確率法則を満さない集合の
ハウスドルフ次元

統計数理研究所　長　坂　建　二

(1977年4月　受付)

On Hausdorff Dimension of Sets Missing Statistical Laws

Kenji Nagasaka
(The Institute of Statistical Mathematics)

We calculate from Beyer's theorem the Hausdorff dimension of some sets missing statistical laws.

For the law of large numbers, let us denote simply normal numbers to base r, normal numbers and absolutely normal numbers by $S(r)$, $B(r)$ and $B=\bigcap_{r=2}^{\infty} B(r)$, respectively. It will be shown that each of the sets $S(r)-B(r)$, $B(r)-B$ and $B(r)-B(s)$ for $\log r/\log s$ not being rational, has Hausdorff dimension 1.

For the law of iterated logarithms, $\bar{L}(\alpha)$ and $L(\alpha)$ are for any positive α, of Hausdorff dimension 1, where $\bar{L}(\alpha)$, and $L(\alpha)$ are defined as the magnitude of the sum of Rademacher functions;

$$\bar{L}(\alpha) = \{x\ ;\ \limsup |s_n(x)|/\sqrt{2n\log\log n} \geq \alpha\},$$
$$L(\alpha) = \{x\ ;\ \limsup |s_n(x)|/\sqrt{2n\log\log n} = \alpha\}.$$

Finally the relation between two theorems on calculation techniques of Hausdorff dimension is dicussed.

0.　序

E. Borel [3] によって導入された，単純正規数，正規数及び完全正規数の概念は，数列のランダムネスの一つの表現であり，区間 $[0, 1)$ 内のこれらの数の集合はいずれもルベーグ測度1を取り，極めて自然な概念である．簡単に定義を復習すると，r を2以上の自然数とし，断わらない限り止めておくものとする．

考える空間は右半開単位区間 $[0, 1)=I_0$ とし，その元 $x\in I_0$ が $(0, 1)$ のように r 進展開されているものとする．

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon_i(x)/r^i \tag{0.1}$$

ここで $\varepsilon_i(x)$ は $\{0, 1, 2, \cdots, r-1\}=R$ の一つを値とする x の r 進展開の第 i 番目の展開項である．二つの表示が可能な有理数に対しては，常に後に0が無限に続く表示のみを考えることにすると，$x\in I_0$ に対しその r 進展開 (0.1)，つまり $\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x), \cdots$, の数列が1:1に対応する．ここで $\Delta_k=(i_1, i_2, \cdots, i_k)\in R^k$ が，$\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x), \cdots, \varepsilon_n(x), \cdots$ の数列の中に何回現われるかを数え上る関数 $N_n(x\,;\,\Delta_k)$ を

$$N_n(x\,;\,\Delta_k)=\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ \varepsilon_i(x)=i_1,\ \varepsilon_{i+1}(x)=i_2,\ \cdots,\ \varepsilon_{i+k-1}(x)=i_k}} 1 \tag{0.2}$$

と定義する．特に $k=1$ の場合には，$\Delta_1=j\in R$ に対して

$$N_n(x\,;\,j)=\sum_{\substack{1\le i\le n\\ \varepsilon_i(x)=j}}1 \tag{0.3}$$

になる．すると

定義 $x\in I_0$ が r 進単純正規数であるとは，任意の $\varDelta_1=j\in R$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N_n(x\,;\,j)}{n}=\frac{1}{r} \tag{0.4}$$

が成立することである．r 進単純正規数全体の集合を $S(r)$ と書くことにする．

定義 $x\in I_0$ が r 進正規数であるとは，任意の自然数 k と，任意の $\varDelta_k\in R^k$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N_n(x\,;\,\varDelta_k)}{n}=\frac{1}{r^k} \tag{0.5}$$

が成立することである．この r 進正規数全体の集合を $B(r)$ と書く．

$S(r)$ や $B(r)$ がルベーグ測度1であることとは，大数の強法則や，ずらし変換 $\varepsilon_i(\cdot)\mapsto\varepsilon_{i+1}(\cdot)$ のエルゴード性から簡単に導びくことができる．又全ての r 進法に関して正規数であるような完全正規数全体の集合 $B=\bigcap_{r=2}^{\infty}B(r)$ も勿論ルベーグ測度1である．第一章ではこの三種類の集合 $S(r)$，$B(r)$，B の差集合のハウスドルフ次元を Beyer [1] の定理から決定する．同じ定理から第二章では，重複対数の法則を満さない集合のハウスドルフ次元を計算する．第三章ではハウスドルフ次元の計算法の関連について議論する．

