

動く調査対象集団に対する標本調査-X*

—仕切り法・ビュッフオンの針の応用—

統計数理研究所	林	知己	夫
"	林		文
新潟大学農学部	豊島	重造	
"	斎藤	昌宏	
林業試験場北海道支場	柴田	義春	

(1979年5月 受付)

Estimation of the Size of a Mobile Population-X

—Continuous Counting of Tracks on Boundaries Method
(COCOBOM) and the Idea of Buffon's Needle—

Chikio Hayashi, Fumi Hayashi

(The Institute of Statistical Mathematics)

Jyuzo Toyoshima, Masahiro Saito

(Niigata University, Faculty of Agriculture)

Yoshiharu Shibata

(Experimental Station of Forestry, Hokkaido Branch)

Two new methods of estimating the population size of hares are presented.

(1) Continuous Counting of Tracks on Boundaries Method (COCOBOM)

This method may be suitable for the survey of a comparative small area (50 ha~100 ha). An area A is divided into R sub-areas which have simple boundaries. The number of in-going and out-going hares into a sub-area is observed by the tracks marked on the boundaries. The lower bound of the number of hares at the initial stage is estimated by the data obtained by continuous counting of tracks marked on the boundaries in the time spot $t=1, 2, \dots, T$. Let $I_{\tau i}$ and $O_{\tau i}$ be the number of in-going and out-going hares respectively at the time point τ and in the i -th sub-area.

$$I_{\tau i} - O_{\tau i} = D_{\tau i}$$

$$R_{li} = \sum_{\tau=1}^l D_{\tau i}$$

$$Z_{li} = x_i + R_{li}$$

where x_i is the number of hares which existed at the initial stage in the i -th sub-area. Here, Z_{li} means the number of hares at the time spot l in the i -th sub-area.

Let S_i be the minimum of R_{li} in the time stage, $l=1, 2, \dots, T$. The value of $x_i + S_i$ is the minimum number of hares in the i -th sub-area on the time span T . The relation $x_i + S_i \geq 0$ must hold. Then we have $x_i \geq \text{Max}[0, -S_i] = U_i$. The lower bound of $\sum_i^R x_i$ in the area A is estimated by $\sum_{i=1}^R U_i$. The good estimate will be obtained through the increasing of both R and T .

(2) Application of Buffon's needle problem

* 本論文は1979年バイオメトリック・ソサイエティ日本支部の年度研究発表会で発表されたものの一部である。

This method may be applicable to the estimation of the number of hares in the large area. The half circle model is discussed instead of a straight line (needle). First the case is considered where the running length of a hare in one-night is constant. Suppose that n crossings are observed. The estimate of the total number is given by n/P in the half-circle model, where $P=2L/\pi h$, where $2L$ is the running length of a hare in one-night and $2h$ is the interval length between two parallel lines in the Buffon's model ($2h \geq 4L/\pi$).

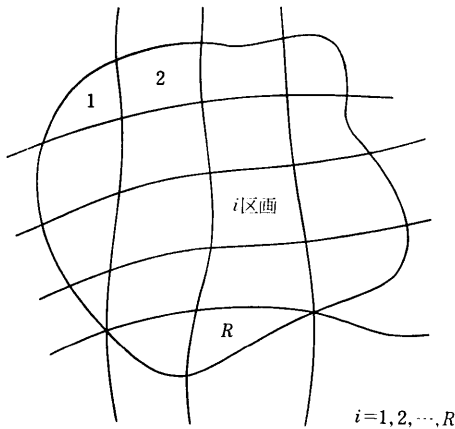
Finally, the case is discussed in details where the running length of every hare is generally different i.e. it has a frequency function.

積雪期における野兎の個体数推定の方法は、INTGEP, COC, RST の諸方法の活用で一応見通しがたった ([2], [3], [4]). ここでは、異った観点からする推定方法を述べてみたい. 一つは比較的小面積 (50 ha~100 ha) に適した方法, 一つは巨大面積における生息密度の大局的推定を志向したものである.

