統計数理（2018）
第 66 巻 第 1 号 153–165

特集「統計教育の新展開」
［研究ノート］

大学学部における統計教育の実践報告
—演繹と帰納をつなぐアクティブラーニング—

石綿 元[1,2]

（受付 2017 年 6 月 19 日；改訂 9 月 23 日；採択 10 月 4 日）

要　旨

本研究ノートは，一般的な理科系大学の学部統計教育におけるアクティブラーニングを導入した講義の実践報告である．アクティブラーニングの展開として導入した教育方法は，履修学生各個人の興味関心に応じたレポート作成を課すことである．その目的は，教室における丁寧な演繹的内容の解説と，レポート作成時の自主的な活動による帰納的思考を，自然な形で融合させ，演繹と帰納をつなげて思考する統計の考え方を，経験を通じて理解させることである．このことにより，履修者自らの能動的な活動を促し，各自にとって身近なデータを実際に解析させることで，より深い統計の理解が得られ，学生の満足度も高いことがわかった．

キーワード：大学学部統計教育，アクティブラーニング，演繹と帰納．

1. はじめに

統計学は，現実問題から得られたデータについて，各種確率分布等を利用し，数理的根拠のある形で，問題の本質に最も近いと考えられる結論を求め，問題の解決を目指そうとする方法である．したがって，確率論などの演繹的思考を中心として理解をすべき側面と，データの持つ特性に応じた帰納的思考を導入すべき側面をともに併せ持つ特徴があると言える．演繹的思考の部分は，他の数学系科目と同様に講義における解説で対応でき，学生各自の数理的理解の度合いに応じてその理解も求められるが，帰納的思考部分を一律に理解させることはなかなか難しい．なぜならば，帰納的思考には，対象となっている事象独自の背景の理解や，当該事象そのものの理解の深度によって，そのデータが持つ意味が変わってくる場合もあるからである．言い換えれば，当該対象事象に如何に興味を持っているかが影響してくる部分が含まれているのである．そこで，通常のレクチャーを中心とした講義を進めながら，各々の学生自らが独自に興味ある事柄について統計学を使って明らかにしたい課題を考えさせることにした．このことにより，演繹的取り扱いのみにとどまらない統計的思考の理解を求め，さらにはアクティブラーニングの実践をも目指した．本研究ノートは，大学学部統計学講義における一つの事例報告である．

2. 実践講義の概要

報告する実践講義は，一般的な 4 年制大学における 2 単位の理科系学部学科 2 年次配当の学

[1] 総合研究大学院大学 複合科学研究科統計科学専攻：〒 190–8562 東京都立川市緑町 10–3
[2] 芝浦工業大学 工学部：〒 136–0061 東京都江東区豊洲 3–7

表 1. 達成目標との対応・割合.

講義の達成目標	中間試験	レポート	期末試験	合計
1.		2%	3%	5%
2.	18%	6%	6%	30%
3.	2%	2%	1%	5%
4.		15%	15%	30%
5.		20%	10%	30%
合計	20%	45%	35%	100%

科専門科目として開講されているものである.

講義の達成目標は次の通りである.

(1) 記述的尺度を用いたデータの要約や，データの視覚化ができる.
(2) 事象の確率を計算でき，確率変数および確率分布の意味を理解できる.
(3) 中心極限定理の概念を理解でき，無作為抽出との関係を理解できる.
(4) 各種統計解析手法を目的に応じて適用でき，結論を導くことができる.
(5) 現実の問題についてデータを取得し，統計的思考に基づく課題解決ができる.

次に，達成目標と各評価法との対応・割合を表 1 に示す.

この達成目標との対応・割合は，達成目標を実現するために履修学生各自が各評価を受けるにあたっての重点的に学習すべき項目比率を表したものである.

対応する講義計画を表 2 に示す.

第 1 回講義において講義概要と記述統計を中心とした導入的な講義の後，第 2 回から中間試験までの間は，主として確率論を扱い，中間試験以降は，推測統計(数理統計学)を毎回テーマごとに解説している構成となっている．この計画を編成するにあたっては，純粋に数学として理解できる確率論の部分と，その後でそれとは趣の多少異なる推測統計の部分とをできるだけ分けて解説できるように配した．ただし，扱う内容については，統計検定公式教科書等(日本統計学会 編, 2015; 東京大学教養学部統計教室 編, 1991; Hoel, 1963)を参考に，理科系学科の専門科目であることを考慮しつつ学部で扱うべき基礎統計を理解できるような内容(統計関連学会連合理事会/統計教育推進委員会, 2014)とした．概ね一般的な講義計画であると考える.

