョーンズ・ベクトルの2つのペア (\mathbf{E}_x , \mathbf{E}_y), (\mathbf{E}_R , \mathbf{E}_L) はそれぞれ正規直交系を作るので、任意の偏光状態は、直交した直線偏光かまたは左と右円偏光の線形結合で表すことができる。

2. 2 ジョーンズ・マトリックス²⁾

あるジョーンズ・ベクトル \mathbf{E} で表される偏光が偏光素子を通過した後に \mathbf{E}' になったとすれば、この偏光素子の作用は2行2列のマトリックス $[T]$ で表され、次式のように書ける。

$$\mathbf{E}' = [T] \mathbf{E}$$

$$[T] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (5)$$

代表的なジョーンズ・マトリックスを以下に示した。

1) 偏光子： x 軸方向の光の振幅透過率 P_1 、 y 軸方向が P_2 のとき

$$[T]_P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} \quad (6)$$

2) 移相子: x 軸成分に δ の進相を行なう素子

$$[T]_{\delta} = \begin{pmatrix} \exp(i\delta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{i\delta}{2}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-\frac{i\delta}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (7)$$

3) 旋光子: 偏光方向を θ だけ回転させる素子

$$[T]_{\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (8)$$

ジョーンズ・マトリックス $[T_1], [T_2], \dots, [T_n]$ をもつ n 個の偏光素子を透過した後のジョーンズ・ベクトル \mathbf{E}' は、

$$\mathbf{E}' = [T_n] \cdots [T_2][T_1]\mathbf{E} \quad (9)$$

と書くことができる。1/4 波長板は y 軸の位相を $\pi/2$ だけ遅らすものであるので、1/4 波長板の主軸が 0° の時のジョーンズ・マトリックスは次式のように書ける。

$$[T]_{\delta=\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(-\frac{i\pi}{4}\right) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$$

1/4 波長板の主軸が 45° 傾いたときのジョーンズ・マトリックスは、波長板からみた入射光の座標は波長板の主軸に対して -45° 傾いている。波長板を通過後の光の座標を元に戻すためには、座標を $+45^\circ$ 回転させてやる必要がある。したがって、1/4 波長板を 45° 回転させた時のジョーンズ・マトリックスは、次のように計算ができ

$$[T] = [T]_{\theta=45^\circ} [T]_{\delta=\frac{\pi}{2}} [T]_{\theta=-45^\circ} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

このようにジョーンズ・マトリックスを用いると、任意の偏光状態の変換を表現できる。また、光の絶対強度を気にしない場合には、ジョーンズ・マトリックスの係数は省略してもよい。

2.3 回転検光子法¹⁾

任意の偏光状態は Fig.2 のような楕円偏光で表すことができる。ここで電界の x 軸、 y 軸成分の最大振幅が A_x, A_y である。また、楕円の長軸は x 軸と角度 ϕ だけ傾いている。この角度 ϕ が偏光の方位角である。楕円の長軸と短軸方向の座標 (X, Y) の最大振幅が a_x, a_y である。このとき、直交偏光間の位相差は $\delta = \delta_y - \delta_x$ であるとする、この楕円偏光を表すジョーンズ・ベクトル \mathbf{E} は、

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x \exp\left(-\frac{\delta}{2}i\right) \\ A_y \exp\left(\frac{\delta}{2}i\right) \end{pmatrix} \quad (11)$$

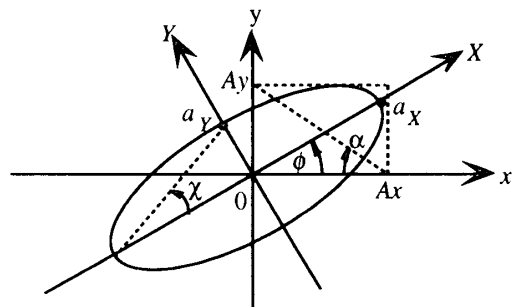


Fig.2 The three parameters that define the ellipse of polarization. (1) the amplitude ratio angle α (2) the azimuth ϕ of the major axis X from the fixed reference x -axis (3) the ellipticity angle χ .

と書ける。この楕円偏光に、透過軸が x 軸と θ 傾いた検光子 (偏光板) を挿入した後のジョーンズ・ベクトル E' は、

$$E' = \begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \exp\left(-\frac{\delta}{2}i\right) \\ A_y \exp\left(\frac{\delta}{2}i\right) \end{pmatrix} \quad (12)$$

となる。(12)式の右辺第一項目のマトリックスは、偏光板のジョーンズ・マトリックスである。偏光板から射出した光の強度 $I(\theta)$ は、

$$I(\theta) = |E'|^2 = |E'_x|^2 + |E'_y|^2 = I_0 \left\{ 1 + a \cos 2\theta + b \sin 2\theta \right\} \quad (13)$$

