

マイクロ波回線の熱雑音に関する統計的研究-I

統計数理研究所 樋口伊佐夫
日本電信電話公社 森田 和夫
電気通信研究所

(1969年6月 受付)

Statistical Study of the Thermal Noise in Microwave Relay Links-I

Isao Higuti

(The Institute of Statistical Mathematics)

Kazuo Morita

(The Electrical Communication Laboratory Nippon Telegraph and Telephone Public Corporation)

This is a report of a series of our studies on the statistical problems related to the microwave transmission: Estimation of the fluctuation of thermal noise in microwave relay links, estimation of the effect of the diversity of transmission routes, (countermeasure against the blocking of communication), etc. As is well known, the noise in the circuit in sub-milimeter wavelength range mostly comes from the attenuation due to rain. And we treat in this earliest part of our report a method of estimating the attenuation of electric wave caused by the rainfalls existing along the path of the transmission from meteorological data of the rate of precipitation of the rain at some fixed places near the path. Our present method resorts on the theoretical research on the attenuation by a raindrop due to Oguchi, and the fact that the distribution of the rate of precipitation of rain is well approximated by a Gamma distribution. The method uses also the assumption that the spacial correlation can be estimated by a simple transformation of auto-correlation data using the velocity of movement of rainfall pattern, which is observed by radar echoes. A certain number of experimental evidences have been made on the assumption and also on the validity of the full method.

まえがき

つい五六年前迄は、市外電話をかけるのに申し込んでから、一二時間待たされるのが常であった。今では街の赤電話からでもダイヤルでただちに全国の大方の地域に通話できる。これは市内の電話線と電話局の交換機の増設だけによって達成されたのではなく、大都市間を結ぶ超多重(1つの電波で480~1800通話を同時に伝送する)マイクロ波回線網の完成によるものである。このような情報伝送に関する技術の進歩はとどまるところを知らず、近い将来さらに飛躍的發展が期待されている。

ところで一般の科学技術がそうであるように、電波伝送の場合も、このような成果の前に多くの地道な研究が先行していなければならない。まず電波の伝わり方がわかっていなければ、回線の設計にも困るわけである。電波の理論というと、Maxwell, Herz, Lorentz 等の人達によって完成されているかに思えるが、実はこれらの基礎理論だけでは事足りない。これらの理論も示すごとく、電波というものは波長によって、伝わり方の特性が著しく異なるものである。そして伝送の多重化をすすめるためには、いきおい短い波長の波を用いようとすることになるので、それにともなって従来の方式では実用上重要ではなかったために、あまり知られていなかった現象が新しく問題となってくる。また地上伝ばんのとき、地形、気象等の条件が大きく効いてくることが多いので、わが国のような特殊な地域では、欧米の研究結果を転用するわけにはゆかないことが多い。そして実際には媒体の伝ばん特性の変動にともなって、受信電力が不規則に変動することが問題であり、統計的取扱いを余儀なくされる。かくて電波伝ばんに

関してだけでも、数理的物的研究から、実験物理的研究、気象学的研究、統計的研究、ORのケーススタディにいたる幅広い一連の関連研究の成果の堆積と、それに加うるに伝送機器の進歩がなくては、高水準の技術の実用化は望めない。

われわれが協力して行った研究は、このような広大な研究の網の中の一つの小さな結び目にすぎないが、これまでの結果は、現在の国民の情報生活にとってそれなりの寄与をしているものと自負している。ここに報告することは、しかし、既に実用化されたマイクロ波に関するものよりも、むしろ次の段階である、準ミリ波、ミリ波に関することが多い。すなわち、降雨による減衰が原因となって起る回線の熱雑音変動の推定、回線障害対策等に関する統計方法についての一連の研究である。

統計理論の観点からは、この研究は甚だ埒くさいものであり、知られた事の単なる適用と見える部分が多いであろう。これはわれわれが洗練を心がけたのではなく、また実際の多くの困難を切りぬけるために論理的整合を犠牲にしても有効な近似を志向せざるを得なかったことによる。余裕あれば形を整え、近似の評価も厳密に行うのが望ましいことは言う迄もない。

なお当論文はわれわれ自身の研究結果を報告することを目的としているが、われわれが利用した電波物理や気象学の結果に関連してわれわれの理解した範囲で少しばかり解説を加えておきたい。これはわれわれの仕事のはしばしの脈絡をつけるために必要なことと、他の分野で扱っている事象がわれわれの扱う現象の中にどのように、かつどの程度に効いてくるかを明確にするために必要だからである。

報告は都合により2,3回にわたる。今回は伝ばんや気象のデータの分析に関することを主とするので、最近方々で研究のすゝめられつゝあるグラフの理論の対象ともなり、また方法論的に問題の多いモデル解析を含む複雑な回線網の場合の取扱いなどは統報にまわすことになったことをお断りしておく。

1. 雨による電波の減衰の推定

1.1 問題設定

準ミリ波の電波が大気中を伝わる場合、フェージングのほかに、マイクロ波ではあまり考える必要のなかった雨、雪、ガス、霧などによる吸収、散乱のために起る減衰が無視できない。電波が減衰すると、中継点で受信波を増巾して出力を上げる。すなわち中継点においては、常に一定の出力となるように自動的に増巾されるのが普通である。その際に中継機の熱雑音が増動し、それがつぎつぎに伝送されるので、このような雑音の加わったものが多中継のときの通信の障害となる。問題は、新しく回線を設けようとするとき、この種の雑音がどの程度のもので、どのように変動するかを、前以て適確かつ容易に推定する方法を確立することである。

ところで、各中継点で発生する熱雑音電力は、そのデシベル値*が増幅分のデシベル値に比例する。すなわち減衰のデシベル値に比例する。従って雑音の統計的変動を知るには、中継の方式パラメタと、変動の原因である減衰の統計的ゆらぎを知ればよい、減衰のうち、霧やガスによるものはオーダーが小さく、また雪によるものも、特別の場合を除いては一般に雨に比べて小さいと推測される。そこで最も重要な雨について考えることにする。

電波の雨による減衰というのは、常識的に考えてもわかるように、電波の通路にあたる空間に存在する雨滴による散乱、吸収である。一つの雨滴による散乱(特にその波長依存)についての数理物理的な計算は古くから知られている。また雨滴が多数存在する場合も、二次散乱を考えなくてもよい程度であれば、雨滴の粒度分布が与えられると、一つの雨滴のときの結果を利用する計算法は自明である。よって雨滴の粒度分布がどのようなものであるかがまず問題である。雨のデータとして雨滴粒度分布の揺ぎなどというものは調べられていない。データが大量に揃っているのは、地上の降雨量であるが、これを空中に存在する雨滴の大きさの分布に

* X のデシベル値とは $10\log_{10}X$ のこと、このとき X を真値という。

換算できないであろうか。究極的には雨の種類と特性の相違にかかわらず、地上における降雨強度と減衰のデシベル値（減衰係数）の間に簡単な関係式が得られないであろうか。これが第一の問題である*。

つぎの問題は降雨の時間的および空間的変動に関する知識を得ることである。上述のごとく、減衰の変動を知るということは、本質的には瞬時的な雨の密度、および通路全体の同時密度を知ることである。ところが、降雨強度というのは、或る一地点におけるもので、しかも自記雨量計の記録から読みとれるものは、ある時間単位の雨量である。目的は、区間における総降雨量の時間変動を知ることであるが、このような不完全データをもとにするので、自己相関関数、空間相関関数の推定をあわせ行い、それを利用して推定を行うこととなる。これが第2の問題である。

第3には確率論的計算（変形）によって、上記の降雨量の変動を熱雑音の変動にかえ、その和を計算する方法である。同時分布の形を想定すれば、原理的には簡単であるが、実行上困難をとまなう。その問題はつぎの報告でくわしく取扱う。