成績評価の方法は，「達成目標との対応・割合」に関わらず，期末試験 50 点，中間試験 30 点，レポート 20 点，合計 100 点で採点し，総合得点 60 点以上を合格とするが，レポートの提出を必須としている．これは，各学生が独自に設定した課題について各自の能動的な活動により統計を用いた結論を求めるレポートを課し，レポート作成ができることを最高到達点と設定したためである．成績評価方法に示すように成績におけるレポートの比率は 2 割であるが，講義目標達成におけるレポートの比率は高めに設定してある．これは，レポート作成を通じて講義で扱った統計の手法全体を俯瞰しつつ，その取り扱い方法を「経験」してもらうためである．成績評価にレポートの提出を必須としたのはこのような理由からである.

表 2. 講義計画.

講義回	講義計画	講義テーマ	講義内容
1	記述統計 [データ解析]	データをみる・よむ	度数分布表, ヒストグラム, 記述的尺度ほか
2	確率論 1	事象と確率	事象と確率, 条件付き確率, ベイズの定理ほか
3	確率論 2	確率変数と確率分布 1	確率変数・離散型確率分布 2 項分布, ポアソン分布, 超幾何分布ほか
4	確率論 3	確率変数と確率分布 2	確率変数・連続型確率分布 正規分布,χ^2-分布,F-分布,t-分布ほか
5	確率論 4	中心極限定理	大数の法則, 中心極限定理ほか
6	中間試験 推測統計 [数理統計学] 1	小テストと解説 推測統計概論	確率に関する試験・解答解説 統計学の考え方, 母集団と標本分布ほか
7	推測統計 [数理統計学] 2	点推定と区間推定	点推定と区間推定, 平均の区間推定 (z), 分散の区間推定, 平均の区間推定 (t)
8	推測統計 [数理統計学] 3	仮説の検定	検定の過誤,z-検定, 比率の検定, t-検定, 分散の検定,F-検定ほか
9	推測統計 [数理統計学] 4	相関分析 回帰分析	標本相関係数, 無相関性の検定, 擬似相関ほか 線形回帰, 最小二乗法, 重回帰, 多重共線性
10	推測統計 [数理統計学] 5	分散分析 母数によらない方法 1	因子・水準, 二元配置, 主効果モデルほか 適合度検定
11	推測統計 [数理統計学] 6	母数によらない方法 2	順序統計量, 符号検定, 順位検定, 順位相関ほか
12	推測統計 [数理統計学] 7	品質管理	SQC, 管理限界, 抜取検査, 工程能力指数
13	推測統計 [数理統計学] 8	情報量規準	カルバック-ライブラー情報量, 最尤法,AIC
14	期末試験	試験と総評	統計に関する試験, 解答解説, 総評

3. アクティブラーニングと統計教育

3.1 レポート課題とその目的

物理学者アインシュタインは，1936 年 10 月 15 日アメリカ高等教育 300 年祭の講演『On Education』で，「教育のもっとも重要な方法は，生徒に実際に物事をやってみようという気を起こさせる点にある．このことは，小学校の最初の筆記練習も，大学の学位論文の作業にも，数学の問題を解くことやスポーツの実技などすべてを通じて言えることだ.」と述べている (Einstein, 1972)．また，同時に，「すべてのあることを成就する背景には動機が存在し，動機は，その企てを達成することで強化され助長されるが，この場面は，好奇心に発するものであり，最大の多様性に充ちていて，学校の教育的価値にとって最も重要なのは，この多様性である.」とも述べている (Einstein, 1972)．

また，紀元前 250 年ごろの古代中国の思想家荀子の言葉として伝わっているものに，「聞いたものは忘れる．見たものは覚えている．経験したものは理解できる.」という言葉がある (Vaillancourt, 2009)．

統計学は，現実問題をデータを用いて理解する方法の体系であることから，学生個々の多様な興味関心に応じた対象を通じて，「経験」によって理解することが可能であると考える．そこで，履修者には，次の課題でレポートを課している．

課題.「これまでの講義で扱った統計の手法をあなたの興味ある対象に適用し，結論を導け.」

3.2 レポート作成を通じたアクティブラーニング

3.2.1 アクティブラーニングの展開

本講義では，課題レポートを作成することを最高到達点に設定しているため，講義時間を通じたレポート課題完成への支援を積極的に行うことを中心に講義を展開する．各学生独自の興味関心に応じた内容をレポートに求めるため，作成期間に最低 1 ヶ月以上の期間を与え，テーマを考えるところから求めていく．