1. 仕切り法

1.1 方法の説明

ある地域 A を R 個の小区画に分割する. 単純な考え方で分割するのであって特殊な方法によらない. 第1図の様なものであって, 抽象的に表現すれば縦横格子によって分割するという



第1図 区画Aの分割

ことになる. ここで, 各小区画に出入する足跡の数を連続して毎日観測するのである. 観測は勿論前夜についた足跡の分のみを記録するものとする. 第1日目に観測された足跡がいつのものか判明しない場合は, 第2日目の観測分からデータとすればよい. 第1日目に記録があるから第2日目からは確実に前日のもののみを記録できることになる. この出入足跡数の連続データから, A 地域に最初の時点に存在した ($t=0$ の時点において存在した) 野兎の個体数を推定しようとするものである. 天候が良く連続観測が可能ならば良い推定が出来るものと考えられる. これは, 新潟大佐渡演習林において, 1977年の冬から豊島重造・斎藤昌宏によって考え出され実行されているもので, 仕切り法と名付けられている.

Continuous Counting of Tracks on Boundaries Method (読み易く COCOBOM と略記する) と言わるべきものである.

1.2 推定の方法

観測時点は $t=1, 2, \dots, T$ とする. $t=0$ が観測開始前日をあらわす. 区画 i は $i=1, 2, \dots, R$ 個であるとする. $t=0$ における i 区画の個体数を x_i とする. 勿論 $x_i \geq 0$ である. 総数は $X = \sum_{i=1}^R x_i$ でこれを推定することを考えるのである. τ 時点の観測で前日につけられた足跡の i 区画への出入数を記録する. i 区画への出入は必ず i 区画の境界周辺のみを通して行われるので, 周辺の観測を行えば把握されるわけである. 当然 i 区画内での動きは無視されることになる. i 区画の境界周辺の観測で, τ 時点の観測で流入した足跡数を $I_{\tau,i}$, 流出した足跡数

を $O_{\tau i}$ とすれば

$$I_{\tau i} - O_{\tau i} = D_{\tau i}$$

が i 区画に増減した個体数となる.

$$D_{\tau i} \geq 0$$

いま

$$R_{ti} = \sum_{\tau=1}^t D_{\tau i}$$

とすれば, これは t 時点までの流入, 流出の収支決算である.

t 時点における i 区画内の個体数を Z_{ti} とすれば

$$Z_{ti} = x_i + R_{ti}$$

となる.

$$\min_{t=1,2,\dots,T} R_{ti} = S_i$$

とすれば

$$x_i + S_i$$

は, $t=0$ から $t=T$ までの間の i 区画の中にいた野兎の数の最小となる.

当然

$$(*) \quad x_i + S_i \geq 0$$

が成立しなくてはならない.

$$U_i = \max [0, -S_i]$$

とすれば (*) から

$$x_i \geq U_i$$

とならなくてはならない. $S_i > 0$ であれば, $U_i = 0$ となるわけである.

こうすれば $X = \sum_{i=1}^R x_i$ の下限が

$$\sum_{i=1}^R U_i$$

として推定されることになる.

$$X \geq \sum_{i=1}^R U_i$$

というわけである. X がわかれば T 時点に存在する個体数も推定できることになる.

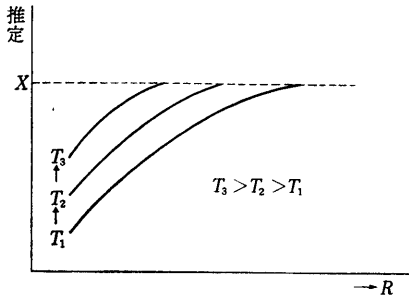
問題は, i 区画内の動きだけの問題で T がそう大でないとき, i 区画内だけに留る個体がある可能性があり, この分が調査で捕捉されないのである. そのために下限しか推定されてこないわけである. 一たび境界を超えれば, それは計算に入ってくるわけである. もう一つ, T が大であれば i 区画のみに留る可能性が減少してくる. このため, T は大きくとるのが望ましい.

次に, 区画を小にして行き (区画の面積を小さくして行く), R を増加させたとき

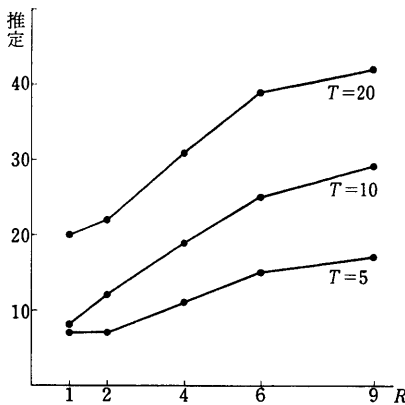
$$\sum U_i$$

がどのように大になって行くかを検討することは重要なことである.

