⑬ ネーマン法による平均の分散

横浜市立大学　米　田　桂　三

平均推定には，ネーマン式割当法によるものが比例割当法によるものよりも精度が良いことは証明されているが，ネーマン式割当の実施には各層の分散は推定値を利用するのであるから，果して比例割当法よりも精度がよいかどうかは疑問である。　各層の分散の推定値 S_i^2 は各層独立にとった大きさ n_i の標本で計算したものとした場合，同じ精度を本調査に於て得るのに，この S_i を使ったネーマン法が，比例法の幾%の大きさの標本で済ますことが出来るかを調査するのが本稿の最后の目的である。

P_i　各層の全体に対する比（既知，$\sum_{i=1}^{m} P_i = 1$）　$i = 1, 2, 3, \cdots, m$

σ_i^2　各層の母分散　$i = 1, 2, 3, \cdots, m$

S_i^2　各層の標本分散（大きさ n_i の標本で計算，$n_i = nP_i$）　$i = 1, 2, 3, \cdots, m$

とすれば，S_i を以て σ_i の代用をさせたネーマン法による平均の分散は

$$(1)\qquad \sigma_{\bar{x}_N}^2 = \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{m} P_i \sigma_i^2 \frac{1}{S_i}\right)\left(\sum_{j=1}^{m} P_j S_j\right)$$

但し　N は本調査に於ける標本の大きさ

比例割当による平均の分散は

N' 標本の大きさとして

$$(2) \qquad \sigma_{\bar{x}_R}^2 = \frac{1}{N'} \sum_{i=1}^{m} P_i \sigma_i^2$$

と記す.

今

$$(3) \qquad P_r \left\{ \sigma_{\bar{x}_N}^2 < \sigma_{\bar{x}_R}^2 \right\} > 0.99$$

となるようなnの最小を求めたい.

式(1)に於て

$$(4) \qquad \xi = \sum_{j=1}^{m} P_j s_j$$

$$(5) \qquad \eta = \sum_{i=1}^{m} P_i \sigma_i^2 \frac{1}{s_i}$$

とおくと, s_i^2 は χ^2 分布をするから

$_{\xi}\mu_K$ をξのK次積率

$_{\eta}\mu_K$ をηのK次積率

と記して $\frac{1}{n_i}$ の三次以上を無視して計算すれば

$$(6) \qquad {}_{\xi}\mu_1 = \sum_{i=1}^{m} P_i \sigma_i \left(1 - \frac{3}{4n_i} - \frac{7}{32 n_i^2} \right)$$

$$(7) \qquad {}_{\xi}\mu_2 = \sum P_i^2 \sigma_i^2 \left(\frac{1}{2n_i} - \frac{1}{8n_i^2} \right)$$

$$(8) \qquad {}_{\xi}\mu_3 = \sum P_i^3 \sigma_i^3 \frac{1}{4n_i^2}$$

$$(9) \qquad {}_{\xi}\mu_4 = \frac{3}{4} \left(\sum P_i^2 \sigma_i^2 \frac{1}{n_i} \right)^2$$

$\therefore$

(10) $$ {}_{\xi}\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = \frac{1}{2}\,\frac{\left\{\Sigma(P_i\,\sigma_i/\sqrt{n_i})^3\,\frac{1}{\sqrt{n_i}}\right\}^2}{\left\{\Sigma(P_i\,\sigma_i/\sqrt{n_i})^2(1-\frac{1}{4n_i})\right\}^3} $$

$$ \leq \frac{1}{2}\,\frac{\left\{\Sigma(P_i\sigma_i/\sqrt{n_i})^3\right\}^2\frac{1}{n_0}}{\left\{\Sigma(P_i\,\sigma_i/\sqrt{n_i}\right\}^3(1-\frac{1}{4n_0})^3} < \frac{1}{2n_0(1-\frac{1}{4n_0})^3} $$

但し $n_0 \leqq n_i \quad i = 1, 2, \cdots\cdots, m$

これは n_0 が大きい程小さい

又

$$ {}_{\xi}\beta_2 = \frac{{}_{\xi}\mu_4}{{}_{\xi}\mu_2^2} < \frac{3}{(1-\frac{1}{2n_0})^2} $$