と書いて、各偏光成分の光強度の和となる。(13)式では、

$$I_0 = \frac{A_x^2}{2 \cos^2 \alpha} = \frac{A_y^2}{2 \sin^2 \alpha} \quad (14)$$

$$a = \cos 2\alpha \quad (15)$$

$$b = \sin 2\alpha \cos \delta \quad (16)$$

となり、振幅比角 α は次式で定義される。

$$\tan \alpha = \frac{A_y}{A_x} \quad \left(0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}\right) \quad (17)$$

次に述べる走査測光法により、(15)、(16)式の a 、 b が求められれば、振幅比角 α と位相差 (リターデーション) δ が次式により求められる。

$$\alpha = \frac{1}{2} \cos^{-1}(a) \quad \left(0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}\right) \quad (18)$$

$$\delta = \cos^{-1}\left(\frac{b}{\sqrt{1-a^2}}\right) \quad \left(0 \leq \delta \leq \pi\right) \quad (19)$$

この方法では、楕円偏光が右回り ($0 \leq \delta \leq \pi$) か左回り ($-\pi \leq \delta \leq 0$) か判断できないので、位相差 δ は $[0, \pi]$ の範囲とする。さらに、Fig.2 の楕円偏光を表す各角度について次式が成立する。³⁾

$$\tan 2\phi = \tan 2\alpha \cos \delta \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}\right) \quad (20)$$

$$\sin 2\chi = \sin 2\alpha \sin \delta \quad \left(-\frac{\pi}{4} \leq \chi \leq \frac{\pi}{4}\right) \quad (21)$$

ここで χ は楕円率角を表し、次式のように定義される。

$$\tan \chi = \frac{a_y}{a_x} = k \quad (22)$$

楕円偏光の長軸と短軸方向の振幅比 k が楕円率であり、 $k=0$ または ∞ のとき直線偏光を表し、 $k=1$ のとき円偏光を表す。 (α, δ) あるいは (ϕ, χ) を求めることにより、光の偏光状態を知ることができる。

2.4 走査測光法⁴⁾

偏光板透過後の光強度 $I(\theta)$ は(13)式で与えられるが、この式の中の未知数 I_0 、 a 、 b は θ の三角関数の係数になっているので、フーリエ級数の考え方をを用いると各係数を分離して求めることができる。変数を少しずつ変化させながら光強度を検出し、その後計算によって各項の係数を求める。これを走査測光法と呼んでいる。検光子の1回転を N 等分すると $0, 2\pi/N, \dots, 2\pi i/N, \dots, 2\pi(N-1)/N$ [rad] の角度となる。検光子を i 番目の角度 θ_i に合わせたときの光強度を I_i とすると次式が成立する。

$$I_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_i \quad (23)$$

$$I_0 a = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N I_i \cos(2\theta_i) \quad (24)$$

$$I_0 b = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N I_i \sin(2\theta_i) \quad (25)$$

これらから設定角度 θ_i と、このときの光強度 I_i を測定し、上の3個の式を用いると I_0, a, b が求められる。これらと、(18), (19) 式から α, δ を求め、さらに(20), (21)式により ϕ, χ を求めると偏光状態が測定できる。

2.5 1/2 波長板

波長板は結晶板を2枚張り合わせ、2枚の結晶板の厚みの差により、直交偏光間に位相差を付けるようにした偏光素子である。1/2 波長板(半波長板)は $\lambda/2$ (λ :波長) のリターデーション(位相遅れ)を与えるので位相差 δ は π [rad] となる。いま、Fig.3のような光学配置を考えると $\delta = \pi$ となり、このときジョーンズ・マトリックスは、(7) 式で $\delta = \pi$ と置いたものとなる。この波長板を β 回転させた時のジョーンズ・マトリックス $[T]$ は、 $[T]_{\theta=\beta}[T]_{\delta=\pi}[T]_{\theta=-\beta}$ を計算して、

$$[T] = \begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{pmatrix} \quad (26)$$

となる。したがって、もし入射光が水平偏光 $E_h = (1, 0)$ の時の射出光のジョーンズ・ベクトル E' は、

$$E' = [T]E_h = \begin{pmatrix} \cos 2\beta \\ \sin 2\beta \end{pmatrix} \quad (27)$$

となる。この式は、Fig.3 に示したように射出光が直線偏光で偏光方向が 2β 回転することを表している。1/2波長板を回転させることにより、楕円偏光の楕円率を変えずに偏光の方位角のみを自

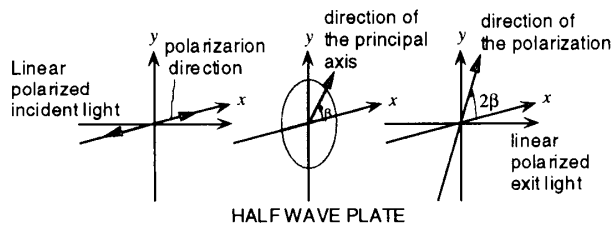


Fig.3 Transform of polarization by rotating the half wave plate.