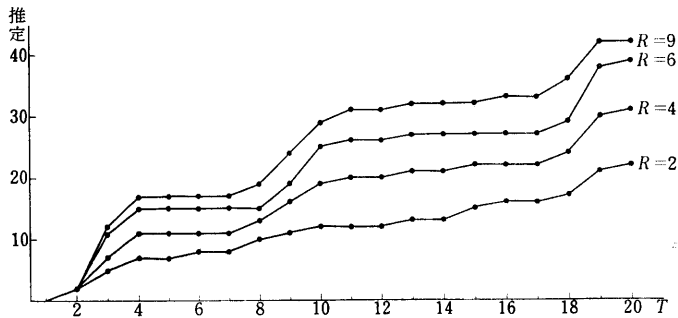
T 及び R の増加は, 労力を要することなので, 準備調査の段階で検討しておくべき問題である. R と T と推定との関係は第 2-1 図の様に予想される. R が大であれば T が小でも Plateau に達するし, R が小であれば T を大にしなくては Plateau に達しない. この Plateau が X である. しかし, R があまり小であれば, その内部のみで行動する野兎が増加し, Pla-



第2-1図 推定と R, T との関係



第2-2図 推定と R, T との関係, 佐渡における例による



第2-3図 推定と R, T との関係, 佐渡における例による (その2)

teau に達することはない。このあたりは、経験——環境条件に左右されることが多いのでこれを見極める眼力——が大きく物を言うところである。なお第2-1図で T を横軸にし、 R をパラメータとして図を描いても全く同じ形が出来る。

佐渡における準備調査の一例をあげれば第2-2図、第2-3図の様になる。これは未だ検討を要する点の多い調査であるが上述の傾向を予想させることが出ている。

1.3 観測誤差の影響

流出、流入に観測誤差がある場合はどうなるか。

$$D_{\tau i} + \eta_{\tau i} = D'_{\tau i}$$

$$\eta_{\tau i} \cong 0 \text{ を観測誤差とする。}$$

$$\sum_{\tau=1}^t \eta_{\tau i} = \varepsilon_{ti}$$

とすれば

$$\sum_{\tau=1}^t D'_{\tau i} = R_{ii} + \varepsilon_{ti} = R'_{ii}$$

当然 $\varepsilon_{ti} \cong 0$ である。

$$\min_{t=1,2,\dots,T} R'_{ii} = S'_i$$

$$U'_i = \max [0, -S'_i]$$

としよう。

$R_{ii} \geq 0$ の場合、 $\varepsilon_{ti} \geq 0$ ならば (すべての t) U_i

$= U'_i = 0$ となる。いろいろの場合が考えられるが、誤差が各 t に対して、平均 0 で、ある分散をもつ分布を示したとすれば—— R_{ii} そのものがある分布をもつ確率変数 R_i のある実現値と見做せる、つまり t に関してある分布を示し、さらに誤差も t に関してある分布を持ち (試行と t とに関する 2 次元分布)、互に独立 (通常独立もしくは正の相関がある) と考えられよう——、 R'_{ii} の分散は R_{ii} の分散よりも大となる。分布型が同じであれば (例えばガウス分布)

$R_{i'}$ の最小値は R_{i} の最小値より平均的にみて小となる*。この $R_{i'}$ の最小は一般に負であるから、この場合は、平均的にみて $U_{i'} > U_i$ が成立する。最小の値が正の場合は $U_{i'} = U_i = 0$ と抑えられる。

また一つの境界で誤差があると互に隣接する区画に誤差が波及することになる。また t に関して **minimum** をとるのでどこかの負の値が大きく響くことも考えられる。

このように考えてくると、観測誤差があれば打ち消すことなく拡大され、その結果、推定が増加する傾向が強いものと予想される。つまり、誤差が一方的に集積されることが予想されることになる。

従って、この調査の場合は、観測を厳重に管理し、本数、流入、流出の別を誤差なくつきとめる様にしなくてはならない。特に流入、流出の方向は影響する所が大きいので注意しなくてはならない。

2. ビュッフォンの針の応用としての推定

この場合は巨大な面積における野兎生息数の推定に役立つ方法である。大胆な仮説をおくのでこのために生ずる誤差も当然考えられるのである。省力化の下に生息数のオーダーを把握するのに適していると考えられる。勿論この方法の妥当性は、ある地域で INTGEP, COC, RST 法によって調査を行いこれに基く推定によって検討されておらなければならない。

