

社会科テストのサマアリンク計画

青山 博次郎
座間 宣夫

§ 1. 緒言 社会科の新形式によるテストを行い、標準テストとしての諸資料を得るため、カリキュラム研究所が行ったテストのサマアリンクの概要をのべることにする。

テストは信頼性、妥当性を必要とするので、単に *Instruction* を與えて各学校の先生にテストをして貰つても信頼のおける資料は得られないであらう。

そこで現地に出かけて行ってテストを行わねばならぬが期日が切迫していたことと、費用、人員の関係から3名の調査員が出かけてサマアルを抽出し、実際に現地でテストを行うことになった。尚被験者は3000人小学校と中学校の全学年に亘り、全国的な結果が欲しいというのである。

以下順々にその標本抽出の経過をのべることにする。

(サマアリンク作業まで約20入日を要した。)

§ 2. 調査対象と母集団

我々の目的に従い、調査対象は全国に於ける公立、国立の小学校1年より中学校3年までの生徒全員であつて、テストは各学年別に作成される関係上、各学年の生徒が天々の調査対象である。

昭和24年度学校基本調査資料によれば下表の如き生徒総数となる。

全国国立公立小学校生徒数 (昭和24年4月)

1 年			2 年			3 年		
男	女	計	男	女	計	男	女	計
787,859	460,297	1,948,156	1,032,559	1,009,848	2,042,737	965,067	940,952	1,906,249

4 年			5 年			6 年		
男	女	計	男	女	計	男	女	計
859,755	837,792	1,697,547	787,943	769,008	1,556,951	710,248	638,318	1,778,626

合 計		
男	女	計
5,543,765	5,404,304	10,948,069

全国国立、公立中学校生徒数 (昭和24年4月)

1 年			2 年			3 年		
男	女	計	男	女	計	男	女	計
859,768	815,230	1,674,998	870,562	815,404	1,685,966	793,165	737,320	1,530,485

合 計		
男	女	計
2,523,432	2,370,956	4,894,388

(注) 昭和25年度に於ける学校基本調査の統計が当時整理中で得られなかつたため、昭和24年度の資料を用いることにした。

生徒各個人は同等と考えるべきであるので、各生徒が同一の確率で抽出されるように母集団を構成した。

§ 3 層 別 と 抽 出

前節で定められた母集団より各学年毎に若干名の標本を抽出してテストの点数を評価すればよい。

しかし前にも述べた如く、標本数の制限(費用に關係)、調査員の数、集計の時間的制約により全国の様相を知るためにはどうしても若干のまとまったブロックを一次抽出し、更に学校を抽出し、最後に生徒を抽出するという三段階の抽出を必要とする。

このため各 stage に於て精度をあげるよう層別しておくことが望ましい。

そこで次の順序によつて層別を行うこととした。

第 1 次 層 別 : ———

北海道より鹿児島に至る 46 都道府県を産業構造型によつて分類した。これは生徒の能力は環境、両親の職業によつて大いに左右されることが分つていたので、この場合も産業構造によつて層別することは妥当であると考えられた。

産業構造型としては農業率、商業率、工業率を用いた。

ここでこれらの定義は下の通りである。

$$\text{農 業 率} = \frac{\text{農業} + \text{林業} + \text{漁業}}{\text{就業人口}} \times 100\%$$

(原始産業, 第一次産業)

$$\text{工 業 率} = \frac{\text{鉱業} + \text{建設工業} + \text{製造工業}}{\text{就業人口}} \times 100\%$$

(製造産業, 第二次産業)

$$\text{商 業 率} = \frac{\text{商業} + \text{水道} + \text{金融} + \text{運輸} + \text{通信} + \text{サービス} + \text{自由} + \text{公務} + \text{団体} + \text{其他}}{\text{就業人口}} \times 100\%$$

(分配産業, 第三次産業)

