

サーキットブレーカ制度下での商品先物の市場リスク

青木 義充 総合研究大学院大学 統計科学専攻 5年一貫制博士課程5年

【はじめに】

本報告の目的は、2009年5月に東京商品取引所が値幅制限に代わり導入したサーキットブレーカ制度下で市場リスクを計測することにある。

サーキットブレーカ制度とは、1日の価格変動に上限を課す一方で、価格の大幅な変動時には取引を一時停止させた後に、上限値を緩和して取引を再開する制度である。ただし、価格変動の上下限値は旧制度下に比べて大きく設定されているため、以前であれば値幅制限に抵触するような急激な価格変動の場合でも、価格は打ち切られずに観測されるようになった。とりわけ下落時での価格変動が大きいため、前日差の分布には上昇・下落時で形状が異なる非対称性が観測される(図1,2,3を参照)。このように非対称性が散見される状況下での市場リスク計測の枠組みを、イノベーションに非対称性を仮定したモデルを用いて提案する。

【モデル】

t 時点の価格を P_t とし、前日差 $x_t := P_t - P_{t-1}$ を定義する。値幅制限制度の下では x_t に自己回帰構造が見られたため、本報告でも次のような1次の自己回帰モデルを仮定する。

$$x_t = \mu + \phi x_{t-1} + \varepsilon_t$$

実際の価格で観測された非対称性は、イノベーション ε_t の構造として考える。いま、下落局面を $N_1 := \{t | \varepsilon_t < 0\}$ 、上昇局面を $N_2 := \{t | \varepsilon_t \geq 0\}$ と定義し、 ε_t がそれぞれの局面で異なる確率分布を持つように、

$$p_1 f_1(\varepsilon_t | \Theta_1) \times I_{N_1}(t) + p_2 f_2(\varepsilon_t | \Theta_2) \times I_{N_2}(t)$$

とおく。ただし、 Θ_1, Θ_2 はそれぞれの確率分布のパラメタの集合であり、 p_1, p_2 はそれぞれ下落・上昇する割合を示すパラメタとし、 $p_1, p_2 > 0$ 、 $p_1 + p_2 = 1$ である。また、 $I_A(x)$ は指示関数であり、 $x \in A$ のときは1、その他の場合には0をとる。なお、上昇時、下落時の確率密度関数は次のように定義する。

$$\int_{-\infty}^0 f_1(\varepsilon | \Theta_1) d\varepsilon = 1, \quad \int_0^{\infty} f_2(\varepsilon | \Theta_2) d\varepsilon = 1.$$

本報告では x_t の平均構造に、“定数項をもつAR(1)”，“定数項のみ”を仮定したものと、“平均構造を考えずイノベーションのみを仮定したものの ($x_t = \varepsilon_t$)” の計3種のモデルを考える。一方、 ε_t に対しては、

- (i) 正規分布モデル: $(2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\{-\varepsilon_t^2/(2\sigma^2)\}$
- (ii) Kouモデル: $p_1\theta_1 \exp(\theta_1\varepsilon_t) I_{N_1}(t) + p_2\theta_2 \exp(-\theta_2\varepsilon_t) I_{N_2}(t)$
- (iii) 指数-半正規分布モデル: $p_1\theta_1 \exp(\theta_1\varepsilon_t) I_{N_1}(t) + p_2 \left[2(2\pi\sigma_2^2)^{-1/2} \exp\{-\varepsilon_t^2/(2\sigma_2^2)\} I_{N_2}(t) \right]$

の3種のモデルを仮定するため、合計して3×3の9種のモデルを扱う。

【推定方法とモデルフィッティング】

推定方法はMCMC法を採用した。ここで、各パラメタの事前分布として、 μ には区間 (C_1, C_2) の一様分布を、 ϕ には区間 $(-1, 1)$ の一様分布を、 p_1 にはベータ分布を、指数分布のパラメタ θ にはガンマ分布を、正規分布の分散 σ^2 には逆ガンマ分布を採用した。なお、 C_1 は観測データの下側40%点、 C_2 は上側40%点に設定した。サンプリングの順番は、正規分布では μ, ϕ, σ^2 、Kouモデルでは $\mu, \phi, p_1, \theta_1, \theta_2$ 、指数-半正規分布モデルでは $\mu, \phi, p_1, \theta_1, \sigma_2^2$ である。モデルフィッティングの対象としては、