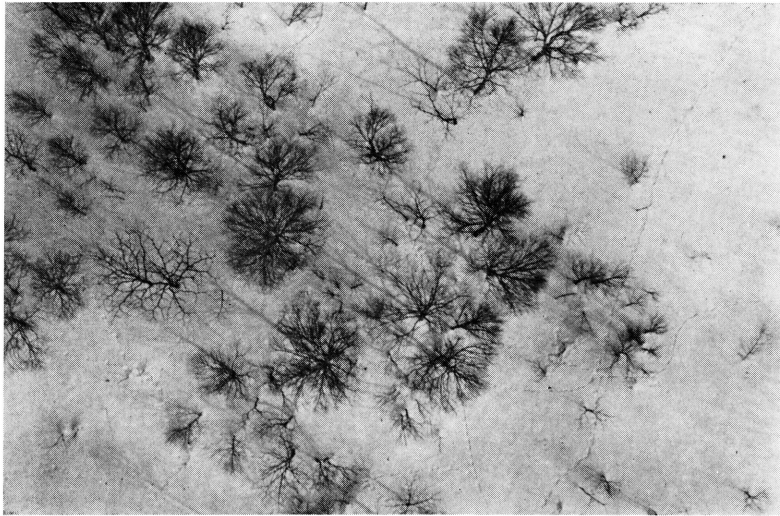
2.1 方法の説明

ある直線上を一定水平距離歩き、これと交わる野兎足跡の交点数を数え、これをもとに生息個体数・密度を推定しようとするものである。一直線上を歩くことは雪山においては一般に困難なことなのでこれに代るべく、ヘリコプターで一直線上を飛行しこの飛行航路と交叉する足跡の数を数えることを試みた。飛行高度はなるべく低いことが望ましいが、危険を伴うのでそれほど低くは出来ない。安全高度で観測可能な対地高度は 100m 前後であることが予備調査によって確かめられた。対地高度 100m, ニコン F 50mm レンズによる直下写真は第 3-2 図に



第 3-1 図 使用したヘリコプター、後部左客席前に直下写真機

* 一様分布、ガウス分布の場合は最小値の平均値はもとの分布の平均値から小さい方へ標準偏差に比例して遠ざかることが示される。



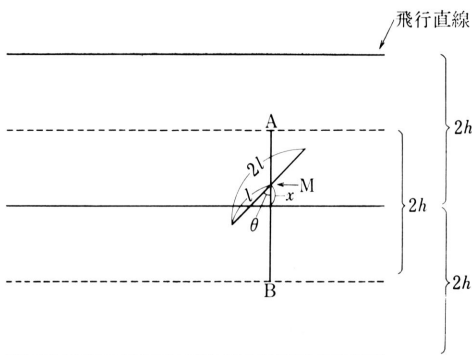
第3-2図 対地高度 100m の直下写真 (水準器使用)
 ニコン F, 50mm レンズ, 35mm フィルムの引伸し
 北海道ニセコ・ワイスホルン付近, 3月4日, 午後2時, 晴
 野兎の足跡のほか, ほぼ中央を下やや右から上やや左に (向きは不明) かけて
 キツネと思われる足跡が読みとれる.

示す. これによると好条件の下に飛行すれば前日の足跡の見分けは可能である.

なお, この直下写真を利用すれば, (対地高度 100m とすれば 35mm フィルム上にうつる面積は 1/2000 とみられる) 足跡総延長も推定可能で INTGEP に代る方法としてその省力化に役立つものと判断される. 一定速度・一定対地高度飛行, 等時間間隔シャッターによれば, 望ましい地域サンプリングが可能となる.

2.2 ビュッフォンの針の応用

野兎の一夜の足跡が直線であるとし $2l$ キロメートル (以下すべてキロメートル単位, 単位略) とする. 間隔 $2h$ ($2h \geq 2l$) の平行線を考える. ビュッフォンの針の問題は, 平面上に $2h$ の間隔の平行線があり, この平面上に長さ $2l$ の針をランダムにおとすとき, その針が平行線と交わる確率はどうかという幾何確率の問題である. 針の midpoint を M とし, これが直線 AB 上



第4図 ビュッフォンの針のモデル

に $\frac{dx}{2h}$ の確率で落ちるものとする. さらに

に M を中心とし針の方向が $\frac{d\theta}{2\pi}$ で等確率

にきめられるものとする. こうした確率フィールドを認めると針が平行線とぶつかる確率 P は

$$P = \frac{2l}{\pi h} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2l}{2h}$$

となる.