これらの産業構成率を三角グラフ (和が一定の 100% である。Mobius の図表ともいう。) を用いて表わすと第 1 図の様になる。

大きく 3 つに分けて

第 I 層 農業率 63% 以上, 工業率 20% 以下,

商業率 10 ~ 20%

第 II 層 農業率 45 ~ 63% 工業率 15 ~ 20%

商業率 15 ~ 27%

第 III 層 農業率 45% 以下，工業率 20% 以上
商業率 25% 以上

となつた。

これらは更に文化尺度たる新聞普及率を用いて各層毎に調べてみると第 2 図の様になつてゐる。

これらを総合して細分すればよいのであるが調査員が 3 人という事より、一応最初の子層に分けることにした。

各層に属する縣名は次の通りである。

第 I 層

(新聞の普及率大) 青森，岩手，千葉，新潟，山梨，長野，
鳥取，徳島

(新聞の普及率小) 秋田，山形，福島，茨城，島根，高知
宮崎，大分，鹿児島，熊本。

第 II 層

(新聞の普及率大) 北海道，宮城，埼玉，群馬，富山，
石川，岐阜，静岡，三重，玄島

(新聞の普及率小) 栃木，福井，奈良，和歌山，岡山，
山口，香川，滋賀，愛媛，佐賀，長崎

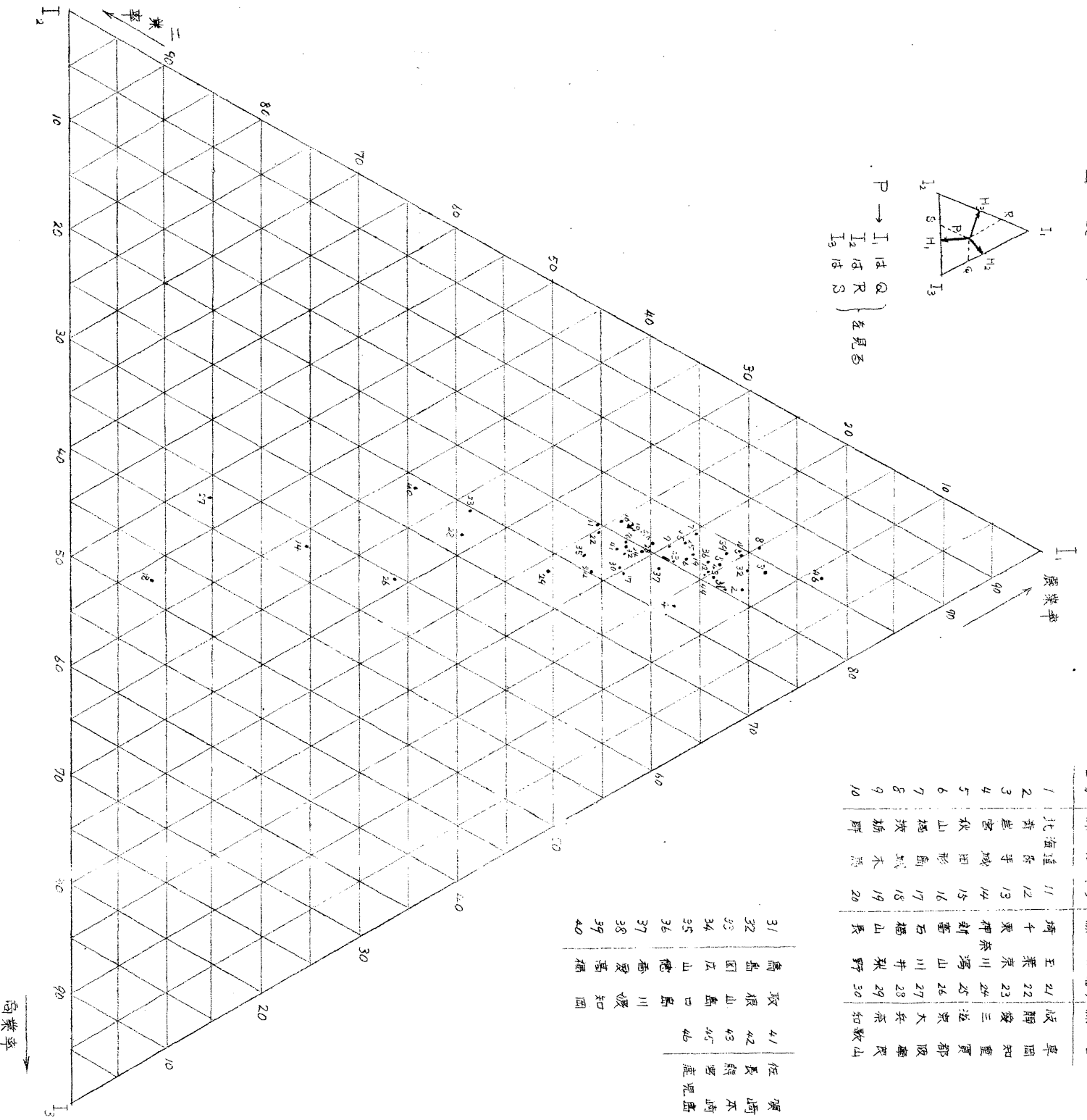
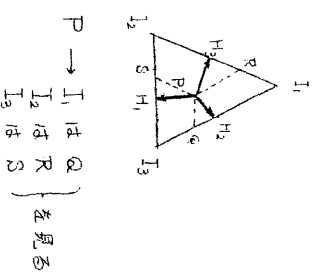
第 III 層