1.2 雨量と減衰量

われわれは、雨による減衰を考えるが、その目的は、回線施設の特性としての減衰である。すなわち、或る場所に回線があったときに、”雨が原因である減衰によって通信が途絶する時間の割合はどのようになるか”，というような長い時間にわたっての変動を問題にする。ところが回線を新設しようという時点においては、各地の降雨強度の記録があるだけである、したがってまず降雨強度と減衰との関係を知る必要がある。

まずつぎのような理論的考察から出発しよう。大気中の半径 a の1つの雨滴による電波の減衰を考えよう。古典電磁気学の教えるところによると、入射電波の電場によって、水滴は分極し、双極子をつくる。この双極子能率は外部電場が一定の振動数（電波の周波数）で振動しているため共振し、まわりに電磁波を生ずる。その波はヘルツベクトルにより計算できる**。その散乱波のエネルギーの流れはポインティングベクトルの平均を球面全体にわたって積分すれば得られる。それを W' とし、入射波のポインティングベクトルの平均を w とする。 W' の w に対する比を $Q_0(a)$ とする。すなわち $w Q_0(a) = W'$ 。 $Q_0(a)$ は散乱断面積である。このような計算を行った結果はよく知られているように

$$Q_0(a) = \frac{128\pi^5 a^6}{3\lambda^4} \left| \frac{\kappa-1}{\kappa+2} \right|^2 \quad (1.1)$$

である¹⁾。ここで λ は入射電波の波長、 κ は雨水の誘電率である。この計算では雨滴の半径 a を計算の途中で無限小とみなして近似する局面もある。この点を Kerr はもっとくわしく計算しベッセル関数で展開した形で出している²⁾。

空气中単位体積あたり雨滴が N 個あるとする。雨滴の半径がすべて a であれば、電磁波は距離 x だけ進む間に、最初のエネルギー S_0 が減衰し

$$S = S_0 \exp \{ -Q_0(a) N x \} \quad (1.2)$$

となる、この $N Q_0(a)$ は減衰係数である。これを Z_0 とする。もし a が一定でなく密度 $\varphi(a)$ の分布をしているときは、 Z_0 は当然

$$Z_0 = N \int Q_0(a) \varphi(a) da \quad (1.3)$$

となる。さらに Z_0 が距離 x の関数の場合は、 AB 間の減衰は

* 降雨のはげしいとき減衰もはげしいという定性的な事実はあるのだし、各地の降雨量データがあるのだから、それを使って厳密にはわからなくても実際的に推定できないだろうかと考えることは当然である。

** 必ずしもヘルツベクトルを用いる必要はない。本質的にはマックスウエルの基礎方程式をみたし双極子の振動による条件をみたす特解をさがすだけである。

** 上の散乱電磁波の電場および磁場の強さを E , H とするとポインティングベクトルとは $E \times H$ (外積) のことである。

$$S = S_0 \exp \left\{ - \int_A^B Z_0 dx \right\} \quad (1.4)$$

となる。よって減衰量のデシベル値は

$$Z = 10 \log_{10} S_0 - 10 \log_{10} S = 10 \log_{10} e \int_{x(A)}^{x(B)} Z_0 dx = 4.343 \int_{x(A)}^{x(B)} Z_0 dx \quad (1.5)$$

となる。(1.4)の積分の限界は象徴的にかいたものである。以下しばしばこのようにかく。

つぎに雨滴の落下速度を v とすると、降雨強度 R は明らかに v と雨の容積との積に比例する。すなわち

$$R \propto N \int v a^3 \varphi(a) da. \quad (1.6)$$

雨滴の落下速度に Stokes の法則が適用されるとすると、終端速度時における力の平衡から

$$6\pi \eta a v = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho g$$

(ここで η は空気の粘性係数、 ρ_0 は雨水の密度)。よって、 $v \propto a^2$ であるべきであるが、気象学では $v \propto a^{0.5}$ としているようである、おそらく多くの経験にもとづくものであろう。

一方雨滴の粒度分布(成長の途中で考えると落下速度も厄介であるが)、は単なる指数型ではなく、ガンマ型または対数ガウス型にすると実際によくあうであろうと思われる。事実雷雨のときなどは雨粒の大きさはほぼ一定しているそうであるが、対数ガウス型とすれば、これなども、分散のきわめて小さい場合として、一般の場合の中に含まれる。しかし気象学では指数型として計算するのが伝統のようである。さて降雨強度と減衰を関係づける気象学的方法是、雨滴の径 a の分布および密度 N が降雨強度 R に依存するとし、 Z_0 と R との関係をみちびく。たとえば指数型のパラメータが $R^{-\alpha}$ に比例し、 N が R^δ に比例するとして

$$\left. \begin{aligned} \varphi(a) &= AR^{-\alpha} \exp(-AR^{-\alpha}a) \\ N &\propto R^\delta \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

これを(1.6)式に入れて

$$R \propto R^\delta / (A^{4.5} R^{-4.5\alpha}).$$

R のべき指数を比べると

$$4.5\alpha + \delta = 1. \quad (1.8)$$

一方(1.1)を(1.3)に入れると

$$Z_0 \propto R^\delta \int a^6 \varphi(a) da \propto R^\delta / (A^7 R^{-7\alpha})$$

を得るが

$$Z_0 = \gamma R^\xi \quad (1.9)$$

と仮定すると、やはり R のべき指数の比較から

$$7\alpha + \delta = \xi. \quad (1.10)$$

(1.8)、(1.10)の関係からは、もし α がきまると ξ 、 δ がきまる*。 α は粒度分布のパラメータであるから、入射電波の波長とは関係なく、したがって ξ は波長 λ とは関係ない筈であるが、実際には関係あるようである。すなわちいろいろの雨滴の分布に対し(1.3)による Z_0 の計算が気象研の小平氏等により行われている**³⁾。そしてその多くの計算値のプロットから(1.9)式の γ 、 ξ が回帰的に求められている。この場合も ξ は λ に存在する。これは、非常に小さい粒子は減衰に寄与しないが、どのあたりから寄与するようになるかが波長に依存するというようなことのためだと思われる。

われわれは電波研究所の小口氏の計算した Z_0 の値を採用する⁴⁾。彼は落下する雨滴が少し

* これは物理的次元解析の方法にならったものと思われる。まず物理的イメージがはっきりしない。気象学的にどういう意味があるかはわれわれのうかがい知る所ではない。

** その際 Q_0 としては(1.1)よりくわしいKerrの式を用いている。

水平に歪むことにかんがみ、これを少し離心している楕円体として近似し、入射波が水平に偏光した平面波、垂直に偏光した平面波の場合について Q_0 を計算した。その結果は、第一近似までをコンパクトに書いても、普通の式であらわすと、本紙を 10 頁位費してしまう。彼はその式に Laws and Parsons⁵⁾ による単位時間に単位面積内に落ちてくる雨滴についてしらべた雨滴分布の実測値と、Best⁶⁾ による雨滴の終端速度の実測値をあてはめて計算した。その結果を横軸に降雨強度をとり、縦軸に減衰率のデシベル値をとってグラフに書くと、減衰の降雨強度依存は非常に大きく、それに比べ絶大なる努力の結果である偏光の方向での差異は雨滴を球としても殆んどわからない*。小口氏の原論文では 1 時間降雨強度 R (mm/hr) に対し 1km 当りの減衰量 Z_0 (dB/km) の関係が示してあるが、これを 1 分間降雨強度 R (mm/min) 対 Z_0 (dB/km) に換算したのが図 1 である。図 1 の R 対 Z_0 の関係を $Z_0 = \gamma R^\xi$ で近似したときの各周波数における γ および ξ はつぎの通りである。