針が平行線とぶつかるかどうかを示す確率変数を X とし

$$X = \begin{cases} 1 & \text{針が平行線と交わる} \\ 0 & \text{交わらぬ} \end{cases}$$

とすれば

$$E(X) = \frac{2l}{\pi h} = P$$

となる。

これを野兎に応用する。各野兎の足跡長がすべて直線で長さが等しく $2l$ とし、 N 頭いたとする。これが上述の仮定を満しておりその確率フィールドは互に独立であるとし（この仮定は現実的に無理がなかろう）上述の意味の確率変数を X_1, X_2, \dots, X_N とすれば

$$E\left(\sum_{i=1}^N X_i\right) = NP$$

となる。この単純・大胆な仮説から出発する。

これを利用して推定を行う。いま一定長観測し、 n 個の交点を観測したとすれば

$$\hat{N} = \frac{n}{P}$$

によって N の推定を行う。

$$E(n) = NP$$

であるから $E(\hat{N}) = N$

となり偏りのない推定を得る。

この \hat{N} の分散を計算してみよう。

$$\hat{N} = \frac{n}{P}$$

$$\text{であるから } \sigma_{\hat{N}}^2 = \frac{1}{P^2} \sigma_n^2 = \frac{1}{P^2} E(n - NP)^2$$

$$= \frac{1}{P^2} \cdot N^2 \cdot \frac{P(1-P)}{N}$$

$$= N \cdot \frac{1-P}{P}$$

となる。分散は P が大なるほど小であり、最小は $P=1$ のときである。

$$P = \frac{2l}{\pi h} = 1 \quad \text{から}$$

$$h = \frac{2}{\pi} l \doteq 0.65l$$

しかし $h \geq l$ でなくてはならない。従って分散を小にするためには $h=l$ とするのが一番望ましいことになる。

この場合

$$P = \frac{2}{\pi} \doteq 0.65$$

$h=l$ とするのが望ましいが現実では野兎ごとに $2l$ の長さが異なるのでその様にとるのが困難で

あるがおおよその目安として足跡長と間隔が近いということを意図して飛行間隔を定めるのがよい。

2.3 やゝ現実問題へ近付ける

実際のこれまでの北海道地区のフィールドでは

$$2l \leq 2\text{km} \text{ (平均 } 1.2\text{ km)}$$

であるから $2h$ として 2km をとるのが手堅いと思われる。

$$\text{こうすると } E(X) = \frac{2l}{\pi h} = \frac{1.2}{\pi \cdot 1} \approx 0.4$$

ということになる。

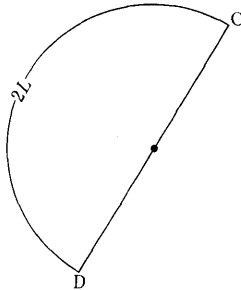
いままで、足跡が直線であるとして計算したが一般にこれは無理な仮定である*。長さはすべて一定とするが直線ではなく半円弧としてみる。半円弧とするのであるが、半円弧そのものを考えるのではなく、針の長さを加減することを考えるのである。野兎の足跡は、長さ $2L$ の半円弧を描く。針の長さの直線長としては $2l$ を考えるという考えに立つ (第5図)。つまり、半径 l の半円を考え、その直径 $2l$ (CD) をビュッフォンの針の場合の針の長さとするのである。足跡長 $2L$ を針の長さとして $2l$ を用いる、いわば adjusted distance を用いるのである。

$$\pi l = 2L, \quad l = \frac{2L}{\pi}$$

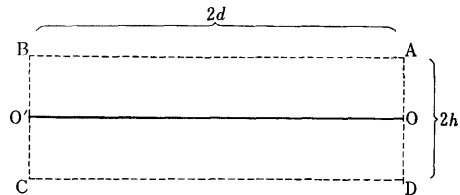
$2L = 2$ と大きめにとると

$$l = \frac{2}{\pi} \approx 0.65$$

となるので $2h > 2l = 0.65 \times 2 = 1.3$ であるから、間隔 $2h = 1.5\text{ km}$ 位ととればまずよいことになる。



第5図



第6図

2.4 生息密度の推定

以上を頭においてここでは足跡は直線としておく。第6図の ABCD という長方形の面積を考える。OO' は飛行直線である。2d の距離を飛ぶのである。2d は十分長く、AD, BC と野兎足跡の交点数が無視できる位長いとする (勿論 $2h$ に比べてである)。

OO' を飛行し n の交点を観測したとしよう。

生息数の推定 \hat{N} は $\hat{N} = \frac{n}{P}$ である。生息密度は

* 動く調査対象集団に対する標本調査—VII, 統計数理研究所彙報第20巻第2号 (1972), 45-60.