東京，神奈川，大阪，愛知，京都，
兵庫，福岡

これらの各層に属する生徒数は次の様になる。

第 1 圖

図の使い方

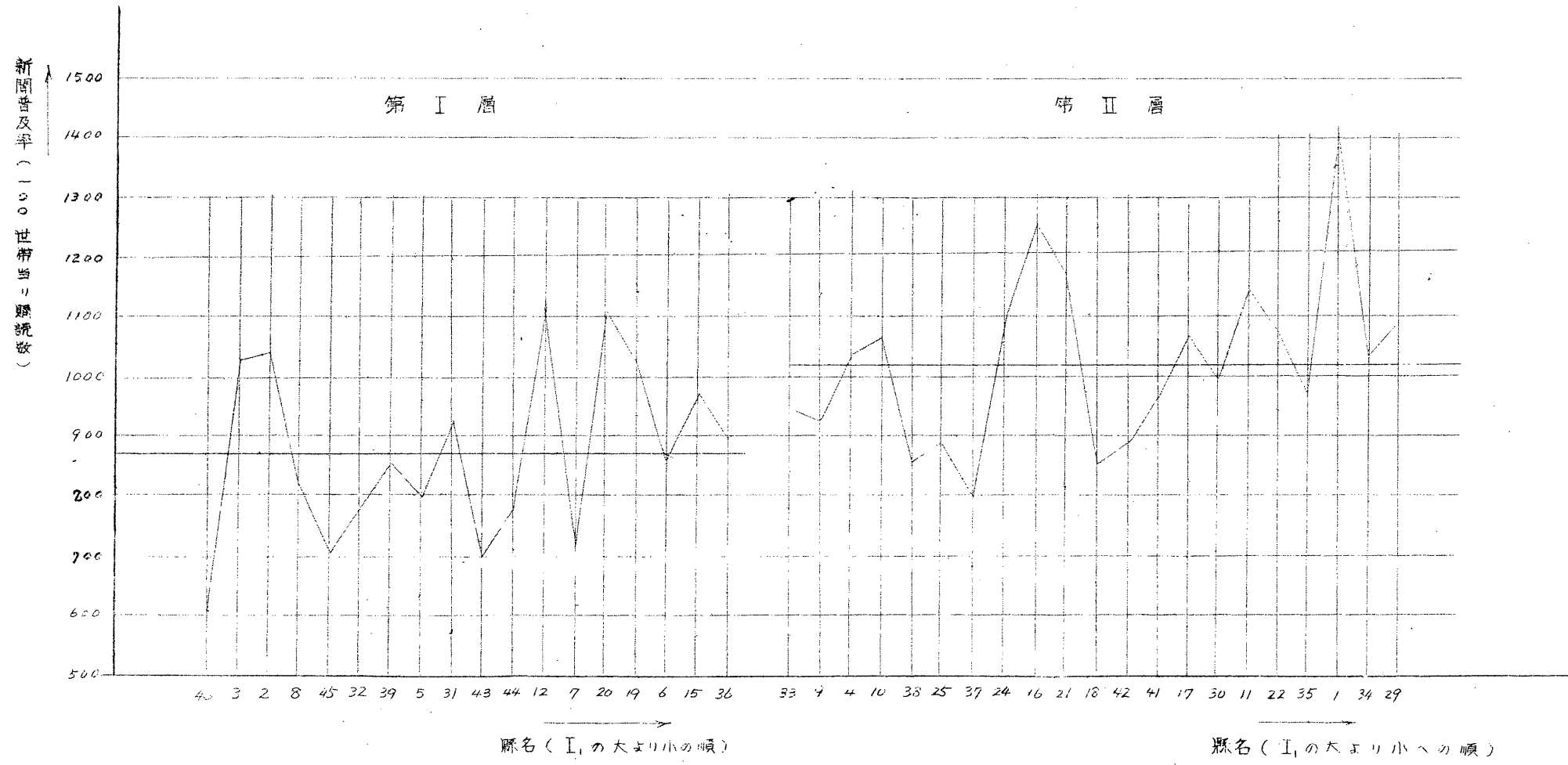


名	縣	町	村	番	縣	町	村	番
卓園	岐阜	岐阜	卓園	1	岐阜	岐阜	卓園	1
知	岐阜	知	知	2	岐阜	知	知	2
重	岐阜	重	重	3	岐阜	重	重	3
實	岐阜	實	實	4	岐阜	實	實	4
郡	岐阜	郡	郡	5	岐阜	郡	郡	5
依	岐阜	依	依	6	岐阜	依	依	6
藤	岐阜	藤	藤	7	岐阜	藤	藤	7
原	岐阜	原	原	8	岐阜	原	原	8
山	岐阜	山	山	9	岐阜	山	山	9
三	岐阜	三	三	10	岐阜	三	三	10
邊	岐阜	邊	邊	11	岐阜	邊	邊	11
大	岐阜	大	大	12	岐阜	大	大	12
糸	岐阜	糸	糸	13	岐阜	糸	糸	13
茶	岐阜	茶	茶	14	岐阜	茶	茶	14
野	岐阜	野	野	15	岐阜	野	野	15
山	岐阜	山	山	16	岐阜	山	山	16
川	岐阜	川	川	17	岐阜	川	川	17
井	岐阜	井	井	18	岐阜	井	井	18
梨	岐阜	梨	梨	19	岐阜	梨	梨	19
野	岐阜	野	野	20	岐阜	野	野	20
長	岐阜	長	長	21	岐阜	長	長	21
石	岐阜	石	石	22	岐阜	石	石	22
標	岐阜	標	標	23	岐阜	標	標	23
山	岐阜	山	山	24	岐阜	山	山	24
長	岐阜	長	長	25	岐阜	長	長	25
神	岐阜	神	神	26	岐阜	神	神	26
奈	岐阜	奈	奈	27	岐阜	奈	奈	27
東	岐阜	東	東	28	岐阜	東	東	28
十	岐阜	十	十	29	岐阜	十	十	29
東	岐阜	東	東	30	岐阜	東	東	30
瑞	岐阜	瑞	瑞	31	岐阜	瑞	瑞	31
千	岐阜	千	千	32	岐阜	千	千	32
東	岐阜	東	東	33	岐阜	東	東	33
神	岐阜	神	神	34	岐阜	神	神	34
奈	岐阜	奈	奈	35	岐阜	奈	奈	35
東	岐阜	東	東	36	岐阜	東	東	36
十	岐阜	十	十	37	岐阜	十	十	37
東	岐阜	東	東	38	岐阜	東	東	38
瑞	岐阜	瑞	瑞	39	岐阜	瑞	瑞	39
千	岐阜	千	千	40	岐阜	千	千	40
東	岐阜	東	東	41	岐阜	東	東	41
神	岐阜	神	神	42	岐阜	神	神	42
奈	岐阜	奈	奈	43	岐阜	奈	奈	43
東	岐阜	東	東	44	岐阜	東	東	44
十	岐阜	十	十	45	岐阜	十	十	45
東	岐阜	東	東	46	岐阜	東	東	46

31	岐阜	岐阜	岐阜
32	岐阜	岐阜	岐阜
33	岐阜	岐阜	岐阜
34	岐阜	岐阜	岐阜
35	岐阜	岐阜	岐阜
36	岐阜	岐阜	岐阜
37	岐阜	岐阜	岐阜
38	岐阜	岐阜	岐阜
39	岐阜	岐阜	岐阜
40	岐阜	岐阜	岐阜
41	岐阜	岐阜	岐阜
42	岐阜	岐阜	岐阜
43	岐阜	岐阜	岐阜
44	岐阜	岐阜	岐阜
45	岐阜	岐阜	岐阜
46	岐阜	岐阜	岐阜

商業率

第 2 圖



小 学 校 生 徒 数

	1 年			2 年			3 年		
	男	女	計	男	女	計	男	女	計
第 I 層	319,062	311,339	630,401	337,961	328,498	666,399	320,935	314,255	635,190
	2.114%	1.965%	3.979%	2.123%	2.074%	4.206%	2.026%	1.954%	4.009%
第 II 層	394,769	383,678	778,387	412,830	401,964	814,794	386,814	376,238	763,052
	2.491%	2.422%	4.913%	2.666%	2.537%	5.143%	2.442%	2.375%	4.517%
第 III 層	274,058	265,280	539,368	282,152	277,286	595,444	257,318	250,489	507,807
	1.730%	1.674%	3.405%	1.781%	1.751%	3.532%	1.624%	1.581%	3.205%
計	987,859	960,297	1,948,156	1,032,859	1,007,848	2,040,737	965,067	940,982	1,906,049
	6.236%	6.062%	12.297%	6.520%	6.362%	12.881%	6.092%	5.940%	12.031%

	4 年			5 年		
	男	女	計	男	女	計
第 I 層	287,953	281,186	569,139	272,865	267,123	534,958
	1.818%	1.795%	3.592%	1.722%	1.686%	3.408%
第 II 層	343,226	335,064	678,290	317,303	310,113	627,416
	2.166%	2.115%	4.281%	2.003%	1.957%	3.960%
第 III 層	228,576	221,542	450,118	197,775	191,775	389,547
	1.443%	1.398%	2.841%	1.248%	1.210%	2.459%
計	859,755	837,792	1,697,547	787,943	767,008	1,556,951
	5.421%	5.288%	10.715%	4.914%	4.854%	5.146%

	6 年			合計		
	男	女	計	男	女	計
	314,875	307,807	622,682	1,853,692	1,810,214	3,663,906
	1.958%	1.943%	3.930%	11.761%	11.426%	23.127%
	366,764	358,102	724,866	2,221,547	2,165,160	4,386,707
	2.315%	2.260%	4.575%	14.023%	13.667%	27.690%
	223,609	222,469	445,1078	1,468,526	1,428,930	2,897,456
	1.443%	1.404%	2.847%	9.270%	9.020%	18.289%
	910,248	888,378	1,798,626	5,543,765	5,404,304	10,948,069
	5.746%	5.608%	11.353%	34.993%	34.113%	69.106%

中学校生徒数

	1年		2年		3年		計
	男	女	男	女	男	女	
第I層	300,734 1.393%	291,623 1.541%	304,349 3.739%	292,348 1.846%	281,317 1.776%	265,558 1.696%	546,875 3.452%
第II層	351,652 2.220%	333,983 2.108%	356,466 4.328%	337,531 2.131%	327,507 2.067%	307,482 1.941%	634,989 4.008%
第III層	207,382 1.309%	189,624 1.197%	209,637 2.506%	188,475 1.190%	154,341 1.164%	164,280 1.037%	348,621 2.201%
計	859,768 5.427%	815,230 5.146%	1,674,998 10.573%	1,613,404 10.166%	793,165 5.007%	737,320 4.654%	1,530,485 9.661%

