

# レジーム・スイッチング因子分析と J-REIT市場のリスク・ファクターの検出への応用

石島 博<sup>1</sup>・松島 純之介<sup>2</sup>

(受付 2010年10月1日;改訂 12月13日;採択 12月22日)

## 要 旨

本論文では、レジーム・スイッチングあるいは隠れマルコフと呼ばれるモデルを導入した因子分析である「レジーム・スイッチング因子分析」について、その統計的手法を提案する。あわせて、これを金融資産価格におけるリスク・ファクターの検出へ応用した実証分析を行う。

レジーム・スイッチング因子分析の目的は、資産価格のみからそのリスク要因を抽出することにある。その次元数は、分析対象とする資産数よりも少ないことが期待される。さらに、そのリスク要因が、市場の背後にある見えざる経済レジームによって異なったものにスイッチングしうることを考慮する。本論文では、レジーム・スイッチング因子分析のモデルを設定した後に、その推定方法を導出する。すなわち、(1)尤度関数を求めるためのフォワード・バックワード・アルゴリズム、(2)モデル・パラメータの最尤推定量を求めるためのBaum-Welch (EM)アルゴリズム、を導出する。さらに、推定量の誤差評価についても言及する。続いて、レジーム・スイッチング因子分析により、我が国のJ-REIT(日本版不動産投資信託)の市場において資産間で共有するリスク・ファクターを、見えざる経済状態に応じて検出できるのか、という実証分析を行う。その結果、レジーム・スイッチング因子分析は、通常の因子分析よりも、資産価格のリスク構造を統計的にうまく説明できることが分かった。一方、ファイナンス分野においては、資産価格のリターンの源泉を説明するために、回帰分析が良く用いられる。比較のために、レジーム・スイッチング回帰分析も行った。この実証分析により、以下の3点を見出した。(1)レジーム・スイッチング・モデルを導入した因子分析とマルチファクター分析はいずれも同一とみなせる経済レジームを平滑化確率(スモザー)として検出した。(2)レジームによってスイッチングする「リスク・ファクター」は資産価格のみから検出が可能である。(3)レジーム・スイッチングに起因する「リターン源泉」は市場ベンチマークを導入することにより、より上手く説明することができる。

キーワード：因子分析、隠れマルコフ・モデル、統計的手法、実証分析。

## 1. 緒論

市場において取引される金融資産の価格を、共通するファクターで説明する、いわゆるファクター・モデルは、理論と実証の両側面より、多くの研究が行われてきたファイナンスの主要なテーマの一つである。

<sup>1</sup> 中央大学大学院 国際会計研究科：〒162-8478 東京都新宿区市谷田町 1-18

<sup>2</sup> 中外製薬株式会社 臨床企画推進部：〒103-8324 東京都中央区日本橋室町 2-1-1 日本橋三井タワー

ファクター・モデルを推定するには、主として2つのアプローチが考えられる。第1のアプローチでは、資産価格を説明すると考えられる共通ファクターを分析者が用意した上で回帰分析を行う。例えば、CAPM (Capital Asset Pricing Model) の推定に際して用いられる、いわゆるマーケット・モデルは、市場ポートフォリオの代替としての市場ベンチマークを唯一のファクターとして回帰する、シングル・ファクター・モデルである。また、Fama-French のスリー・ファクター・モデルにおいてはさらに、資産の大・小というサイズと、割安・割高の目安であるPBR (Price-to-Book Ratio) の逆数という2つのファクターを追加した回帰モデルである。これらの回帰モデルにおいて資産価格のリスクは、説明変数という互いに独立な共有ファクターと、資産に固有のリスクに予め分離されている。したがって、各ファクターがどれくらい資産価格との相関リスクを持ち、その対価としてのリターン源泉を与えるのかを明らかにすべく、回帰係数が推定される。

一方、第2のアプローチでは、資産価格を説明する共通ファクターを分析者は用意せず、資産価格のみからこれを抽出することを試みる。そのための一つの手法が、因子分析である。因子分析におけるファクターは、その期待値を差引いたものを改めてファクターとするため、その予想できない変化を表すこととなる。したがって、資産価格と相関リスクを持ちうる、互いに独立なファクターがどれくらいあるのか、また、それだけでは説明がつかない資産に固有のリスクに分離・抽出することが、まず主眼となる。その上で、抽出された各ファクターのサプライズが、どれくらい資産価格に影響をもたらすのかを明らかにすべく、ファクター・ローディングが推定される。

因子分析は統計的因果推論では基礎的な手法であり、とりわけ社会科学、心理学、マーケティング等でよく用いられる。また、計量経済学で従来から用いられている主成分分析も、因子分析と同類の手法である。金融経済学分野において因子分析を扱った論文には、Lehmann and Modest (1988)などが挙げられる。

本論文では、因子分析について、その特徴をそのままに保持しつつ、見えざる経済状態、つまりレジームに応じてリスク・ファクターを抽出可能なレジーム・スイッチング・モデルを導入する。

既存のファクター・モデル、およびこれを推定する因子分析においては、時間軸を通じて一定のファクターを仮定する。結果として、時間に依らず一定のリスクとリターン構造を持つモデルとなる。このようなファクター・モデルは、分かりやすく直感とも整合的であるという利点を持つ反面、実証分析を行った場合に、上手く説明できないことも多い。

そこで、このような利点を維持しつつも、市場の挙動を上手く説明できるようなファクター・モデルの構築が期待される。特に、市場において、強気相場(ブル・マーケット)と弱気相場(ベア・マーケット)のスイッチング、あるいは、好況と不況とがスイッチングする景気循環がしばしば観測されることに着目する。ここで、景気は「姿に見えぬ景気」(鴨長明『無名抄』)と、古くから言われるくらいであるから、見えざるものである。そしてこのスイッチングは、市場の背後にある見えざる経済状態、すなわち「レジーム」のスイッチングによってもたらされると考える。そして、このレジームに応じて、資産価格のリスクとリターン構造、したがってファクターもスイッチングしうると考えられる。このとき、因子分析にレジーム・スイッチング・モデルを導入することは、一つの自然な拡張であろう。

レジーム・スイッチング・モデル、または隠れマルコフ・モデル(HMM: Hidden Markov Model)とも呼ばれるモデルは、Baum and Petrie (1966), Baum and Eagon (1967), Baum et al. (1970), Baum (1972)らによってその研究が始まり、今日、音声認識、ゲノミクス、形態素解析(自然言語処理)など、さまざまな分野に応用されている(例えば、Levinson et al., 1983; 池田, 1993)。レジーム・スイッチング・モデルは、資産価格などの時系列に関する既存の確率モデルに含ま

れるパラメータが、見えざる経済状態、つまりレジームに応じてスイッチングすることを考慮したモデルである。より具体的には、資産価格などの時系列に関する確率モデルを「観測方程式」として記述する。この確率モデルは、ファイナンス分野で良く用いられる、対数正規モデルや次数が1の自己回帰モデル(AR(1))など慣れ親しんだ既存のものでもよい。その際、観測方程式のパラメータは、レジームと対応付けられる。つまり、パラメータはレジームに応じて異なった値をとり、レジームの数だけ用意される。そして、ある時点において、あるレジームが実現したときに、これに対応づけられたパラメータが実現すると考える。その結果、パラメータは時間軸に沿って、実現したレジームに応じてスイッチングするのである。このとき、レジームは1次のMarkov過程に従うと仮定し、これを「状態方程式」とする。以上より、レジーム・スイッチング・モデルは、観測方程式と状態方程式の2本の方程式によって記述され、観測データのみからそのパラメータを推定する。本モデルは、Kalmanフィルターなどを包含する、いわゆる状態空間モデルの一つとみなすことができる(Elliott et al., 1995)。

一方、レジーム・スイッチング・モデルの経済学関連分野への応用は、計量経済学(時系列分析)の分野において、Hamilton(1989)によって導入され、景気の転換点に関する研究(Hamilton, 1990)を始めとして、今日に至るまでの約20年間に数多くの研究が行われてきた。本研究と関連のある研究としては、Kim and Yoo(1995)、Kim and Nelson(1998)、Kaufmann(2000)が挙げられ、以下の3つの特徴を持つ動的マルコフ・スイッチング・ファクター・モデルを提案している。(i)観測方程式:分析対象は、GDP・消費・設備投資といった多次元のマクロ経済指標であり、これを「ラグつきの、ただし唯一の共通ファクター」で説明しようとする「時系列モデル」である。そして、この唯一の共通ファクターを自己回帰モデル(AR)で表現した上で、そのレベル(期待値)がレジームに応じてスイッチングすると仮定される。また、各マクロ経済指標に固有なリスクのモデル化については、それぞれの研究において多少異なるものの、レジームを考慮せず、レジームと独立であることを仮定することは共通している。(ii)状態方程式:2状態の1次マルコフ過程にしたがう、と仮定される。Kim and Nelson(1998)やKaufmann(2000)では、時間斉時的(time-homogeneous)な推移確率を、Kim and Yoo(1995)ではこれに加えて、時間可変的(time-varying)な推移確率も考慮している。(iii)モデルの推定方法:Kim and Yoo(1995)では、近似最尤法(Approximate Maximum Likelihood Estimation)によって推定している。一方、Kim and Nelson(1998)やKaufmann(2000)では、MCMC(Markov Chain Monte Carlo)シミュレーション法により推定している。

また、レジーム・スイッチング・モデルのファイナンス分野への応用も進んでおり、これまでの研究によれば、レジーム・スイッチング・モデルの導入により、既存のファイナンス理論を素直に拡張できることが分かってきた(例えば、Mamon and Elliott, 2007)。結果として、従来のファイナンス理論におけるモデルの枠組みのまま、その上に状態推移を導入することができる。また、これを適用した実証分析においても、スイッチングをもたらしたであろうイベントと対応付けられるなど、豊富な解釈を付与できるという点で優れている。

以上の背景より、因子分析とレジーム・スイッチング・モデルの双方のメリットを享受できる、「レジーム・スイッチング因子分析」とその統計的手法を提案することとする。先行研究として、混合正規分布の下での因子分析は、Ghahramani and Hinton(1996)に述べられている。本論文ではこれを参考にして、レジーム・スイッチング因子分析の統計的手法を構築することとする。とりわけ、レジーム・スイッチング・モデルにおける推定量の誤差評価方法は、未だ確立しているとは言い難く、その取り扱いには注意を要する。本論文では、MBHHH推定量を定義し、これをレジーム・スイッチング・モデルにおける漸近分散の一つの目安とする。

本論文の構成は、以下の通りである。第2節においては、本論文で提案するモデルについて述べる。第3節では、本モデルを推定するための統計的手法を構築する。第4節では、本モデ

ルを我が国の J-REIT 市場に適用した実証分析を行い、その有効性を調べる。第5節で、結論を述べる。

## 2. モデル

離散時点  $t(t=1, \dots, T)$  において、経済には  $K$  個の見えざる状態、つまり、レジームが存在すると仮定し、これを確率ベクトル  $Y = \{Y_t; t=1, \dots, T\}$  によって表す。レジーム  $Y$  の状態空間を  $\{e_1, \dots, e_k, \dots, e_K\}$  とする。つまり、各時点において、 $K$  種類のレジームのうち、いずれかのレジームが市場を支配していると考える。また、レジームの状態空間を表現する  $e_k \in \mathbb{R}^K (k=1, \dots, K)$  は、その第  $k$  要素が値1であり、それ以外の要素の値が0であるような列ベクトルである。

このとき、時点  $t$  におけるレジームの定義関数を以下のように定義する：

$$\langle Y_t, e_k \rangle = \begin{cases} 1 & (Y_t = e_k) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (k=1, \dots, K).$$

この定義関数により、時点  $t$  においてどのレジームが実現しているかを表現することができる。レジーム  $Y_t$  は1次の Markov 過程に従うとし、 $\mathcal{F}_t := \sigma(Y_1, \dots, Y_t)$  と書く。このとき、

$$\Pr(Y_{t+1} = e_k | \mathcal{F}_t) = \Pr(Y_{t+1} = e_k | Y_t) \quad (k=1, \dots, K),$$