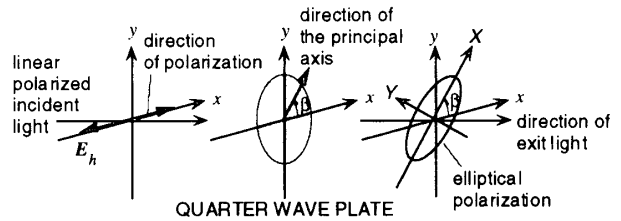


Fig.4 Transform of polarization by rotating the quarter wave plate

由に変えることができる。ただしこの時、偏光の回転方向は反転し、右回りは左回りへ、左回りは右回りになるが、本方式では偏光の回転方向は実測できない。

2.6 1/4 波長板

1/4 波長板は直交偏光間のリターデーションが1/4 波長であるので、位相差が $\delta = \pi/2$ となる。ここで Fig.4 のような光学配置を考え、1/4 波長板の主軸(進相軸)を x 軸に対して角度 β 回転したときのジョーンズ・マトリックスは、 $[T]_{\theta=\beta}[T]_{\delta=\pi/2}[T]_{\theta=-\beta}$ を計算して、

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 + i \cos 2\beta & i \sin 2\beta \\ i \sin 2\beta & 1 - i \cos 2\beta \end{pmatrix} \quad (28)$$

となる。入射光が水平偏光(x 軸方向の偏光) E_h とすると、射出光のジョーンズ・ベクトル E' は、

$$E' = \begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + i \cos 2\beta \\ i \sin 2\beta \end{pmatrix} \quad (29)$$

となる。これから振幅比角 α と位相差 δ は次式を満たす。

$$\tan \alpha = \frac{\sin 2\beta}{\sqrt{1 + \cos^2 2\beta}} \quad (30)$$

$$\tan \delta = \frac{1}{\cos 2\beta} \quad (31)$$

特に回転角 β が $\pm 45^\circ$ のとき(29) 式に $\beta =$

±π/4 を代入すると、

$$\mathbf{E}'_{\beta=\frac{\pi}{4}} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}'_{\beta=-\frac{\pi}{4}} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

となり、それぞれ右円偏光と左円偏光になる。次に、1/4波長板からの出力光 \mathbf{E}' を $-\beta$ 回転させる旋光子を通させたとする、その出力光 \mathbf{E}'' は、 $[T]_{\theta=-\beta}\mathbf{E}'$ を計算して、

$$\mathbf{E}'' = \begin{pmatrix} \cos \beta \\ i \sin \beta \end{pmatrix} \quad (32)$$

となる。ここで、係数の $1+i$ は省略した。この時の射出光は楕円率 $k=\tan\beta$ であり(したがって楕円率角 χ が β)、位相差 $\delta=\pi/2$ の右回り楕円偏光を表す。つまり、1/4波長板からの出力光 \mathbf{E}' は Fig.5 に示したように、楕円の方位角が β で、楕円率角も β の楕円偏光になる。よって1/4波長板を回転することによって、任意の楕円率を持つ楕円偏光を作ることができる。1/4波長板は偏光の楕円率を変化させるために用いられ、楕円偏光を直線偏光に変えたり、円偏光を作るのによく用いられる。

3. 測定の理論値計算

1/2波長板と1/4波長板に水平偏光を入射させた時に、射出偏光が各波長板の回転角によりどうなるかを考察する。検光子回転法で検光子(偏光板)から射出する偏光を $\mathbf{E}' = (E'_x, E'_y)$ とすると、検出される光強度 I は(13)式で与えられる。光強度 I は各偏光成分の強度和であ

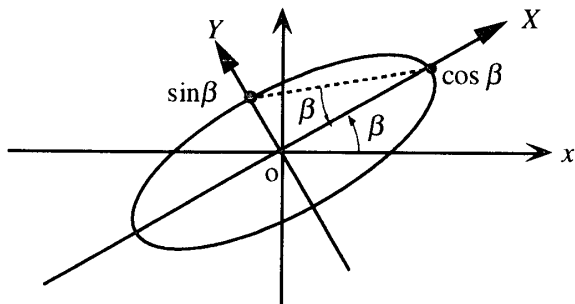


Fig.5 Elliptical polarization where the ellipticity angle χ is β and the azimuth of the major axis ϕ is also β .

り、共役行ベクトルを用いて次式のように書ける。

$$I = |E'_x|^2 + |E'_y|^2 = (\mathbf{E}'^*, \mathbf{E}'^*) \begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \end{pmatrix} = \mathbf{E}'^{*T} \mathbf{E}' = \mathbf{E}'^\dagger \mathbf{E}' \quad (33)$$

ここで記号*は複素共役を、 T は行列の転置を、 \dagger は共役転置行列を表す。検光子に入射する光 $\mathbf{E} = (E_x, E_y)$ が θ 回転した検光子のジョーンズ・マトリックス $[T]$ の作用を受けて、 $\mathbf{E}' = [T]\mathbf{E}$ となっているので、光強度 I は次式のように書ける。

$$I = \mathbf{E}'^\dagger \mathbf{E}' = ([T]\mathbf{E})^\dagger [T]\mathbf{E} = \mathbf{E}^\dagger [T]^\dagger [T]\mathbf{E} = (\mathbf{E}_x^*, \mathbf{E}_y^*) \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} \quad (34)$$