A1. 中学校の合計

合計	計		第I層	第II層	第III層	計	3年		計
	男	女					男	女	
886,450	849,579	1,736,029	2,740,142	2,659,793	5,399,935	17,296%	16,759%	34,055%	
5,595%	5,363%	10,958%	3,257,171	3,144,156	6,401,327	20,560%	19,346%	40,466%	
1,035,624	978,996	2,014,620	2,069,884	1,971,311	4,041,195	13,065%	12,443%	25,509%	
6,537%	6,180%	12,717%	8,667,197	7,775,260	15,842,457	50,921%	49,079%	100,000%	
601,358	542,381	1,143,739							
3,796%	3,424%	7,219%							
2,523,432	2,370,956	4,894,388							
15,928%	14,966%	30,894%							

次に各一次層より各縣の生徒数に比例する確率で一縣を抽出した。

こゝで各学年の生徒数に比例して抽出すべきであるが、学校の全生徒数に比例または各縣の人口に比例して抽出することも代用として考えられよう。

實際、各縣の人口と全生徒数の相関係数は 0.93 ~ 0.98 である。(第3図参照)

我々の場合は各縣の生徒数に比例して抽出したが、各一次層毎にこれらは各学年の生徒数と比例していると考えてよい。

小 学 校

	1年	2年	3年	4年	5年	6年	計
第I層	17.2%	18.2%	17.4%	15.6%	14.7%	16.9%	100%
茨城縣	17.3%	18.0%	17.8%	15.5%	14.5%	16.9%	100%

中 学 校

	1年	2年	3年	計
第I層	34.1%	34.4%	31.5%	100%
茨城縣	34.3%	34.6%	31.1%	100%

第I層よりは茨城縣、第II層よりは山口縣、第III層よりは東京都がサンプルとして選ばれた。

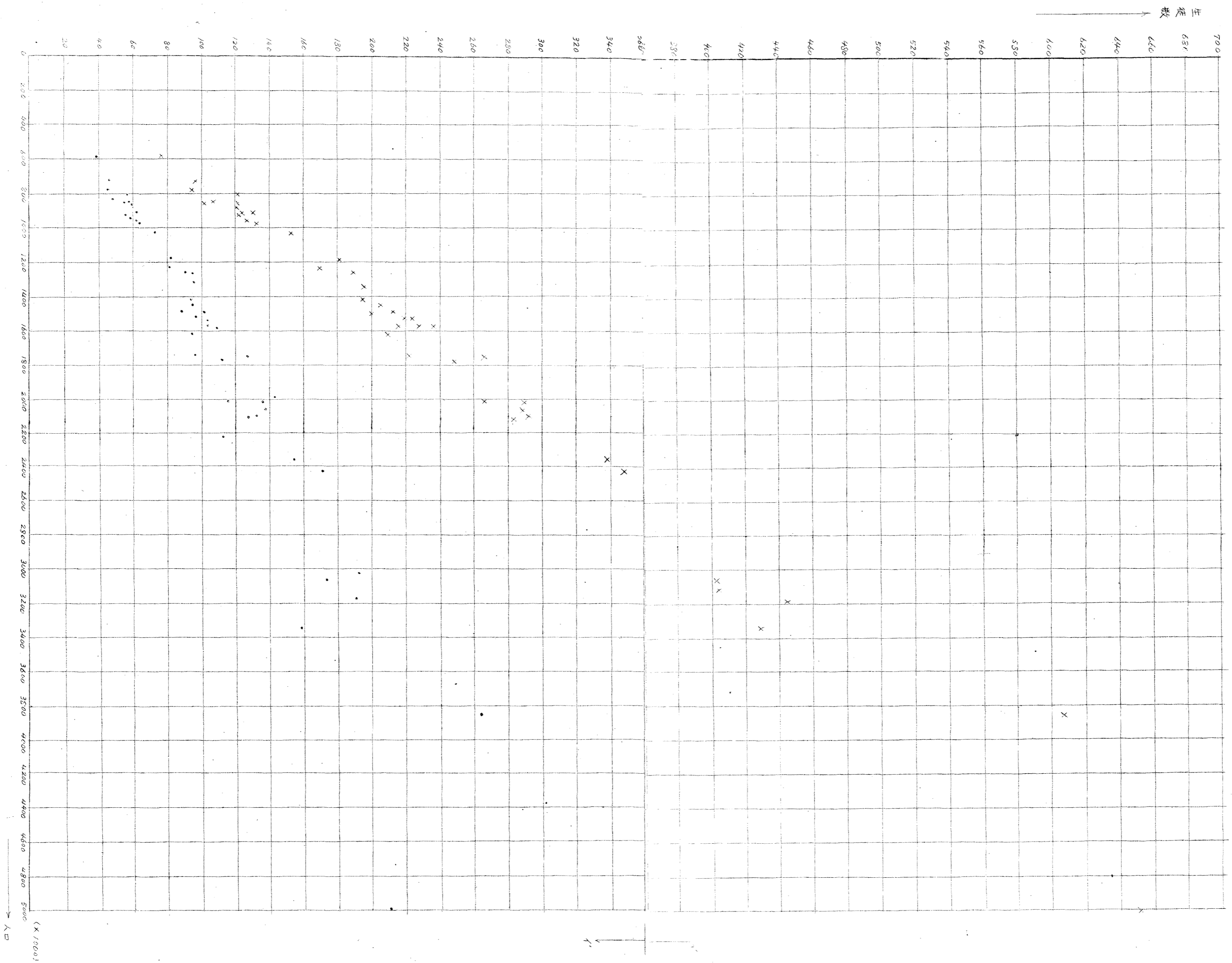
第2次層別：——

更にこれらの三都縣より学校を抽出するに際し、次の六つ、または四つの第二次層に層別した。

茨城縣、山口縣については

- A層 市部
- B層 商、工業的町村、農業を含む工業的町村
- C層 林業、水産業が主たる農業的町村

全国公立小、中学校の生徒数と人口の相関図表
X 小中学校 (相関係数 $r = 0.987$)
・ 中学校 (相関係数 $r = 0.930$)



D層 純農村的町村

東京都は次の6つである。

- A層 旧市内都心部(千代田,中央,文京,港,台東)
- B層 旧市内周辺住宅地(新宿,荒川,中野,杉並)
- C層 Bより更に周辺の住宅地(世田谷,目黒,豊島)
- D層 都心に接する工業的地区(北板橋,国分,大田)
- E層 更に工業率の高い地区(荒川,墨田,江東)
- F層 周辺都市,郡部及び農業的区部(練馬,武蔵野,八王子,三鷹,立川,北多摩,西多摩,南多摩)

これら第二次層より再加生徒数に比例する確率で各一校が抽出され、最後に各学校より各層の生徒数に比例するサンプルがえられた。標本校及びサンプル数は次表の通りである。なお、東京都は複雑と考えられるので別の場合の数を参考とするための別のサンプルを割当てた。