レポート作成に当たり，教室での講義内容を十分に理解できないと，取りかかること自体が難しいため，できるだけ早い段階の講義回で，複数回レポートについての予告を与えておき，講義への積極的な参加を促しておく．そのうえで，毎回の講義では，各回の講義内容に応じた簡単な演習問題を通じ，講義時間内において演習を行い，質問時間を設けることで十分な理解を求めるとともに質問しやすい雰囲気を作っておく．

推測統計の基本的な内容を一通り終えた段階で，レポート課題を提示し，課題の作成開始を指示する．その際には，過去のレポートの例を紹介し，データを取得する際の注意点や，インターネットを通じた政府統計などの公的統計データの引用等，レポート作成について有用と考えられる内容を中心に，参考資料，参考サイト等について解説を行う．

レポート課題提示後の各回の講義では，演習の時間を通じてレポート課題についての質問の時間を与え，適宜助言を行うことで，レポート作成に能動的に取り組めるよう講義時間を使ってサポートをしていく．具体的には，質問はおおむね次のような内容が多い．

- 課題の設定が決まらない．
- 課題は決まったが，データの取得方法が分からない．
- どのような解析方法を用いればよいか教えてほしい．

課題が設定できないという相談には，日常的に疑問に思っていることなどをいくつか挙げさせ，その中からデータが得られそうなものを選択させたり，過去のレポートを再度紹介し，興味のありそうなテーマについて自ら考えさせる．データの取り方についての相談には，ランダムサンプリングが成立しているといえるようなデータの集め方を学生とともに考える．解析方法についての質問では，講義内容を復習させ，何を確率変数に取れば，どのような確率分布をモデルとして利用できるかを考えさせる．

このようにして作成されたレポートは，講義の最終日に提出させ，期末試験日までに採点を行い各自へ返却する．期末試験終了後に代表的なレポートを選び，解説とコメントを与えて，履修学生全員にフィードバックをしておく．

提出必須のこのレポート課題は，その作成のためのプロセスそのものが，効果的なアクティブラーニングとなる．また，統計解析の対象については，してはいけないこと以外すべて対象として構わないとしている．

3.2.2 統計学の身近さを感じさせる演出

レポート課題の提示に当たっては，おそらく最初の困難が伴うであろう課題の設定に対して，できるだけ身近な問題を扱うようにその時々の話題等を提供したり，昨年度までの同一講義における先輩のレポートを適宜紹介解説する．レポートに着手する前の早い段階において，身近な題材が統計のレポートの題材として有効であることを理解させておく．

図 1 は，2013 年度から 2016 年度までの過去 4 年間に提出を受けたレポートのテーマの分析である．

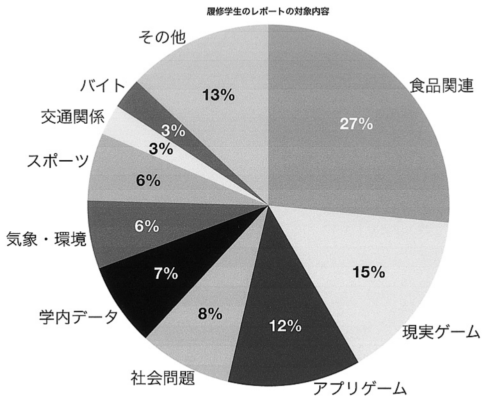

図 1．学生のレポートテーマの分類．

図 1 に示す通り，この 4 年間に提出を受けたレポート対象テーマは，実に多岐にわたっており，各学生の興味関心の多様性が伺われる．一番多いのは，食品関連であるが，普段から友人と食べているお菓子を題材に複数人でチームを組んでデータを取得したものが多い．次に多いのは，現実ゲームであるが，これは，自作のダイスの試行結果や，トランプゲームなどからのデータを用いたものである．アプリゲームとは，パソコンやスマートフォンにおけるアプリケーションゲームのことで，これも学生にとって身近な存在であることが伺われ，現実ゲームと合わせると食品関連に匹敵する．社会問題とは，交通事故，犯罪の発生地域，所得配分や輸出入等の公的統計データを用いた解析である．学内データは，スクールバスや，部活動，サークル活動の中から得られるデータで，自己や自チームの成績を分析したものが多い．気象・環境では，気象庁のホームページで公表されているデータを利用した解析が多く，地球温暖化や地震のデータ解析などである．スポーツでは，野球やサッカーなどにおいて応援するチームや個人成績の解析などである．交通関係では，電車，車，バイク等の所要時間や燃費などに関する解析である．バイトとは，アルバイト先のデータを解析したもので，主なアルバイト先としては，飲食店，コンビニエンスストア，ゲームセンターなどである．その他では，このほかの分類に含まれない内容で，硬貨の流通調査や，巷の話題の検証など更に多岐にわたる．