である。これより、時点  $t$  におけるレジーム  $e_k$  から、時点  $t+1$  でのレジーム  $e_l$  への時間齊時的な推移確率を、

$$p_{lk} = \Pr(Y_{t+1} = e_l | Y_t = e_k) \geq 0, \text{ あるいは, } \mathbf{P} = (p_{lk})_{1 \leq l, k \leq K},$$

により表す。ただし、時点  $t$  から  $t+1$  へ進むときには、必ず  $K$  個のレジームのうち、いずれかのレジームに推移するので、次の性質を有する。

$$p_{lk} \geq 0 \quad (l, k=1, \dots, K), \quad \sum_{l=1}^K p_{lk} = 1 \quad (k=1, \dots, K).$$

また、初期状態分布ベクトルを次のように定義する。

$$\pi := (\pi_k = \Pr(Y_1 = e_k))_{1 \leq k \leq K}.$$

このとき、見えざるレジームに関する「状態方程式」は、次のセミマルチンゲールとして表現することができる：

$$Y_{t+1} = \mathbf{P}Y_t + M_{t+1}.$$

ただし、 $M_{t+1}$  は、 $\mathcal{F}_t$ -マルチンゲール増分である。

レジーム・スイッチング因子分析では、市場で取引される  $n$  個の資産価格の収益率に関する過程  $\mathbf{r} = \{\mathbf{r}_t; t=1, \dots, T\}$  を、見えざるレジーム  $Y_t = e_k (k=1, \dots, K)$  所与の下で次の「観測方程式」として表現する。つまり、 $Y_t = e_k$  所与の下で、資産価格の収益率をファクター(因子)  $\tilde{z}_t$  により表現する。このとき、ファクターの次元数  $d$  は、資産数  $n$  よりも格段に小さいことが期待される。

$$(2.1) \quad (\mathbf{r}_t | Y_t = e_k) = \boldsymbol{\mu}_k + \tilde{\boldsymbol{\Lambda}}_k \tilde{z}_t + \boldsymbol{\Psi}_k^{1/2} \mathbf{u}_t.$$

ただし、 $\boldsymbol{\mu}_k \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  はレジームに応じた資産の期待対数収益率を表すスイッチング切片、 $\tilde{z}_t \sim \mathcal{N}_d(\mathbf{0}, \mathbf{I})$  はファクター、 $\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}_k \in \mathbb{R}^{n \times d}$  はそのスイッチング・ファクター・ローディング、 $\mathbf{u}_t \sim \mathcal{N}_n(\mathbf{0}, \mathbf{I})$

は各資産に固有のリスク、 $\Psi_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$  はレジームに応じてスイッチングする各資産固有のリスクを分散として表す対角行列である。

このモデル(2.1)式において、 $\tilde{z}_t$  はファクターよりその期待値を差引いたものを改めてファクターとおいたものである。つまり、ファクターの予想のできない変化を表す。

また、スイッチング切片が陽に表れないレジーム・スイッチング因子分析のモデルは、 $\mathbf{z}_t = (\tilde{z}_t', 1)' \in \mathbb{R}^{(d+1) \times 1}$ 、 $\Lambda_k = (\tilde{\Lambda}_k \ \mu_k) \in \mathbb{R}^{n \times (d+1)}$  とおくことにより、次式のように表現することができる。

$$(2.2) \quad (\mathbf{r}_t | Y_t = e_k) = \Lambda_k \mathbf{z}_t + \Psi_k^{1/2} \mathbf{u}_t.$$

(2.2)式で表される本研究のモデル(以下、本モデル)と、第1節で言及した、Kim and Yoo (1995), Kim and Nelson (1998), Kaufmann (2000)らの動的マルコフ・スイッチング・ファクター・モデル(以下、Kimらの関連研究のモデル)との相違点を、3つの観点より述べる。

- (i) 観測方程式：本モデルの分析対象は、J-REITをはじめとする多次元の金融資産価格の収益率である。したがって、ファイナンス理論におけるファクター・モデルの文脈においては、この金融資産価格の収益率を、同一時点における、資産間で共有する複数のファクターで説明しようとする(例えば、Campbell, 2000)。そして、本モデルも、『付録AとBにおいて導出する資産価格評価の理論モデル』を推定するための統計モデル(後述の第4節で行う実証分析に用いる(4.4)式)を包含する一般的な統計モデルとして提案するものである。結果として、本モデルは、通常の因子分析にレジーム・スイッチングを考慮するという、自然な拡張の1つとなっている。一方、Kimらの関連研究のモデルでは、分析対象を多次元のマクロ経済指標としており、これを、「ラグつきの、ただし唯一の共通ファクター」で説明しようとする時系列モデルを提案している。そして、この唯一のファクターを自己回帰モデル(AR)で表現した上で、そのレベル(期待値)にレジーム・スイッチングを仮定する。このような時系列構造を仮定するという制約条件下で、ファクターの挙動を推定することに主眼をおいている。
- (ii) 状態方程式：本モデルは、 $K$ 状態の1次マルコフ過程にしたがい、その推移確率は時間斉時的である。一方、Kimらの関連研究のモデルは、2状態の1次マルコフ過程にしたがい、その推移確率は時間斉時的と仮定することが多いが、時間可変的な推移確率を考慮したモデルもある。
- (iii) 推定方法：本モデルは、第3節で提案するBaum-Welch(EM)アルゴリズムによって推定する。一方、Kimらの関連研究のモデルの推定は、既存のMCMCシミュレーション法や近似最尤法が用いられている。

さて、(2.2)式は、第4節で行う実証分析にて利用するモデル(4.4)式も包含する一般的な表現である。一方、レジーム  $Y_t = e_k$  所与の下で、資産価格の対数収益率の条件付密度  $b_k(\mathbf{r}_t)$  は以下のように与えられる。

$$(2.3) \quad b_k(\mathbf{r}_t) := f(\mathbf{r}_t | Y_t = e_k, \Theta) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\Psi_k|^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{r}_t - \Lambda_k \mathbf{z}_t)' \Psi_k^{-1} (\mathbf{r}_t - \Lambda_k \mathbf{z}_t) \right\}$$

$$(k=1, \dots, K).$$

以上より、本レジーム・スイッチング因子分析のモデル・パラメータ  $\Theta$  は、次の通りである。

$$(2.4) \quad \Theta := \{\pi_k, p_{lk}, \Lambda_k, \Psi_k (k, l=1, \dots, K)\}.$$

### 3. 推定方法

レジーム・スイッチング因子分析を含め、レジーム・スイッチング・モデルを推定する際には次の2つのアルゴリズムの構築が必要である。

- (1) 資産価格の収益率の観測データを  $\mathcal{R}_t = \{r_1, r_2, \dots, r_t\}$  と書く。このとき、 $\mathcal{R}_T$  およびモデル・パラメータ  $\Theta$  が与えられたとき、観測データに関する尤度関数  $f(\mathcal{R}_T|\Theta)$  を計算する「Forward-Backward アルゴリズム」。
- (2) 尤度関数  $f(\mathcal{R}_T|\Theta)$  を最大化するようなモデル・パラメータ  $\Theta$  を与える「Baum-Welch (EM) アルゴリズム」。

以下にこの2つのアルゴリズムについて述べる。

#### 3.1 Forward-Backward アルゴリズム

##### Forward アルゴリズム

次式により Forward 変数  $\alpha_{tk}(t=1, \dots, T; k=1, \dots, K)$  を定義する。

$$(3.1) \quad \alpha_{tk} := f(\mathcal{R}_t, Y_t = e_k | \Theta).$$

$\alpha_{tk}$  は時点  $t$  での状態  $k$  と時点  $t$  までの観測データとの同時密度関数である。Forward 変数は次のステップにより帰納的に計算することが可能である。

$$(1) \quad t=1$$

$$(3.2) \quad \alpha_{1k} = f(r_1, Y_1 = e_k | \Theta) = \pi_k b_k(r_1) \quad (k=1, \dots, K).$$

$$(2) \quad t=2, \dots, T$$

$$(3.3) \quad \alpha_{tk} = f(\mathcal{R}_t, Y_t = e_k | \Theta) = \sum_{l=1}^K b_k(r_t) p_{kl} \alpha_{(t-1)l} \quad (k=1, \dots, K).$$

この  $\alpha_{tk}$  を用いれば、尤度関数は次のように計算できる。

$$(3.4) \quad f(\mathcal{R}_T | \Theta) = \sum_{k=1}^K f(\mathcal{R}_T, Y_T = e_k | \Theta) = \sum_{k=1}^K \alpha_{Tk}.$$

##### Backward アルゴリズム

同様に、時点更新をバックワードにした再帰計算を行うことができる。Backward 変数  $\beta_{tk}(t=1, \dots, T; k=1, \dots, K)$  を次式で定義する。

$$(3.5) \quad \beta_{tk} := f(r_{t+1}, r_{t+2}, \dots, r_T | Y_t = e_k, \Theta).$$

すなわち、時点  $t$  における状態が  $k$  であるという情報が所与の下で、時点  $t+1$  から  $T$  までの資産価格の収益率という観測データの同時密度関数である。Backward 変数も同様に次のステップにより帰納的に計算ができる。

$$(1) \quad t=T$$

$$(3.6) \quad \beta_{Tk} = 1 \quad (k=1, \dots, K).$$

$$(2) \quad t=T-1, \dots, 1$$

$$(3.7) \quad \beta_{tk} = f(r_{t+1}, r_{t+2}, \dots, r_T | Y_t = e_k, \Theta) = \sum_{l=1}^K \beta_{(t+1)l} b_l(r_{t+1}) p_{lk}.$$

### 3.2 滞留確率 $\gamma$ , $\xi$ の導出

$\gamma_{tk}$ ,  $\xi_{ilk}$  を以下のように定義する.

$$(3.8) \quad \gamma_{tk} := \Pr(Y_t = e_k | \mathcal{R}_T, \Theta),$$

$$(3.9) \quad \xi_{ilk} := \Pr(Y_{t+1} = e_l, Y_t = e_k | \mathcal{R}_T, \Theta).$$

$\gamma_{tk}$  はパラメータおよび全ての観測値が所与の下で時点  $t$  において状態  $k$  にいる確率, つまり「平滑化確率(スーマー)」を表している.  $\xi_{ilk}$  は同条件の下での時点  $t+1$  における状態が  $l$  で, 時点  $t$  における状態が  $k$  である確率を表している. Baum-Welch アルゴリズムではこの  $\gamma$ ,  $\xi$  を用いて計算を行う.  $\gamma$  は以下のように導出できる.

$$(3.10) \quad \gamma_{tk} = \frac{f(\mathcal{R}_T, Y_t = e_k | \Theta)}{f(\mathcal{R}_T | \Theta)} = \frac{\alpha_{tk} \beta_{tk}}{\sum_{k=1}^K \alpha_{tk} \beta_{tk}}.$$

また,  $\xi$  は次式で与えられる.

$$(3.11) \quad \xi_{ilk} = \frac{f(Y_{t+1} = e_l, Y_t = e_k, \mathcal{R}_T | \Theta)}{f(\mathcal{R}_T | \Theta)} = \frac{\beta_{(t+1)l} b_l(\mathbf{r}_{t+1}) p_{lk} \alpha_{tk}}{\sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^K \beta_{(t+1)l} b_l(\mathbf{r}_{t+1}) p_{lk} \alpha_{tk}}.$$

### 3.3 Baum-Welch (EM) アルゴリズム

レジーム・スイッチング因子分析における完全データの対数尤度関数は, レジームについて  $\mathcal{Y}_t = \{Y_1, \dots, Y_t\}$  と書くとき, 次のように与えられる.

$$(3.12) \quad \begin{aligned} & \log f(\mathcal{R}_T, \mathcal{Y}_T | \Theta) \\ &= \sum_{k=1}^K \langle Y_1, e_k \rangle \log \pi_k + \sum_{t=1}^{T-1} \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^K \langle Y_t, e_k \rangle \langle Y_{t+1}, e_l \rangle \log p_{lk} + \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^K \langle Y_t, e_k \rangle \log b_k(\mathbf{r}_t). \end{aligned}$$

いわゆる  $Q$  関数は, この対数尤度関数を用いて以下のように表される.