$$\frac{\hat{N}}{2h \cdot 2d} = \frac{\pi n}{8dl}$$

となり、 h を含まぬのが興味深い。

今度は AD, BC 方向の観測も加える。この場合観測は独立に行われるものとする。

$$\begin{array}{l} \text{横による 推定 } u, \quad u = \frac{n}{P} \quad P = \frac{2l}{\pi h}, \\ \text{(AB, CD 方向)} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{縦による 推定 } v, \quad v = \frac{m}{Q} \quad Q = \frac{2l}{\pi d}, \quad n, m \text{ は観測交点数} \\ \text{(AD, BC 方向)} \end{array}$$

$$\text{推定として} \quad w_1 u + w_2 v = z, \quad w_1 + w_2 = 1, \quad w_1, w_2 \geq 0$$

が考えられる。 u, v が独立と見做して計算してもよいと一般に考えられるから、次のようにウェイトを定めれば z の分散が最小となる。

$$w_1 = k \frac{1}{\sigma_u}, \quad w_2 = k \frac{1}{\sigma_v}, \quad k = \frac{1}{\frac{1}{\sigma_u} + \frac{1}{\sigma_v}}$$

σ_u^2, σ_v^2 は推定 u, v の分散

もし $d = h$ という格子がとられるならば $w_1 = w_2 = 1/2, P = Q$

$$z = \frac{(m+n)}{2} \cdot \frac{1}{P} = \frac{\tilde{n}}{P}, \quad \tilde{n} \text{ は観測総交点数}$$

生息密度は

$$\frac{z}{4h^2} = \frac{\pi}{8hl} \tilde{n}$$

となる。

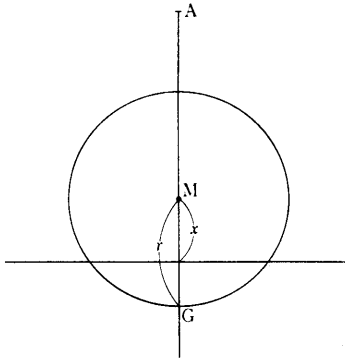
なお、大面積に直交する $2h$ の間隔の平行直線群（格子）をかぶせ、その上を飛行して足跡交点数を計算する場合は、上述の推定をつなぎ合わせればよいわけである。この格子をかぶせる時、方向、位置（直交する位置も含める）はランダムに定めるのが望ましい。「一般に」各直線における交点数は互に独立と見做して分散を計算してもよいと考えられるが、念の為、二組以上の直交平行直線群（格子）をランダム（方向及び位置）にとり、この間の推定値の差異を計算して、これから精度を算出して比較することもよい。各直線の交点数の独立性確保のため、時には間隔（ $2l$ より大）をランダムで指定するランダム格子を用いることも考えられる。

2.5 半円弧の針によるビュッフオンの問題

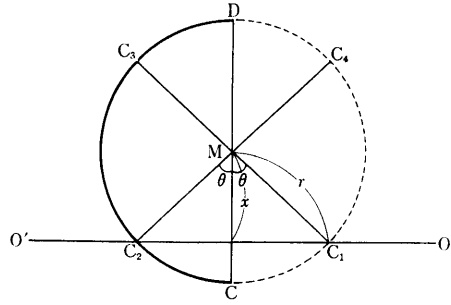
ここでは、直線の針ではなく、半円弧の針でビュッフオンの問題を考えてみよう。まず半径 r の円周を考えよう。第 4 図で AB 上に円の中心 M が等確率で落ちるとする。次に第 7 図で円周をつまみ MG を等確率 $\frac{d\theta}{2\pi}$ で回転させるものとする（円周のときは回転させないのと等価である）。この場合交点数は

$$\begin{array}{ll} x < r \text{ のとき} & 2 \\ x = r \text{ のとき} & 1 \\ x > r \text{ のとき} & 0 \end{array}$$

となる。この交点数を示す確率変数を X とするとき、上述のフィールドでは（平行線の間隔は $2h, h > r$ ）



第7図



第8図 半円弧のビュッフォン

$$E(X) = 2 \frac{r}{h}$$

となる。

こんどは半円弧を考える (第8図, $\widehat{CC_2C_3D}$ が円弧である)。

この場合, $x > r$ のときは円弧の時と同様交わることはなく, $x = r$ は確率0なので考慮外でよく $x < r$ の場合のみ考えればよい。確率フィールドは円周の時と同様に M は AB (第4図)