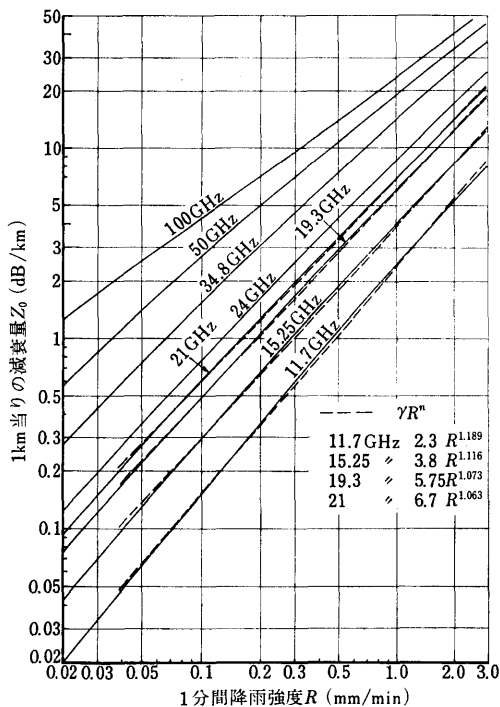


図 1 降雨強度対減衰量の関係

周波数 (ギガヘルツ)

| | | | | |
|----------|-------|-------|-------|-------|
| | 11.7 | 15.25 | 19.3 | 21.0 |
| γ | 2.3 | 3.8 | 5.75 | 7.6 |
| ξ | 1.189 | 1.116 | 1.073 | 1.063 |

これらの数は、あくまでいろいろの雨の平均的な傾向を示すものであって、個々の雨では相当にばらつくものである**。雨のタイプによる分類、地域的の分類が必要であるが、くわしい情報はわからない。またデータのあつめ方の統計的方針も知らされていないのでわからない、したがって以下のわれわれの解析の結果が、 ξ や γ にあまり鋭敏に影響されない方がよいのである。

一地点の降雨強度と、伝ぱん路にあたる大気中の雨滴の大きさの分布との関係は、地域的にも、雨の種類によって異なるであろうが、問題が長期間の平均的なものであることと、現段階で雨滴の粒度分布の類別が実際問題として困難なので、代表的な値をえらんで用いるということ満足するより仕方ない。

1.3 地点雨量の確率分布と自己相関関数

降雨量の変動を問題にするときは、測定時間単位はできるだけ短い方がよい。しかし実測の結果は、1 時間雨量から 1 分雨量の間では大体ガンマ分布で近似され、しかも何れが、よりガンマ分布に近いかははっきりしない。(これは相関あるガンマ変量の和がガンマ分布に近いことのあらわれであろう)。全国各地の气象台のうち 43 气象台のデータを集計し、分布をしらべた結果の例が図 2, 図 3 に示してある。

表 1 は、10 分雨量についての統計結果である。 ν, β はガンマ分布の密度を

$$f(R, \nu, \beta) = \beta^\nu R^{\nu-1} e^{-\beta R} / \Gamma(\nu) \quad 0 \leq R < \infty \quad (1.11)$$

としたときのパラメタであり、() 中の値は 1% 以下の累積分布をガンマ分布曲線と合わ

* 概していうと水平偏光の場合と球の場合とでは降雨強度の実際に起り得る範囲で安全といってよい位一致し垂直偏光の場合にしてもこれらと 0.1% 位しか異なる。

** Laws and Parsons の実測のわしい情報はわからないが小口氏が引用している図は全体としてきれいに ausgleichen されてしまっている。少くとも我が国ではこのようには単一にゆかないことは小平氏の研究によっても明かである

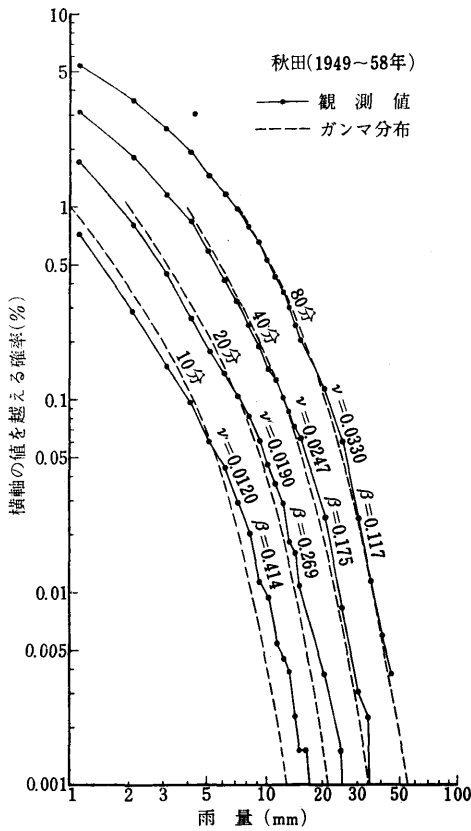


図2 10分~80分雨量の累積分布

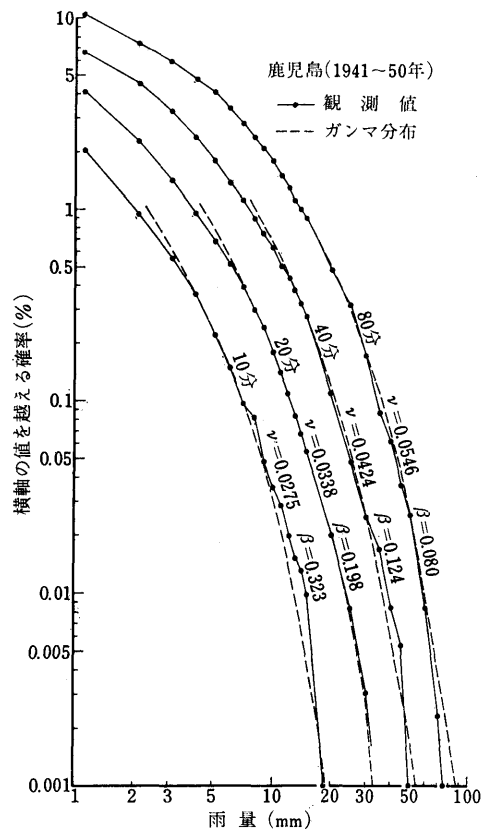


図3 10分~80分雨量の累積分布

せてみて決定した値である。

つぎに時間雨量の自己相関について述べよう。R をある時間単位の雨量として、その j 番目の値を R_j とする。これに対し n 倍の時間単位の雨量を R_T とし、その i 番目の値を $R_{T,i}$ とする。R の定常性を仮定すると、 R_T も定常になり $R_{T,i}$ と $R_{T,i+k}$ の相関係数 $\rho_{RT}(k)$ は

$$\rho_{RT}(k) = \frac{\sum_{j=1}^n \sum_{j'=1}^n C_R(kn+j-j')}{nC_R(0) + 2 \sum_{j=1}^{n-1} (n-j) C_R(j)} \quad (1.12)$$

となる。ここで $C_R(k)$ は R_i と R_{i+k} の間の共分散である。もしも R の自己相関

$$\rho_R(j) = C_R(j)/C_R(0) \quad (1.13)$$

が指数関数

$$\rho_R(j) = \exp\{-\lambda|j|\} \quad (1.14)$$

のとき (1.12) は

$$\rho_{RT}(k) = e^{-n\lambda k} \left(\frac{1 - \cosh n\lambda}{1 - \cosh \lambda} \right) \left\{ n \coth \frac{\lambda}{2} - \frac{e^{-n\lambda/2} \sinh(n\lambda/2)}{\sinh^2(\lambda/2)} \right\} \quad (1.15)$$