金、白金、ガソリン、原油の4商品の先物価格であり、期間はサーキットブレーカ制度が導入された2009年5月6日から2010年12月30日までである。実際の推定に際しては、それぞれ12,000回試行し、はじめの2,000回を除いた残りの10,000回の平均値を推定値として採用し、モデル選択規準としてDIC (Deviance Information Criterion) を計算した。モデルの当てはめ結果を表1に示し、パラメタの推定結果の抜粋として白金について表2に示した。表中の Δ DICは最小となるモデルのDICからの差であり、値が0であるものがDICによって選択されたモデルである。

4商品ともに、 x_t に μ のみを仮定し ε_t に指数-半正規分布モデルを仮定したものが選択されており、下落局面で裾が重く上昇局面が比較的裾が軽いという特徴が示された。 μ の推定値はすべて負であるため、切片のみを観察すると下落傾向を想起させるが、当該期間の先物価格は4商品ともに上昇傾向にあった。この原因は4商品ともに p_1 が0.4程度と低く、正のイノベーションが発生しやすいことにある。

まとめると、商品先物価格の特徴をとらえるには、下落時と上昇時の分布の裾の重さが異なる形状の非対称性と正のイノベーションが起こる頻度の非対称性という2つの非対称性を考慮することが重要である。

【市場リスクの計測】

商品先物を空売りしている場合には、上昇局面において損失が膨らむため、商品先物の市場リスク計測では下落局面だけでなく上昇局面の価格変動も考慮する必要がある。特に、下落局面と上昇局面で異なる挙動を示しているため、市場リスクの計測では両局面の挙動を適切にとらえなければならない。j日間保有した場合の市場リスクの推定値として $\widehat{\text{VaR}}_{\alpha\%}^{(j)}$ と $\widehat{\text{ES}}_{\alpha\%}^{(j)}$ (Expected Shortfall) を計測する。なお、下落局面のリスクとして下側1%点を採用し、上昇局面のリスクとして99%点を採用する。

市場リスクの推定に用いる損益分布を生成する際には、パラメタの不確実性を考慮する必要がある。ベイズ予測の観点から、MCMC法の各ステップの中で時間軸を予測期間まで延ばし、サンプリングしたパラメタに対応して発生させた価格の予測パスを用いて損益分布を生成する。

なお、当てはめたモデルの種類が市場リスク推定に与える影響を考慮するため、モデルを用いて計測した市場リスクの推定値と、実際の価格(2011年1月4日から2011年12月30日までの1年間)を用いて計測した市場リスクの実績値 ($\widehat{\text{VaR}}_{\alpha\%}^{(j)}$ と $\widehat{\text{ES}}_{\alpha\%}^{(j)}$) との乖離度をもとに、モデルごとの市場リスクの予測精度を測る指標を導入する。具体的には、市場リスクの推定値の実績値からの乖離度の2乗で評価し、j日間保有としたときの市場リスクの推定値と実績値の乖離度 ζ_j を

$$\zeta_j = \left(\frac{\widehat{\text{VaR}}_{1\%}^{(j)}}{\widehat{\text{VaR}}_{1\%}^{(j)}} - 1 \right)^2 + \left(\frac{\widehat{\text{ES}}_{1\%}^{(j)}}{\widehat{\text{ES}}_{1\%}^{(j)}} - 1 \right)^2 + \left(\frac{\widehat{\text{VaR}}_{99\%}^{(j)}}{\widehat{\text{VaR}}_{99\%}^{(j)}} - 1 \right)^2 + \left(\frac{\widehat{\text{ES}}_{99\%}^{(j)}}{\widehat{\text{ES}}_{99\%}^{(j)}} - 1 \right)^2$$

とし、1, 5, 10, 20日間の4つの保有期間を足し合わせた総合的な乖離度 $Z := \zeta_1 + \zeta_5 + \zeta_{10} + \zeta_{20}$ を計算する。

表3には、 ε_t のモデルを変更した場合のそれぞれのZを示した。金ではKouモデルが最も乖離度が小さく、その他の商品では指数-半正規分布モデルが最もZが小さかった。

このように市場リスク計測という観点からも、 ε_t に対し従来までの対称なモデルよりも、非対称性を考慮したモデルを当てはめたほうが良いということが実証的に示された。