3. 1 1/2 波長板の場合

主軸が β 回転した1/2波長板に水平偏光を入射すると、1/2波長板から射出した偏光は(27)式のようなになる。(27)式を(34)式に代入して光強度 $I(\theta)$ を求めると次式となる。

$$I(\theta) = \frac{1}{2} \{ 1 + \cos 4\beta \cos 2\theta + \sin 4\beta \sin 2\theta \} \quad (35)$$

したがって(14)から(16)式は、それぞれ $I_0=1/2$ 、 $a=\cos 4\beta$ 、 $b=\sin 4\beta$ となる。これらから振幅比角 α と位相差 δ の理論値が(18)、(19)式より次式のように求められる。

$$\alpha = \frac{1}{2} \cos^{-1}(\cos 4\beta) = \begin{cases} 2\beta & 0 \leq \beta < \frac{\pi}{4} \\ \pi - 2\beta & \frac{\pi}{4} \leq \beta < \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (36)$$

$$\delta = \cos^{-1} \left(\frac{\sin 4\beta}{|\sin 4\beta|} \right) = \begin{cases} 0 & 0 < \beta < \frac{\pi}{4} \\ \pi & \frac{\pi}{4} < \beta < \frac{\pi}{2} \\ \text{不定} & \beta = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (37)$$

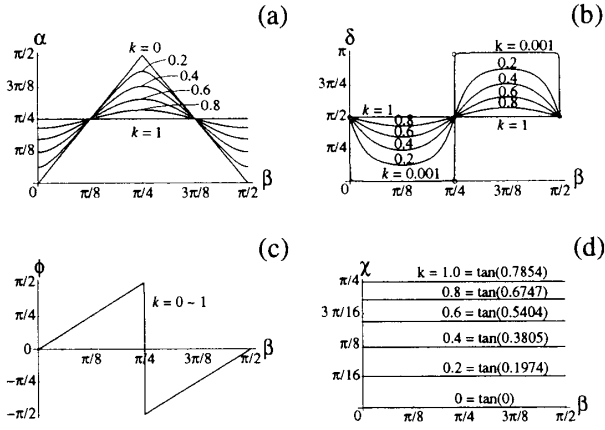


Fig.6 Theoretical values of (a) the amplitude ratio angle α , (b) the phase difference δ , (c) the azimuth ϕ of the major axis of the ellipse, (d) the ellipticity angle χ according to the rotation angle β of the principal axis of a half wave plate.

振幅比角 α と位相差 δ のグラフを Fig. 6 (a)、(b) にそれぞれ示した。Fig. 6 には参考のために入射光が水平楕円偏光 ($k = 0 \sim 1$) の場合の理論曲線を示した。今考えている入射光は直線偏光なので、楕円率 $k = 0$ のグラフとなる。さらに楕円偏光の傾き角 ϕ と楕円率角 χ を (20)、(21) 式より理論値を求めると次式となる。

$$\phi = \frac{1}{2} \tan^{-1}(a, b)$$

$$= \frac{1}{2} \tan^{-1}(\cos 4\beta, \sin 4\beta) = \begin{cases} 2\beta & (0 \leq \beta < \frac{\pi}{4}) \\ 2\beta - \pi & (\frac{\pi}{4} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}) \end{cases} \quad (38)$$

$$\chi = \frac{1}{2} \sin^{-1}(\sin 2\alpha \sin \delta) = 0 \quad (0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}) \quad (39)$$

上の(38)式の $\tan^{-1}(a, b)$ は、比 b/a の符号を含めた逆正接を計算することを表し、出力は $[-\pi, \pi]$ の範囲で得られる。Fig.6(c) に偏光の方位角 ϕ を示したが、入射光の楕円率 k が変化しても方位角 ϕ は常に β に比例しているのがわかる。Fig.6(d) には楕円率角 χ のグラフを示した。Fig.6 中の $k = 0$ の曲線が入射偏光が水平完全直線偏光の場合を示し、上式(36)~(39)の計算結果を表す。実際の実験では完全直線偏光を作るのは難しいので、入射光の楕円率 k が $0 \sim 1$ の間で変化する場合の計算結果を Fig.6 に示した。 k が 0 以外の時の理論計算手順は付録に示した。

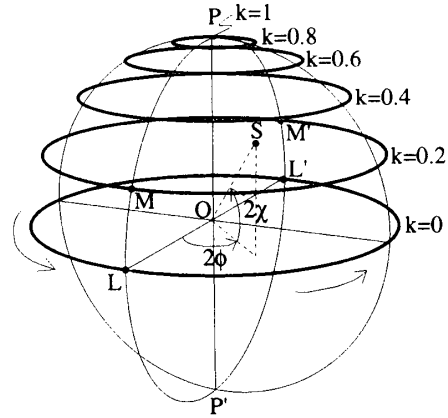


Fig.7 Trajectories on Poincare' sphere according to the rotation of the principal axes of a half wave plate, where the ellipticities k of incident horizontal light vary from 0 to 1.