この多様なレポートテーマが，示している通り，おおむね力作が多く，学生自らの身近な興味関心に応じたレポートを求めることで，積極的な活動を促したと考えられる．

3.2.3　具体的なレポートの内容の例の概要

提出されたレポートのうち，いくつかのレポートについてその概要を示しておく．

- 最寄駅から大学までのスクールバスの所要時間の調査（テーマの分類：学内データ）

目的：最寄り駅から大学までのスクールバスの所要時間が，大学が公式に公表している 5 分かどうかを明らかにする．

データの取得方法：6 人でデジタル腕時計を用いて扉が閉まってから扉が開くまでの時間を 30 日にわたって計測したデータを用いる．

解析方法：帰無仮説を，所要時間は 5 分と見なせるとして，平均の検定（t-検定）を有意水準 5% で，片側検定を行う．

結論：統計量は棄却域に含まれるため，所要時間は 5 分ではない．

- **C** 社と **K** 社のポテトチップスの原料ジャガイモの大きさは違うのか（テーマの分類：食品関連）

目的：人気の C 社と K 社のポテトチップスについて原料のジャガイモに大きさの違いはあるのか．

データの取得方法：通学定期券の区間(約 74Km，16 駅)にある各駅で降車し，最寄りのスーパー・コンビニ等小売店で，C 社と K 社のポテトチップスを合計 30 袋購入し，それぞれの袋の中から大きい 2 枚を小数点第 1 位まで長さを測る．

解析方法：まず，分散比について検定を行い，等分散と見なせるため，帰無仮説を「大きさに差はない」として平均の差の検定の検定(t-分布)を有意水準 5% として両側検定で行う．

結論：統計量は棄却できないため，この 2 社の使用するジャガイモの大きさに差があるとは言えない．

- **流通している 1 円硬貨の発行年度は，各年度の発行枚数と一致しているのか(テーマの分類：その他)**

目的：流通している 1 円硬貨の発行年度は，造幣局が公表している各年度の発行枚数と一致しているのか．

データの取得方法：6 人で東京，神奈川，埼玉の都市銀行，地方銀行，信用金庫をまわり，3000 円分を 1 円硬貨に両替し，製造年号を調べる．一方，造幣局のホームページで公表されている各年度の発行枚数を調べる．

解析方法：「両替した各年度の割合」を観測度数，「造幣局の各年度の発行割合」を理論度数として帰無仮説を理論度数と観測度数は適合しているとして，適合度検定を行う．

結論：帰無仮説は棄却されるため，理論度数とは適合していない．古くなった硬貨は，回収されてしまうことがあることが原因だと考えられる．

- **焼肉店の暖かいスープなどの商品の売り上げと気温の回帰分析(テーマの分類：バイト)**

目的：バイト先の焼肉店の特定商品の売り上げと気温との関係について回帰直線をもとめ，仕込みの無駄を省きたい．

データの取得方法：スープ等の特定メニューの売上数をバイト先の店舗において取得．気象庁のホームページから当該日の気温を入手する．

解析方法：平均気温や最高気温と売上数の関係についての回帰直線を求め，決定係数によってより関係性の深いものを選択し，回帰直線を確定していく．

結論：決定係数により，平均気温よりも最高気温を用いた回帰直線が選択され，気温に応じた仕込み数の見込みを立て易くなった．

3.2.4 アルバイト先データを用いたレポートの教育効果

レポート全体のテーマ割合では報告数は多くないが，アルバイト先のデータを用いることは，その他のデータを用いたレポートに比べ，特に意欲的なものが多く，課題の設定においてもデータ取得のアイディア等も良く工夫されているものが多い．さらに，結論についても職務上の経験が反映されることが見受けられ，学習効果が非常に高いと感じている．ただし，レポート課題提示時点において，企業秘密等の漏洩はしてはいけないことや，雇用契約上禁止事項等は行わないことを確認してある．