1. 非正規集合のハウスドルフ次元

正規数でない数の集合を非正規集合（Non-Normal Sets）と呼び，ルベーグ測度零になるので，その大きさをハウスドルフ次元で測ることになる．

まず集合 $M(\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_{r-1})$ を次のように定義する．ここで各 i に対して $\nu_i\ge 0$ であり，その和は $\sum_{i=0}^{r-1}\nu_i=1$ を満すものとする．集合 $M(\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_{r-1})$ は

$$M(\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_{r-1})=\left\{x\in I_0\,;\,\lim_{n\to\infty}\frac{N_n(x\,;\,j)}{n}=\nu_j,\ j=0,\ 1,\ \cdots,\ r-1\right\} \tag{1.1}$$

により定義され，特に $M(1/r,\ \cdots,\ 1/r)=S(r)$ である．

Eggleston [4] によると，

$$\dim M(\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_{r-1})=-\frac{1}{\log r}\sum_{i=0}^{r-1}\nu_i\log\nu_i \tag{1.2}$$

で，dim はハウスドルフ次元を表わす．これから $S(r)$ のハウスドルフ次元は1であることがわかる．この結果 (1.2) は P. Billingsley [2] のより一般的な定理からも導びかれ，Billingsley の定理の応用は長坂 [5] に示されている．

ここでは，W. A. Beyer [1] の定理から，長坂 [5] の結果の一部の別証明を定理1及び定理2に与え，定理3では新しい結果を導びく．

Beyer の定理はまず変換 T_k を次のように定義する．

定義 T_k は I_0 から $\overbrace{I_0\times\cdots\times I_0}^{k\text{ 回}}$ への写像で，$x\in I_0$ の T_k による像 $T_kx=(x_1,x_2,\cdots,x_k)$ は

$$\varepsilon_{(i-1)k+j}(x)=\varepsilon_i(x_j) \tag{1.3}$$

によって定義される．つまり x_j の r 進展開項は，x の r 進展開項の初項 j，公差 k の等差数列になっている．すると任意の部分集合 $M \subset I_0$ に対して

定理 (Beyer)

$$\dim T_k M = k \dim M \tag{1.4}$$

但し

$$T_k M = \{(x_1, x_2, \cdots, x_k) \in \underbrace{I_0 \times \cdots \times I_0}_{k\text{回}}\,;\ \exists\, x \in M,\ T_k x = (x_1, x_2, \cdots, x_k)\}$$

である．

次の定理1は Eggleston や Billingsley によりよく知られているが，ここでは Beyer の定理とハウスドルフ次元の基本的な性質のみにより証明する．

定理 1. r 進単純正規数でない集合のハウスドルフ次元は1である．

証明 $y_1=0$, つまり全ての i について $\varepsilon_i(y_1)=0$, とする．そして

$$E_k = \underbrace{S(r) \times \cdots \times S}_{k-1\text{回}}(r) \times \{y_1\} \tag{1.5}$$

とおくと，(1.4) の Beyer の定理から

$$\dim T_k^{-1}\ E_k = (k-1)/k \tag{1.6}$$

であり，

$$T_k^{-1} E_k \subset M\left(\frac{k-1+r}{kr},\ \frac{k-1}{kr},\ \cdots,\ \frac{k-1}{kr}\right) \tag{1.7}$$

である．一方 r 進単純正規数でない集合は，$I_0 - S(r)$ で，任意の k に対して (1.7) より

$$I_0 - S(r) \supset T_k^{-1} E_k$$

を満すから

$$I_0 - S(r) \supset \bigcup_{k=2}^{\infty} T_k^{-1} E_k \tag{1.8}$$

が成立する．ここでハウスドルフ次元の単調性 (1.9) と

$$M \subset M' \text{ ならば } \dim M \leq \dim M' \tag{1.9}$$

$$\dim \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n = \sup_n \dim M_n \tag{1.10}$$