$$(3.13) \quad \begin{aligned} Q(\Theta | \Theta^{(p)}) &:= E[\log f(\mathcal{R}_T, \mathcal{Y}_T | \Theta) | \mathcal{R}_T, \Theta^{(p)}] \\ &= \sum_{k=1}^K \gamma_{1k}^{(p)} \log \pi_k + \sum_{t=1}^{T-1} \sum_{k=1}^K \sum_{l=1}^K \xi_{tlk}^{(p)} \log p_{lk} - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^K \gamma_{tk}^{(p)} d \log 2\pi \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^K \gamma_{tk}^{(p)} \log |\Psi_k| - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^K \gamma_{tk}^{(p)} \mathbf{r}_t' \Psi_k^{-1} \mathbf{r}_t + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^K \gamma_{tk}^{(p)} \mathbf{r}_t' \Psi_k^{-1} \Lambda_k \zeta_{tk}^{(p)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^K \gamma_{tk}^{(p)} \zeta_{tk}^{(p)'} \Lambda_k' \Psi_k^{-1} \mathbf{r}_t - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \sum_{k=1}^K \gamma_{tk}^{(p)} \text{tr}[\Lambda_k' \Psi_k^{-1} \Lambda_k \boldsymbol{\eta}_{tk}^{(p)}]. \end{aligned}$$

ここで,

$$(3.14) \quad \mathbf{c}_k := \Lambda_k' (\Psi_k + \Lambda_k \Lambda_k')^{-1},$$

$$(3.15) \quad \zeta_{tk} := E[\mathbf{z}_t | \mathcal{R}_T, Y_t = e_k, \Theta] = \mathbf{c}_k \mathbf{r}_t,$$

$$(3.16) \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\eta}_{tk} &:= E[\mathbf{z}_t \mathbf{z}_t' | \mathcal{R}_T, Y_t = e_k, \Theta] = \text{Var}[\mathbf{z}_t | \mathcal{R}_T, Y_t = e_k, \Theta] + \zeta_{tk} \zeta_{tk}' \\ &= \mathbf{I} - \mathbf{c}_k \Lambda_k + \mathbf{c}_k \mathbf{r}_t \mathbf{r}_t' \mathbf{c}_k', \end{aligned}$$

とおいた. ここで,  $\mathbf{I}$  は単位行列である. その上で,

$$\begin{aligned} E[\langle Y_t, e_k \rangle \mathbf{z}_t | \mathcal{R}_T, \Theta] &= \gamma_{tk} \zeta_{tk}, \\ E[\langle Y_t, e_k \rangle \mathbf{z}_t \mathbf{z}_t' | \mathcal{R}_T, \Theta] &= \gamma_{tk} \boldsymbol{\eta}_{tk}, \end{aligned}$$

となることを利用した.

推移確率と初期状態確率に関する制約条件のもとで  $Q$  関数の最大化問題を解けば, Maximization Step におけるパラメータの更新式を得る. つまり, 以下の問題:

$$\begin{cases} \underset{\Theta}{\text{maximize}} & Q(\Theta|\Theta^{(p)}) \\ \text{subject to} & \sum_{l=1}^K p_{lk} = 1 \quad (k=1, \dots, K) \\ & \sum_{k=1}^K \pi_k = 1 \end{cases}$$

を解くことにより, 次のパラメータ更新式を得る.

$$(3.17) \quad \pi_k^{(p+1)} = \gamma_{1k}^{(p)},$$

$$(3.18) \quad p_{lk}^{(p+1)} = \frac{\sum_{t=1}^{T-1} \xi_{tlk}^{(p)}}{\sum_{t=1}^{T-1} \gamma_{tk}^{(p)}},$$

$$(3.19) \quad \Lambda_k^{(p+1)} = \left( \sum_{t=1}^T \gamma_{tk}^{(p)} \mathbf{r}_t \zeta_{tk}^{(p)'} \right) \left( \sum_{t=1}^T \gamma_{tk}^{(p)} \boldsymbol{\eta}_{tk}^{(p)} \right)^{-1},$$

$$(3.20) \quad \Psi_k^{(p+1)} = \frac{\text{diag} \left[ \sum_{t=1}^T \gamma_{tk}^{(p)} (\mathbf{r}_t \mathbf{r}_t' - \Lambda_k^{(p+1)} \zeta_{tk}^{(p)} \zeta_{tk}^{(p)'}) \right]}{\sum_{t=1}^T \gamma_{tk}^{(p)}}.$$

以上より, モデル・パラメータ  $\Theta$  を推定するレジーム・スイッチング因子分析に関する EM アルゴリズムは次のようにまとめることができる.

- (1) Expectation Step:  $p$  回目のイテレーションにおける各パラメータの推定量  $\Theta^{(p)}$  を用いて  $\zeta_{tk}^{(p)}$ ,  $\boldsymbol{\eta}_{tk}^{(p)}$ ,  $\gamma_{tk}^{(p)}$ ,  $\xi_{tlk}^{(p)}$  を計算する.  $p=1$  回目のイテレーションでは, 適当な初期値を与える.
- (2) Maximization Step: (3.17), (3.18), (3.19), (3.20) 式により, イテレーション  $p$  におけるモデル・パラメータ  $\Theta^{(p)}$  を, イテレーション  $p+1$  におけるモデル・パラメータ  $\Theta^{(p+1)}$  へと更新する.

### 3.4 推定量の安定性

最尤推定量の精度, すなわち安定性は, 「誤差行列」あるいは「Fisher 情報行列」と呼ばれる行列を用いて調べることが多い. Fisher 情報行列を以下の  $I(\Theta)$  で表す (Greene, 2007).

$$I(\Theta) := -E \left[ \frac{\partial^2 \log L(\Theta|\mathbf{r})}{\partial \Theta \partial \Theta'} \right] = E \left[ \left( \frac{\partial \log L(\Theta|\mathbf{r})}{\partial \Theta} \right) \left( \frac{\partial \log L(\Theta|\mathbf{r})}{\partial \Theta'} \right)' \right].$$

しかし, Fisher 情報行列は計算が困難な場合も多い. そのような場合の代替案として,

$$\hat{I}(\hat{\Theta}) = -\frac{\partial^2 \log L(\hat{\Theta}|\mathbf{r})}{\partial \hat{\Theta} \partial \hat{\Theta}'}$$

あるいは, 以下の式で代用する.

$$\hat{I}(\hat{\Theta}) = -\sum_{t=1}^T \left( \frac{\partial \log f(r_t, \hat{\Theta})}{\partial \hat{\Theta}} \right) \cdot \left( \frac{\partial \log f(r_t, \hat{\Theta})}{\partial \hat{\Theta}} \right)'.$$

後者を BHHH 推定量, または OPG (outor product of gradients) と呼ぶ.

このとき, レジーム・スイッチング因子分析における BHHH 推定量を次のように与える.

$$\tilde{I}(\text{vec}(\Lambda_k)) = -\sum_{t=1}^T \gamma_{tk} (\zeta_{tk} \otimes \Psi_k^{-1}(\mathbf{r}_t - \Lambda_k \zeta_{tk})) (\zeta_{tk} \otimes \Psi_k^{-1}(\mathbf{r}_t - \Lambda_k \zeta_{tk}))',$$

$$\tilde{I}(\text{vec}(\Psi_k)) = - \sum_{t=1}^T \gamma_{tk} \left( -\frac{1}{2} \text{vec}(\Psi_k^{-1}) + \frac{1}{2} (\Psi^{-1}(\mathbf{r}_t - \Lambda_k \zeta_{tk})) \otimes (\Psi^{-1}(\mathbf{r}_t - \Lambda_k \zeta_{tk})) \right) \left( -\frac{1}{2} \text{vec}(\Psi_k^{-1}) + \frac{1}{2} (\Psi^{-1}(\mathbf{r}_t - \Lambda_k \zeta_{tk})) \otimes (\Psi^{-1}(\mathbf{r}_t - \Lambda_k \zeta_{tk})) \right)'$$

ただし、 $\otimes$  は Kronecker 積を表す。また、 $\text{vec}$  表記については、Turkington (2002) を参照されたい。上式において、厳密な Fisher 情報量の計算との整合性を考え、平滑化確率(スモザー)  $\gamma_{tk}$  によってバランスをとっている。この推定量を、Markov モデルにおける BHHH 推定量であること、また、適度な (Moderate) 推定になっていることから、「MBHHH 推定量」と呼ぶことにする。

#### 4. J-REIT 市場における実証分析

レジーム・スイッチング因子分析を用いて、我が国の J-REIT という金融資産におけるリスク・ファクターを検出することとする。その主たる目的は、実際の J-REIT の価格データに適用した場合、提案するレジーム・スイッチング因子分析のリスク・ファクターの検出性能を、従来あるいは類似の分析手法と比較しつつ調べることである。

実証分析は、我が国の J-REIT (日本版不動産投資信託) を対象として行う。J-REIT は、その大部分が東京証券取引所にて上場され取引されている資産であり、次のような特徴を持つ。J-REIT 価格の主要な源泉は、配当(分配金)である。この配当の源泉は、J-REIT 組入れ不動産の賃料である。したがって、J-REIT 価格は、実物不動産取引市場における、好況期・不況期といった景気循環という、見えざる経済レジームのスイッチングに影響を受けうる。さらに、東京証券取引所等に上場されているため、一般の金融資産の強気相場(ブル・マーケット)や弱気相場(ベア・マーケット)のスイッチングという趨勢にも影響を受けうる。また、J-REIT 自体の市場環境も、(1) J-REIT が保有する不動産ポートフォリオや J-REIT のスポンサーの多様化、(2) 銘柄ごとの時価総額の大きなばらつき、(3) 市場参加者の J-REIT への期待の変化、などの要因によって常に大きくスイッチングしていると言って良いだろう。そこで、かかる観点より、J-REIT という金融資産の価格にレジーム・スイッチング因子分析を適用し、混迷する J-REIT 市場におけるリスク・ファクターをより精緻に検出・分析することとする。

##### 4.1 実証分析に用いるモデル

実証分析は、J-REIT という金融資産において共有するリスク・ファクターを 1 つに限定した、シングル・ファクター・モデルに基づいて行う。その理論的根拠は、付録 A と B において導出する、レジーム・スイッチングを考慮した最適成長ポートフォリオによる資産価格評価モデル(G-CAPM)に求めることができる。G-CAPM は、「レジーム所与の下で、資産価格の期待超過収益率は、最適成長ポートフォリオの期待超過収益率に、レジームに応じたスイッチング・ベータを乗じて表現できる」ことを示している。

さて、レジーム・スイッチングを考慮する・しないに関わらず、最適成長ポートフォリオによる資産価格評価モデルでは、資産のリスク・プレミアム(期待超過収益率)は、最適成長ポートフォリオと資産との収益率間の共分散リスクをとった見返りとして与えられる。一方、CAPM における理論上の市場ポートフォリオとは異なり、最適成長ポートフォリオは、分析対象を株式市場全体として、これを構築することも可能であるし、分析対象を J-REIT 市場に限定して、これを構築することも可能である。さらに、最適成長ポートフォリオの代替指標は、パフォーマンスの上でなかなか上回ることのできない、市場ベンチマーク・インデックスを用いても良い、と先行する実証研究において強く支持されている (Roll, 1973; Long, 1990; Platen and Heath,

2006). したがって、我が国における最適成長ポートフォリオのプロキシとして、分析対象を株式市場全体とすれば TOPIX, 分析対象を J-REIT 市場とすれば東証 REIT 指数を用いることができよう。本研究では、第 4.2 節において述べる理由に基づき、J-REIT 市場におけるシングル・ファクター・モデルの実証分析に際し、そのリスク・ファクターとして「暗に」市場ベンチマークたる東証 REIT 指数の超過収益率を想定しつつ、これを用いることとした。

以上の観点より、第 4.1.1 節から第 4.1.4 節に述べる 4 つのモデルを互いにベンチマークとしながら、本論文で提案するレジーム・スイッチング因子分析の有効性、特に、リスク・ファクターの検出性能を調べることにする。4 つのモデルを表現するにあたって、用いる表記は以下のとおりである。J-REIT の超過収益率を  $r_t$  と書く。同一期間における市場ベンチマークたる東証 REIT 指数の超過収益率を  $x_t$  と書く。なお、データの詳細は、第 4.2 節に述べる。