となる。R を 1 分雨量とし、 $\rho_R(t)$ を (1.14) として (1.15) を用い、 $n=10$ として 10 分雨量のデータにあうように推定したものが、表 1 の λ (1 乗) の値である。表 1 の (1/3 乗) の方の値は 0.1 分雨量の相関を $\exp(-\lambda|t|^{1/3})$ と仮定して (1.12) 式により 10 分雨量を計算したとき 10 分雨量のデータに近くなるようにして推定した λ の値である。時間的自己相関は各地とも t の 1 乗ではよくあわない。ずっとすそをひくので、 $|t|$ の 1/3 乗型の方がよくあう。これは降雨現象は全時間を通じて見るとき定常でなく、一たん降り出すとかなり長時間降りつ

表 1

| 観測地点 | 統計期間 | 平均値 (mm/10) | 分 全 (mm/10) | 分布のパラメタ | | 自己相関のパラメタ | |
|------|--------------------|----------------|----------------|--------------------|-----------------|----------------|------------------|
| | | | | ν | β | λ (1乗) | λ (1/3乗) |
| 鹿児島 | 1941~50年 | 0.0850 | 0.262 | (0.10) 0.0275 | (0.25) 0.323 | 0.05 | 0.56 |
| 熊本 | " | 0.0641 | 0.271 | (0.01) 0.0152 | (0.19) 0.237 | 0.06 | 0.65 |
| 大分 | 1946~55年 | 0.0462 | 0.124 | (0.01) 0.0171 | (0.28) 0.370 | 0.05 | 0.55 |
| 広島 | 1941~50年 | 0.0426 | 0.101 | (0.015) 0.0180 | (0.33) 0.422 | 0.35 | 0.43 |
| 大阪 | " | 0.0277 | 0.068 | (0.005) 0.0133 | (0.22) 0.408 | 0.055 | 0.68 |
| 潮岬 | 1941~50年 (除44年) | 0.0716 | 0.220 | (0.01) 0.0233 | (0.21) 0.325 | 0.05 | 0.52 |
| 福井 | 1947~50年 | 0.0350 | 0.098 | (0.01) 0.0125 | (0.31) 0.357 | 0.055 | 0.63 |
| 静岡 | 1941~50年 | 0.0537 | 0.164 | (0.015) 0.0176 | (0.30) 0.328 | 0.045 | 0.50 |
| 東京 | 1940~50年 (除41年) | 0.0310 | 0.114 | (0.005) 0.0084 | (0.21) 0.271 | " | 0.52 |
| 高田 | 1941~50年 | 0.0351 | 0.072 | (0.01) 0.0172 | (0.37) 0.490 | " | 0.50 |
| 松本 | 1941~47年 | 0.0246 | 0.061 | (0.002) 0.0100 | (0.18) 0.406 | 0.055 | 0.65 |
| 新潟 | 1945~54年 | 0.0301 | 0.059 | (0.0075) 0.0154 | (0.36) 0.511 | " | 0.62 |
| 仙台 | 1949~58年 | 0.0316 | 0.048 | (0.005) 0.0209 | (0.40) 0.662 | 0.065 | 0.70 |
| 秋田 | 1949~56年 | 0.0290 | 0.070 | (0.0075) 0.0120 | (0.31) 0.414 | 0.06 | 0.67 |
| 函館 | 1948~57年 (除50年) | 0.0235 | 0.057 | (0.004) 0.0097 | (0.29) 0.412 | " | 0.57 |
| 札幌 | 1941~50年 | 0.0199 | 0.036 | (0.005) 0.0109 | (0.37) 0.548 | 0.04 | 0.47 |

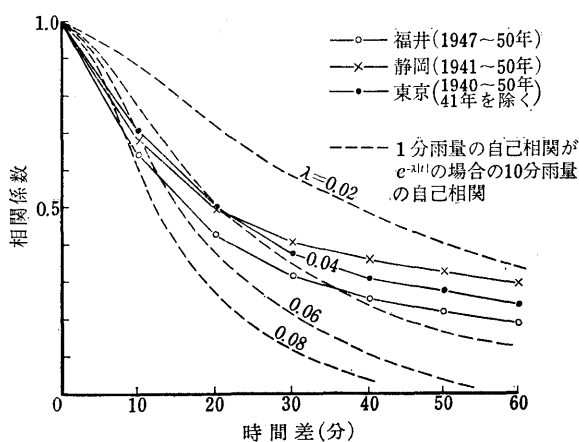


図4 各地における7月~9月の10分雨量の自己相関

これは λ には差程地域差がないということをも意味している。そこで指数関数を相関関数として仮定するときには、パラメタ λ (時間は分単位)を0.05ときめることが目的にかなうであろう。

つぎに進む前に、瞬間雨量の自己相関との関係について注意しておこう。瞬間雨量は、雨量の時間単位を0に近づけたときの極限で、これを $R_0(t)$ とし、 T を時間単位とする雨量を $R_T(t)$ とすると

づつが、その間に強弱の変動がこまかくくりかえされるという事情によると考えられる(図4)。

各地のデータを年度ごとにわけて観察すると年度の間での変動は大きく、10年間間で最多雨の年は最小雨の年に比し、平均が5倍位、分数が10倍位に達するのが普通である。自己相関関数のパラメタ λ もやはり年ごとに変動するが、 λ と平均、 λ と分散の間には相関はみとめられない、このことは16点を総合してみると、ますます明確になる。(図5, 図6)。

$$R_T(t) = \int_{t-T/2}^{t+T/2} R_0(t') dt' \tag{1.16}$$

なる関係にある。したがって、適当な数学的仮定のもとで $R_T(t_1)$ と $R_T(t_2)$ との相関係数は

$$\rho_{RT}(t_1, t_2) = \frac{\int_{c_1} \int_{c_2} r_0(t'_1, t'_2) dt'_1 dt'_2}{\sqrt{\int_{c_1} \int_{c_1} r_0(t'_1, t'_2) dt'_1 dt'_2 \int_{c_2} \int_{c_2} r_0(t'_1, t'_2) dt'_1 dt'_2}} \tag{1.17}$$

となる。ここで $r_0(t_1, t_2)$ は $R_0(t_1)$ と $R_0(t_2)$ との共分散すなわち

$$r_0(t_1, t_2) = E[(R_0(t_1) - ER_0(t_1))(R_0(t_2) - ER_0(t_2))]$$

である。また c_1, c_2 はそれぞれ t_1, t_2 を中心とする長さ T の時間巾である。いま R_0 は弱定常とすると $r_0(t_1, t_2) = r_0(|t_1 - t_2|)$ で、さらに時刻により R_0 の分散は異らないから、(1.17) における r_0 を相関係数 ρ_0 におきかえてよい。よってこの場合は

$$\rho_{RT}(t_1, t_2) = \frac{\int_0^T dt'_2 \int_0^T \rho_0(|t'_1 - t'_2 + t_1 - t_2|) dt'_1}{\int_0^T dt'_2 \int_0^T \rho_0(|t'_2 - t'_1|) dt'_1} \tag{1.18}$$

となる。これは (1.12) に対応する。自己相関 ρ_0 が指数関数

$$\rho_0(t) = \exp\{-\lambda|t|\} \tag{1.19}$$

のとき ((1.14) に対応), (1.18) は,

$$\rho_{RT}(\tau) = e^{-\lambda|\tau|} \frac{2 \cdot \sinh^2(\lambda T/2)}{\lambda T + e^{-\lambda T} - 1} \quad (\text{ただし } |\tau| > T) \tag{1.20}$$