上に等確率 $\frac{dx}{2h}$ で落ち, 半円弧は MC を $\frac{d\theta}{2\pi}$ という等確率でとるものとする。

この場合次の様になる。

Cの移動	中心角の大きさ	基線 OO' と半円弧との交点数
$C_1 \rightarrow C_2$	2θ	1
$C_2 \rightarrow C_3$	$\pi - 2\theta$	0
$C_3 \rightarrow C_4$	2θ	1
$C_4 \rightarrow C_1$	$\pi - 2\theta$	2

$x < r$ の場合 OO' と半円弧との交点数の確率平均は

$$\frac{1}{2\pi} \{ 4\theta + 2(\pi - 2\theta) \} = 1$$

であって x に依存しない。

従って, 上述の確率フィールドで半円弧が基線 OO' と交わる個数をあらわす確率変数を X とすれば

$$E(X) = \frac{r}{h}$$

となる。ここに平行線の間隔は $2h$ であり $h > r$ である。

足跡長を $2L$ とすれば

$$2L = \pi r$$

$$r = \frac{2L}{\pi}$$

となるので

$$E(X) = \frac{2L}{\pi h}$$

となる。

2.6 諸モデルの比較

これまで三つのモデルを作って $E(X)$ を計算してきたがこの比較を行ってみよう。

モデル	$E(X)$
直線のビュッフオン	$\frac{2l}{\pi h} = P = \frac{1}{\pi h} \cdot 2l$
adjusted distance model による	$\frac{2}{\pi^2 h} \cdot 2L$
半円弧	$\frac{r}{h} = \frac{1}{\pi h} \cdot 2L$

第2のモデルは人工的に過ぎる。ここで直線モデルと半円弧モデルを比較してみよう。この違いは $2l$ と $2L$ の問題である。この内容を考えてみればともに足跡延長となっているのである。甚だ興味あることで、いずれのモデルによるも、分子に足跡長をもってあげればよいことが解る。差はどこにあるかと言えば第一のモデルでは、 $2h > 2l$ であり、第3のモデルでは $2h > 2r$ という間隔のとり方の問題である。これは生息密度の計算に響いてくるのである。いずれが妥当かは、現地調査との突合わせて検討しなくてはならないが、前記脚注論文に依れば、半円弧モデルの方がより適切であると予想される。この場合、北海道地区であれば

$$2h > 2r = 2 \frac{2L}{\pi} \cong 1.5 \text{ km}$$

ということであろう。

2.7 足跡長が一定でない場合

これまで足跡の長さ ($2l$ あるいは $2L$) が一定として話を進めてきた。ここではこれが確率変数として変動するものとしてみよう。モデルとしてはどれも同じであるが第1の直線モデルとして $2l$ を用いてみよう。

N 個体存在するとし、これが基線 OO' と交わる交点数をあらわす確率変数を夫々 X_1, X_2, \dots, X_N とする (夫々の足跡長を $2l_1, \dots, 2l_N$ とし、すべてある同一分布に従う確率変数とする)。 X の実現値を x_1, \dots, x_N (0 または 1) とすれば N の推定は

$$\hat{N} = \frac{\pi h}{2} \left(\frac{x_1}{l_1} + \dots + \frac{x_N}{l_N} \right)$$

となるべきものである。しかし l_1, \dots, l_N は不明なので平均 l で代用し

$$\hat{N} = \frac{\pi h}{2l} \sum_{i=1}^N x_i = \frac{\pi h}{2l} n$$

がつかわれるのである。

正しい推定の形でかけば (l_1, \dots, l_N は常数)

$$\tilde{N} = \frac{\pi h}{2} \left(\frac{X_1}{l_1} + \dots + \frac{X_N}{l_N} \right) \text{ であり,}$$

$$E(\tilde{N}) = N$$

が成立している。

実際はこの形は知るべくもないわけである。そこで l_i の代用として平均 l が用いられることになる。つまり

$$\hat{N} = \frac{\pi h}{2} \left(\frac{X_1}{l} + \dots + \frac{X_N}{l} \right)$$

である。

$$\begin{aligned} E(\hat{N}) &= \frac{\pi h}{2} \left(\frac{1}{l} \cdot \frac{2l_1}{\pi h} + \dots + \frac{1}{l} \cdot \frac{2l_N}{\pi h} \right) \\ &= \frac{1}{l} (l_1 + \dots + l_N) = \frac{Nl}{l} = N \end{aligned}$$

で偏りのない推定となっている。

正しい推定 \tilde{N} と \hat{N} との差の平均二乗誤差 S^2 を計算すると

$$S^2 = E(\hat{N} - \tilde{N})^2 = E \left\{ \frac{\pi h}{2} \sum_i \left(\frac{1}{l} - \frac{1}{l_i} \right) X_i \right\}^2$$