#### 4.1.1 回帰分析

回帰分析は、以下のモデル式に基づいて行うこととする。

$$(4.1) \quad r_t = \alpha + \beta x_t + \Sigma^{1/2} \epsilon_t.$$

ただし、 $r_t$  は資産価格の超過収益率、 $\alpha$  は切片であり、いわゆる Jensen のアルファ、 $x_t$  は市場ベンチマークの超過収益率、 $\beta$  はその回帰係数ベクトルであり、いわゆるベータ、 $\epsilon_t \sim \mathcal{N}_n(\mathbf{0}, \mathbf{I})$  は各資産に固有のリスク、 $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$  はその固有リスク量を分散として表す対角行列である。

#### 4.1.2 レジーム・スイッチング回帰分析

レジーム・スイッチング回帰分析は、見えざる経済レジームの数  $K$  を予め定めて行う。本分析においては、 $K=2$  という 2 レジーム・モデルとした。また、レジームの推定方法として、個々の資産ごとに異なるレジーム・スイッチングを想定する方法もあるが、本分析においては、J-REIT の 12 銘柄全体に共通するレジーム・スイッチングを想定する。これにより、J-REIT 市場全体の推移傾向を表現することができる。レジーム・スイッチング回帰分析のモデルは、付録 A と B における導出を経て、以下のように表される。これを、Kim (1994), Hamilton (1994), 石島 他(2006) に示された方法により推定を行った。

$$(4.2) \quad (r_t | Y_t = e_k) = \alpha_k + \beta_k x_t + \Sigma_k^{1/2} \epsilon_t.$$

ただし、 $(r_t | Y_t = e_k)$  はレジーム所与の下での資産価格の超過収益率、 $\alpha_k$  はレジームに応じてスイッチングする切片であり、いわば Jensen のスイッチング・アルファ、 $x_t$  は市場ベンチマークの超過収益率、 $\beta_k$  はその回帰係数ベクトルであり、いわばスイッチング・ベータ、 $\epsilon_t \sim \mathcal{N}_n(\mathbf{0}, \mathbf{I})$  は各資産に固有のリスク、 $\Sigma_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$  はレジームに応じてスイッチングするその固有リスク量を分散として表す対角行列である。

#### 4.1.3 因子分析

回帰分析では、シングル・ファクターとして、市場ベンチマークたる東証 REIT 指数を用いた。一方、因子分析では、以下のモデルに基づき、J-REIT の 12 銘柄の価格データのみから、市場ベンチマークとなりうるリスク・ファクターを統計的に検出する。

$$(4.3) \quad r_t = \lambda^\alpha + \lambda^\beta z_t + \Psi^{1/2} u_t.$$

$r_t$  は資産価格の超過収益率、 $z_t \sim \mathcal{N}_1(0, 1)$  はリスク・ファクター、 $\lambda^\alpha, \lambda^\beta$  はそのファクター・ローディング、 $u_t \sim \mathcal{N}_n(\mathbf{0}, \mathbf{I}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  は各資産に固有のリスク、 $\Psi$  はその固有リスクを分散として表す対角行列である。

#### 4.1.4 レジーム・スイッチング因子分析

2 レジームを想定し、見えざるレジームごとに、市場ベンチマークとなり得るリスク・ファク

ターを検出する。レジーム・スイッチング因子分析に用いるモデルは、以下のように表される。

$$(4.4) \quad (r_t|Y_t=e_k) = \lambda_k^\alpha + \lambda_k^\beta z_t + \Psi_k^{1/2} u_t.$$

$(r_t|Y_t=e_k)$  はレジーム所与の下での資産価格の超過収益率、 $z_t \sim \mathcal{N}_1(0,1)$  はリスク・ファクター、 $\lambda_k^\alpha, \lambda_k^\beta$  はレジームに応じてスイッチングするファクター・ローディング、 $u_t \sim \mathcal{N}_n(\mathbf{0}, \mathbf{I})$  は各資産に固有のリスク、 $\Psi_k$  はレジームに応じてスイッチングする固有リスクを分散として表す対角行列である。

## 4.2 データ

J-REIT 市場は 2001 年 9 月に取引が開始され、2004 年 4 月には 12 銘柄が上場され、分析時点とする 2006 年 11 月 30 日までにそのトラックレコードも日次で 657 個を数えるに至っている。2001 年 9 月当初、J-REIT 上場銘柄は日本ビルファンド投資法人(NBF)、ジャパンリアルエステイト投資法人(JRE)の 2 銘柄のみで、J-REIT 市場全体の時価総額は 260,329 (百万円)に過ぎなかった。その後、2004 年 4 月には上場 12 銘柄、時価総額 1,310,164 (百万円)へと拡大した。さらに、2006 年 11 月 30 日時点においては上場 40 銘柄、4,563,294 (百万円)に至るまで成長してきた。

本論文では、分析時点において、J-REIT 市場のおおよその成長を反映していると考えられ、J-REIT 市場全体の現時価総額の 3 分の 2 をカバーする 12 銘柄、すなわち：日本ビルファンド投資法人(NBF)、ジャパンリアルエステイト投資法人(JRE)、日本プライムリアルティ投資法人(JPR)、日本リテールファンド投資法人(JRF)、オリックス不動産投資法人(OJR)、プレミア投資法人(PIC)、東急リアルエステイト投資法人(東急 RE)、グローバル・ワン不動産投資法人(GO)、野村不動産オフィスファンド投資法人(NOF)、ユナイテッドアーバン投資法人(UUR)、森トラスト総合リート投資法人(森トラスト)、日本レジデンシャル投資法人(日レジデンス：現在のアドバンス・レジデンス投資法人)を対象とし実証分析を行うこととした。

さて、関連する実証研究として、石島 他(2006)が挙げられる。そこでは、第 4.1 節に述べた、(4.1)式の回帰分析、および(4.2)式のレジーム・スイッチング回帰分析を用いて、J-REIT 市場における 2003 年 4 月から 2003 年 11 月までの、6 銘柄を対象とした日次データを用いた分析を行っている。本研究とは分析対象とする銘柄や期間は大きく異なるものの、そこで示された結果は参考になろう。石島 他(2006)では、市場ベンチマークとして東証 REIT 指数と TOPIX を用いて、それぞれ、J-REIT 市場と株式市場全体という 2 つの観点からの実証分析を行っている。統計的観点の結果は、東証 REIT 指数を用いた場合の方が、TOPIX を用いた場合よりも、AIC の観点からも  $R^2$  の観点からも、圧倒的に説明力が高い、ということである。これを参考にして、本研究では、レジーム・スイッチングを考慮した場合と考慮しない場合のそれぞれについて、提案する因子分析と回帰分析の実データにおけるリスク・ファクターの検出性能の比較を行うという観点より、市場ベンチマークとして、東証 REIT 指数を用いることとした。

この観点より、本研究で用いるデータは、以下の通りとした。上記 12 の J-REIT 銘柄の日次の配当調整済み価格を用いた。同一期間における安全利子率として、日次の翌日物コールレート(無担保)を用いた。このとき、J-REIT の配当調整済み価格に関する収益率と、コールレートとの差を、超過収益率として  $r_t := (r_{1t}, \dots, r_{12t})'$  と書き、これを分析に用いた。さらに、同一期間における市場ベンチマークとして、日次の東証 REIT 指数を用いた。東証 REIT 指数とは、2003 年 4 月から東京証券取引所が算出・公表しているインデックスであり、これは、TOPIX と同様の算出手法により、東証に上場している J-REIT 全銘柄を対象とした時価総額平均加重の指数である。このとき、東証 REIT 指数に関する収益率とコールレートとの差を超過収益率として  $x_t$  と書き、これを分析に用いた。また、分析期間を 2004 年 4 月から 2006 年 11 月までとした。それ以降のデータ期間を用いなかった理由は、以下のとおりである。

表 1. 推定された4つのモデルのAICの比較.

	レジーム・スイッチングなし	レジーム・スイッチングあり
回帰分析	-80,853	-82,561
因子分析	-80,344	-82,344

2006年半ば以降、J-REIT市場の動向を大きく捉えると、2007年前半までの1年間に時価総額が2倍までに急成長し、それ以降2008年末までの急減速、2008年以降直近2010年までの横ばい基調、という流れになる。このようなJ-REIT市場の動向の中で、時価総額加重によって算出される東証J-REIT指数自体の変動は極端に大きく、また、これに占める構成銘柄比率も大きく変動したと考えられる。例えば、分析対象とした12銘柄のうち下位のいくつかの銘柄は、必ずしもJ-REIT市場を代表する銘柄とは言い難くなっている。したがって、2006年以降のデータを含めてしまうと、それ自体の変動とその構成銘柄比率の変動も大きい東証J-REIT指数を用いるHMM回帰分析と、一貫して12銘柄の超過収益率のみから因子を抽出するHMM因子分析との間では、モデルの意味合いに乖離が生じる可能性が大きい。そこで、本研究における分析は、HMM回帰分析とHMM因子分析とが、同じファクターを検出しようのかどうか、という統計モデルの実データにおける性能比較という観点より行っているため、データ期間を上記範囲に絞ることとした。ただし、期間を延ばした場合の両者のモデルの挙動を分析・考察することは、ファイナンスにおける実証分析の観点より、大変に興味深い。これについては、今後の課題としたい。

### 4.3 分析結果

#### 4.3.1 従来モデルとレジーム・スイッチング・モデル

回帰分析とレジーム・スイッチング回帰分析の比較、および因子分析とレジーム・スイッチング因子分析の比較を行う。表1に示したAICによれば、いずれの場合にもレジーム・スイッチング・モデルのほうが従来モデルよりAICを改善しており、その適合度の高さが顕著に現れている。これは、J-REIT市場において、経済レジームの推移を考慮したレジーム・スイッチング・モデルのほうが、より精緻なりスク・ファクターの分析を行えることを示唆していると言えよう。そこで、これ以降、レジーム・スイッチングを導入した回帰分析と因子分析の推定結果に焦点をあてた考察を行うこととする。

#### 4.3.2 レジーム・スイッチング回帰分析とレジーム・スイッチング因子分析

レジーム・スイッチング・モデルを導入した回帰分析と因子分析の推定結果を比較してみる。表1に示したAICを比較すると、回帰分析のほうが因子分析よりもモデルが適合していると考えられる。また、今回の分析ではシングル・ファクターに限定したため問題とはならないが、因子分析には不定性があり、結果の解釈には細心の注意が必要である。その点、回帰分析は取り扱いが易しいという大きな利点がある。

しかし、これらの事実は因子分析の有効性を否定するものではないと考えられる。というのも、両者のアプローチは全く異なる。ゆえに、その優劣を比較するよりも、双方の結果を吟味して有効な結論を導くことに重点を置くべきであろう。特に本分析で注目すべきは、レジーム・スイッチング・モデルを導入した2つの分析から、以下に示すように、同様の傾向を導くことができたという点である。

レジーム・スイッチング・モデルを導入した回帰分析と因子分析による推定結果をそれぞれ、表2と3に示し、これらを比較してみる。

レジーム1とレジーム2において推定されたファクター・ローディングに着目する。レジーム

表 2. 回帰分析による推定結果. レジーム・スイッチングを考慮しない場合と, 考慮した場合の結果をそれぞれ示す. カッコ内は標準誤差を表す.