小学校サンプル数

層	1年			2年			3年			4年		
	男	女	計	男	女	計	男	女	計	男	女	計
第I層	88	47	95	51	50	101	48	47	95	44	43	87
第II層	50	50	105	42	60	122	58	57	115	52	51	103
第III層	83	80	162	55	84	169	77	76	153	69	67	136
計	191	185	376	196	194	392	183	180	363	165	161	326

	5年			6年			合計		
	男	女	計	男	女	計	男	女	計
41	40	51	45	46	94	260	273	533	
48	47	95	55	54	109	535	527	1062	
59	58	117	69	67	136	442	432	874	
148	145	293	172	167	339	1057	1032	2089	

中学校サニアル数

層	1年			2年			3年			合計		
	男	女	計	男	女	計	男	女	計	男	女	計
第一層	45	44	89	46	44	90	43	40	83	134	128	262
第二層	53	50	103	54	51	105	49	47	96	156	148	304
第三層	63	57	120	63	57	120	56	49	105	182	173	345
計	161	151	312	163	152	315	145	136	284	472	439	911

各縣におけるサニアルの割当は次の通りである。

I. 茨城県 (小学校) (生徒総数は10以下四捨五入)

層	生徒総数	抽出学校	学年	サニアル数		
				男	女	計
A	23,940	G 校 (水戸)	1	4	4	46
			2	4	4	
			3	4	4	
			4	4	4	
			5	3	3	
			6	4	4	
B	139,260	H 校 (勝田町)	1	23	23	267
			2	25	24	
			3	23	23	
			4	21	21	
			5	19	19	
			6	23	22	
C	33,630	K 校 (北那珂市)	1	6	6	74
			2	7	7	
			3	6	6	
			4	6	6	
			5	6	6	
			6	6	6	
D	86,400	T 校 (巴村)	1	15	14	166
			2	15	15	
			3	15	14	
			4	13	12	
			5	12	12	
			6	15	14	
計	288,230	4 校	1	48	47	553
			2	51	50	
			3	48	47	
			4	44	43	
			5	41	40	
			6	48	46	

茨城県（中学校）

層	生徒総数	抽出学校	学年	サンプル数		
				男	女	計
A	10,920	M 校 (日立市)	1	4	4	21
			2	4	3	
			3	3	3	
B	64,200	A 校 (真壁村)	1	21	21	125
			2	22	21	
			3	19	19	
C	18,490	K 校 (上天津村)	1	6	6	36
			2	6	6	
			3	6	6	
D	47,280	B 校 (俣穂村)	1	14	13	80
			2	14	14	
			3	13	12	
計	134,890	4 校	1	45	44	262
			2	46	44	
			3	43	40	

II. 山口縣 (小學校)

層	生徒總數	抽出學校	学年	サンプル数		
				男	女	計
A	97,990	M 校 (萩市)	1	29	29	327
			2	31	30	
			3	29	28	
			4	25	25	
			5	24	23	
			6	27	27	
B	22,700	T 校 (大和村)	1	7	6	76
			2	7	6	
			3	7	7	
			4	6	6	
			5	6	6	
			6	6	6	
C	55,260	I 校 (小松町)	1	17	16	184
			2	17	17	
			3	16	16	
			4	15	14	
			5	13	13	
			6	15	15	
D	22,430	S 校 (島地村)	1	7	7	75
			2	7	7	
			3	6	6	
			4	6	6	
			5	5	5	
			6	7	6	
計	198,380	4 校	1	60	58	662
			2	62	60	
			3	58	57	
			4	52	51	
			5	48	47	
			6	55	54	

山 口 縣 (中 学 校)

層	生徒総数	抽出学校	学年	サンプル数		
				男	女	計
A	40,130	N 校 (宇部市)	1	24	23	137
			2	24	23	
			3	22	21	
B	10,950	Y 校 (大和町)	1	7	6	38
			2	7	6	
			3	6	6	
C	26,490	C 校 (沖蕪村)	1	16	15	91
			2	16	15	
			3	15	14	
D	16,220	K 校 (川越村)	1	6	6	38
			2	7	7	
			3	6	6	
計	88,790	4 校	1	53	50	304
			2	54	51	
			3	49	47	

III 東京都 (川 学 校)

層	區	生徒総数	抽出学校	学 年	サマツル 数		
					男	女	計
A	中野 文京 港練	87,460	S 校 (文京)	1	14	13	140
				2	13	13	
				3	12	12	
				4	11	11	
				5	10	10	
				6	11	10	
B	新宿 澁谷 中野 杉並	59,045	T 校 (新宿)	1	13	13	143
				2	14	14	
				3	13	12	
				4	11	11	
				5	9	9	
				6	12	12	
C	世田谷 目黒 豊島	81,399	F 校 (世田谷)	1	13	12	130
				2	12	13	
				3	11	11	
				4	10	10	
				5	9	8	
				6	10	10	
D	北 板橋 沼川 大田	120,377	O 校 (北)	1	18	18	193
				2	19	19	
				3	17	17	
				4	16	15	
				5	12	12	
				6	15	15	
E	荒川 墨田 江東	62,066	H 校 (荒川)	1	10	10	49
				2	10	9	
				3	9	9	
				4	8	8	
				5	6	6	
				6	7	7	
F	練馬 板橋 八王子 三鷹 立川 北多摩 西多摩 南多摩	105,121	K 校 (南多摩 川町)	1	15	14	169
				2	16	16	
				3	15	15	
				4	13	12	
				5	13	13	
				6	14	13	
計	6層	545,468	6 校	1	83	80	874
				2	85	84	
				3	77	76	
				4	69	67	
				5	59	58	
				6	69	67	

東京都 (中学校)

層	區	生徒総数	抽出学校	学年	サンプル数		
					男	女	計
A	千代田 中央,文京 港,台東	27,564	F 校 (台東)	1	10	8	53
				2	10	8	
				3	9	8	
B	新宿,渋谷 中野,杉並	27,220	O 校 (新宿)	1	10	9	53
				2	10	8	
				3	9	7	
C	世田谷 目黒 豊島	23,098	N 校 (豊島)	1	9	8	45
				2	8	7	
				3	7	6	
D	北,板橋 西川,大田	38,180	I 校 (板橋)	1	13	12	74
				2	14	13	
				3	11	11	
E	荒川 墨田 江東	20,864	H 校 (墨田)	1	7	6	40
				2	7	7	
				3	7	6	
F	練馬,武蔵野 八王子,三浦 立川,北野 西町,西野	46,558	S 校 (北多摩)	1	14	14	80
				2	14	14	
				3	13	11	
計	6層	173,484	6校	1	63	57	345
				2	63	57	
				3	56	49	