(11) $$ 3 < {}_{\xi}\beta_2 < \frac{3}{(1-\frac{1}{2n_0})^2} $$

$n_0 \geqq 30$ のときは $0 < {}_{\xi}\beta_1 < 0.071,\ 3 < {}_{\xi}\beta_2 < 3.1054$

$n_0 \geqq 50$ $\qquad 0 < {}_{\xi}\beta_1 < 0.011,\ 3 < {}_{\xi}\beta_2 < 3.060$

$\therefore$ $n_0 \geqq 30$ あたりから ξ は大体正規分布をなすと考えられる。 全く同様に計算して

(12) $$ {}_{\eta}\mu_1 = \Sigma P_i\,\sigma_i\left(1+\frac{5}{4n_i}+\frac{73}{32n_i^2}\right) $$

(13) $$ {}_{\eta}\mu_2 = \Sigma P_i^2\,\sigma_i^2\left(\frac{1}{2n_i}+\frac{23}{8n_i^2}\right) $$

(14) $$ {}_{\eta}\mu_3 = \frac{5}{4}\,\Sigma P_i^3\,\sigma_i^3\,\frac{1}{n_i^2} $$

(15) $$ {}_{\eta}\mu_4 = \frac{3}{4}\left(\Sigma P_i^2\,\sigma_i^2\,\frac{1}{n_i}\right)^2 $$

$$(16) \quad {}_\eta\beta_1 = \frac{{}_\eta\mu_3^2}{{}_\eta\mu_2^3} = \frac{25}{2}\,\frac{\left\{\Sigma(P_i\sigma_i/n_i^{\frac{2}{3}})^3\right\}^2}{\left\{\Sigma(P_i\sigma_i/n_i^{\frac{2}{3}})^2(n_i^{\frac{1}{3}}+\frac{23}{4n_i^{\frac{2}{3}}})\right\}^3}$$

$$< \frac{25}{2}\cdot\frac{1}{n_0(1+\frac{23}{4n_0})^3}$$

又

$$(17) \quad 3 > {}_\eta\beta_2 = \frac{3}{\left\{1+\frac{23}{4}\left(\frac{\Sigma P_i^2\sigma_i^2/n_i^2}{\Sigma P_i^2\sigma_i^2/n_i}\right)\right\}^2} > \frac{3}{(1+\frac{23}{4n_0})^2}$$

$n_0 \geqq 30$ のとき　$0 < {}_\eta\beta_1 < 0.2451,\quad 3 > {}_\eta\beta_2 > 2.12$

$n_0 \geqq 50$　　　　$0 < {}_\eta\beta_1 < 0.1805\quad 3 > {}_\eta\beta_2 > 2.43$

$n_0 \geqq 100$　　　$0 < {}_\eta\beta_1 < 0.1062.\quad 3 > {}_\eta\beta_2 > 2.83$

n_0 が大きい程正規分布に近似することは明かであるが，$n_0 = 100$ ではまだ正規分布の扱いは許されない。　正規分布よりも平滑な分布である。

そこで　ξ だけを正規分布として

$$P_r\left\{\xi < {}_\xi\mu_1 + \lambda_1\sqrt{{}_\xi\mu_2}\right\} = 1-\alpha_1$$

とし，η については Tchebycheff の拡張定理を用いて

$$P_r\left\{\eta < {}_\eta\mu_1 + \lambda_2\sqrt{{}_\eta\mu_2}\right\} \geqq 1 - \frac{{}_\eta\beta_2}{2\lambda_2^4} > 1 - \frac{3}{2\lambda_2^4}$$

とすると

$$(18) \quad P_r\left\{\xi\eta < ({}_\xi\mu_1+\lambda_1\sqrt{{}_\xi\mu_2})({}_\eta\mu_1+\lambda_2\sqrt{{}_\eta\mu_2})\right\} \geqq 1-\alpha_1-\frac{3}{2\lambda_2^4}$$