銘柄	レジームなし		レジームあり			
	$\alpha$	$\beta$	レジーム 1		レジーム 2	
			$\alpha_1$	$\beta_1$	$\alpha_2$	$\beta_2$
NBF	0.00008 ( $\pm 0.00009$ )	1.24520 ( $\pm 0.01964$ )	0.00010 ( $\pm 0.00017$ )	1.21554 ( $\pm 0.03480$ )	0.00003 ( $\pm 0.00004$ )	1.37100 ( $\pm 0.01976$ )
JRE	-0.00007 ( $\pm 0.00010$ )	1.22873 ( $\pm 0.02090$ )	-0.00011 ( $\pm 0.00020$ )	1.21015 ( $\pm 0.03868$ )	-0.00005 ( $\pm 0.00005$ )	1.30703 ( $\pm 0.02405$ )
JRF	-0.00016 ( $\pm 0.00010$ )	1.04735 ( $\pm 0.02475$ )	-0.00048 ( $\pm 0.00019$ )	1.04060 ( $\pm 0.04173$ )	0.00013 ( $\pm 0.00006$ )	1.07272 ( $\pm 0.02841$ )
OJR	-0.00017 ( $\pm 0.00012$ )	0.95125 ( $\pm 0.01864$ )	-0.00041 ( $\pm 0.00022$ )	0.96361 ( $\pm 0.03138$ )	0.00007 ( $\pm 0.00008$ )	0.89652 ( $\pm 0.03566$ )
JPR	-0.00006 ( $\pm 0.00015$ )	1.02442 ( $\pm 0.03850$ )	0.00006 ( $\pm 0.00028$ )	1.06053 ( $\pm 0.06700$ )	-0.00013 ( $\pm 0.00009$ )	0.87268 ( $\pm 0.03811$ )
PIC	-0.00013 ( $\pm 0.00015$ )	0.81071 ( $\pm 0.03120$ )	-0.00028 ( $\pm 0.00028$ )	0.82178 ( $\pm 0.05519$ )	0.00001 ( $\pm 0.00011$ )	0.76244 ( $\pm 0.04963$ )
東急 RE	-0.00004 ( $\pm 0.00013$ )	1.06237 ( $\pm 0.02636$ )	-0.00012 ( $\pm 0.00025$ )	1.10433 ( $\pm 0.04730$ )	0.00008 ( $\pm 0.00009$ )	0.88387 ( $\pm 0.04079$ )
GO	0.00004 ( $\pm 0.00012$ )	0.77320 ( $\pm 0.02061$ )	0.00003 ( $\pm 0.00023$ )	0.83686 ( $\pm 0.03618$ )	0.00011 ( $\pm 0.00010$ )	0.50355 ( $\pm 0.03959$ )
NOF	-0.00004 ( $\pm 0.00011$ )	1.06423 ( $\pm 0.02385$ )	0.00013 ( $\pm 0.00020$ )	1.07784 ( $\pm 0.03807$ )	-0.00019 ( $\pm 0.00008$ )	1.00828 ( $\pm 0.03432$ )
UUR	-0.00012 ( $\pm 0.00011$ )	0.85239 ( $\pm 0.02142$ )	-0.00012 ( $\pm 0.00021$ )	0.90343 ( $\pm 0.03744$ )	-0.00007 ( $\pm 0.00008$ )	0.63627 ( $\pm 0.03872$ )
森トラ	0.00000 ( $\pm 0.00011$ )	0.67971 ( $\pm 0.02251$ )	-0.00033 ( $\pm 0.00021$ )	0.68531 ( $\pm 0.03981$ )	0.00029 ( $\pm 0.00007$ )	0.65281 ( $\pm 0.03371$ )
日レジ	-0.00020 ( $\pm 0.00015$ )	0.86153 ( $\pm 0.03168$ )	-0.00012 ( $\pm 0.00028$ )	0.85590 ( $\pm 0.05542$ )	-0.00027 ( $\pm 0.00012$ )	0.88612 ( $\pm 0.05334$ )

ム・スイッチング回帰分析では, ファクター・ローディング  $\beta$  に関して, NBF, JRE, JRF の 3 銘柄の推定値はレジーム 1 よりもレジーム 2 の方が大きくなっており, それ以外のほぼ全ての銘柄の推定値はレジーム 1 の方が大きくなっている. レジーム・スイッチング因子分析でも, ファクター・ローディング  $\lambda^{\beta}$  に関して同様の傾向がある. この傾向の例外は, レジーム・スイッチング回帰分析では日レジデンス, レジーム・スイッチング因子分析では森トラストである. つまり, それぞれの分析において, レジーム 1 よりもレジーム 2 のファクター・ローディングの推定値の方が大きくなっているのである. しかしながら, MBHHH 推定量による標準誤差からみて, レジーム 1 とレジーム 2 におけるファクター・ローディングの推定値にほとんど差はないため, 統計的な有意差は出ないと言えるだろう.

したがって, レジーム 1 とレジーム 2 におけるファクター・ローディングの推定値の大小関係より, J-REIT 銘柄は, 2 つのグループに分類できると考えられる. つまり, 第 1 グループは, NBF, JRE, JRF の 3 銘柄より構成され, レジーム 2 において, ファクター・ローディングの推定値が大きく, 市場との連動リスクが高まる. この第 1 グループを構成する, NBF, JRE, JRF の 3 銘柄は, 最も歴史の古い老舗銘柄であり, また, 分析時点である 2006 年 11 月におい

表3. 因子分析による推定結果. レジーム・スイッチングを考慮しない場合と, 考慮した場合の結果をそれぞれ示す. カッコ内は標準誤差を表す.

銘柄	レジームなし		レジームあり			
	$\lambda^\alpha$	$\lambda^\beta$	レジーム1		レジーム2	
			$\lambda_1^\alpha$	$\lambda_1^\beta$	$\lambda_2^\alpha$	$\lambda_2^\beta$
NBF	-0.00001 (±0.00123)	1.17736 (±0.03350)	-0.00053 (±0.00003)	0.91641 (±0.05340)	0.00054 (±0.00004)	1.04871 (±0.02847)
JRE	-0.00009 (±0.00134)	1.20017 (±0.02820)	-0.00013 (±0.00006)	1.16115 (±0.05944)	-0.00007 (±0.00012)	1.16663 (±0.04844)
JRF	-0.00017 (±0.00148)	1.02525 (±0.02934)	-0.00016 (±0.00006)	0.93839 (±0.06185)	-0.00011 (±0.00011)	1.05197 (±0.04771)
OJR	-0.00019 (±0.00118)	0.96833 (±0.01925)	-0.00011 (±0.00007)	0.99701 (±0.03783)	-0.00010 (±0.00011)	0.78145 (±0.04848)
JPR	-0.00013 (±0.00190)	1.04906 (±0.04304)	-0.00009 (±0.00008)	1.09593 (±0.08456)	-0.00003 (±0.00013)	0.83124 (±0.06129)
PIC	-0.00021 (±0.00135)	0.86165 (±0.03082)	-0.00005 (±0.00008)	0.89469 (±0.07234)	-0.00028 (±0.00011)	0.71872 (±0.05641)
東急RE	-0.00014 (±0.00179)	1.12882 (±0.02316)	0.00000 (±0.00006)	1.25945 (±0.05211)	-0.00019 (±0.00011)	0.86698 (±0.04668)
GO	-0.00002 (±0.00095)	0.81924 (±0.02304)	-0.00005 (±0.00006)	0.90860 (±0.05651)	-0.00023 (±0.00010)	0.56063 (±0.04797)
NOF	-0.00012 (±0.00135)	1.09092 (±0.02536)	0.00011 (±0.00005)	1.06181 (±0.05519)	-0.00025 (±0.00011)	1.03304 (±0.04829)
UUR	-0.00020 (±0.00091)	0.90477 (±0.02280)	-0.00002 (±0.00006)	0.98997 (±0.05278)	-0.00024 (±0.00011)	0.70889 (±0.04580)
森トラ	-0.00005 (±0.00145)	0.69316 (±0.02658)	-0.00002 (±0.00006)	0.68676 (±0.05174)	-0.00016 (±0.00011)	0.70807 (±0.04691)
日レジ	-0.00026 (±0.00142)	0.89786 (±0.03644)	-0.00006 (±0.00009)	0.90184 (±0.07265)	-0.00027 (±0.00015)	0.84110 (±0.06220)

て時価総額トップ3でもある。一方, 第2グループは, それ以外の銘柄より構成され, レジーム1において, ファクター・ローディングの推定値が大きく, 市場との連動リスクが高まる。

以上の結果より, レジーム・スイッチング・モデルを導入した回帰分析と因子分析のどちらを用いても, 同様の, スイッチングする共通リスク・ファクターを検出することができた, と言えよう。つまり, J-REIT 価格という情報のみから, スイッチングする共通リスク・ファクターが検出可能であることを意味する。同時に, 特定されたリスク・ファクターは, 東証REIT指数という市場ベンチマークであることを示唆する。これは, レジームごとのファクター期待値  $\zeta_{tk}$  を, (3.15)式によって求めたものを示した図1からも明確に把握することができる。つまり, 検出されたファクターの時系列方向の形状は, 東証REIT指数と非常に似通っている。ただし, その振幅は異なっていることに注意する必要がある。これは, このリスク・ファクターの対価としてもたらされるリスク・プレミアム(期待超過収益率)の源泉を, いわゆるベータというファクター・ローディングと, 市場ベンチマークのリスク・プレミアムに要因分解するためには, レジーム・スイッチング因子分析では不十分で, レジーム・スイッチング回帰分析を行う必要があることを示唆している。換言すれば, J-REIT 価格を東証REIT指数という

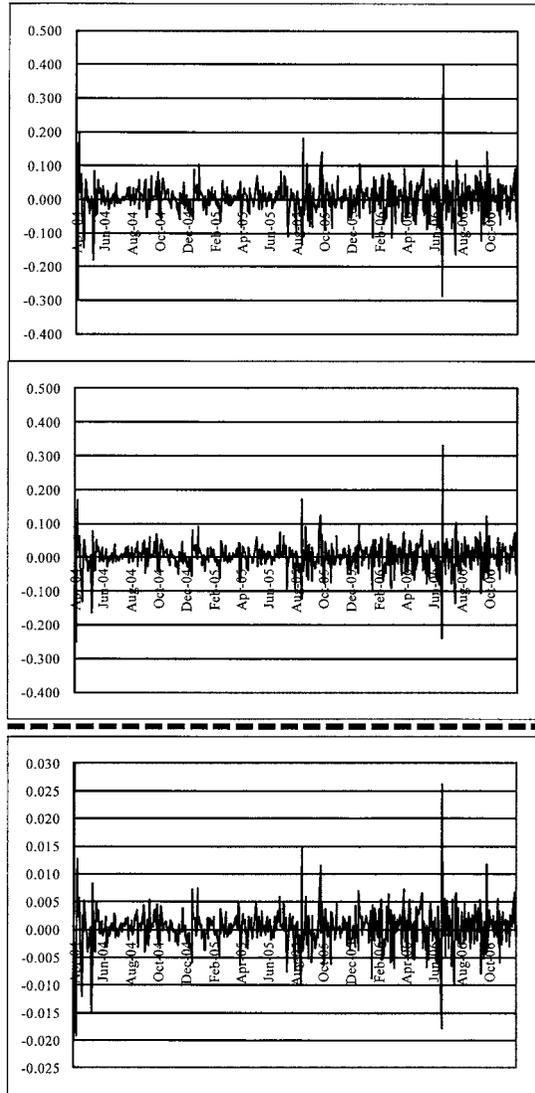


図 1. レジーム・スイッチング因子分析によって推定した、各時点におけるレジームごとのファクター期待値  $\zeta_{tk}$  を、(3.15)式によって求めたものを示す。上段と中段の図はそれぞれ、レジーム 1 とレジーム 2 のファクター期待値を示す。下段の図は、対応する各時点における市場ベンチマークとした東証 REIT 指数の収益率を表す。

市場ベンチマークによって、レジーム・スイッチング回帰分析を行えば、その推定されたファクター・ローディングを、スイッチング・ベータとして解釈することができ、レジームごとのリスク・プレミアムの大小関係を 1 を基準として判断することができる。ファイナンス理論によれば、ベータが 1 よりも大きいときには市場よりもハイリスク・ハイリターン、1 よりも小さいときには市場よりもローリスク・ローリターン、1 のときには、市場と同程度のリスク・リターンを享受できる、と解釈できるからである。一方、レジーム・スイッチング因子分析で

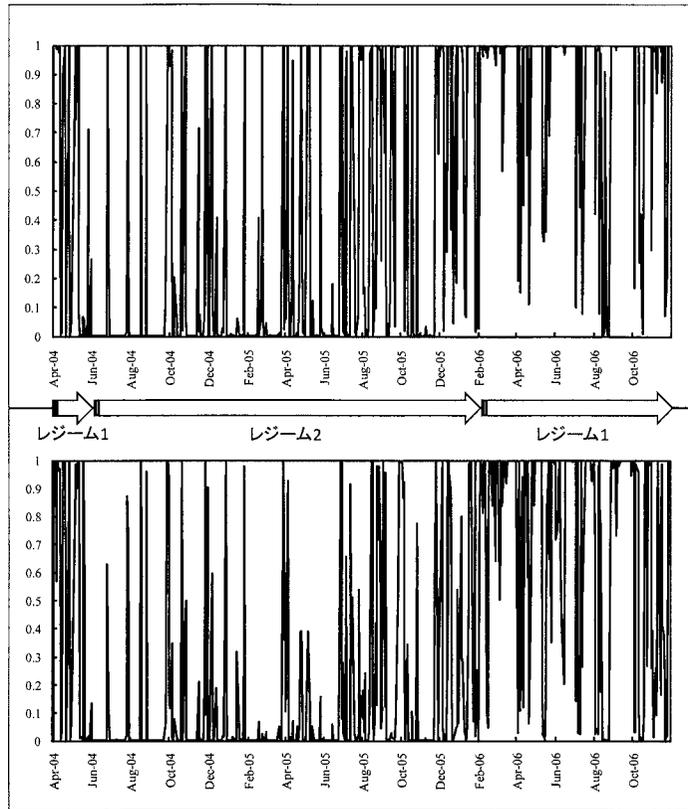


図2. 推定された各分析時点におけるレジーム1のスムーザー(平滑化滞留確率). 上段はレジーム・スイッチング回帰分析, 下段はレジーム・スイッチング因子分析によって推定したもの. 矢印によって, レジーム1とレジーム2に滞留していると考えられる期間を, それぞれ示す.