§ 4. 推定平均及び分散

前節の如くサンプルをえらぶとき、母平均の推定値及びその分散は次のように表わせる。

- p : 第一次層の記号。($p = 1, 2, 3$)
 - i : 第一次層に属する県名
 - j : 第二次層の記号。($j = 1, 2, \dots, R_{pi}$; $R_{1i} = R_{2i} = 4, R_{3i} = 6$)
 - k : 第二次層に属する学校。
 - l : 生徒を表わす記号
 - M : 全国小学校1年生の生徒数(以下小学校1年生のみを考
えるとして單に生徒数ということにする。)
 - M_p : 第 p 層に属する生徒数。
 - M_{pi} : 第 p 層, i 縣に属する生徒数
 - M_{pij} : 第 p 層, i 縣, 第 j 層に属する生徒数
 - M_{pijk} : 第 p 層, i 縣, 第 j 層, k 校に属する生徒数。
- $m, m_p, m_{pi}, m_{pij}, m_{pijk}$ は同上の標本生徒数。
- x_{pijkl} : 第 p 層, i 縣, 第 j 層, k 校, l 番目の生徒の得点。
- \bar{x}_{pijk} : 第 p 層, i 縣, 第 j 層 k 校の標本平均点。

\bar{X}_{pijk} は \bar{x}_{pijk} に対応する母平均点とする。

このとき全国平均点の不偏推定値は

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{M} \sum_{p=1}^3 \frac{M_p}{M_{pi}} \sum_{j=1}^{R_{pi}} M_{pij} \bar{x}_{pijk} \\ &= \frac{1}{M} \sum_{p=1}^3 \frac{M_p}{M_{pi}} \sum_{j=1}^{R_{pi}} \frac{M_{pij}}{m_{pijk}} \sum_{k=1}^{m_{pijk}} x_{pijkl} \end{aligned} \quad (1)$$

仮定より標本總数を m とするとき

$$m_{pijk} = m \frac{a_p M_p}{\sum_{j=1}^{R_{pi}} a_j M_j} \frac{M_{pij}}{M_{pi}} = m_p \frac{M_{pij}}{M_{pi}}$$

従つて $a_1 = a_2 = 1, a_3 = 2$ とする。

$$\bar{x} = \frac{M^*}{Mm} \sum_{p=1}^3 \frac{1}{a_p} \sum_{j=1}^{R_{pi}} \sum_{k=1}^{m_{pijk}} x_{pijkl} \quad (2)$$

但し

$$M^* = \sum_{p=1}^3 a_p M_p = M + M_3$$

が全国平均点となる。

この分散は N_p : 第 p 層の縣の数, $N_{p ij}$: 第 p 層, i 縣, 第 j 層の学校数として

$$\begin{aligned} V(\bar{x}) = & \frac{1}{M^2} \sum_{p=1}^3 M_p^2 \left[\sum_{i=1}^{N_p} \frac{M_{pi}}{M_p} \sum_{j=1}^{R_{pi}} \left(\frac{M_{pij}}{M_{pi}} \right)^2 \left\{ \sum_{k=1}^{N_{pij}} \frac{M_{pijk}}{M_{pij}} \frac{M_{pijk} - m_{pijk}}{M_{pijk} - 1} \frac{\sigma_{pijk}^2}{m_{pijk}} \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{k=1}^{N_{pij}} \frac{M_{pijk}}{M_{pij}} (\bar{x}_{pijk} - \bar{x}_{pij})^2 \right\} + \sum_{i=1}^{N_p} \frac{M_{pi}}{M_p} (\bar{x}_{pi} - \bar{x}_p)^2 \right] \quad (3) \end{aligned}$$

また第 p 層の平均点の不偏推定値は

$$\bar{x}_p = \frac{1}{m_p} \sum_{j=1}^{R_{pi}} \sum_{k=1}^{m_{pijk}} x_{pijk} \quad (4)$$

その分散は

$$\begin{aligned} V(\bar{x}_p) = & \sum_{i=1}^{N_p} \frac{M_{pi}}{M_p} \left[\sum_{j=1}^{R_{pi}} \left(\frac{M_{pij}}{M_{pi}} \right)^2 \left\{ \sum_{k=1}^{N_{pij}} \frac{M_{pijk}}{M_{pij}} \frac{M_{pijk} - m_{pijk}}{M_{pijk} - 1} \frac{\sigma_{pijk}^2}{m_{pijk}} \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_{k=1}^{N_{pij}} \frac{M_{pijk}}{M_{pij}} (\bar{x}_{pijk} - \bar{x}_{pij})^2 \right\} + (\bar{x}_{pi} - \bar{x}_p)^2 \right] \quad (5) \end{aligned}$$

また第 I, II 層のみについて, A, B, C, D 各層の平均点は次式で推定される。ここで $j = A, B, C, D$ であるから, 簡単のため A のみについての式を掲げておこう。

$$\bar{x}_A = \frac{M^*}{m M_A} \sum_{p=1}^2 \sum_{k=1}^{m_{piAk}} c_{piAk} \quad (6)$$

が不偏推定値となる。ただし

M_A : A 層に属する生徒数 ($p=1, 2$ とする) を表わす。

この分散は

$$\begin{aligned}
V(\bar{x}_A) &= \frac{M_A^*}{M_A^2} \sum_{f=1}^2 \sum_{i=1}^{N_f} \sum_{k=1}^{N_{fIA}} M_{fIA} \frac{M_{fIA} - m_{fIA}}{M_{fIA} - 1} \sigma_{fIA}^2 + \\
&\quad \frac{1}{M_A^2} \sum_{f=1}^2 M_{fA}^2 \sum_{i=1}^{N_f} \frac{M_{fIA}}{M_{fI}} \sum_{k=1}^{N_{fIA}} M_{fIA} (\bar{X}_{fIAk} - \bar{X}_{fIA})^2 \\
&\quad + \frac{1}{M_A^2} \sum_{f=1}^2 M_{fA}^2 \left(\sum_{i=1}^{N_f} \frac{X_{fIA}^2}{M_{fI}} - \frac{X_{fA}^2}{M_f} \right) \quad (7)
\end{aligned}$$

上式(7)の第二項は大きな値となるので分散は全体として大きくなる。それ故実際は bias を生ずるが mean square error の小さい次の二つのうち何れかの推定値を用いるがよい。

$$\bar{x}_{AI} = \frac{1}{M_A} \sum_{f=1}^2 M_{fA} \bar{x}_{fIA} = \frac{1}{M_A} \sum_{f=1}^2 M_{fA} \frac{1}{m_{fIA}} \sum_{k=1}^{m_{fIA}} x_{fIAk} \quad (8)$$

または

$$\bar{x}_{AII} = \frac{1}{M_A} \sum_{f=1}^2 \sum_{k=1}^{m_{fIA}} x_{fIAk} \quad (9)$$