偏光状態はポアンカレ球上の一点で示される。回転 $1/2$ 波長板からの射出偏光をポアンカレ球上で示したものを Fig.7 に示した。球上 S 点を表す各角度はいままで議論してきた各角度に対応する。したがって、完全直線偏光が入射する場合は、 $1/2$ 波長板の回転角が $0 \sim 90^\circ$ まで変化すると、射出光の偏光状態は Fig.7 の赤道上で実線に沿って $L \sim L' \sim L$ と一周する。一方水平楕円偏光 (楕円率 $k = 0 \sim 1$) が入射する場合は、 L よりずれた点 M から $M' \sim M$ と Fig.7 の曲線に従って一周する。曲線の軌道にそって各角度を求めると、Fig.6 の各曲線のようになることがわかり、完全水平偏光の場合は各曲線軌道の極限であることがわかる。最近市販されている偏光状態を測定する装置では、測定結果が Fig.7 のようなポアンカレ球上の軌跡として表示されるものが多い。

3.2 1/4 波長板の場合

主軸が β 回転した $1/4$ 波長板に水平偏光を入射すると、 $1/4$ 波長板から射出した偏光は(29)式のようなになる。(29)式を(34)式に代入して光強度 $I(\theta)$ を求めると次式となる。

$$I(\theta) = 1 + \frac{1 + \cos 4\beta}{2} \cos 2\theta + \frac{\sin 4\beta}{2} \sin 2\theta \quad (40)$$

したがって(14)から(16)式は、それぞれ $I_0 = 1$ 、 $a = (1 + \cos 4\beta) / 2$ 、 $b = \sin 4\beta / 2$ とな

る。これらから振幅比角 α と位相差 δ の理論値が(18)、(19)式より次式のように求められる。

$$\alpha = \frac{1}{2} \cos^{-1}(\cos^2 2\beta) \quad (41)$$

$$\delta = \cos^{-1} \left(\frac{\sin 4\beta}{2\sqrt{1 - \cos^4 2\beta}} \right) \quad (42)$$

振幅比角 α と位相差 δ のグラフをFig.8 (a)、(b) の $k = 0$ の曲線としてそれぞれ示した。さらに楕円偏光の傾き角 ϕ と楕円率角 χ を(20)、(21)式より理論値を求めると次式となる。

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{2} \tan^{-1}(a, b) \\ &= \frac{1}{2} \tan^{-1}(\cos 2\beta, \sin 2\beta) = \begin{cases} \beta & (0 \leq \beta < \frac{\pi}{4}) \\ \beta - \frac{\pi}{2} & (\frac{\pi}{4} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}) \end{cases} \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{1}{2} \cos^{-1} \left(\frac{b}{\sin 2\phi} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cos^{-1} \left(\frac{\sin 2\beta \cos 2\beta}{\sin 2\beta} \right) = \begin{cases} \beta & (0 \leq \beta < \frac{\pi}{4}) \\ \frac{\pi}{2} - \beta & (\frac{\pi}{4} \leq \beta < \frac{\pi}{2}) \end{cases} \end{aligned} \quad (44)$$

上式(44)では $b = \cos 2\alpha = \cos 2\chi \cos 2\phi$ の関係式を用いた。Fig.8(c) に楕円の方位角 ϕ と、(d) に楕円率角 χ のグラフをそれぞれ示した。図の $k = 0$ 実線は入射偏光が水平完全直線偏光の場合を示し、上式(41)~(44)の計算結果を表す。この結果より、水平完全偏光が入射すると方位角が β 、楕円率角 β の楕円偏光となることがよくわかる。実際の実験では完全直線偏光を作るのは難しいので、楕円率 $k = 0 \sim 1$ の楕円偏光が水平入射した時の計算結果を図中に示した。この場合の理論計算式も付録に示した。

回転1/4波長板からの射出偏光をポアンカレ球上で示したものを Fig.9 に示した。完全直線偏光が入射する場合は、1/4波長板の回転角が $0 \sim 90^\circ$ まで変化すると、Fig.9 の $k = 0$ のときの実線に従って $L \sim P \sim L$ と一周する。P点は球の極であり右円偏光を表す。一方水平楕円偏光が入射する場合は、Lよりわずかずれた点M(例えば $k = 0.2$ の時)から $M' \sim M''$ と Fig.9の曲線に従って移動する。曲線の軌道にそって各角