今 $n_i = nP_i$ として，この式の $\{\ \}$ 内を計算すると

$$(19) \quad ({}_\xi\mu_1+\lambda_1\sqrt{{}_\xi\mu_2})({}_\eta\mu_1+\lambda_2\sqrt{{}_\eta\mu_2}) = {}_\xi\mu_1\cdot{}_\eta\mu_1 + \lambda_1\sqrt{{}_\xi\mu_2}\,{}_\eta\mu_1$$

$$+ \lambda_2\cdot{}_\xi\mu_1\sqrt{{}_\eta\mu_2} + \lambda_1\lambda_2\sqrt{{}_\xi\mu_2\cdot{}_\eta\mu_2}$$

$$= \left\{ \sum P_i \sigma_i \left(1 - \frac{3}{4n_i} - \frac{7}{32n_i^2}\right) \right\} \left\{ \sum P_j \sigma_j \left(1 + \frac{5}{4n_j} + \frac{73}{32n_j^2}\right) \right\}$$

$$+ \lambda_1 \left\{ \sum P_i^2 \sigma_i^2 \left(\frac{1}{2n_i} - \frac{1}{8n_i^2}\right) \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum P_j \sigma_j \left(1 + \frac{5}{4n_j} + \frac{73}{32n_j^2}\right) \right\}$$

$$+ \lambda_2 \left\{ \sum P_j^2 \sigma_j^2 \left(\frac{1}{2n_j} + \frac{23}{8n_j^2}\right) \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum P_i \sigma_i \left(1 - \frac{3}{4n_i} - \frac{7}{32n_i^2}\right) \right\}$$

$$+ \lambda_1 \lambda_2 \left\{ \sum P_i^2 \sigma_i^2 \left(\frac{1}{2n_i} - \frac{1}{8n_i^2}\right) \cdot \sum P_j \sigma_j \left(\frac{1}{2n_j} + \frac{23}{8n_j^2}\right) \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\sum P_i \sigma_i\right)^2 \left(1 + \frac{5}{4n_0} + \frac{73}{32n_0^2}\right) + \frac{1}{\sqrt{2n}} \left(\sum P_i \sigma_i\right) \sqrt{\sum P_j \sigma_j^2} \left\{ \lambda_1 \right.$$

$$\left. \sqrt{1 - \frac{1}{4n_0}} \cdot \left(1 + \frac{5}{4n_0} + \frac{73}{32n_0^2}\right) + \lambda_2 \sqrt{1 + \frac{23}{4n_0}} \left(1 - \frac{3}{4n_0} - \frac{7}{32n_0^2}\right) \right\}$$

$$+ \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2n} \sum P_i \sigma_i^2 \sqrt{1 + \frac{22}{4n_0} - \frac{23}{16n_0^2}}$$

$$= f_1(n_0) \left(\sum P_i \sigma_i\right)^2 + f_2(n_0, n) \left(\sum P_i \sigma_i\right) \sqrt{\sum P_i \sigma_i^2}$$

$$+ f_3(n_0, n) \sum P_i \sigma_i^2$$

とおく，こゝで

$$f_1(n_0) = 1 + \frac{5}{4n_0} + \frac{73}{32n_0^2}$$

$$f_2(n_0, n) = \frac{1}{\sqrt{2n}} \left\{ \lambda_1 \left(\frac{1}{4n_0} + \frac{69}{32n_0^2}\right) + \lambda_2 \left(1 + \frac{67}{8n_0} + \frac{437}{32n_0^2}\right) \right\}$$

$$f_3(n_0, n) = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{2n} \left(1 + \frac{11}{4n_0} - \frac{9}{2n_0^2}\right)$$

となる。

こゝで式（18）の右辺が0.99以上であるように保ちながら f_2, f_3 が最小になるようにしたいのであるが，最も影響の大きい $\lambda_1 + \lambda_2$ が最小になるように数値計算をした結果

$$\lambda_1 = 2.83 \qquad \lambda_2 = 3.74$$

を得た。

これを代入して，以上の各式を綜合すれば

$$(20) \qquad f_1(n_0)\left(\frac{\sum P_i\sigma_i}{\sqrt{\sum P_i\sigma_2^2}}\right)^2 + f_2(n_0,n)\left(\frac{\sum P_i\sigma_i}{\sqrt{\sum P_i\sigma_i^2}}\right) + f_3(n_0,n) < \frac{N}{N'}$$