から

$$\dim(I_0 - S(r)) \geq \dim \bigcup_{k=2}^{\infty} T_k^{-1} E_k = \sup_k \dim T_k^{-1} E_k = \sup_k (k-1)/k = 1. \tag{1.11}$$

<証明終>

次に r 進単純正規であって，r 進正規でない集合が，矢張りハウスドルフ次元1を持つことを示す．この結果は Billingsley [2] の定理の一つの応用例として，長坂 [5] に証明されているが，ここでは Beyer の定理に基づいた証明を与える．

定理 2. $\dim(S(r) - B(r)) = 1.$ (1.12)

証明 y_2 を r 進単純正規であって，r^2 進単純正規ではない数とする．例えば $r=2$ とすると，$y_2=1/3$ とすればよい．そして F_k を

$$F_k = T_{k-1} B(r) \times \{y_2\} \tag{1.13}$$

と置くと，Beyer の定理により，$\dim T_k^{-1} F_k = (k-1)/k$ となり，

$$T_k^{-1} F_k \subset S(r) - S(r^2) \subset S(r) - B(r) \tag{1.14}$$

である．(1.14) は任意の $k \geq 2$ に対して成立するから，

$$S(r)-B(r)\supset\bigcup_{k=2}^{\infty}T_k^{-1}F_k \tag{1.15}$$

が成立し，(1.11) と同様の計算をして，定理2を得る．＜証明終＞

定理1からは，大数の法則を満さない数全体の集合は，ルベーグ測度こそ零になるが新たな尺度であるハウスドルフ次元によれば十分に沢山あることを意味している．

定理2の証明からは，短い連に対してはランダムであっても，長い連は期待される相対頻度 $1/r^p$ (p は連の長さ) で出現しないような列全体の集合は，ハウスドルフ次元1を持つことから十分に大きな集合であることがわかる．

次に完全正規数全体はルベーグ測度 1，従ってハウスドルフ次元1を持つが，定理1や定理2のように，完全正規数ではないが，ある r 進法については正規数となる集合は，ハウスドルフ次元1を持つことを示す．実は更に詳しく，

定理 3. r と s が二つの相異なる2以上の自然数とし，$\log r/\log s$ が有理数ではないとする．この時

$$\dim(B(r)-B(s))=1 \tag{1.16}$$

である．

証明 W.M. Schmidt [8] により，r と s が定理3の条件を満す時に，$B(r)-B(s)\neq\phi$ であることが示されているので，$y_3\in B(r)-B(s)$ を取ることができる．一方同じ論文 [8] で，$B(r)=B(s)$ である為の必要十分条件が，$\log r/\log s$ が有理数になることだと証明されているから，定理3の条件は落すことのできない本質的なものである．

ここで次の補題を証明する．

補題 $y\in B(r)$ が与えられたとする．すると殆んど全ての (ルベーグ測度の意味で) $x\in I_0$ に対して，2次元ベクトル (x, y) は r 進正規である．

補題の証明 (x, y) のそれぞれが r 進法で展開されているものとする．

$$\varDelta=\varDelta_{l,l}=\begin{pmatrix} i_{11} & i_{12}\\ i_{21} & i_{22}\\ \vdots & \vdots\\ i_{l1} & i_{l2}\end{pmatrix}\in R^l\times R^l$$

に対して，$\varDelta$ が (x, y) の展開項中に現われる頻度を数える関数 $N_n((x, y);\varDelta)$ を

$$N_n((x, y);\varDelta)=\sum_{\substack{1\le j\le n\\ \varepsilon_j(x)=i_{11}\quad \varepsilon_j(y)=i_{12}\\ \varepsilon_{j+1}(x)=i_{21}\quad \varepsilon_{j+1}(y)=i_{22}\\ \vdots\qquad\qquad \vdots\\ \varepsilon_{j+l-1}(x)=i_{l1}\quad \varepsilon_{j+l-1}(y)=i_{l2}}}1 \tag{1.17}$$

と定義する．補題を示すには，任意の自然数 l，任意の $\varDelta=\varDelta_{l,l}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N_n((x, y);\varDelta)}{n}=\frac{1}{r^{2l}} \tag{1.18}$$