X_i は互に独立とすれば

$$\begin{aligned} &= \frac{\pi h}{2} \cdot \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{l} - \frac{1}{l_i} \right)^2 \cdot l_i - \sum_{i=1}^N \left(\frac{l-l_i}{l} \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{l-l_i}{l} \right)^2 \cdot \left\{ \frac{1}{P_i} - 1 \right\} \end{aligned}$$

前述の様に $P_i \cong 0.4$, データによれば $\left(\frac{l-l_i}{l} \right)^2 \leq \left(\frac{1}{2} \right)^2$ 程度であるから

$$S^2 \leq \frac{1}{4} \cdot 1.5 \sum_i 1 \cong \frac{N}{2.6}$$

と見積られる。

$$0 < S \leq \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{2.6}}$$

相対的にみると

$$S/N \cong \frac{1}{\sqrt{2.6}} \frac{1}{\sqrt{N}} \cong \frac{0.6}{\sqrt{N}}$$

N が大のとき (一般に測定地域が大きいとき満足されよう) そう大きいものではない。大局的推定では問題にするほどの量ではない。

2.8 ま と め

ここで述べたビュッフォンの考えにもとづく推定は、大局的な見積りをするときの方法であることが了解せられよう。

一つにモデルが極めて粗いものであり、現実をそのまま表現しているものではない。大ざっぱに網をかぶせて情報をとり出そうとするものであるからである。これを精密化することはあまり意味がない。何となれば、野兎の足跡パターンは個体により、地形により異なるので単純な数式化は不可能なものである。数式化、あるいは確率モデル化できたとしても単一なものではな

く、多くの複雑な型となってくるであろう。このモデルを用いたときどれだけ「意味のある精度の向上」が得られるかは今後検討すべき問題であるが、面倒な割には有効な適用が難しいのではないかと思う。

広大な地域の生息数のオーダーを知るのに有効な方法で対地高度の誤差にも影響されることはない（交点数のみの観測なので）のが有利なところである。対地高度 100 m であれば、野兎以外の足跡（たとえばキツネ、シカ、テン等。リス、イタチについては疑問が残る）も判別可能であろう。

また、この方法は、動物にテリトリーがあるか、ないかには依存しない。つまりあってもなくても同様の推定が可能である。ランダムな方向に飛行平行直線群を定めること、ランダムにとられた位置から飛行平行直線を始めることを行えばよい。前述の様な確率フィールドはこれによって一般に*現実の意味で実現し得ると考えられるからである。

なお、足跡総延長測定省力化（人力による標本地点での測定の簡易化）に用いるときは、対地高度の選定、直下（水平姿勢により行う）写真の撮影は重要な問題となる。

参 考 文 献

- [1] David, H.A. (1970) *Order Statistics*, John Wiley.
- [2] 林 知己夫, 他 (1972) 動く調査対象集団に対する標本調査—VII —— 一羽の野兎の行動距離の調査について, 統計数理研究所彙報第 20 巻第 2 号, 45-60.
- [3] Hayashi, C. (1977) A statistical method for estimating population size of hare, *JIBP Synthesis*, **17**, 121-138.
- [4] Hayashi, C. (1978) A new statistical approach to estimating the size of an animal population: The case of a hare population, *Math. Scientist*, **3**, 117-130.
- [5] Kendall, M.G. and Moran, P.A.P. (1963) *Geometrical Probability*, Charles Griffin.
- [6] von Mises, R. (1939) *Probability, Statistics and Truth*, William Hodge.
- [7] Otis, D.L., Burnham, K.P., White, G.C. and Anderson, D.R. (1978) Statistical inference from capture data on closed animal populations, *Wildlife Monographs*, No. 62.
- [8] 斎藤昌宏, 他 (1976) 野兎の周回傾向について, 野兎研究会会報, 第 4 号, 33-36.
- [9] 斎藤昌宏, 他 (1978) 環境とノウサギの行動-3 しきり法による生息数推定——, 日本林学会誌, 第 60 巻第 10 号, 390-391.
- [10] 末綱恕一 (1941) 確率論, 岩波書店.
- [11] 豊島重造, 他 (1978) 環境とノウサギの行動-4 方法論の検討——, 日本林学会誌, 第 60 巻第 10 号, 391.

* 特殊の地形の場合, 特殊な環境条件の場合を除くの意味.