図1: 白金の先物価格 P_t

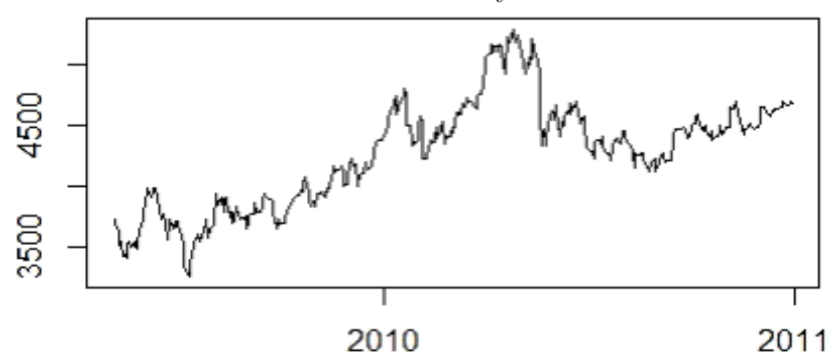


図2: 白金の価格前日差 x_t

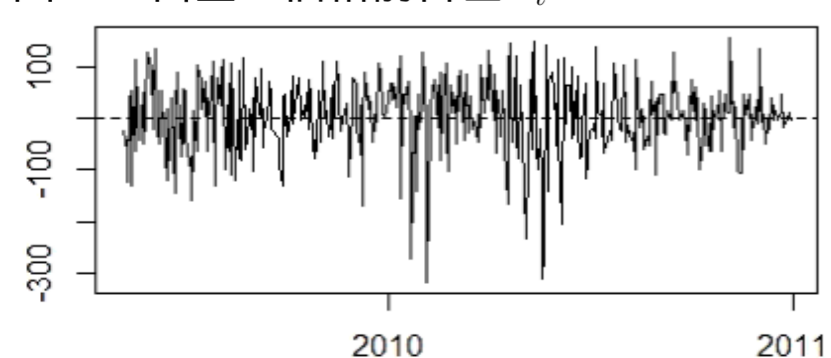


図3: 白金の x_t のヒストグラム

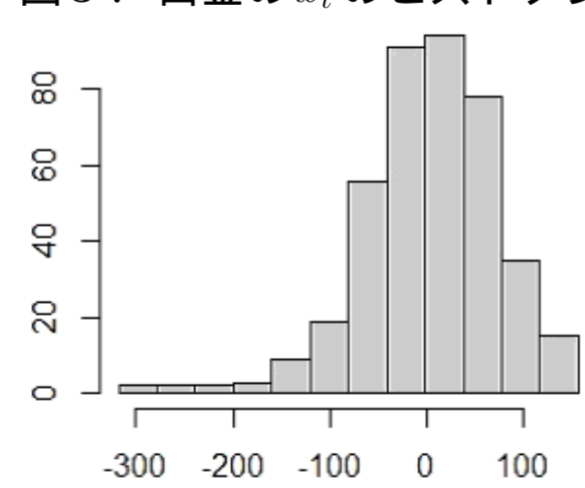


表3: 推定リスクの乖離度 Z

ε_t のモデル	金	白金	ガソリン	原油
正規分布モデル	2.519	2.609	1.860	1.237
Kouモデル	1.325	3.670	3.195	2.370
指数-半正規分布モデル	1.953	1.638	1.410	0.982

表1: モデルフィッティングの結果

	金	白金	ガソリン	原油
モデル化の x_t	μ のみ	μ のみ	μ のみ	μ のみ
対象 ε_t	指数-半正規分布モデル	指数-半正規分布モデル	指数-半正規分布モデル	指数-半正規分布モデル
パラメタ	μ	μ	μ	μ
推定値	p_1	p_1	p_1	p_1

表2: 白金のパラメタ推定結果

	ε_t	x_t	Δ DIC	パラメタ推定値								
				σ^2		μ		ϕ				
正規分布		ϕ と μ	34.918	4995.347	2.313	0.043						
				μ のみ	33.705	4988.813	2.501					
				構造なし	32.145	4990.822						
Kouモデル		ϕ と μ	540.821	θ_1	0.012	0.014	4.703	0.000	0.486	0.514		
				μ のみ	30.422	0.018	0.020	5.613	-		0.503	0.497
				構造なし	27.222	0.018	0.019			-		0.459
指数-半正規分布モデル		ϕ と μ	10.018	θ_1	0.018	4426.156	-5.395	-0.032	0.422	0.578		
				μ のみ	0.000	0.018	4415.944	-5.900	-		0.420	0.580
				構造なし	0.311	0.018	4078.529			-		0.459