が殆んど全ての $x\in I_0$ について成立することを言えばよい．

x に対して命題 $P(j;\varDelta)$ を

$$\varepsilon_j(x)=i_{11},\ \varepsilon_{j+1}(x)=i_{21},\ \cdots,\ \varepsilon_{j+l-1}(x)=i_{l1}$$

と定義し，同様に y に対しても命題 $Q(j;\varDelta)$ を定義する．ここで確率変数列 X_j を $P(j;\varDelta)$ の定義関数，つまりある x に対して $P(j;\varDelta)$ を満せば1，さもなければ零と定義する．次に与えられた $y\in B(r)$ に対して，$Q(j;\varDelta)$ が成立するような j 全体の集合を S と書くことに

する．すると，

$$N_n((x,\ y);\ \varDelta)=\sum_{\substack{j\in S\\1\leq j\leq n}}X_j(x) \tag{1.19}$$

であり，$N_n((\cdot,\ y);\ \varDelta)$ の平均を取ると

$$EN_n((\cdot,\ y);\ \varDelta)=\sum_{\substack{j\in S\\1\leq j\leq n}}EX_j=\frac{1}{r^l}\sum_{\substack{j\in S\\1\leq j\leq n}}1=\frac{1}{r^l}\left(\frac{n}{r^l}+o(1)\right)$$

である．よって十分大きな n に対して，

$$EN_n((\cdot,\ y);\ \varDelta)/n=\frac{1}{r^{2l}}\left(1+o(1/n)\right) \tag{1.20}$$

ここで n を無限大にすると，大数の強法則から，殆んど全ての x に対して (1.18) が成立し，補題の証明を終る．　　　　＜補題の証明終＞

この補題が，$x\in I_0$ を $x=(x_1,\ \cdots,\ x_k)\in I_0{}^k$ に置き換えても成立することは殆んど明らかであろう．よって，与えられた $y_3\in B(r)-B(s)$ に対して，$(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{k-1},\ y_3)$ が k 次元として r 進正規となるような $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{k-1})\in I_0{}^{k-1}$ の集合を P_{k-1} と書くと，ルベーグ測度いっぱいになる．次に集合 $G_k\subset I_0{}^k$ を

$$G_k=P_{k-1}\cap[T_{k-1}(B(r)\cap B(s))]\times\{y_3\} \tag{1.21}$$

と定義すると，今の補題（の拡張したもの）と Beyer の定理により，

$$\dim T_k{}^{-1}G_k=(k-1)/k \tag{1.22}$$

であり，

$$T_k{}^{-1}G_k\subset B(r) \tag{1.23}$$

でもある．

ところが，y_3 の取り方により，更に

$$T_k{}^{-1}G_k\subset B(r)-B(s) \tag{1.24}$$

が成立する．つまり $y_3\in B(r)-B(s)$ だから，ある p_0 が存在して，y_3 は s^{p_0} 進単純正規数ではない．ここで $x=(x',\ y_3)\in T_k{}^{-1}G_k$ が s^{p_0} 進展開されているものとすると，少くとも一つの $j_0\in\{0,\ 1,\ \cdots,\ s^{p_0}-1\}$ に対して，

$$N_m(y_3;\ j_0)/m\not\to 1/s^{p_0}\ (m\to\infty) \tag{1.25}$$

であり，一方 $x'\in T_{k-1}B(r)\cap B(s)$ だから

$$\sum_{i=1}^{k-1}N_m(x_j;\ j_0)/m\to(k-1)/s^{p_0}\ (m\to\infty) \tag{1.26}$$

である．但し $x'=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{k-1})$ とした．

結局

$$N_n(x;\ j_0)/n\not\to 1/s^{p_0}\ (n\to\infty) \tag{1.27}$$

となり，これは (1.24) を意味する．

(1.24) は任意の k に対し成立するから，

$$B(r)-B(s)\supset\bigcup_{k=2}^{\infty}T_k{}^{-1}G_k \tag{1.28}$$

となり，前定理と同様の計算をして，定理 3 を得る．　　　　＜証明終＞

定理 3 は，$B(r)-B(s)\neq\phi$ の W. M. Schmidt の結果をはるかに強めたものとなっている．

2. 重複対数の法則を満さない集合のハウスドルフ次元

前節では，大数の法則を満さない集合のハウスドルフ次元について述べた．この節では今一

つの重要な確率法則である重複対数の法則に注目し，それを満さない集合のハウスドルフ次元を計算する．以降 $r=2$ の場合のみを考え，Rademacher 関数 $r_i(\cdot)$ を