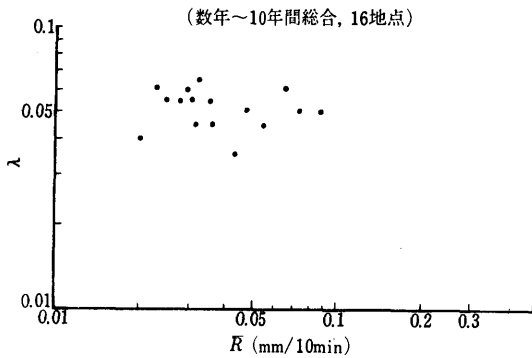


図5 平均値 \bar{R}_T 対自己相関関数のパラメータ λ の関係 (1分雨量の自己相関 $e^{-\lambda|t|}$ の λ の推定値)

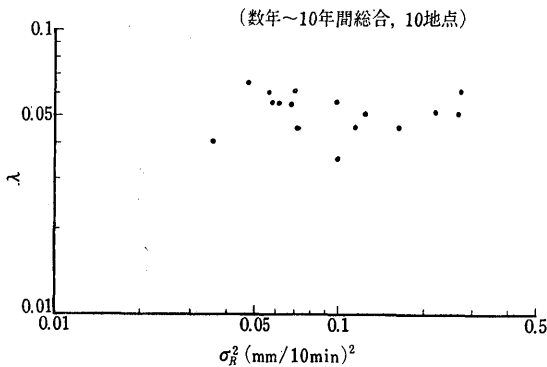


図6 分散 σ_R^2 対自己相関関係のパラメータ λ の関係 (1分雨量の自己相関 $e^{-\lambda|t|}$ の λ の推定値)

となる。ここで τ は時間差 $t_2 - t_1$ をあらわす。これは (1.15) に対応する。

瞬間雨量の自己相関と、ある時間単位の雨量のそれとの関係は、地点雨量の自己相関と区間雨量のそれとの関係の特別の場合に相当する。すなわち区間巾が等しく (ともに T)、一直線上にある (飛越し幅 $\tau - T$) 飛越し区間の場合に相当する。一般の位置にある区間雨量の相関については続編で述べる。

つぎに自己相関関数を利用して、雨量分布の測定時間単位の変換を考えよう。10分雨量については各地のデータがあるが、もっと短い時間単位の減衰も実際には問題になる。

10分雨量を降雨強度 (mm/min) に換算したものを R 、 η 分雨量を同じく毎分あたりの降雨強度に換えたものを R' とする。 R, R' の分布密度をガンマ型 (1.11) とし、そのパラメタをそれぞれ $(\nu, \beta), (\nu', \beta')$ とする。そのとき

$$\text{var } R' = h \text{ var } R \quad (1.21)$$

であれば

$$v' = v/h, \quad \beta' = \beta/h \quad (1.22)$$

なる関係が成立つから、(1.16)の分散比 h がわかれば R' の分布を推定することができる。ところが、 $10/\eta$ が整数のときは、

$$\text{var } R' = (10/\eta) \text{ var } R - (1/5) \sum_{j=1}^{(10/\eta)-1} (10-j\eta) C_{R'}(j) \quad (1.23)$$

の関係がある。ここで $C_{R'}(j)$ は R' の j 個の時間単位 ($j\eta$ 分) はなれた二つの時点間の共分散である。したがって $C_{R'}(j)$ がわかっているか、或いはこれは R' の自己相関 $\rho_{R'}(j)$ の $\text{var } R'$ 倍であるから、 $\rho_{R'}(j)$ がわかっていると、(1.23) から分散比 h が求まる。

1分雨量 ($\eta=1$) で相関関数が指数型 (1.14) 式の時、 $\lambda=0.05$ とすると $h=1.18$ となるよって (1.22) により v' 、 β' はそれぞれ v 、 β の 0.85 倍となる。

同じく 1分雨量で相関関数を 0.1 分雨量の相関が $1/3$ 乗指数型のもの、すなわち (1.12) 式の $C_R(j)$ を $\exp\{-\lambda |j/10|^{1/3}\}$ 、 $n=10$ としたときの $\rho_{RT}(k)$ を 1分雨量の相関とすると、 $\lambda=0.55$ に対して $h=1.49$ となる。

降雨強度 R がある値 R_α を越える確率が $\alpha\%$ であるような R_α 、すなわち $P_r(R > R_\alpha) = 100\alpha$ なる R_α を R の $\alpha\%$ 点と呼ぶことにする。実際に問題になるのは α の非常に小さな R_α である。0.01% 点 ~ 0.001% 点のような所である*。分布の推定を比較する場合 R の値の方を基準にとって、それを越える確率を比較してもよいが $\alpha\%$ 点を比較することでもよい。電波統計の慣習では後者によることが多い。

1分雨量の 0.0075% 点を R'_0 、10分雨量のそれを R_0 とする。いろいろの推定による R'_0 の値を比較するとつぎのようになる。まず、1分雨量の分布を $v'=0.005$ のガンマ分布として相関関数を上述のように $\lambda=0.05$ の指数関数としたときは R'_0 と R_0 の比は、 $R'_0/R_0=1.13$ である。それに対し同じく、 $v'=0.005$ とし相関関数を上述の $1/3$ 乗指数型として推定した R'_0 に対しては $R'_0/R_0=1.35$ となる。

一方実測としては、サイフォン型早廻し雨量計の観測値 (東京) (図7) から 1分ごとの雨量を読みとり計算した結果、相関関数は 0.1 分のそれを $1/3$ 乗指数型として計算したものが 1分雨量 10分雨量ともによくあう (図8)。ところがその相関関数を用いて R から R' を上述の方法で推定したとき $R'_0/R_0=1.25$ となるが、実測の分布から求めた R'_0/R_0 は約 1.08 である。これは丁度 0.0075% 値のところについてだけいえるのではなく、その附近で大体この程度であることを意味しているので、自己相関関数自体の推定には指数関数を仮定することはよくないが、分布の推定など、他の目的の手段として用いるときにはそれで間にあうということがありそうである。なお、埼玉、東京、富山など数地点で観測された転倒ます型雨量計による 1分雨量データに必要な補正を加えたものについては、相関関数も指数型がよくあう⁷⁾。観測値から求めた R'_0/R_0 は 1.11 であった。

このような事情により、1分雨量の自己相関は指数関数とし、パラメタ λ の値は、前に述べたように、0.05 を標準として採用する。パラメタ λ は 0.05 を採用するが、表 1 にも示したごとく、0.035~0.065 程度の範囲で各地で異なる。そこで $\lambda=\lambda'$ として計算すべきところを $\lambda=0.05$ として計算したために R'_0/R_0 にどれだけの差異を生じるかを検討してみた。 $\lambda'=0.035$ のときは、それを $\lambda=0.05$ として計算すると、 R'_0/R_0 は 3.5% 増しに見積られる。 $\lambda'=0.065$ のときは逆に 3.0% 減に見積られる。何れにしても、 λ の値が多少異っていても、大した影響

* このような小さな確率の点を問題にすることは、普通は意味をもたない。しかし、この場合確率というのは、晴の時もあわせた全時間中の割合であるから、強雨時の割合は非常に少ないのである。しかし強雨は我々のちやんと経験することである。また逆にこのような非常に小さな確率を問題にしなければならない。たとえば 1年の 0.01% は約 52 分半で、年間こんなに通信が途だえることはとても大変なことである。この確率分布は普通の数の統計の場合と少し意味が異なる。重要なのはすその方であるので、分布のあてはめにしても、平均分散であてはめるのではなく、主として裾の部分が合うようにグラフからきめられている。これについてはくわしく考えてみる必要があるが、ここでは立入らない。