4. 演繹的講義内容の重要性

4.1 演繹的講義内容の重要性

推測統計学の講義として重要なことは，確率分布モデルを仮定することによって不確実性を有する現実のデータを数理的に扱うことができることを理解することである．したがって，確率分布の性質についての理解がないと，得られたデータとモデルとして扱う確率分布との間のつながりが理解できないため，統計を適切な場面で効果的に利用することができず，統計学を

理解したとは言えない．演繹的議論のみに閉じない内容を標榜し，身近な統計学という演出をしたとしても，確率論を中心とした関連する数学は重要であり必要不可欠である．

4.2 演繹的思考と帰納的思考のつながりを理解していない例

ここでも学生から提出を受けたレポート内容から，演繹的部分の講義内容を軽視するとどのような事態が起こるかを考察したい．

この例は，ある学生から提出されたレポートのテーマとその概要である．

- 目的：A 駅から B 駅までの標準時分についての検定
- データの取得法：時刻表の書籍から当該路線の所要時間をすべて得る．
- 解析方法：得られた全データから乱数表を用いてデータを 30 程度選ぶ．
- 結論：標準時分との差について平均の差の検定を行い判断する．

この学生は「鉄道」に興味があり，それに関したデータを取得しレポートとしたいと考えていたようである．

この学生のレポートでは，取得したデータは，時刻表のデータであって，予定として公表されている計画である．ここに不確実さがある訳ではなく，不確実性があるのは，現実に運用を行う上で，ホームの状況，踏切の状況，電車内での状況，気象状況等が日々変わって，電車の所用時分に影響を確率的に与える．このとき，所要時間とのずれが正規分布に従うと考えることにすれば，パラメトリックモデルとして推測統計としての結論を求めることが可能である．実際に電車に乗って，データを得てくれば，このテーマのレポートとしてふさわしいと思われるが，時刻表のデータでは，不確実さを持つデータではない．

この例では，おそらくデータに対してとにかく当てはめれば良いということしか理解しておらず，当てはめるモデルが確率分布で構成されていることと結びつけて理解していないことによって生じてしまったものと考えられる．

つまり，正確に推測統計の基礎となる確率論を理解していないと正しく統計を使用することができないのである．

4.3 様々な数理的能力背景をもつ学生への対応

数理の内容はどこまでを要求すべきかという問題も生じてくる．特に理系学部の場合，数理的表現は，最も身近な理解する上で欠くことのできない表現手段である．しかしながら，受講者全員が同様な数理的理解能力があるとは言えない場合もある．特に，能力別クラスでない場合は，一般的な大学では，その背景は様々である．

そこで，できるだけ噛み砕き，簡潔でない冗長なまでの表現で，式変形を行った形で，演繹的思考過程のほぼすべてをプリントして提示することにしている．履修者の動向をみて，それでも足りないと感じた場合には，板書で補うことも行う．

特に数学的な興味を持つ学生が多い場合は，できるだけ丁寧な数理的解説を行う必要がある．例えば，t-分布の ∞ の極限は標準正規分布になることについて「数表を用いて確認しなさい」でも統計で利用する分には十分であるとも考えられるが，納得しない学生もいるかもしれない．また，t-分布が発見された経緯やその適用場面を理解するためにも理論的な納得は必要であるとも考える．そこで，この例において配布しているプリントの該当部分について付録に転載しておく．

受講学生の数理的背景が様々な場合は，数学的な側面は特に丁寧な解説が求められるが，学生自身がすべての場合にこれらの数式を導出をできなければならないかと言われれば，必ずしもそうではないと考える．多くの場合，学生各人が納得できればよく，確率分布をモデル化し

て使用していることを認識できる程度に理解していれば良いのではないだろうか．ただし，純粋に数学を理解する活動とは，一定の区別を行った上での統計学の講義という立場は明確にしておくべきであると考える．

ここまで数学の思考部分を演繹的思考と表現し，それ以外の部分を帰納的思考と表現してきたが，ここで，数学の思考について，アインシュタインの考え方を引用したい．1921 年 1 月 27 日ベルリンプロシャ科学アカデミーの講演「幾何学と経験」では，「数学の命題は，それらが現実と関連をもつかぎりにおいて確実ではないのであり，それらが確実であるかぎりにおいて現実との関連をもたないのである」と述べている (Einstein, 1972)．つまり，現実の問題についてのモデルとしての数理的方法の体系である統計学は，数学の応用ではあっても純粋に数学ととらえることは，そもそもできないのである．したがって，必然的に統計学は，統計学として理解しなければならないということになってくる．