$$r_i(x) = 1 - 2\varepsilon_i(x) \tag{2.1}$$

と定義する．この関数の統計的な振舞いを，

$$s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} r_i(x) \tag{2.2}$$

の変動によって見ることにする．重複対数の法則の一つの表現としては，“ルベーグ測度の意味で殆んど全ての $x \in I_0$ に対し，

$$\limsup_n \frac{|s_n(x)|}{\sqrt{2n\log\log n}} = 1 \tag{2.3}$$

が成立する”がある．そこで任意の正数 α に対し，次の集合

$$\bar{L}(\alpha) = \left\{x;\ \limsup_n \frac{|s_n(x)|}{\sqrt{2n\log\log n}} \geq \alpha\right\} \tag{2.4}$$

を考えると，$0<\alpha\leq 1$ に対して $\mu_0 \bar{L}(\alpha)=1$ が成立し，(μ_0 はルベーグ測度) 従って $\dim \bar{L}(\alpha)=1$ である．我々は更に次の定理を示す．

定理 4. 任意の正数 α に対して

$$\dim \bar{L}(\alpha) = 1$$

が成立する．

証明 前節の (1.6) と (1.7) で我々は

$$T_k^{-1} E_k \subset M\left(\frac{k-1+2}{2k},\ \frac{k-1}{2k}\right) = M\left(\frac{k+1}{2k},\ \frac{k-1}{2k}\right) \tag{1.7}$$

$$\dim T_k^{-1} E_k = (k-1)/k \tag{1.6}$$

を証明した．但し

$$E_k = \underbrace{S(2) \times \cdots \times S(2)}_{k-1\text{ 回}} \times \{0\}$$

であった．

ここで任意の k に対して

$$M\left(\frac{k+1}{2k},\ \frac{k-1}{2k}\right) \subset \bar{L}(\infty) \subset \bar{L}(\alpha) \tag{2.5}$$

が成立する．というのは $x \in M\left(\frac{k+1}{2k},\ \frac{k-1}{2k}\right)$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_n(x)}{n} > 0$$

であるから

$$\limsup_n \frac{s_n(x)}{\sqrt{2n\log\log n}} = \infty$$

が成立する．これは (2.5) を意味し，k は任意に取れるから

$$\bigcup_{k=2}^{\infty} T_k^{-1} E_k \subset \bigcup_{k=2}^{\infty} M\left(\frac{k+1}{2k},\ \frac{k-1}{2k}\right) \subset \bar{L}(\alpha) \tag{2.6}$$

が成立する．ここで (1.6) とハウスドルフ次元の基本的な性質から定理 4 を得る．

<証明終>

次に任意の正数 α に対して，集合 $L(\alpha)$ を

$$L(\alpha)=\left\{x\in I_0;\ \limsup_n \frac{|s_n(x)|}{\sqrt{2n\log\log n}}=\alpha\right\} \tag{2.7}$$

と定義すると，$L(\alpha)\subset\bar{L}(\alpha)$ であり，一般には $\dim L(\alpha)\leq\dim\bar{L}(\alpha)=1$ であるが，実は逆の不等号も成立することも示せる．つまり定理4よりも更に強い結果である定理5を以下に示す．

定理 5. 任意の正数 α に対して

$$\dim L(\alpha)=1$$

である．

証明 $L'(1)=\left\{x\in I_0;\ \limsup_n \frac{s_n(x)}{\sqrt{2n\log\log n}}=1\right\}$ とおくと矢張り $\mu_0 L'(1)=1$ である．ここで任意の与えられた $\alpha>0$ に対して，α 及び k に依存する $y_5=y_5(k,\alpha)\in I_0$ が存在して，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_n(y_5)}{\sqrt{2n\log\log n}}=\sqrt{k}\,\alpha-\sqrt{k-1} \tag{2.8}$$