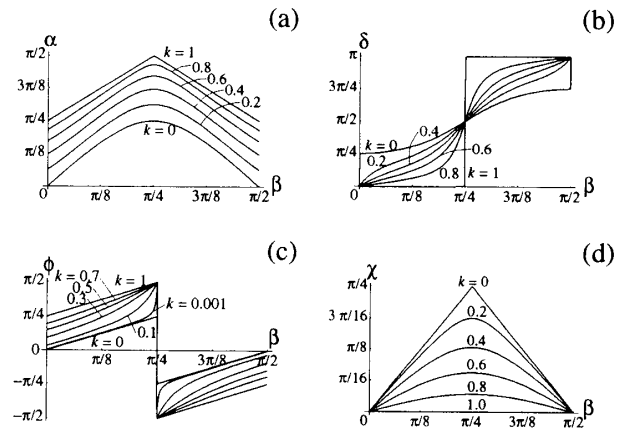


Fig.8 Theoretical values of (a) the amplitude ratio angle α , (b) the phase difference δ , (c) the azimuth ϕ of the major axis of the ellipse, (d) the ellipticity angle χ according to the rotation angle β of the principal axis of a quarter wave plate.

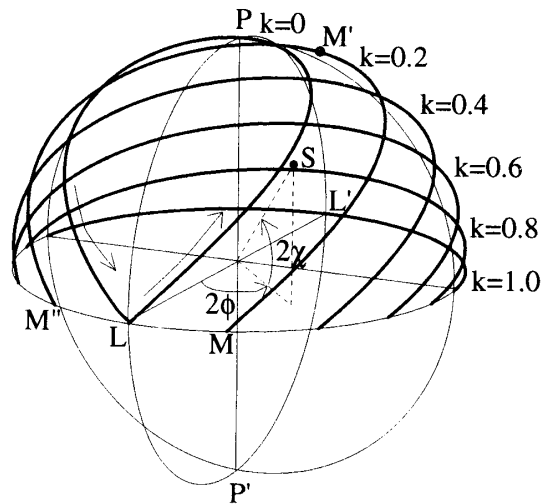


Fig.9 Trajectories on Poincare' sphere according to the rotation of the principal axes of a quarter wave plate, where the ellipticities k of incident horizontal light vary from 0 to 1. 度を求めると、Fig.8に示したような曲線になる。

4. 実験方法と結果

実験の配置図を Fig.10 に示した。He-Ne レーザー(1 m W)からの水平直線偏光(楕円率約 0.002)に光減衰器(透過率 1%)、波長板および検光子(ポラロイド偏光板 消光比 0.01%)を通し、光検出素子(フォトダイオード 感度 1 lx)に入射させる。この光電変換信号を増幅

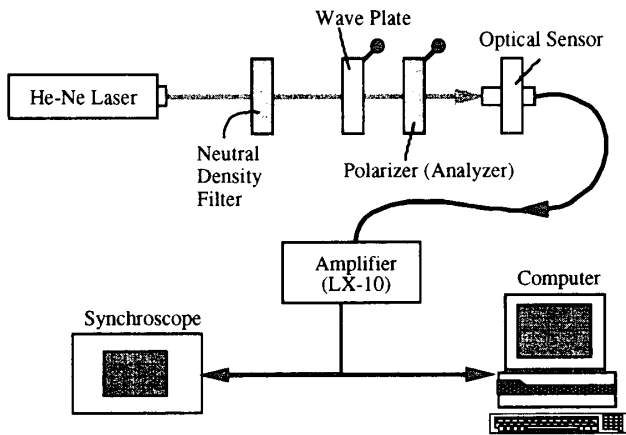


Fig.10 Experimental setup for a measurement of a polarization state of light exit from a wave plate, where the incident light on to the wave plate is linearly polarized light in the horizontal direction.

器(島津理化(株) LX-10、リニア出力±8 v)、A/D変換器(12bit)を通し計算機に入力し、波長板から射出した光の偏光を測定する。波長板の回転角 β を $0^\circ \sim 85^\circ$ まで 5° おきに回転させ、各角度で検光子を $0^\circ \sim 360^\circ$ まで 30° おきに回転する。回転操作を手動で行うために、光走査法の分割数が少なくなり測定精度に影響する。増幅器のオフセット電圧も手動設定を行うが、この設定誤差は測定に大きく影響する。計算機により(23)~(25)式のフーリエ係数を求め、さらに(14)式~(21)式を計算して振幅比角 α 、位相差 δ 、長軸の方位角 ϕ および楕円率 k 、楕円率角 χ などを求める。

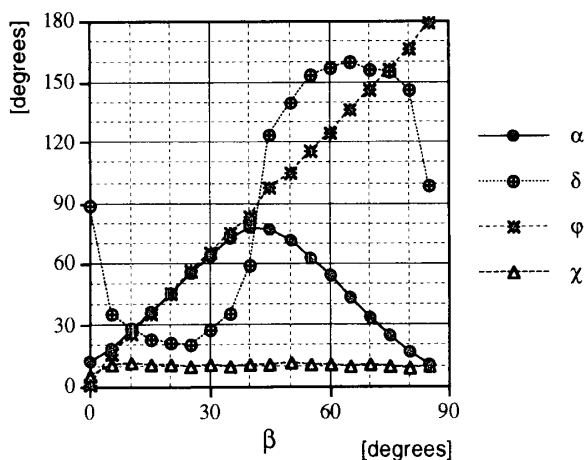


Fig.11 Experimental results for a half wave plate, whose principal axes are rotated by β degrees.