5. レポートの評価方法

各学生独自の興味に応じた内容のレポートの作成を求めることは，統計学を身近に「経験」することができ，その有用性を理解できるという大きな利点がある．しかしその一方で評価を行い，採点を行う場合には，同一の課題によるレポートを課す場合に比べ，統一的で画一的基準を用いた評価を行うことは困難である．

そこで，本講義においては，あらかじめ採点基準を定めておき，各項目ごとにおおむね条件を満たしているかについて満点からの減点方式で採点を行っている．

レポートの採点基準

- 統計で明らかにしたい目的を明示しているか(課題の設定は適切か)5 点
- データを適切に入手してきたか(ランダムサンプリングが適切にできているか，もしくは適切な調査データからの引用か，など目的を明らかにするために適切なデータを用いているか)10 点
- 採用した統計の手法は妥当であるか(結論の主張に納得ができるか)5 点

6. 学生の満足度について

本講義では，最終週に行う期末試験において大学が行う学生満足度調査を実施している．毎年講義ごとに実施しているものであるが，2013 年度から 2016 年度までの 4 年間の合計 390 名の履修学生を対象とした調査結果のうち，「本講義は，この科目および関連科目の興味関心を高めましたか」および「本講義に満足していますか」の質問項目の解答について 4 年分を合算して図 2 に示す．なお，履修者は 390 名であるが回答者は 347 名で回答率は約 89% であった．

学生の満足度はおおむね良好な状況と言え，履修者の中には自ら進んで統計検定 2 級を受験し，その合格を報告してくれた者までも出現している．

7. まとめ

本報告における大学学部統計教育では，履修者各自のアクティブラーニングの実践という観点からも各自において身近な問題を見つけ，統計を適用したレポートの作成を必須の課題とした．幅広い視点でレポートを作成させることで，統計的なものの見方について理解させられるように配慮した．この課題レポートによって，アクティブラーニングの実践を各学生個人に求めることが可能であるといえ，より深い統計的思考の理解が期待できる．

講義では，演繹と帰納のバランスに留意し，演繹的思考の内容については，冗長なほどの数

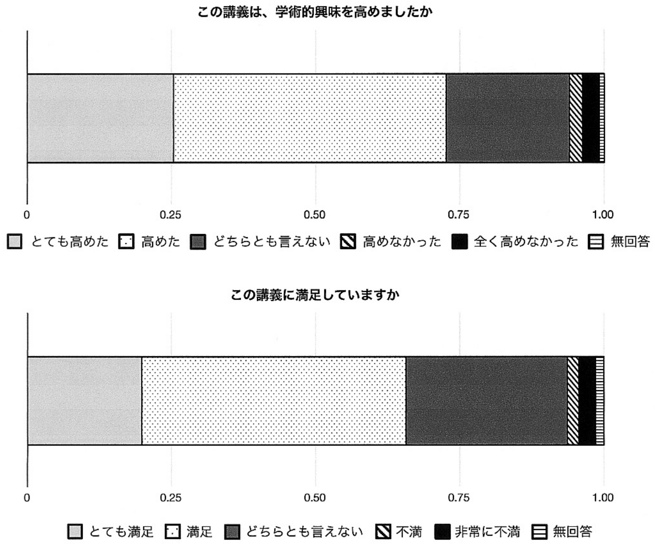

図 2. 学生の授業満足度調査結果.

理的解説を行うことで，様々な数理的能力を背景とする学生に配慮し，各種確率分布の性質などの複雑な数式展開の理解を支援することを目指した．帰納的思考の理解では，身近な話題の例や，過去の履修者が提出したレポート等を効果的に用い，数理的解説とのつながりに気づけるよう留意した．このことによって，演繹的思考と帰納的思考をスムーズにつなぎ，データを中心とした統計科学の思考をより受け入れやすくなることが期待できる．

講義とレポートを総合すると，確率分布をモデルとして利用する統計の適切な理解が期待でき，アクティブラーニングの効果的な展開が可能であった．さらに，アクティブラーニングによって，講義で理解したばかりの内容を実際に生かすことができ，学生の満足度も高まったものと考えられる．