但し

$$f_1(n_0) = 1 + \frac{5}{4n_0} + \frac{73}{32n_0^2}$$

$$f_2(n_0,n) = \frac{1}{\sqrt{2n}}\left(6.57 + \frac{256.24}{8n_0} + \frac{1829.65}{32n_0^2}\right)$$

$$f_3(n_0,n) = \frac{10.5842}{2n}\left(1 + \frac{11}{4n_0} - \frac{9}{24n_0^2}\right)$$

ならば

$$P_r\left\{\sigma^2_{\bar{x}_R} < \sigma^2_{\bar{x}_R}\right\} > 0.99$$

即ち，式（20）の左辺（1より小でなければ有効でない）の倍数だけの標本で同一精度を得るわけである。

$f_1(n_0)$，$f_2(n_0,n)$，$f_3(n_0,n)$，及び（20）の左辺に対する数値を別表並びにグラフに記した。

[表 1]　$f_1(n_0)$ の数値

n_0	30	50	100	150	200
$f_1(n_0)$	1.0441	1.0259	1.0127	1.0084	1.0063

[表 2]　$f_2(n_0, n)$ の数値

n_0 \ n	100	200	300	400	500	1000
30	0.5446	0.3851	0.3144	0.2723	0.2435	0.1722
50	0.5115	0.3617	0.2953	0.2557	0.2287	0.1618
100	╳	0.3448	0.2815	0.2438	0.2181	0.1542
150	╳	╳	0.2770	0.2399	0.2146	0.1517
200	╳	╳	╳	0.2380	0.2129	0.1505

[表 3]　$f_3(n_0, n)$ の数値

n_0 \ n	100	200	300	400	500	1000
30	0.0050	0.0025	0.0017	0.0013	0.0010	0.0002
50	0.0050	0.0025	0.0017	0.0013	0.0010	0.0002
100	╳	0.0025	0.0017	0.0013	0.0010	0.0002
150	╳	╳		0.0013	0.0010	0.0002
200	╳	╳	╳	0.0013	0.0010	0.0002

[表 4]　$f_1(n_0)(\Sigma P_i\sigma_i/\sqrt{\Sigma P_i\sigma_i^2})^2 + f_2(n_0,n)(\Sigma P_i\sigma_i/\sqrt{\Sigma P_i\sigma_i^2}) + f_3(n_0,n)$

の数値．（$\Sigma P_i\sigma_i/\sqrt{\Sigma P_i\sigma_i^2} = X$　と記す）

(i)　$X = 0.5$

n_0 \ n	100	200	300	400	500	1000
30	0.5383	0.4561	0.4199	0.3984	0.3838	0.3473
50	0.5173	0.4391	0.4058	0.3856	0.3719	0.3376
100	╳	0.4281	0.3956	0.3763	0.3632	0.3305
150	╳	╳	0.3923	0.3733	0.3604	0.3282
200	╳	╳	╳	0.3718	0.3590	0.3270

（ii） X ＝ 0.6

n_0 \ n	100	200	300	400	500	1000
30	0.7076	0.6094	0.5662	0.5405	0.5230	0.4794
50	0.6813	0.5884	0.5482	0.5240	0.5075	0.4666
100		0.5740	0.5352	0.5121	0.4964	0.4573
150			0.5309	0.5082	0.4928	0.4543
200				0.5063	0.4910	0.4528

（iii） X ＝ 0.7

n_0 \ n	100	200	300	400	500	1000
30	0.8978	0.7837	0.7334	0.7035	0.6531	0.6324
50	0.8658	0.7584	0.7111	0.6830	0.6638	0.6161
100		0.7401	0.6950	0.6652	0.6499	0.6044
150			0.6897	0.6633	0.6454	0.6006
200				0.6609	0.6431	0.5986

（iv） X ＝ 0.8

n_0 \ n	100	200	300	400	500	1000
30	*1.1088	0.9788	0.9214	0.8873	0.8640	0.8062
50	*1.0708	0.9484	0.8945	0.8624	0.8406	0.7862
100		0.9265	0.8750	0.8444	0.8236	0.7717
150			0.8687	0.8386	0.8181	0.7670
200				0.8357	0.8154	0.7647

＊ 印は使用不能

以 上