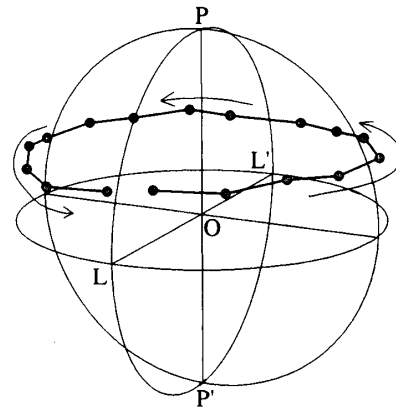


Fig.12 Experimental result for a half wave plate displayed as a trajectory on the Poincaré sphere.

1/2波長板の実験結果を Fig.11 に示した。各曲線が楕円偏光の各角度の実験結果であるが、長軸の傾き角 ϕ は滑らかに接続するように、 $0 \sim 180^\circ$ で表現してある。Fig.6 に示した理論計算結果と大体良く一致しているが、入射偏光の楕円率 k が0.2のときの計算結果と良く一致している。実験では、入射レーザー光の楕円率は公称0.002であるが、この装置での測定結果は0.09となつて45倍ほど異なってしまう。この原因としては、光検出にフォトダイオードを用いているために、オフセット電圧が変動し易く(手動設定)、弱い光強度のときに誤差が大きくなるためと思われる。したがって、低楕円率の測定には誤差が大きくなると思われる。1/2波長板を装置に挿入した後では楕円率は0.19(楕円率角 10.8°)となり、実験結果が理論曲線の $k = 0.2$ の場合と良く合うことも納得できる。Fig.11 で、楕円率角 χ が約 10° で一定であり、傾き角 ϕ が 2β に比例していることから、1/2波長板の回転により、楕円の形は変わらず、偏光方向のみが 2β で回転していることが実験で確かめられた。

Fig.11 で示した実験結果の ϕ と χ を用いて、測定結果をポアンカレ球上に示した結果を Fig.12 に示した。黒丸で示した実験結果が、緯度約 10° で一定の円周上を右回りに回転していくのが分かる。これは、Fig.7 に示した $k = 0.2$ の理論曲線に良く一致している。

1/4波長板の場合の実験結果を Fig.13 に示

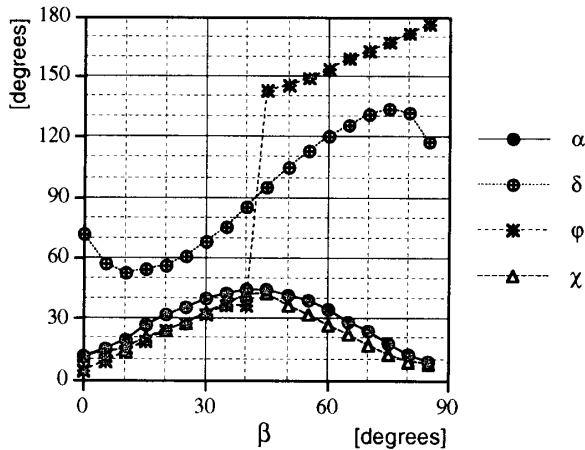


Fig.13 Experimental results for a quarter wave plate, whose principal axes are rotated by β degrees.

した。 ϕ と χ が $1/4$ 波長板の回転角 β に比例しており、波長板の回転により、楕円率角と傾き角が β に等しい偏光が作り出されているのがわかる。楕円率角 χ と傾き角 ϕ の実験結果を用いて、偏光状態をポアンカレ球上に黒丸でプロットしたものを Fig.14 に示した。Fig.9 の $k=0$ のときの理論曲線と良く似ているが、 $\beta=0^\circ$ および 90° 付近で測定の楕円率角が大きくなっている。これは、本測定装置では低楕円率の測定に誤差が大きくなるのが原因と思われる。

5. まとめ

学生実験により偏光現象を良く理解するために、検光子回転法により偏光状態を測定する場合の詳細

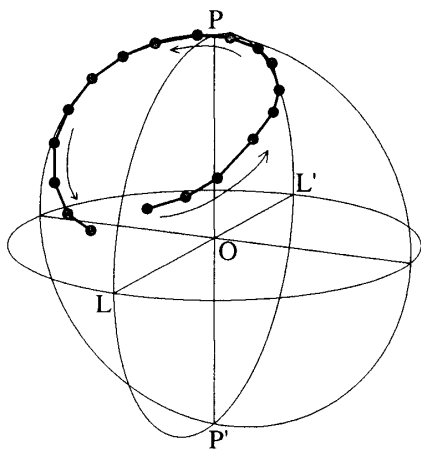


Fig.14 Experimental result for a quarter wave plate displayed as a trajectory on the Poincare' sphere.