を満たす．このような y_5 の存在は，塩川，内山 [9] を参照せられたい．

ここで H_k として

$$H_k=T_{k-1}L'(1)\times\{y_5\}$$

と置くと，Beyer の定理により，$\dim T_k^{-1}H_k=(k-1)/k$ である．一方

$$T_k^{-1}H_k\subset L(\alpha) \tag{2.9}$$

が成立する．

実際に，$n=mk+p$, $0\leq p\leq k-1$ と書くと，$x\in T_k^{-1}H_k$ に対して

$$s_n(x)=s_{mk}(x)+\sum_{mk+1}^{mk+p}r_i(x)=\sum_{i=1}^{k-1}s_m(x_i)+s_m(y_5)+O(1) \tag{2.10}$$

である．ここで $T_k x=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{k-1},\ y_5)$ である．

一方

$$\begin{aligned}\sqrt{2n\log\log n}&=\sqrt{2(mk+p)\log\log(mk+p)}\\&=\sqrt{k}\sqrt{2m\log\log m}\,(1+O(1/m))\end{aligned} \tag{2.11}$$

である．ここで $T_{k-1}^{-1}(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{k-1})=x'\in L'(1)$ に注意して，(2.10)，(2.11) を用いると，$n\to\infty$ の時，つまり $m\to\infty$ の時に，$x\in T_k^{-1}H_k$ に対して

$$\begin{aligned}&s_n(x)/\sqrt{2n\log\log n}\\&=\left\{\sum_{i=1}^{k-1}s_m(x_i)+s_m(y_5)+O(1)\right\}\Big/\sqrt{k}\cdot\sqrt{2m\log\log m}\,(1+O(1/m))\\&=\frac{\sqrt{k-1}}{\sqrt{k}}s_{m(k-1)}(x')\Big/\sqrt{2m(k-1)\log\log m(k-1)}\,(1+O(1/m))\\&\quad+\frac{1}{\sqrt{k}}s_m(y_5)\Big/\sqrt{2m\log\log m}\,(1+O(1/m))+O(1/\sqrt{2m})\end{aligned} \tag{2.12}$$

が成立する．ここで (2.12) の $\limsup_n$ を取ると $\limsup_n(a_n+b_n)=\limsup_n a_n+\lim_{n\to\infty}b_n$ ($\lim_{n\to\infty}b_n$ が存在する時）に注意して，

$$\limsup_{n} s_n(x)/\sqrt{2n\log\log n}$$
$$=\frac{\sqrt{k-1}}{\sqrt{k}}\limsup_{m} s_{m(k-1)}(x')\Big/\sqrt{2m(k-1)\log\log m(k-1)}$$
$$+\frac{1}{\sqrt{k}}\lim_{m\to\infty} s_m(y_5)\Big/\sqrt{2m\log\log m}$$
$$=\frac{\sqrt{k-1}}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k}}\left\{\sqrt{k}\,a-\sqrt{k-1}\right\}=a \tag{2.13}$$

であるから，(2.9) は証明された．(2.9) は，y_5 を k に応じて取ることによって任意の $k\geq 2$ に対して成立するから

$$\bigcup_{k=2}^{\infty} T_k^{-1} H_k \subset L(a)$$

となり，前節の定理の証明と同様の計算により定理5を得る． ＜証明終＞

さて $\varphi(x)$ を，単調増加非負の関数で

$$\varphi(x)\uparrow\infty\ (x\to\infty),\ \varphi(x)/x\to 0\ (x\to\infty)$$

を満たすものと仮定する．そしてある正定数 C_0 に対して

$$\dim\left\{x\in I_0;\ \limsup_{n}\frac{|s_n(x)|}{\varphi(n)}=C_0\right\}=1 \tag{2.14}$$

が成立したと仮定しよう．すると定理5の証明から (2.14) の C_0 を任意の正数 C に変えた集合に対しても，

$$\dim\left\{x\in I_0;\ \limsup_{n}\frac{|s_n(x)|}{\varphi(n)}=C\right\}=1$$

を導びく事ができる．我々は定理4で重複対数の法則を満たさない集合はハウスドルフ次元1であることを証明したが，数列 $r_i(x)$ のランダムネスの立場から言えば，