8. さいごに

統計学の講義を担当するようになって，5 年程度であるが，はじめの頃は教科書選びもままならず，手探りで講義を組み立てていたが，ここ 4 年はほぼ同一の内容で講義を展開し，課題の提示，評価方法等も同一で行っている．折しも統計教育大学間連携ネットワークの活動が始まり，統計検定が開始されたことも重なり，公式教科書が示されたことで，学生に対しても講義内容の指標を設定しやすくなった．また，統計関連学会からは分野ごとの参照基準が示されたこと，さらには，大学間連携ネットワーク関連の各種シンポジウム等に参加することで統計教育において必要な講義内容についてを深く考える機会を得ることができた．これらのことなどを背景として，効果的な講義内容の展開が可能になり，本講義が受講学生の支持を高めた要因でもあると考えている．関係各方面の活躍に敬意を示すとともに大変感謝している．

なお，本講義は 2014 年度芝浦工業大学工学部機械工学科優秀教育推進賞を受賞していることを申し添えておきたい．

付録．配布プリントの数理的内容の記載例：$t_\infty \to \mathrm{N}(0,1)$ についての理論的証明

スチューデントの t-分布の特徴を正規分布と比較すると対称な両端でより大きな値を取り，原点上の最大値がより小さい．スチューデントの t-分布の n が大きくなるに従って標準正規分布に近づいていく．

事前の準備事項

スターリングの公式（森口 他, 1956）：

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

スターリングの公式と Γ 関数：$\Gamma(n) = (n-1)!$ であるから，

$$\Gamma(n+1) = n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

標準正規分布の確率密度関数：

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

t-分布の確率密度関数：

$$f(x) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{n}{x^2+n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

上記準備をもとに t-分布の自由度 n が無限大のとき，標準正規分布と一致することを理論的に確認しておく．

Proof.

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{n}{x^2+n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}}\right) \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right) \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{x^2+n}\right)^{\frac{n+1}{2}} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}\right) \\
&= \left(\frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}}\right) \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right) \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^{\frac{1}{2}} n^{\frac{n}{2}}}{(x^2+n)^{\frac{n+1}{2}}}\right) \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}\right) \\
&= \left(\frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}}\right) \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}}\right) \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^{\frac{n}{2}}}{(x^2+n)^{\frac{n+1}{2}}}\right) \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}\right) \\
&= \left(\frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}}\right) \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^{\frac{n}{2}}}{(x^2+n)^{\frac{n}{2}}}\right) \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(x^2+n)^{\frac{1}{2}}}\right) \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}\right) \\
&= \left(\frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}}\right) \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{(x^2+n)}\right)^{\frac{n}{2}} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(x^2+n)^{\frac{1}{2}}}\right) \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}\right) \\
&= \left(\frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}}\right) \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\left(\frac{x^2+n}{n}\right)^n}\right)^{\frac{1}{2}} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(x^2+n)^{\frac{1}{2}}}\right) \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}\right) \\
&= \left(\frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}}\right) \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n}\right)^{\frac{1}{2}} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(x^2+n)^{\frac{1}{2}}}\right) \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}\right) \\
&= \left(\frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}}\right) \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n}\right)^{\frac{1}{2}} \lim_{n\to\infty}\left(x^2+n\right)^{-\frac{1}{2}} \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}\right)
\end{aligned}$$

ここで，右辺第 2 項について

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n}\right)^{\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

また，右辺第 4 項は，Γ 関数の性質 $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$ を用いて，

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2}+1)}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} &= \lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{n+1}{2})\Gamma(\frac{n+1}{2})}{(\frac{n}{2})\Gamma(\frac{n}{2})}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{(n)}\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}
\end{aligned}$$

として，スターリングの公式の Γ 関数表記を用いると，

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} = \lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2}+1)}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} &\approx \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2\pi\frac{n+1}{2}}\left(\frac{n+1}{2e}\right)^{\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{2\pi\frac{n}{2}}\left(\frac{n}{2e}\right)^{\frac{n}{2}}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2e}\right)^{\frac{n+1}{2}}(n+1)^{\frac{n+1}{2}}}{\left(\frac{1}{2e}\right)^{\frac{n}{2}}n^{\frac{n}{2}}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}}\cdot\left(\frac{1}{2e}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}}{n^{\frac{n}{2}}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2e}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{(n+1)^{\frac{n+2}{2}}}{n^{\frac{n+1}{2}}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{(n+1)^{\frac{n}{2}}(n+1)}{n^{\frac{n+1}{2}}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\frac{n}{2}}\frac{(n+1)^{\frac{n}{2}}(n+1)}{n^{\frac{n+1}{2}}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-\frac{n}{2}}\frac{(n+1)^{\frac{n}{2}}(n+1)}{n^{\frac{n+1}{2}}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{(n+1)^{-\frac{n}{2}}(n+1)^{\frac{n}{2}}(n+1)}{n^{-\frac{n}{2}}\cdot n^{\frac{n+1}{2}}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{(n+1)}{n^{\frac{1}{2}}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{n^{\frac{1}{2}}(n+1)}{n^{\frac{1}{2}}\cdot n^{\frac{1}{2}}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{(n+1)}{n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{n}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