しい検討を行った。検光子回転法や走査測光法を詳しく説明し、現代的な測定法も理解できるようにした。ジョーンズ・マトリックスや干渉強度を自分で計算できるようになり、偏光状態をポアンカレ球上で想像できるようになれば、かなり理解が深まったことになる。実験では走査測光法の分割数が $1/2$ 程度であり、測定精度はあまり良くない。光検出器にダイナミックレンジの広く直線性の良いものを使い、プリアンプも光検出用のものを使えば、低楕円率の測定も誤差が少なくなると思われる。検光子の回転も自動化可能であるが、自動化し過ぎるとただデータをとるだけになってしまい、学生実験にはなじまない。この程度の誤差は考察させるのには丁度いいのかもしれない。偏光とは何かを理解させるために、今後は教育効果も含めてさらに検討したいと思っている。

この研究は、91年度東京工芸大学 研究教育助成費 "光応用計測の総合的研究・教育" の一部として行ったものであり、関係各位に感謝する。

参考文献

- 1) R. M. A. Azzam and N. M. Bashara : "Ellipsometry and Polarized Light" (North-Holland, New York, 1988) pp.411-414.
- 2) 辻内順平 : "光学概論Ⅱ -波動光学-" (朝倉書店、1979) pp.206-209.
- 3) 辻内順平 : "光学概論Ⅰ -基礎と幾何光学-" (朝倉書店、1979) pp.16-19.
- 4) 鶴田仁夫 : "応用光学Ⅱ" (倍風館、1990) pp.233-234.

付録

楕円率 k の水平楕円偏光が波長板に入射するときの光強度 $I(\theta)$ の計算結果を示す。

(1) $1/2$ 波長板の場合

入射偏光が楕円偏光であるので入射光のジョーンズ・ベクトルは、 $(1, ki)$ となる。主軸が β 回転した $1/2$ 波長板から射出する光は(26)式を用いて次のようになる。

$$\begin{pmatrix} \cos 2\beta & \sin 2\beta \\ \sin 2\beta & -\cos 2\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ ki \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\beta + ik \sin 2\beta \\ \sin 2\beta - ik \cos 2\beta \end{pmatrix} \quad (45)$$

この射出光に θ 回転した検光子を通した後の光強度 $I(\theta)$ は、(34)式より次のようになる。

$$\begin{aligned} I(\theta) &= \begin{pmatrix} \cos 2\beta - ik \sin 2\beta, \sin 2\beta + ik \cos 2\beta \end{pmatrix} \\ &\begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2\beta + ik \sin 2\beta \\ \sin 2\beta - ik \cos 2\beta \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(1+k^2) + \frac{\cos 2\theta}{2}(1-k^2)\cos 4\beta + \frac{\sin 2\theta}{2}(1-k^2)\sin 4\beta \quad (46) \end{aligned}$$

上式の係数から(14)～(15)式は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} I_0 &= \frac{1+k^2}{2} \\ a &= \frac{1-k^2}{1+k^2} \cos 4\beta \\ b &= \frac{1-k^2}{1+k^2} \sin 4\beta \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

(2) 1/4 波長板の場合

入射光のジョーンズ・ベクトルは、 $(1, ki)$ であるので、主軸が β 回転した1/4波長板から射出する光は(28)式を用いて次のようになる。

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 1+i \cos 2\beta & i \sin 2\beta \\ i \sin 2\beta & 1-i \cos 2\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ ki \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-k \sin 2\beta + i \cos 2\beta \\ k \cos 2\beta + i(k + \sin 2\beta) \end{pmatrix} \quad (48) \end{aligned}$$

この射出光に θ 回転した検光子を通した後の光強度 $I(\theta)$ は、(34)式より次のようになる。

$$\begin{aligned} I(\theta) &= \begin{pmatrix} 1-k \sin 2\beta - i \cos 2\beta, k \cos 2\beta - i(k + \sin 2\beta) \end{pmatrix} \\ &\begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-k \sin 2\beta + i \cos 2\beta \\ k \cos 2\beta + i(k + \sin 2\beta) \end{pmatrix} \\ &= (1+k^2) + \frac{1}{2} \left\{ 1-k^2 + (1-k^2)\cos 4\beta - 4k \sin 2\beta \right\} \cos 2\theta \\ &\quad + \left\{ (1-k^2)\sin 2\beta + 2k \right\} \cos 2\beta \sin 2\theta \quad (49) \end{aligned}$$

上式の係数から(14)～(15)式は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} I_0 &= 1+k^2 \\ a &= \frac{1}{2(1+k^2)} \left\{ (1-k^2)(1+\cos 4\beta) - 4k \sin 2\beta \right\} \\ b &= \frac{1}{1+k^2} \left\{ (1-k^2)\sin 2\beta + 2k \right\} \cos 2\beta \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

上式(50)と(18)～(21)式をもちいて理論値が計算できる。