$$\dim\left\{x\in I_0;\ \limsup_{n}\frac{|s_n(x)|}{\varphi(n)}=C\right\}<1$$

であるような関数 $\varphi(n)$ を見つけることが，残された問題であると言えよう．

3. ハウスドルフ次元の計算法

ハウスドルフ次元の計算法としては，r 進展開に関連した集合に対象を限ると，定義から直接求めるもの，確率測度を媒介にして求めるもの，P. Billingsley，それに変換 T_k に関するもの，W.A. Beyer，以上の三つが考えられる．ここでは後の二つの間の関係を見よう．(1.2) と (1.6)，(1.7) から P. Billingsley からの結果の方がより強いものが得られることがすぐわかるが，集合 E_k を巧く取れば $M(\nu_0, \nu_1, \cdots, \nu_{r-1})$ の ν_i が有理数の場合には，Beyer の方法で $\dim M(\nu_0, \nu_1, \cdots, \nu_{r-1})$ の下からの評価を導びくことができる．次にある数 $a\in I_0$ が与えられて，その展開項 $\varepsilon_i(a)$ が第 $(i-1)k+b$ 項に表われるような数全体の集合，つまり $M(1/k)=\{x\in I_0;\ \varepsilon_{(i-1)k+b}(x)=\varepsilon_i(a)\}$ のハウスドルフ次元は，Beyer によると直ちに $(k-1)/k$ であることがわかるが，Billingsley の定理からより一般的な結果が長坂 [5] に示されている．最後に定理の中で Beyer の定理から計算したハウスドルフ次元は，Billingsley の定理からも導びくことができることを注意しておく．まず μ, ν を I_0 上の点測度を持たない確率測度とし，x を含む長さ $(1/r)^n$ の簡集合を，$u_n(x)$ と書くことにする．すると Billingsley

の定理は以下となる．

定理　(Billingsley) 定数 $0 \leq \delta \leq \infty$ に対して，

$$M \subset \left\{x; \lim_{n\to\infty} \frac{\log \nu(u_n(x))}{\log \mu(u_n(x))} = \delta\right\}$$

ならば

$$\dim_\mu M = \delta \dim_\nu M$$

である．

まず μ としてルベーグ測度を取ると，$\dim_\mu M$ は普通の意味でのハウスドルフ次元である．第一，二節で定理の証明中ハウスドルフ次元を計算した集合は全て $A_k = A_{k-1} \times \{y_0\}$ の T_k による逆像であった．ここに A_{k-1} は $k-1$ 次元直積ルベーグ測度いっぱいとなる集合で，y_0 は一つの元であった．だから長さ $1/r^{nk}$ の筒集合に対し $1/r^{n(k-1)}$ を与えるような確率測度を ν とすると，$\nu(T_k^{-1} A_k) = 1$ となり，$\dim_\nu T_k^{-1} A_k = 1$ となる．一方，$x \in T_k^{-1} A_k$ に対して，

$$\frac{\log \nu(u_{nk}(x))}{\log \mu(u_{nk}(x))} = \frac{\log 1/r^{n(k-1)}}{\log 1/r^k} = (k-1)/k$$

となり，

$$\dim T_k^{-1} A_k = (k-1)/k$$

が出てくる．

参　考　文　献

[1] Beyer, W.A. (1962) Hausdorff dimension of level sets of some Rademacher series, *Pacific J. Math.* **12**, 35–46.

[2] Billingsley, P. (1965) *Ergodic theory and information*, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney.

[3] Borel, E. (1909) Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques, *Rend. Circ. Mat. Parlermo* **27**, 247–271.

[4] Eggleston, H.G. (1949) The fractional dimension of a set defined by decimal properties, *Quart. J. Math.*, Oxford Ser. **20**, 31–36.

[5] Nagasaka, K. (1971) On Hausdorff dimension of non-normal sets, *Ann. Inst. Statist. Math.* **23**, 515–521.

[6] Nagasaka K. (1977) ハウスドルフ次元論とその応用，京都大学 数理解析研究所 講究録 294 "整数論", 124-144.

[7] Nagasaka, K. (1977) L'estimation de dimension de Hausdorff de certains ensembles, Res. Memo. No. 103, Inst. Statist. Math.

[8] Schmidt, W.M. (1960) On normal numbers, *Pacific J. Math.* **10**, 661–672.

[9] Shiokawa, I. and Uchiyama, S. (1975) On some properties of the dyadic Champernowne numbers, *Acta Math. Acad. Sci. Hungraricae* **26**, 9–27.