よって，これら第 2 項と第 4 項について元の式に戻すと，

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}}\right)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n}\right)^{\frac{1}{2}}\lim_{n\to\infty}\left(x^2+n\right)^{-\frac{1}{2}}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}\right)\\
&=\left(\frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}}\right)\left(e^{-\frac{1}{2}x^2}\right)\lim_{n\to\infty}\left(x^2+n\right)^{-\frac{1}{2}}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&=\left(\frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}}\right)\left(e^{-\frac{1}{2}x^2}\right)\lim_{n\to\infty}\left\{\left(x^2+n\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{n^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}}\right)\right\}\\
&=\left(\frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}}\right)\left(e^{-\frac{1}{2}x^2}\right)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{x^2+n}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}\right)\\
&=\left(\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}\right)\left(\frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}}\right)\left(e^{-\frac{1}{2}x^2}\right)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{x^2+n}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&=\left(\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}\right)\left(\frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}}\right)\left(e^{-\frac{1}{2}x^2}\right)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\left(\frac{x^2+n}{n}\right)^{\frac{1}{2}}}\right)
\end{aligned}$$

ここで，最終項の極限については

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\left(\frac{x^2+n}{n}\right)^{\frac{1}{2}}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{x^2}{n}}\right)^{\frac{1}{2}}=1.$$

よって，元に戻すと，

$$\left(\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}\right)\left(\frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}}\right)\left(e^{-\frac{1}{2}x^2}\right)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\left(\frac{x^2+n}{n}\right)^{\frac{1}{2}}}\right)=\left(\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}\right)\left(\frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}}\right)\left(e^{-\frac{1}{2}x^2}\right)=\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\pi^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

つまり，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}\left(\frac{n}{x^2+n}\right)^{\frac{n+1}{2}}\Gamma(\frac{n+1}{2})\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}. \qquad \square$$

このように理論的側面からも確認できるが，t-分布数値表を用いて n が無限大の場合の値が，標準正規分布の該当値と一致していることで確認できる．

参 考 文 献

Einstein, Albert (1972).『アインシュタイン選集 3—アインシュタインとその思想—』(湯川秀樹 監修 中村誠太郎・井上健 訳編), 共立出版, 東京.

Hoel, Paul Gerhard (1963).『初等統計学』(浅井晃・村上正康 共訳), 培風館, 東京.

森口繁一, 宇田川銈久, 一松信 (1956).『数学公式 I』, 岩波全書, 岩波書店, 東京.

日本統計学会 編 (2015).『日本統計学会公式認定[統計検定 2 級対応]改訂版 統計学基礎』, 東京図書, 東京.

統計関連学会連合理事会/統計教育推進委員会 (2014). 統計学分野の教育課程編成上の参照基準.

東京大学教養学部統計教室 編 (1991).『統計学入門』, 基礎統計学 I, 東京大学出版会, 東京.

Vaillancourt, Regis (2009). I hear and I forget, I see and I remember, I do and I understand, *The Canadian Journal of Hospital Pharmacy*, **62**(4), 272–273.

A Practical Report on Statistical Education for Undergraduates —Active Learning Connecting Deduction and Induction—

Gen Ishiwata[1,2]

[1]Department of Statistical Science, School of Multidisciplinary Sciences, Graduate University for Advanced Studies
[2]Faculty of Engineering, Shibaura Institute of Technology

This letter is a practical report about a lecture introducing active learning in undergraduate statistics education at a general science university. The education method introduced as the development of active learning is to impose a report preparation on each student according to their interests. The purpose of this method is for students to understand through experience the way of thinking of the statistics by connecting deduction and induction when they will integrate, without being conscious, a thorough explanation about deductive content in classroom and an inductive thorough by the voluntary activity at the time of making the report. This method promotes positive activity of students, enables them to obtain a deeper understanding of statistics by analyzing familiar data about themselves, and improves their satisfaction level.

Key words: University statistics education, active learning, deduction and induction.