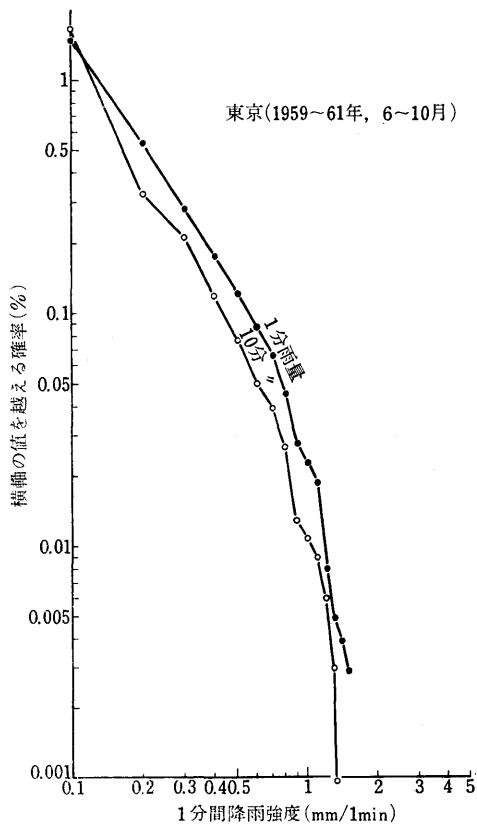


図7 1分および10分雨量の累積分布 (サイフォン形雨量計)

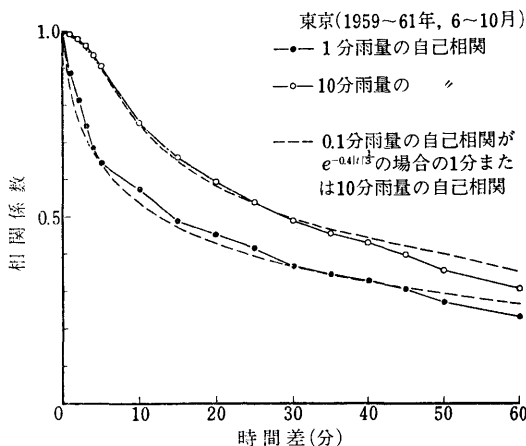


図8 1分および10分雨量の自己相関 (サイフォン形雨量計)

雨の性格の多様さを示している。もち論、このような相関図を数多くつくと、地域的および季節的特徴が統計的にわかってくるであろう)*。

*) 一般に雨域は線状をなすことが多く、その大きさは幅数 km から数 10km, 長さ数 10km から数 100km におよび、甚しきは今年の梅雨時のように本州全体をすっぽり覆うということもある。その移動方向は 700 mb 程度の高速風と一致することが知られている。また強雨セルは直径数 km~数 10km の円または楕円形をなし、その移動方向は 700mb の高さよりもさらに高層の風向と一致するといわれている。レーダーエコーから求めた移動速度は雨域の移動速度に一致するのでセルの移動速度よりもいく分遅いであろう。

はない。

以上のような、分布や相関関数の推定については、統計理論的には議論と考察の余地があるが、実際的にはいろいろの場合について数値的關係がつかめたので、先にすゝむことにする。

1.4 降雨量の空間相関

減衰の変動を考えると、各地点の降雨量の変動を別々に知るだけでは足りず、多くの地点での同時の変動が必要であるが、これをくわしく知ることは、大変なことであるから、任意の二地点における降雨量間の相関、すなわち空間相関を補助情報として、全地域の降雨の変動に関する統計的概観を描像しようということになる。ところが降雨の空間相関に関するデータはあまりない。全国的な規模における日雨量の相関のようなものであれば、各地の気象台のデータを使うこともできようが、ここで問題になるのは数 km~数 10km の狭い地域の中の、比較のみじかい時間の雨量の相関であるから、これは使えない。そこで次のように、一地点における自己相関(時間間隔の関係)を用いて空間相関を推定するという方法をとる。

気象研究所で 1958 年および 1959 年に、埼玉地域に雨量観測網を設け、日記記録をとった。同時に東京気象台では Radar による echo の観測を行っている。気象研の研究では 1959 年 7 月~9 月の強雨期において 6 回の雨(1 日前後)に関して観測地点のすべての対について 10 分雨量の相関を計算し、任意の対の片方を原点にとり、他方の位置に相関を記入し、それから相関の等高線図を書いている⁹⁾。その結果を見ると相関図の形はレーダーエコーの形に似ている。一つ一つの雨についての形は細長いものが多い。雨域の移動方向と相関図の楕円の軸方向とはこれといった関係はない。(長軸方向のこともあれば、短軸方向のこともあり、中間の方向のこともある。

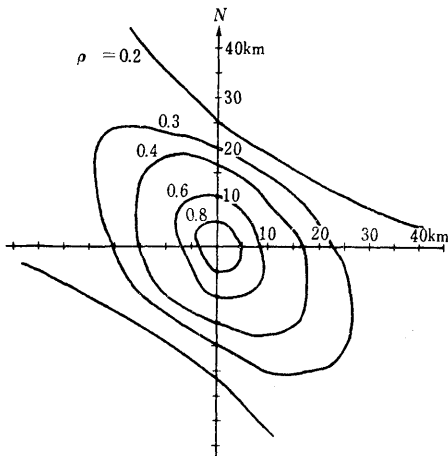


図9 全期間の10分雨量の空間相関係数の等高線

こうして計算した結果は、上述の観測された空間相関にほぼ等しくなった。すなわち、実測の相関の等しい点を楕円とみたてたときの長軸方向の相関関数と、短軸の方向の相関関数のほぼ中間にあたる。

しかしこまかい点ではいろいろと問題がある。

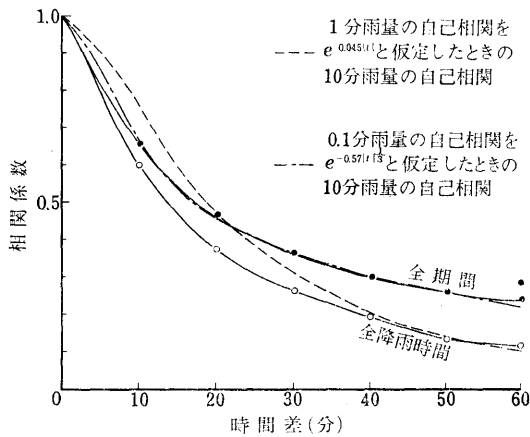


図10 全降雨時間および全期間の10分雨量の自己相関係数

700mb~500mbの高層風のベクトルと、降雨の場の移動ベクトルとが近いことも気象研の研究から明らかになった。このことから、高層風速と地点雨量の自己相関(時間的)とを用いて、空間相関の推定が可能であるという見透しが得られた。しかし、高層風速を求めるとき、何ミリバールの層の風速を求めればよいかをきめることは困難で、そのうえ降雨時の高層風速のデータはきわめて少い。

そこでレーダーエコーから求めた雨域の移動速度を用いて10分雨量の(時間的)自己相関を、距離相関に変えてみた。この場合雨は強さを変えずに移動速度に従って空間的に降る位置をかえてゆくと仮定して計算するのである。こ

たとえば自己相関(時間的)は指数関数が、あまりよくあわないにもかかわらず、空間相関の観測値は指数関数に近いというようなことがある。これは全期間のデータについても、また一雨ごとのデータについてもいえる。(図10, 11)

いま空間座標 x の地点における時刻 t の降雨強度(実際には1分とか10分とかの間の時間単位での平均降雨量である)を $R(x, t)$ とする。 R は空間的にも時間的にも均一、すなわち定常とする。その共通の平均および分散をそれぞれ \bar{R} , σ_R^2 とする。