は, 推定されたファクター・ローディングの解釈は難しい.

以上の結果より, J-REIT市場におけるリスク・ファクターの検出において, レジーム・スイッチング因子分析は有効と言えよう. また, J-REIT市場の価格分析において, 市場ベンチマークとしてレジーム・スイッチング回帰分析を用いることの有効性も示唆する結果である. ただし, 石島 他(2006)の結果を踏まえれば, 本分析は, 市場ベンチマークとして, TOPIXではなく東証REIT指数を用いて, はじめて得られる結果であると言えよう. そして, 分析期間も, J-REIT市場が安定的に成長している, 2004年4月から2006年11月という期間に限定しているからこそ, 得られた結果である可能性が高いと言えよう.

#### 4.3.3 平滑化確率(スムーザー)についての比較

レジーム・スイッチング回帰分析, およびレジーム・スイッチング・モデル因子分析において, 各レジームに滞留する確率に注目してみる. それぞれの分析によって推定した, 各時点において, レジーム1に滞留する確率, すなわちレジーム1の平滑化確率(以下, スムーザー)をグラフ化したものを図2に示している.

これを見ると, 東証REIT指数を用いたレジーム・スイッチング回帰分析の結果と, 12銘柄

から因子を抽出するレジーム・スイッチング因子分析の間で、レジームの転換点など、結果の方向性は一致している。そして、2004年4月から2004年6月頃まではレジーム1にいる確率が高く、2004年6月から2006年2月頃までは、レジーム2にいる確率が高い時期が続く。それ以降は、レジーム1にいる確率が高い時期が多くなっている。

一方、分析期間において、東証 REIT 指数の構成銘柄の変化の影響は小さいと考えられる。というのも、2004年における上場数は15であり、また、新規上場数について、2004年は5、2005年は13、2006年は12であった。そして、前述したように、分析期間の期末である2006年11月において、分析対象とする12銘柄は、分析期間の期首と同様に、J-REIT 市場全体の現時価総額の3分の2をカバーしているからである。

以上より、分析期間とした、2004年4月から2006年11月までの東証 REIT 指数の銘柄構成変化の影響は小さく、両モデルともレジームの転換点を捉えていると考えられる。

ただし、分析対象とするデータ期間を2006年11月以降に延ばせば、東証 REIT 指数における構成銘柄比率の影響を受ける可能性が高いと考えられる。したがって、この場合には、東証 REIT 指数の特性の変化自体を考慮した分析が求められるだろう。以上の考察より、J-REIT 市場には見えざる経済状態、すなわちレジームの存在が示唆されよう。

#### 4.3.4 まとめ

本実証分析を通じて、(1)レジーム・スイッチング・モデルを導入した因子分析と回帰分析はいずれも同一とみなせる経済レジームをスムーザーとして検出した。(2)レジームによってスイッチングする「リスク・ファクター」は J-REIT 価格のみから、レジーム・スイッチング因子分析によって検出が可能であり、これは東証 REIT 指数という市場ベンチマークと見ることができる。(3)レジーム・スイッチングに起因するリスク・プレミアムは、東証 REIT 指数という市場ベンチマークを導入したレジーム・スイッチング回帰分析により、より上手く説明することができる、ということが分かった。

## 5. 結論

本論文では、見えざる経済状態についてレジーム・スイッチング・モデルを導入した、因子分析の統計的手法を提案した。また、これを我が国の J-REIT 市場における実証分析に適用し、見えざる経済状態に応じてスイッチングするリスク・ファクターの検出における有効性を示した。

## 付 録

### A. 最適成長ポートフォリオによる資産価格評価

本節では、最適成長ポートフォリオを用いた資産価格評価の方法について、石島 他(2006)の議論を参考にして要約する。その上で、次節において、市場の背後にある見えざる経済レジームがスイッチングする設定下での、資産価格評価方法について述べる。これが、本文において J-REIT などの金融資産価格におけるリスク・ファクターを検出するために利用するモデルとなる。

最適成長ポートフォリオとは、現時点から有限期末までのポートフォリオ価値に関する期待成長率を最大化するポートフォリオである。また、期待成長率はポートフォリオの期待対数収益率、あるいは幾何平均とも解釈できるため、それぞれ、対数最適ポートフォリオ、幾何平均ポートフォリオとも呼ばれる。これを最初に提案した Kelly (1956)は、期待成長率を情報理論と関連付けて考察し、その後、Cover らにより理論研究が進められてきた(Cover and Thomas,

1991).

一方、ファイナンスへの応用も繰り返し行われており、Hakansson (1971) や Thorp (1971) らの研究においてその有効性が主張された。他方で、最適成長ポートフォリオは、対数型の期待効用の最大化だけを考慮したものであるから、一般的な危険回避的な投資家の期待効用を最大化するものではないとして、批判がなされたこともある。しかしながら、Luenberger (1993) の研究により、中長期にわたる投資において要求される適切な公理系に基づいた考察をすれば、経済学的な妥当性を有することが示された。

上記のような動的ポートフォリオ選択を行う為の一つの妥当な理論的枠組みだけではなく、最適成長ポートフォリオは、資産のフェアな資産価格評価を行うための枠組みでもあることが Long (1990) らの研究により示されている。つまり、最適成長ポートフォリオであるための必要十分条件である、Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 条件そのものが、資産価格評価に利用できることを示している。より具体的には、この KKT 条件は、ニューメレール (numéraire: 価値尺度財、あるいはベンチマーク) として用いた最適成長ポートフォリオ価値で除した各個別資産の相対価格が、資産価格のモデルを記述する確率測度の下でマルチンゲールとなることを表している。さらに、市場に裁定機会が存在しないことは、「ニューメレール・ポートフォリオ」としての「最適成長ポートフォリオ」が存在することと等価であるという定理 (Theorem 1, Long, 1990) と併せて、最適成長ポートフォリオを、J-REIT を含めた資産の価格評価に用いることができる。この評価方法を、以下に具体的に述べる。

1つの安全資産と  $n$  個の危険資産が、離散時点  $t=0, 1, \dots, T$  で取引されている市場を考える。時点  $t$  における危険資産の価格を  $S_t = (S_{1t} \cdots S_{it} \cdots S_{nt})'$  と書き、有限な非負の実現値を取るものと仮定する。時点  $t-1$  と時点  $t$  で挟まれた時間間隔を期間  $t$  と呼ぶ。その期間  $t$  における資産のグロスリターン、つまり  $1+$  収益率を、 $\mathbf{X}_t = (X_{1t} \cdots X_{it} \cdots X_{nt})'$  と書く。ただし、 $X_{it} = S_{it}/S_{it-1}$  とする。また、期間  $t$  での安全資産のグロスリターンを  $x_{f,t}$  と書く。

投資家は、各時点  $t-1$  において、期間  $t$  における運用ポートフォリオを構築する。ただし、外部とのキャッシュのやりとりは行わずに、自己充足的 (self-financing) にポートフォリオを構築すると仮定する。ポートフォリオは、その全体の価値に対する各資産への投資金額比率、つまりポートフォリオウェイトによって特徴付けられる。安全資産と危険資産へのポートフォリオウェイトをそれぞれ、 $\{b_{0t}, \mathbf{b}_t = (b_{1t} \cdots b_{it} \cdots b_{nt})'\}$  と書く。その実行可能領域を、

$$\{b_{0t} \in \mathbb{R}, \mathbf{b}_t \in \mathbb{R}^n \mid b_{0t} + \mathbf{b}_t' \mathbf{1} = 1\},$$

とする。上記の設定の下で、ポートフォリオ価値  $V_t$  は、

$$V_t = V_{t-1} (b_{0t} x_{f,t} + \mathbf{b}_t' \mathbf{X}_t) = V_{t-1} X_t,$$

と表せる。ただし、ポートフォリオ価値のグロスリターンを  $X_t := b_{0t} x_{f,t} + \mathbf{b}_t' \mathbf{X}_t$  とおいた。これより、初期投下資金  $V_0$  を所与とすれば、期末のポートフォリオ価値は、

$$V_T = V_0 \prod_{t=1}^T X_t = V_0 \cdot e^{\sum_{t=1}^T \log X_t} = V_0 \cdot e^{\log(V_T/V_0)},$$

と表せる。最後の等式は  $V_T$  の自明な恒等式であり、 $\log(V_T/V_0)$  は、投資期間全体のグロスリターンを表す。

この表現より、期末のポートフォリオ価値  $V_T$  を最大化するためには、各期間のポートフォリオの対数リターン  $\log X_t$  を最大化すればよい。したがって、最適成長ポートフォリオを得るためには、各期間の期首  $t-1$  においてポートフォリオの対数リターンの条件付期待値を取り

「期待成長率」と捉え、これを目的関数とする次のような定式化を各期間  $t$  で行えばよい。

$$\mathbf{P}_t \begin{cases} \text{maximize } E_{t-1}[\log X_t] := E_{t-1}[\log (b_{0t}x_{f,t} + \mathbf{b}'_t \mathbf{X}_t)] \\ \text{subject to } b_{0t} + \mathbf{b}'_t \mathbf{1} = 1. \end{cases}$$

ここに、問題  $\mathbf{P}_t$  の目的関数が凹関数であることから、その Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 条件が、最適ポートフォリオの「必要十分条件」であることに注意する。問題  $\mathbf{P}_t$  の KKT 条件は、以下の 3 式を満たすような  $\{b_{0t}^*, \mathbf{b}_t^*; \nu^*\}$  となる：

$$(A.1) \quad E_{t-1} \left[ \frac{x_{f,t}}{X_t^*} \right] = 1,$$

$$(A.2) \quad E_{t-1} \left[ \frac{X_{it}}{X_t^*} \right] = 1 \quad (i=1, \dots, n),$$

$$(A.3) \quad \nu^* = 1.$$

ただし、 $\nu^* \in R$  は Lagrange 乗数であり、 $X_t^* = b_{0t}^* x_{f,t} + \mathbf{b}_t^{*'} \mathbf{X}_t$  である。(A.1) 式、(A.2) 式において、 $X_t^*$  は最適成長ポートフォリオで運用した場合のポートフォリオのグロスリターンであり、 $X_t^* = V_t^*/V_{t-1}^*$  と表せる。同様に、 $X_{it} = S_{it}/S_{it-1}$  と表せることから、(A.2) 式は次のように書き直せる：

$$(A.4) \quad E_{t-1} \left[ \frac{X_{it}}{X_t^*} \right] = 1 \iff \frac{S_{it-1}}{V_{t-1}^*} = E_{t-1} \left[ \frac{S_{it}}{V_t^*} \right] \quad (i=1, \dots, n).$$

