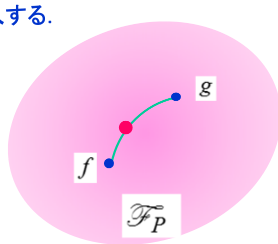
確率密度空間のパス連結性

江口　真透　　数理推論研究系

問題の背景と動機

- 確率密度の全体を数学的に厳密な定式化は幾つか困難な点が指摘されている.
- ノンパラメトリックモデル，セミパラメトリックモデルも自由に扱える定式化が必要である．そのためϕ-パスを導入する.
- 確率空間のϕ-パス連結性について議論してより見通しの良い定式化を目指す.
- 主要な結果としてϕ-パスがϕ によって自然に導かれる平行性に関する測地線になることが得られた.



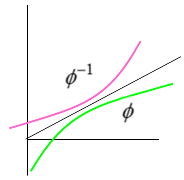
$\mathscr{F}_P$をある確率分布Pに関する確率密度関数の全体とする.

$\phi:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ を単調増加な凹関数と する.

定義 1.　確率密度f とg のKolmogorov-Nagumo 平均は次で定義される.

$$\widetilde{fg}_t^{(\phi)} = \phi^{-1}((1-t)\phi(f)+t\phi(g)),\qquad f,g\in\mathscr{F}_P,\quad t\in[0,1]$$

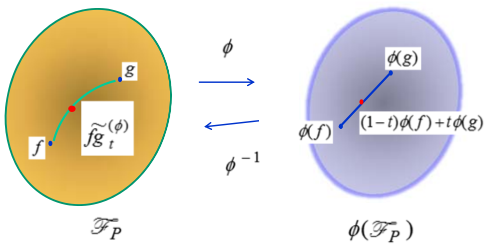
ここで $\phi^{-1}:\mathbf{R}\to(0,\infty)$は$\phi$の逆関数とする　　Cf. Naudts (2009)



注意 1.　ϕ^{-1} は$(0,\infty)$上で定義される単調増加な凸関数となる

定理 1.　$f,g\in\mathscr{F}_P \;\Rightarrow\; \widetilde{fg}_t^{(\phi)}(x)>0,\ \int\widetilde{fg}_t^{(\phi)}(x)dP(x)\le 1\ \ (\forall t\in[0,1])$

(証).　$0\le\phi^{-1}((1-t)\phi(f(x))+t\phi(g(x)))\le(1-t)f(x)+t\,g(x)$ ■



定義 2.　確率密度 f と gを結ぶ ϕ-パスは次で定義される.

$$f_t^{(\phi)}(x)=\phi^{-1}((1-t)\phi(f(x))+t\phi(g(x))-\kappa_t),\qquad f,g\in\mathscr{F}_P,\quad t\in[0,1]$$

ここで κ_tは$\int\phi^{-1}((1-t)\phi(f)+t\phi(g)-\kappa_t)dP=1$　を満たす正規化定数

定理 2.　上で定義されたϕ-パスの中で規格化定数 κ_t は一意に存在する.

(証).　$\int_{\mathscr{X}}\phi^{-1}((1-t)\phi(f)+t\phi(g)+c)dP\ge\phi^{-1}(c)P(\mathscr{X})\underset{c\to\infty}{\longrightarrow}+\infty$ ■

例 1.　$\phi_0(x)=\log x\;\Rightarrow\; f_t(x,\phi_0)=\exp((1-t)\log f(x)+t\log g(x)-\kappa_t)$　where $\kappa_t=\log\int\exp((1-t)\log f+t\log g)dP.$

例 2.　$\phi_\beta(x)=\dfrac{x^\beta-1}{\beta}\;\Rightarrow\; f_t(x,\phi_\beta)=\{(1-t)f(x)^\beta+tg(x)^\beta-\kappa_t)^{\frac{1}{\beta}}$

定義 3.　ϕに関する一般化期待値　$\mathrm{E}_f^{(\phi)}\{a(X)\}:=\dfrac{\int a(x)\{\phi'(f(x))\}^{-1}dP(x)}{\int\{\phi'(f(x))\}^{-1}dP(x)}$

注意 2.　$\phi=\log$ ならば 一般化期待値は通常の期待値に帰する.　$\mathrm{E}_f^{(\log)}\{a(X)\}=\int a(x)f(x)dP(x)$

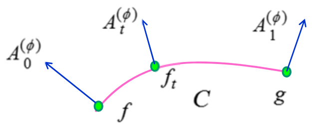
注意 3.　一般化バートレット恒等式：　任意のモデル $M=\{f_\theta(x)\}_{\theta\in\Theta}$に対して

$$\text{(i)}\quad \mathrm{E}_f^{(\phi)}\{\partial_i\phi(f_\theta)\}=0,\quad \text{(ii)}\quad \mathrm{E}_f^{(\phi)}\{\partial_j\partial_i\phi(f_\theta)\}=\mathrm{E}_f^{(\phi)}\{\frac{\phi''(f_\theta)}{(\phi'(f_\theta))^2}\partial_j\phi(f_\theta)\partial_i\phi(f_\theta)\}$$

Cf. Bartlett identities for $\phi=\log$

定義 3. カーブ$C=\{f_t:t\in[0,1]\}$に沿った平行移動$\{A_t^{(\phi)}(x):t\in[0,1]\}$である.$\Longleftrightarrow$　$\dfrac{d}{dt}A_t^{(\phi)}(x)=-\mathrm{E}_{f_t}^{(\phi)}\{\dfrac{\phi''(f_t)}{\phi'(f_t)}A_t^{(\phi)}\dfrac{d}{dt}f_t\}\ \ (\forall t\in[0,1])$

注意 4.　$\dfrac{d}{dt}\mathrm{E}_{f_t}^{(\phi)}\{A_t^{(\phi)}\}=\mathrm{E}_{f_t}^{(\phi)}\{\dfrac{d}{dt}A_t^{(\phi)}(x)+A_t^{(\phi)}\dfrac{\phi''(f_t)}{\phi'(f_t)}\dfrac{d}{dt}f_t\}=0$

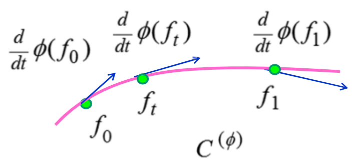


Cf. $A_t^{(\log)}$ in Amari (1982).

定義 3.　カーブ$C=\{f_t:t\in[0,1]\}$が平行移動 $A^{(\phi)}$に関する測地線である.

$\Longleftrightarrow$　カーブCの接線ベクトルが$A^{(\phi)}$-平行である．即ち$\dfrac{d^2}{dt^2}\phi(f_t(x))=-\mathrm{E}_{f_t}^{(\phi)}\{\dfrac{\phi''(f_t)}{\phi'(f_t)}(\dfrac{d}{dt}f_t)^2\}$を満たす.

定理 3.　カーブ C がϕ-パスである$\Longleftrightarrow$カーブCは $A^{(\phi)}$- 測地線である



（証）　$\dfrac{d^2}{dt^2}\phi(f_t(x))=\mathrm{const.\,in}\ x$ から $f_t(x)=f_t^{(\phi)}(x)$が導かれる. ■