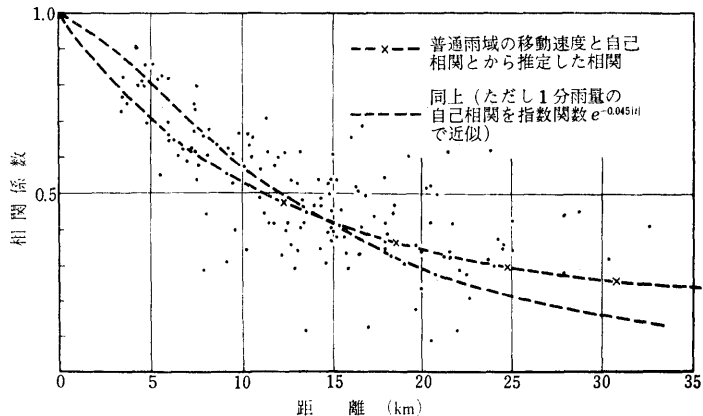


図11 全期間の10分雨量の空間相関係数の観測値と推定値の比較

自己相関, および空間相関は

$$\begin{aligned} \rho_0(\tau) &= E [(R(x, t) - \bar{R})(R(x, t + \tau) - \bar{R})] / \sigma_R^2 \\ &= \{E [R(x, t)R(x, t + \tau)] - \bar{R}^2\} / \sigma_R^2 \end{aligned} \tag{1.24}$$

$$\begin{aligned} \rho(x - x') &= E [(R(x, t) - \bar{R})(R(x', t) - \bar{R})] / \sigma_R^2 \\ &= \{E [R(x, t)R(x', t)] - \bar{R}^2\} / \sigma_R^2 \end{aligned} \tag{1.25}$$

である. $x - x'$ はベクトルであるが, 特に距離 $d = \|x - x'\|$, 方向 θ の関数として

$\rho(x - x') = \rho(d, \theta)$ とあらわし, θ 一定のとき d の関数として $\rho(d, \theta)$ を θ 方向における空間相関の距離特性と称する.

降雨が空間的パターンをかえずに速度ベクトル v の一定速度で移動するものとする. すなわち

$$R(x + \Delta t \cdot v, t + \Delta t) = R(x, t) \tag{1.26}$$

が成立つものとする. この仮定から

$$\begin{aligned} E[R(x, t)R(x, t + \tau)] &= E[R(x + \tau v, t + \tau)R(x, t + \tau)] \\ (\text{定常性により}) &= E[R(x + \tau v, t)R(x, t)] \end{aligned}$$

従つて (1.24) (1.25) から

$$\rho_0(\tau) = \rho(\tau v) \tag{1.27}$$

すなわち移動方向における距離特性は自己相関からじかに換算される.

v 以外の方向に関しては, 何ら情報を与えないわけである. これはいわゆる強雨セルの大きさなどから, 距離の増加にともない急激に相関が減るというようなものでもない.

いまもし降雨状況のパターンが等方的であれば, そのもとにあるプロセスかどうあれ, 空間相関は等方的である筈である. 雨域や強雨セルの形が歪んでいると, それだけ, 空間相関の距離特性も等方性からずれるわけであるが, 前述のように, 雨域の移動方向というものは必ずしもその歪みの軸方向と一致せず, また雨ごとに相当にかわる.

われわれは一雨ごとに雨域の移動を予測し, それによって減衰を予測するというようなことはできない. そこで大雑把に等方的と仮定する. しかし, もっと研究がすすめば, 方向性は不定ではあるが, 統計的性格が明確なものとして取扱ってゆくべきであろう.

各地の气象台のレーダーエコーのスケッチから, 雨域およびセルの移動速度を求めた. それを1雨域を1として, 速度の度数分布に整理してみた. 図12はその一例であるが, これをみてもわかるように, 地域差はあまりない. そこで1分雨量の空間相関としては, 雨域速度の分布の中央値を用いて変換し, 相関関数を $\rho = e^{-\alpha d}$ とし, パラメータ α は全国一律に 0.1 (1/km) を採用しても大過なきさうである.

空間相関の大略の推定としてはこのような方法で間にあうと考えられるが, 降雨モデルとし

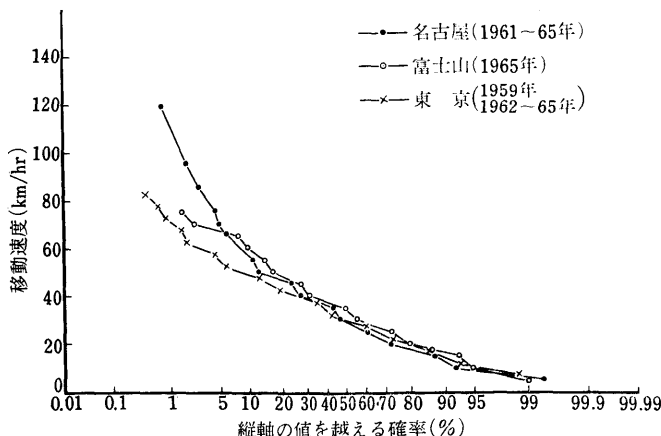


図 12 1 時間当りの雨域の移動速度の累積分布

てはあまり簡単すぎ、実情にあわないような感じをうける。たとえば雨域、セルの生成消滅ということ、さもなくも強さが変化するものと考えるべきだと思う。そのような影響を考慮するいくつかの方法が可能である。

x を空間上の一点として固定し、 x' をうごかすとき、 $R(x, t)$ と $R(x', t)$ との相関 $\rho(R(x, t), R(x', t))$ はもち論 $x=x'$ のとき最大値 1 をとるが、 $\rho(R(x, t), R(x', t+dt))$ は $x=x'$ のとき必ずしも最大値をとらず、最大点 x' は x から一般にずれる。そこで上の相関が最大の x' に対し、ベクトル $x'-x$ を時間 dt 間における相関場*の変位といい、 $(x'-x)dt$ を相関場の移動速度と称する。これは気象庁の今井氏によって考えられいろいろの雨について速度の方向と大きさが測定されている。これは雨域の移動速度とは一般に大きさも方向も必ずしも一致しない。これを用いて自己相関を空間相関にかえることも試みられている。

つぎに、雨域の移動速度が 0 のときの自己相関

$$\rho(\tau) = \rho(R(x, t), R(x, t + \tau)) \tag{1.28}$$

に対し速度 v で移動するとき降雨変動もその速度で移動し、 $\rho(R(x + v\tau, t + \tau), R(x, t))$ が (1.28) に等しくなるとするという考え方もある。これは、単一の雨でなくいくつかの雨をあわせて考えてゆくことになる。その他 R に微小変動をさらにつけ加える方法、 v を偶然量とみる方法など考えられる。また雨域をいろいろの大きさの円と考え、その重りを考えるモデルもできる。こうしたモデルの詳細は後の報告で述べる。

1.5 減衰量の確率分布の推定

前に §1.2 で述べたように、雨による電波の減衰量 Z は、地点雨量 R のあるべき乗の積分値 Y に比例する。したがって回線の設計にあたって必要な減衰量 Z の確率分布を推定することは、 Y の確率分布を推定することである。単位距離あたりの減衰、すなわち減衰係数を Z_0 とすると

$$Z_0 = \gamma R^n$$

R の分布を密度関数 (1.11) のガンマ分布として出発すれば、 Z_0 の分布の密度は、

$$f(z) = \frac{1}{n \Gamma(\nu)} \left(\frac{z}{\gamma}\right)^{\nu/n-1} \exp\left\{-\beta\left(\frac{z}{\gamma}\right)^{1/n}\right\}$$