これは、最適成長ポートフォリオをニューメレル（価値尺度財）に採った資産の相対価格が、確率測度の変換を行わなくても、マルチンゲールになることを示している。すなわち、任意の資産の価格評価に利用することができることを示している。(A.4) 式より、次式を得る：

$$(A.5) \quad S_{it} = E_t \left[ \left( \frac{V_T^*}{V_t^*} \right)^{-1} S_{iT} \right] = E_t \left[ (X_{t+1}^* X_{t+2}^* \cdots X_T^*)^{-1} \cdot S_{iT} \right].$$

(A.5) 式は、任意の資産の現在価格  $S_{it}$  は、期末の資産価格  $S_{iT}$  を「最適成長ポートフォリオのグロスリターンで割引く」ことによって得られることを示している。さらに、市場に裁定機会が存在しないことは、「ニューメレル・ポートフォリオ」としての「最適成長ポートフォリオ」が存在することと等価であり、最適成長ポートフォリオのグロスリターンは唯一であるという定理 (Theorem 1, Long 1990) と併せて、最適成長ポートフォリオを、J-REIT を含めた資産の価格評価に用いることができる。

## B. レジーム・スイッチングを考慮した最適成長ポートフォリオによる資産価格評価モデル (G-CAPM)

前節と同様に、1 つの安全資産と  $n$  個の危険資産が取引されている市場を考える。離散時点  $t$  ( $t=1, \dots, T$ ) において、市場には  $K$  個のレジームが存在すると仮定し、これを  $Y := \{Y_t; t=1, \dots, T\}$  と表し、 $\mathcal{F}_t^Y := \sigma(Y_1, \dots, Y_t)$  と書く。レジーム  $Y_t$  の状態空間を  $\{e_1, \dots, e_k, \dots, e_K\}$  とする。ここで、 $e_k \in \mathbb{R}^K$  ( $k=1, \dots, K$ ) は、その第  $k$  要素の値が 1 であり、それ以外の要素の値が 0 である。

レジーム  $Y_t$  は、1 次の Markov 過程に従うとし、時点  $t$  におけるレジーム  $e_k$  から、時点  $t+1$  におけるレジーム  $e_l$  への斉時的な推移確率を要素とする推移確率行列を、

$$(B.1) \quad \mathbf{P} = (p_{lk})_{1 \leq l, k \leq K} = (\Pr(Y_{t+1} = e_l | Y_t = e_k))_{1 \leq l, k \leq K},$$

と表す. ここで, 推移確率  $p_{lk}$  は,

$$(B.2) \quad p_{lk} \geq 0 \quad (l, k = 1, \dots, K), \quad \sum_{l=1}^K p_{lk} = 1 \quad (k = 1, \dots, K),$$

を満たす. このとき, レジーム  $Y_t$  は「状態方程式」として, 以下のように表現できる:

$$(B.3) \quad Y_{t+1} = PY_t + M_{t+1},$$

ただし,  $M_{t+1}$  は  $\mathcal{F}_t^Y$ -マルチンゲール増分である.

一方, 時点  $t$  におけるレジーム  $Y_t$  所与の下で, 危険資産の対数収益率,  $\mathbf{R}_t^{\log} = (R_{1t}^{\log} \dots R_{it}^{\log} \dots R_{nt}^{\log})'$ , は「観測方程式」として, 以下のように記述されると仮定する:

$$(B.4) \quad \mathbf{R}_t^{\log} | Y_t = \boldsymbol{\mu}(Y_t) + \boldsymbol{\Sigma}(Y_t) \boldsymbol{\varepsilon}_t,$$

ただし,  $\boldsymbol{\mu}(Y_t) = (\mu_1(Y_t) \dots \mu_i(Y_t) \dots \mu_n(Y_t))'$  はドリフト・パラメータであり, キャピタルゲインに関する期待収益率から, 離散時点で行われる配当支払いを差引いたものを表すと仮定する.  $\boldsymbol{\Sigma}(Y_t) = (\sigma_{ij}(Y_t))_{1 \leq i, j \leq n} = (\sigma'_1(Y_t) \dots \sigma'_i(Y_t) \dots \sigma'_n(Y_t))'$  はディフュージョン・パラメータである.  $\boldsymbol{\varepsilon}_t \sim \mathcal{N}_n(\mathbf{0}, \mathbf{I})$  は, 互いに独立で同一な標準正規攪乱項を表す. また,  $\mathcal{F}_t^R := \sigma(\mathbf{R}_1^{\log}, \dots, \mathbf{R}_t^{\log})$ ,  $\mathcal{F}_t^{R, Y} := \{\mathcal{F}_t^R, \mathcal{F}_t^Y\}$  と書く.

ドリフトとディフュージョン・パラメータは, それぞれ以下の状態空間から, レジームに応じた実現値をとるものとする.

$$(B.5) \quad \{\boldsymbol{\mu}(1), \dots, \boldsymbol{\mu}(k), \dots, \boldsymbol{\mu}(K)\}, \quad \{\boldsymbol{\Sigma}(1), \dots, \boldsymbol{\Sigma}(k), \dots, \boldsymbol{\Sigma}(K)\}.$$

このとき, 期間  $t$  におけるドリフトとディフュージョン・パラメータは, 時点  $t$  におけるレジーム  $Y_t$  所与の下で, 以下のように与えられるとする:

$$(B.6) \quad \boldsymbol{\mu}(Y_t) = \sum_{k=1}^K \langle Y_t, e_k \rangle \boldsymbol{\mu}(k),$$

$$(B.7) \quad \boldsymbol{\Sigma}(Y_t) = \sum_{k=1}^K \langle Y_t, e_k \rangle \boldsymbol{\Sigma}(k).$$

ただし, 演算  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は内積を表す. ここに, (B.4)式は, 資産の対数収益率を特徴づけるドリフトとディフュージョン・パラメータが, その期間を支配するレジームによりスイッチングするような時系列モデルを表現している.

また, 時点  $t$  におけるレジーム  $Y_t$  所与の下で, 安全資産の対数収益率が次のように記述されると仮定する.

$$(B.8) \quad r_t^{\log} | Y_t = r_f(Y_t).$$

ここで, 安全利率は以下の状態空間より, レジームに応じた実現値をとると考える.

$$(B.9) \quad \{r_f(1), \dots, r_f(k), \dots, r_f(K)\}.$$

このとき, 期間  $t$  における安全利率は, 時点  $t$  におけるレジーム  $Y_t$  所与の下で, 以下のように与えられるとする.

$$(B.10) \quad r_f(Y_t) = \sum_{k=1}^K \langle Y_t, e_k \rangle r_f(k).$$

(B.10) 式は、安全利率がその期間を支配するレジームによりスイッチングすることを意味する。

対数線形近似 (Campbell and Viceira, 2002) より、安全資産と危険資産の対数収益率は通常収益率を用いて、それぞれ以下のように表すことができる：

$$(B.11) \quad r_t^{\log} | Y_t = r_t | Y_t,$$

$$(B.12) \quad \mathbf{R}_t^{\log} = \mathbf{R}_t | Y_t - \frac{1}{2} \boldsymbol{\lambda}(Y_t).$$

ここで、 $\lambda_i(Y_t) := \boldsymbol{\sigma}_i(Y_t) \boldsymbol{\sigma}'_i(Y_t)$  と略記し、 $\boldsymbol{\lambda}(Y_t) = (\lambda_1(Y_t) \cdots \lambda_i(Y_t) \cdots \lambda_n(Y_t))'$  と書いた。

上記の設定の下で、1 個の安全資産と  $n$  個の危険資産よりポートフォリオを構築する。時点  $t-1$  で行うリバランス後の安全資産と危険資産への投資金額比率、すなわちポートフォリオ・ウェイトを  $\{b_{0t}, \mathbf{b}_t = (b_{1t} \cdots b_{nt})'\}$  と書く。このとき、時点  $t$  におけるレジームが所与の下で、期間  $t$  におけるポートフォリオ全体の通常収益率は、次のように表すことができる。

$$(B.13) \quad \tilde{R}_t | Y_t = b_{0t}(r_t | Y_t) + \mathbf{b}'_t(\mathbf{R}_t | Y_t).$$

対数線形近似より、その対数収益率は、

$$(B.14) \quad \tilde{R}_t^{\log} | Y_t = \tilde{R}_t | Y_t - \frac{1}{2} \mathbf{b}'_t \boldsymbol{\Lambda}(Y_t) \mathbf{b}_t,$$

ただし、 $\boldsymbol{\Lambda}(Y_t) := \boldsymbol{\Sigma}(Y_t) \boldsymbol{\Sigma}'(Y_t)$  と略記する。(B.14) 式に、(B.13)、(B.11)、(B.12) 式を代入すると、

$$(B.15) \quad \tilde{R}_t^{\log} | Y_t = \mu_P(b_{0t}, \mathbf{b}_t; Y_t) + \mathbf{b}'_t \boldsymbol{\Sigma}(Y_t) \boldsymbol{\varepsilon}_t.$$

ここで、

$$(B.16) \quad \mu_P(b_{0t}, \mathbf{b}_t; Y_t) := b_{0t} r_f(Y_t) + \mathbf{b}'_t \boldsymbol{\mu}(Y_t) - \frac{1}{2} \mathbf{b}'_t \boldsymbol{\Lambda}(Y_t) \mathbf{b}_t + \frac{1}{2} \mathbf{b}'_t \boldsymbol{\lambda}(Y_t),$$

とおいた。さらに、

$$\mu_P(b_{0t}, \mathbf{b}_t) = (\mu_P(b_{0t}, \mathbf{b}_t; e_1) \cdots \mu_P(b_{0t}, \mathbf{b}_t; e_k) \cdots \mu_P(b_{0t}, \mathbf{b}_t; e_K)),$$

とおけば、

$$(B.17) \quad \mu_P(b_{0t}, \mathbf{b}_t; Y_t) = \mu_P(b_{0t}, \mathbf{b}_t) Y_t,$$

と書ける。ところで、投資期間全体のポートフォリオに関するグロスリターンは、

$$\log \left( \frac{V_T}{V_0} \right) = \sum_{t=1}^T \log \left( \frac{V_t}{V_{t-1}} \right) = \sum_{t=1}^T \tilde{R}_t^{\log},$$

である。ただし、 $\tilde{R}_t^{\log} = \log(V_t/V_{t-1})$  であることに注意する。

レジーム所与の下で、投資期間全体のグロスリターンの期待値は、繰り返し期待値の公式を利用して、

$$E \left[ \log \left( \frac{V_T}{V_0} \right) \middle| \mathcal{F}_T^Y \right] = \sum_{t=1}^T E[\tilde{R}_t^{\log} | \mathcal{F}_T^Y] = \sum_{t=1}^T \mu_P(b_{0t}, \mathbf{b}_t; Y_t).$$

したがって、レジーム条件下で期待成長率を最大化するためには、各期間  $t$  において、以下の問題の解として与えられる最適成長ポートフォリオを用いれば良いことになる。

$$(B.18) \quad \mathbf{P}(Y_t) \quad \begin{cases} \text{maximize} & \mu_P(b_{0t}, \mathbf{b}_t; Y_t) \\ & = b_{0t} r_f(Y_t) + \mathbf{b}'_t \boldsymbol{\mu}(Y_t) - \frac{1}{2} \mathbf{b}'_t \boldsymbol{\Lambda}(Y_t) \mathbf{b}_t + \frac{1}{2} \mathbf{b}'_t \boldsymbol{\lambda}(Y_t) \\ \text{subject to} & b_{0t} + \mathbf{b}'_t \mathbf{1} = 1. \end{cases}$$