ただし

$$m_A = m_{1IA} + m_{2IA} \quad (10)$$

(8) の mean square error は

$$\begin{aligned}
M.S.E.(\bar{x}_{AI}) &= \frac{1}{M_A^2} \sum_{f=1}^2 M_{fA}^2 \sum_{i=1}^{N_f} \frac{M_{fI}}{M_f} \sum_{k=1}^{N_{fIA}} \frac{M_{fIA}}{M_{fIA} - 1} \frac{M_{fIA} - m_{fIA}}{M_{fIA} - 1} \frac{\sigma_{fIA}^2}{m_{fIA}} \\
&\quad + \frac{1}{M_A^2} \sum_{f=1}^2 M_{fA}^2 \sum_{i=1}^{N_f} \frac{M_{fI}}{M_f} \frac{1}{M_{fIA}} \sum_{k=1}^{N_{fIA}} M_{fIA} (\bar{X}_{fIAk} - \bar{X}_{fIA})^2 \\
&\quad + \frac{1}{M_A^2} \sum_{f=1}^2 M_{fA}^2 \left(\sum_{i=1}^{N_f} \frac{M_{fI}}{M_f} \bar{X}_{fIA}^2 - \left(\sum_{i=1}^{N_f} \frac{M_{fI}}{M_f} \bar{X}_{fIA} \right)^2 \right) + \frac{1}{M_A^2} \left(\sum_{f=1}^2 (M_{fA} \bar{X}'_{fA} - X_{fA}) \right)^2 \quad (11)
\end{aligned}$$

ただし

$$\bar{X}'_{fA} = \frac{1}{M_f} \sum_i \frac{M_{fI}}{M_{fIA}} X_{fIA} = \frac{1}{M_f} \sum_i M_{fI} \bar{X}_{fIA} \quad (12)$$

$$X_{fA} = \sum_i \sum_k \sum_l x_{fIAk} \quad (13)$$

また(9)は分母の m_A が変率変数となるので比推定値である。

$$\varphi = \frac{E(\sum_P \sum_L x_{fIAKL})}{E(\sum_P \sum_L 1)} = \frac{E(\sum_P \sum_L x_{fIAKL})}{E(M_A)} = \frac{X_A}{M_A} = \bar{X}_A \quad (14)$$

とおくと

$$V(\bar{X}_{AII}) \equiv \frac{1}{\{E(M_A)\}^2} E\left\{\sum_P \sum_L x_{fIAKL} - \varphi \sum_P \sum_L 1\right\}^2 = \frac{v}{M_A^2} \quad (15)$$

$$v = \frac{m}{M^2} \sum_P \sum_L \sum_K \frac{M_{fIAK} - m_{fIAK}}{M_{fIAK} - 1} \sum_L (X_{fIAK} - \varphi)^2 + \frac{m}{M^2} \sum_P \sum_L \sum_K \frac{m_{fIAK} - 1}{M_{fIAK} - 1} M_{fIAK} (\bar{X}_{fIAK} - \varphi)^2 - \frac{m^2}{M^2} \sum_P \left(\sum_L \sum_K \sum_C (X_{fIAK} - \varphi) \right)^2 \quad (16)$$

また

$$bias \equiv \frac{\bar{X}_A}{M_A^2} \left(\sum_P M_P \sum_L \frac{M_{fIA}^2}{M_{fL}} + 2 M_{1A} M_{2A} - M_A^2 \right) \quad (17)$$

(17)式と(16)式を比べると $\bar{X}_{fA} = \bar{X}_{fIA}$ と考えて

$$\sum_P \left(M_{PA}^2 - M_P \sum_L \frac{M_{fIA}^2}{M_{fL}} \right) < 0$$

なるとき(我々の場合これが成立している)

$$M.S.E.(\bar{X}_{AII}) < V(\bar{X}_A) \quad (18)$$

しかし $9 M.S.E. < 4V$, $16 M.S.E. < 9V$ であるから比推定値の方が 95% 99% 何れの信頼係数についても有効であり、かつ計算も簡単であるから \bar{X}_{AII} を用いる方がよいであろう。

§ 5. 推定平均の修正

前節に述べた諸式は^{すべて}昭和25年度に於ても全く昭和24年度と同一生徒数であると仮定したものである。実際にはこの仮定は成り立たず相当の生徒数の変化があり、*bias*を生ずるのである。

そこで前節の M をすべて P という文字でおきかえ、昭和25年度の生徒数をあらためて M で表わすことにすれば、(2)の代りに

$$\bar{x} = \frac{P^*}{mM} \sum_{p=1}^3 \frac{1}{a_p} \sum_{j=1}^{R_{pi}} \frac{M_{pijk}}{P_{pijk}} \sum_{l=1}^{m_{pijk}} x_{pijkl} \quad (2)'$$

を用いると不偏推定値となり，(4)の代りには

$$\bar{x}_p = \frac{P_p}{m_p M_p} \sum_{j=1}^{R_{pi}} \frac{M_{pijk}}{P_{pijk}} \sum_{l=1}^{m_{pijk}} x_{pijkl} \quad (4)'$$

を用いると不偏推定値が得られる。同様にして(6)の代りには不偏推定値

$$\bar{x}_A = \frac{P^*}{m M_A} \sum_{p=1}^2 \frac{M_{piaK}}{P_{piaK}} \sum_{l=1}^{m_{piaK}} x_{piaKl} \quad (6)'$$

を用いればよい。

もし最初からサマアル数を定めずに各層の抽出比 t_p を與えるときは

$$t_p = \frac{m a_p P_{pijk}}{P^* M_{pijk}}$$

とおけば(2)'は

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \sum_{p=1}^3 \frac{1}{t_p} \sum_{j=1}^{R_{pi}} \sum_{l=1}^{m_{pijk}} x_{pijkl} \quad (2)''$$