問題  $\mathbf{P}(Y_t)$  に対する KKT 条件は、次のように与えられる。

$$(B.19) \quad \mathbf{\Lambda}(Y_t)\mathbf{b}_t^* = \boldsymbol{\mu}(Y_t) - r_f(Y_t)\mathbf{1} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda}(Y_t),$$

$$(B.20) \quad b_{0t}^* + \mathbf{b}_t^{*\prime}\mathbf{1} = 1.$$

ところで、レジーム条件下で、危険資産の対数収益率と最適成長ポートフォリオの対数収益率の共分散は、

$$(B.21) \quad \begin{aligned} \text{Cov}(\mathbf{R}_t^{\text{log}}, \tilde{R}_t^{\text{log}*} | \mathcal{F}_{t-1}^R, \mathcal{F}_T^Y) \\ = \text{Cov}(\boldsymbol{\mu}(Y_t) + \boldsymbol{\Sigma}(Y_t)\boldsymbol{\varepsilon}_t, \mu_P(b_{0t}^*, \mathbf{b}_t^*; Y_t) + \mathbf{b}_t^{*\prime}\boldsymbol{\Sigma}(Y_t)\boldsymbol{\varepsilon}_t | \mathcal{F}_{t-1}^R, Y_t) \\ = \boldsymbol{\Sigma}(Y_t)\boldsymbol{\Sigma}'(Y_t)\mathbf{b}_t^* = \mathbf{\Lambda}(Y_t)\mathbf{b}_t^*. \end{aligned}$$

(B.19) 式と (B.22) 式を等号で結んで、

$$(B.22) \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\mu}(Y_t) - r_f(Y_t)\mathbf{1} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda}(Y_t) &= \text{Cov}_{t-1}(\mathbf{R}_t^{\text{log}}, \tilde{R}_t^{\text{log}*} | Y_t), \quad \text{あるいは}, \\ \mu_i(Y_t) - r_f(Y_t) + \frac{1}{2}\lambda_i(Y_t) &= \text{Cov}_{t-1}(R_{it}^{\text{log}}, \tilde{R}_t^{\text{log}*} | Y_t). \end{aligned}$$

(B.22) 式は、最適成長ポートフォリオ  $i=G$  自身にも成立するので、

$$(B.23) \quad \mu_G(Y_t) - r_f(Y_t) + \frac{1}{2}\lambda_G(Y_t) = V_{t-1}[\tilde{R}_t^{\text{log}*} | Y_t].$$

(B.22) 式, (B.23) 式より、

$$(B.24) \quad \begin{aligned} \mu_i(Y_t) - r_f(Y_t) + \frac{1}{2}\lambda_i(Y_t) &= \frac{\text{Cov}_{t-1}(R_{it}^{\text{log}}, \tilde{R}_t^{\text{log}*} | Y_t)}{V_{t-1}[\tilde{R}_t^{\text{log}*} | Y_t]} \cdot V_{t-1}[\tilde{R}_t^{\text{log}*} | Y_t] \\ &= \beta_i(Y_t) \left( \mu_G(Y_t) - r_f(Y_t) + \frac{1}{2}\lambda_G(Y_t) \right). \end{aligned}$$

ここで、

$$(B.25) \quad \beta_i(Y_t) := \frac{\text{Cov}_{t-1}(R_{it}^{\text{log}}, \tilde{R}_t^{\text{log}*} | Y_t)}{V_{t-1}[\tilde{R}_t^{\text{log}*} | Y_t]},$$

と定義した。また、両辺に現われる  $\frac{1}{2}\lambda$  は対数線形近似による Jensen の項を表す。さらに、(B.11) 式, (B.12) 式より、 $r_f(Y_t) = r_t|Y_t$ 、 $\mu_i(Y_t) + \frac{1}{2}\lambda_i(Y_t) = E_{t-1}[R_{it}|Y_t]$ 、 $\mu_G(Y_t) + \frac{1}{2}\lambda_G(Y_t) = E_{t-1}[R_{Gt}|Y_t]$  であるから、 $Y_t = e_k$  とした (B.24) 式は次のように書きなおせる。

$$(B.26) \quad E_{t-1}[R_{it} - r_t|Y_t = e_k] = \beta_i(k)E_{t-1}[R_{Gt} - r_t|Y_t = e_k].$$

(B.26) 式は次のように解釈できる：

「レジームに応じて、個別資産と最適成長ポートフォリオのリスクプレミアムはスイッチングする。そのスイッチングするレジーム下で、個別資産のリスクプレミアムは最適成長ポートフォリオのリスクプレミアムに比例し、その度合いは『スイッチング・ベータ  $\beta_i(k)$ 』によって捉えることができる」

J-REIT などの金融資産のリスクプレミアムを求める場合に、(B.26) 式で示される、レジーム・スイッチングを考慮した資産価格評価公式を用いることには、以下の特徴やメリットがあると考えられる：

- 投資対象リストに挙げられた資産と、それより構築される最適成長ポートフォリオとのリスクプレミアムの関係を示した、実行可能な公式であることに特徴を有する。一方で、CAPM は理論上の概念である市場ポートフォリオと個別資産とのリスクプレミアムの関係を示した理論上の公式である。

- 実用之际して、最適成長ポートフォリオは SPOP スキーム (Ishijima and Shirakawa, 2000) により構築して用いても良いし、そのプロキシとしてベンチマーク・インデックス (S & P 500, DJIA など) や均等ポートフォリオでさえも良い (Roll, 1973; Long, 1990; Platen and Heath, 2006 などの実証・理論研究を参考にされたい)。

さて一方、(B.26)式に基づけば、レジーム・スイッチングを考慮した資産価格におけるリスク・ファクターを推定する統計モデルは、本文(4.2)式のように表される。つまり、(B.26)式にて、条件付き期待値をはずした上で、 $(r_t|Y_t=e_k) := (R_{it} - r_t|Y_t=e_k)_{1 \leq i \leq n}$ ,  $x_t := (R_{Gt} - r_t|Y_t=e_k)$ ,  $\beta_k := (\beta_i(k))_{1 \leq i \leq n}$  とおき、適切な切片  $\alpha_k$  と誤差項  $\Sigma_k^{1/2} \epsilon_t$  を加えると、以下に再掲する(4.2)式が得られる。

$$(r_t|Y_t=e_k) = \alpha_k + \beta_k x_t + \Sigma_k^{1/2} \epsilon_t.$$

## 参 考 文 献

- Baum, L. E. (1972). An inequality and associated maximization technique in statistical estimation for probabilistic functions of Markov processes, *Inequalities III: Proceedings of the Third Symposium on Inequalities*, 1–8, Academic Press, New York.
- Baum, L. E. and Eagon, J. A. (1967). An inequality with applications to statistical estimation for probabilistic functions of Markov processes and to a model for ecology, *Bulletin of the American Mathematical Society*, **73**(3), 360–363.
- Baum, L. E. and Petrie, T. (1966). Statistical inference for probabilistic function of finite state Markov chains, *Annals of Mathematical Statistics*, **37**(6), 1554–1563.
- Baum, L. E., Petrie, T., Soules, G. and Weiss, N. (1970). A maximization technique occurring in the statistical analysis of probabilistic functions of Markov chains, *Annals of Mathematical Statistics*, **41**(1), 164–171.
- Campbell, J. Y. (2000). Asset pricing at the millennium, *Journal of Finance*, **55**(4), 1515–1567.
- Campbell, J. Y. and Viceira, L. M. (2002). *Strategic Asset Allocation: Portfolio Choice for Long-term Investors*, Oxford University Press, New York.
- Cover, T. M. and Thomas, J. A. (1991). *Elements of Information Theory*, John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey.
- Elliott, R. J., Aggoun, L. and Moore, J. B. (1995). *Hidden Markov Models: Estimation and Control*, Springer, New York.
- Ghahramani, Z. and Hinton, G. E. (1996). The EM algorithm for mixtures of factor analyzers, Technical Report, CRG-TR-96-1, Toronto University, <http://learning.eng.cam.ac.uk/zoubin/papers/tr-96-1.pdf>.
- Greene, W. H. (2007). *Econometric Analysis*, 6th ed., Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey.
- Hakansson, N. H. (1971). Capital growth and the mean-variance approach to portfolio selection, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **6**(1), 517–557.
- Hamilton, J. D. (1989). A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle, *Econometrica*, **57**(2), 357–384.
- Hamilton, J. D. (1990). Analysis of time series subject to changes in regime, *Journal of Econometrics*, **45**, 39–70.
- Hamilton, J. D. (1994). *Time Series Analysis*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- 池田思朗(1993). HMMの構造探索による音素モデルの生成, 電子情報通信学会技術研究報告.SP, 音

- 声, **93**(88), 17–24.
- Ishijima, H. and Shirakawa, H. (2000). The optimal log-utility asset management under incomplete information, *Asia-Pacific Financial Markets*, **7**(2), 145–154.
- 石島 博, 高野江里子, 谷山智彦(2006). レジーム・スイッチング資産価格評価モデルによる J-REIT のリスクプレミアム推定, 『ジャレフ・ジャーナル 2006 不動産金融工学の展開』(刈屋武昭, 藤田昌久 編), 85–115, 東洋経済新報社, 東京.
- Kaufmann, S. (2000). Measuring business cycles with a dynamic Markov switching factor model: An assessment using Bayesian simulation methods, *Econometrics Journal*, **3**, 39–65.
- Kelly, J. L. (1956). A new interpretation of information rate, *Bell System Technical Journal*, **35**, 917–926.
- Kim, C.-J. (1994). Dynamic linear models with Markov-switching, *Journal of Econometrics*, **60**, 1–22.
- Kim, C.-J. and Nelson, C. R. (1998). Business cycle turning points, a new coincident index, and tests of duration dependence based on a dynamic factor model with regime switching, *The Review of Economics and Statistics*, **80**(2), 188–201.
- Kim, M.-J. and Yoo, J.-S. (1995). New index of coincident indicators: A multivariate Markov switching factor model approach, *Journal of Monetary Economics*, **36**, 607–630.
- Lehmann, B. N. and Modest, D. M. (1988). The empirical foundation of the arbitrage pricing theory, *Journal of Financial Economics*, **21**(2), 213–254.
- Levinson, S. E., Rabiner, L. R. and Sondhi, M. M. (1983). An introduction to the application of the theory of probabilistic functions of a Markov process to automatic speech recognition, *Bell Systems Technical Journal*, **62**(4), 1035–1074.
- Long, J. B. (1990). The numeraire portfolio, *Journal of Financial Economics*, **26**(1), 29–69.
- Luenberger, D. G. (1993). A preference foundation for log mean-variance criteria in portfolio choice problems, *Journal of Economic Dynamics and Control*, **17**, 887–906.
- Mamon, R. S. and Elliott, R. J. (2007). *Hidden Markov Models in Finance*, Springer, New York.
- Platen, E. and Heath, D. (2006). *A Benchmark Approach to Quantitative Finance*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- Roll, R. (1973). Evidence on the “growth-optimum” model, *Journal of Finance*, **28**(3), 551–566.
- Thorp, E. O. (1971). Portfolio choice and the Kelly criterion, *Proceedings of the 1971 Business and Economics Section of the American Statistical Association*, 215–224.
- Turkington, D. A. (2002). *Matrix Calculus and Zero-One Matrices: Statistical and Econometric Applications*, Cambridge University Press, Cambridge.

## Regime Switching Factor Analysis and Its Application to Detection of Risk Factors in J-REIT Market

Hiroshi Ishijima<sup>1</sup> and Junnosuke Matsushima<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Graduate School of International Accounting, Chuo University

<sup>2</sup>Clinical Research Planning Department, Chugai Pharmaceutical Co., LTD.

We study factor analysis subject to regime switching or hidden Markov models (*HMM factor analysis*) and apply the result to conduct an empirical analysis on Japanese REIT (*J-REIT*) markets.

The objective of HMM factor analysis is to detect risk factors solely based on asset prices, where the dimension of risk factors is expected to be far less than that of target assets. The model admits risk factor switching according to hidden economic regimes behind the market. Following the model settings above, we derive an estimation method. The procedure is as follows: (1) introduce a forward-backward algorithm to define the likelihood function and (2) use the Baum-Welch (EM) algorithm to obtain the maximum likelihood estimators. We also mention the variance of derived estimators. Next, we conduct an empirical analysis to apply the model to the J-REIT market to detect common risk factors in the presence of hidden economic regimes. We find that the HMM factor analysis better explains the risk structures in J-REIT prices compared to the standard setting.

While it is common in financial literature to use multi-factor regression analyses to explain the sources of returns in J-REIT, we employ HMM regression for comparison. We find that: (1) in both HMM factor and regression analyses, the estimated smoothers detect essentially the same regimes, (2) regime switching risk factors can be detected by asset prices alone, and (3) the return sources due to regime switching can be better explained by introducing market benchmarks.