によつて與えられ，サマアル校におけるサマアル数は昭和25年度に於ける実際の生徒数 M_{pijk} を用いて

$$m_{pijk} = \frac{t_p P_p P_{pij}}{P_{pi} P_{pijk}} M_{pijk}$$

とすればよい。

このとき分散は

$$V(\bar{x}) = \frac{1}{M^2} \sum_{p=1}^3 P_p^2 \sum_{i=1}^{N_p} \frac{P_{pi}}{P_p} \sum_{j=1}^{R_{pi}} \left(\frac{P_{pij}}{P_{pi}} \right)^2 \sum_{k=1}^{N_{pij}} \frac{P_{pijk}}{P_p} \left(\frac{M_{pijk}}{P_{pijk}} \right)^2 \frac{M_{pijk} - m_{pijk}}{M_{pijk} - 1} \frac{\sigma_{pijk}^2}{m_{pijk}}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{M^2} \sum_{p=1}^3 P_p^2 \sum_{i=1}^{N_p} \frac{P_{pi}}{P_p} \sum_{j=1}^{R_{pi}} \left(\frac{P_{pij}}{P_{pi}} \right)^2 \sum_{k=1}^{N_{pij}} \frac{P_{pijk}}{P_{pij}} (\bar{x}'_{pijk} - \bar{x}'_{pij})^2 \\
& + \frac{1}{M^2} \sum_{p=1}^3 P_p^2 \sum_{i=1}^{N_p} \frac{P_{pi}}{P_p} \left[(\bar{x}'_{pi} - \bar{x}'_p)^2 + \sum_{j=1}^{R_{pi}} \left(\frac{N_{pij}}{P_{pi}} \right)^2 \left(\frac{N_{pij}-1}{N_{pij}} \bar{x}_{pij}^2 - \frac{\sigma_{pij}^2}{N_{pij}} \right) \right] \\
& + \frac{3}{M^2} (\sigma^2 - 2\bar{x}^2) \tag{19}
\end{aligned}$$

となる。そこで

$$X_{pijk} = P_{pijk} \bar{x}'_{pijk} = \sum_k X_{pijk\ell} = M_{pijk} \bar{x}_{pijk},$$

$$X_{pij} = P_{pij} \bar{x}'_{pij} = \sum_k X_{pijk} \quad \dots \quad X_{pi} = P_{pi} \bar{x}'_{pi} = \sum_j X_{pij},$$

$$X_p = P_p \bar{x}'_p = \sum_i X_{pi}, \quad \bar{x}_{pij} = \frac{1}{N_{pij}} \sum_k X_{pijk}, \quad \bar{x} = \frac{1}{3} \sum_p X_p$$

$$\sigma_{pijk}^2 = \frac{1}{M_{pijk}} \sum_{\ell} (X_{pijk\ell} - \bar{x}_{pijk})^2, \quad \sigma_{pij}^2 = \frac{1}{N_{pij}} \sum_k (X_{pijk} - \bar{x}_{pij})^2,$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{3} \sum_p (X_p - \bar{x})^2$$

である。

§ 6. 結 果 の 分 析

最後にテストの結果の一部を掲げておこう。小学校6年生のみについての結果である。(満点は90点)

一 次 層 二 次 層	I	II	III	I + II		
				\bar{x}_j	\bar{x}_{jI}	\bar{x}_{jII}
A	39.7	48.4	62.8	68.3	45.3	47.2
B	44.5	27.2	55.0	34.3	34.9	40.9
C	56.4	41.1	49.6	39.1	49.4	45.5
D	30.5	35.9	41.3	33.8	33.3	32.2
E	—	—	38.3	—	—	—
F	—	—	21.8	—	—	—
一 次 層 平 均	43.8	42.7	44.1	—	—	—

$$C.V.(\bar{x}) \cong 0.036$$

$$C.V.(\bar{x}_A) \cong 0.154$$

$$C.V.(\bar{x}_{AI}) \cong 0.140$$

$$C.V.(\bar{x}_{AII}) \cong 0.111$$

$$\bar{x}_{AII} \text{ の bias } \cong 2.9$$

$$\text{全 国 平 均 } \bar{x} = 42.5$$

第I, II, III, 層の平均点に有意な差があるかどうかをしらべるのに下表を作ってみると有意水準5%で有意差は認められない。

このとき分布は正規分布でないからF分布やt分布の表を用いて検定することは出来ない。(強いて行くと形式的には有意差なしという結果は得られるが正しくはない。) そのためのかなる分

布に対しても有意水準5% (信頼係数95%)で

層	\bar{x}_p	$\sqrt{V(\bar{x}_p)}$	s^2	n	有意差
I	43.8	2.19	284.1	94	なし (有意水準 5%)
II	42.7	2.14	320.6	109	
III	44.1	2.21	416.1	136	

$$|\bar{x} - \bar{X}| < 2.65 \bar{x}$$

が成立つことを用いると (注)

$$38.1 < \bar{x}_1 < 49.5$$

$$37.1 < \bar{x}_2 < 48.3$$

$$38.3 < \bar{x}_3 < 49.9$$

となるから各層の間の有意差が認められないのである。

次に第I, II層に於てA, B, C, D間の差を検定してみると
信頼係数95%で

$$33.5 < \bar{x}_A < 60.8$$

$$29.1 < \bar{x}_B < 52.7$$

$$32.3 < \bar{x}_C < 58.6$$

$$22.9 < \bar{x}_D < 41.5$$



となるから、A, D間; C, D間には有意差があるが他の間には有意差を認められない。図示すると上図のようになる。

第III層内のA, B, C, D, E, F間の差を検定してみると、
信頼係数95%で

$$55.1 < \bar{x}_A < 70.5$$

$$44.7 < \bar{X}_B < 65.3$$

$$42.1 < \bar{X}_C < 57.1$$

$$33.3 < \bar{X}_D < 49.3$$

$$32.6 < \bar{X}_E < 44.0$$

$$15.2 < \bar{X}_F < 28.4$$

となる。故に

A と C, D, E, F

B と D, E, F

C と A, D, E, F

D と A, B, C, F

E と A, B, C, F



の間には有意差があるといえる。図示すれば上図のようになっている。

男女間の差は次表の様になる。

信頼係数 95% では

性別	\bar{x}	s^2	n
男	46.9	398.4	149
女	40.8	298.8	146

$$41.9 < \bar{X}_{\text{男}} < 51.9$$

$$36.5 < \bar{X}_{\text{女}} < 45.2$$

となるので有意差が存在する。

最後に谷生徒の父兄の職業、學歷による平均賃の表をあけておく。(不明のものは省略した。)

職 業	\bar{x}	s^2	n
農 林 業	35.1	387.3	74
水 産 業	30.3	115.7	4
勞 務 者	42.9	304.4	62
商 工 業	46.3	261.2	64
権給生活者	50.2	382.2	66
其 他	54.0	237.4	10
無 職	48.9	208.7	15

学 歴	\bar{x}	s^2	n
小 学 校 卒	39.1	360.7	128
高等小学校卒	45.3	257.1	60
中等学校卒	48.1	349.5	53
大学高専卒	57.6	347.5	29
不 明	37.6	243.1	25

尚、参考の12の職業と学歴の関係を記すと次表のようである。

職業 学歴	農林業	水産業	労務者	商工業	無職者	其 他	無 職	計
小学校卒	51	2	31	27	9	3	5	128
高等小学校卒	10	2	15	18	10	3	2	60
中等学校卒	10		7	12	20	2	2	53
大学高専卒	2		1	2	21	1	2	29
不 明	1		8	5	6	1	4	25
計	74		62	64	66	10	15	295

(注) 水野 坦： 或不等式に就て(一)。

統計数理研究所 講究録第5巻第9号