であるが、 n が 1 に近いので大略ガンマ分布で近似される。 Z_0 の平均、分散は

$$Z_0 = \frac{\gamma \Gamma(\nu + n)}{\beta^n \Gamma(\nu)}, \quad \text{var } Z_0 = \frac{\gamma^2}{\beta^{2n}} \left(\frac{\Gamma(\nu + 2n)}{\Gamma(\nu)} - \frac{\Gamma(\nu + n)^2}{\Gamma(\nu)^2} \right).$$

したがってガンマ分布で近似するときは、実効的パラメタとして

$$\begin{aligned} \nu_e &= (Z_0)^2 / \text{var } Z_0 = \frac{\Gamma(\nu + n)^2}{\Gamma(\nu)^2} \bigg/ \left(\frac{\Gamma(\nu + 2n)}{\Gamma(\nu)} - \frac{\Gamma(\nu + n)^2}{\Gamma(\nu)^2} \right) \\ &= \left\{ \frac{\Gamma(\nu + 2n) \Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu + n)^2} - 1 \right\}^{-1} \\ \beta_e &= Z_0 / \text{var } Z_0 = \frac{\beta^n}{\gamma} \bigg/ \left\{ \frac{\Gamma(\nu + 2n)}{\Gamma(\nu + n)} - \frac{\Gamma(\nu + n)}{\Gamma(\nu)} \right\}^{-1} \end{aligned}$$

を用いるとよい。

図 13, 14 は福岡および高知の 10 分雨量の 0.8 乗および 1 乗、1.3 乗の分布を示す。いずれもガンマ分布の理論曲線で近似できる。

0.8 乗および、1.3 乗の分布の ν, β は 1 乗分布の ν, β をもとにして上の実効パラメタを用いる。

つぎに、二点 A, B 間での減衰量 Z (デシベル) の確率分布を求める。 Z は

* 相関場という言葉は誤解をまねきやすいので別名を考えるべきだろう。

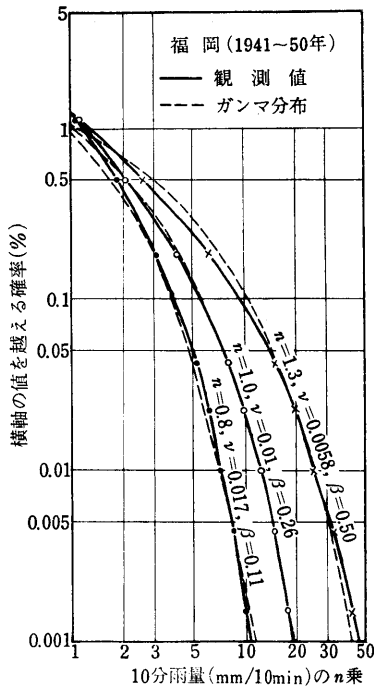


図 13 10分雨量の n 乗の累積分布

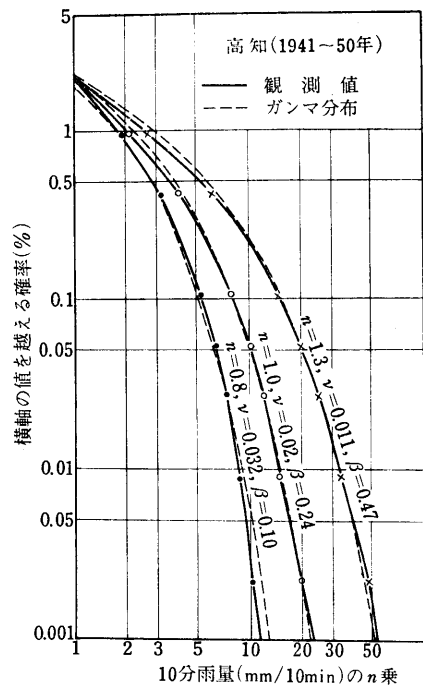


図 14 10分雨量の n 乗の累積分布

$$Z = \int_A^B Z_0 dx = \gamma \int_A^B R^n dx = \gamma Y \quad (1.29)$$

なる確率積分であるから、厳密にあつかうことはむづかしい。しかしここでもやはりガンマ分布近似がつかえるように思われる。というのは (i) Z_0 は空間的にみて純粋にランダムではなく、近い点ではかなり相関が高い。(ii) 従っていくつかのガンマ変量の有限和とみてよい。(iii) ガンマ変量の独立和はガンマ分布に従う。(iv) 相関の非常に高いガンマ変量の和の分布は、ガンマ型に近いことは想像に難くないが、中程度の相関のときにもガンマ分布に近いということが、二変量のガンマ分布について数値的にたしかめられている。このことについては後で述べる。

このような理由によって上記確率積分 (1.29) の分布をガンマ分布として扱うが、実際既設の回線をつかいたいくつかの実測によっても、ガンマ近似がよくあうことがたしかめられている。(図 15, 16 参照)

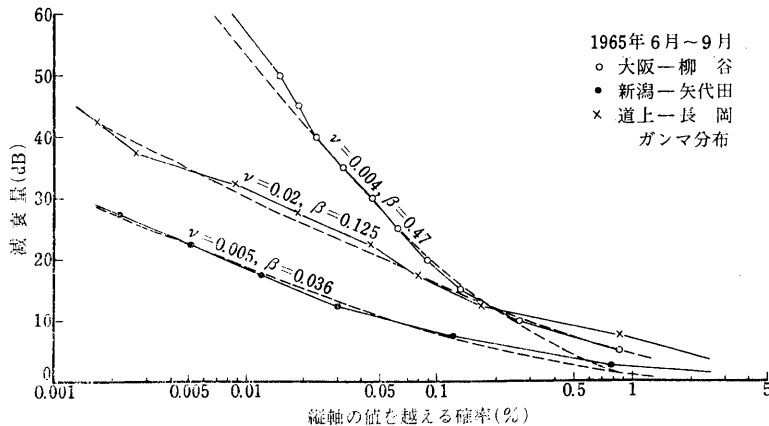


図 15 11 GHz 回線の減衰量の累積分布曲線

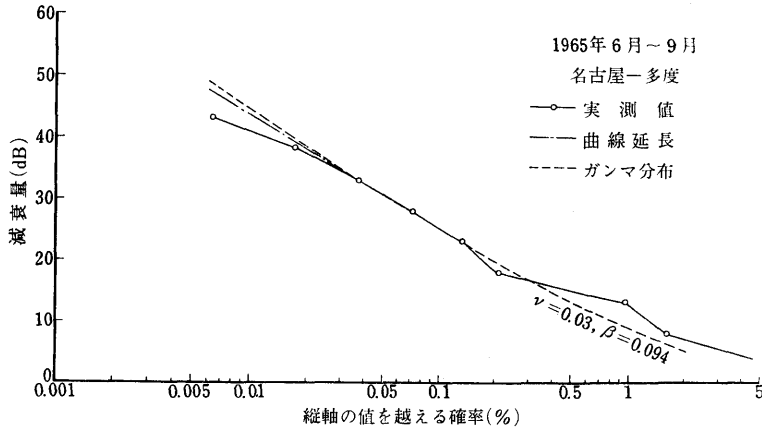


図 16 11 GHz 回線の減衰量の累積分布曲線

積分量 Z にガンマ分布を用いるとして、そのとき用いるパラメタをきめる必要がある。いま A, B の二点間の距離を d とする。空間は統計的に均一であるとする。すると Z の平均は

$$Z = E\left(\int_A^B Z_0 dx\right) = Z_0 \cdot d \quad (1.30)$$

となる。一方分散は

$$\begin{aligned} \text{var } Z &= E(Z - Z)^2 = E\left(\int_A^B (Z_0(x) - Z_0) dx \int_A^B (Z_0(y) - Z_0) dy\right) \\ &= \int_A^B \int_A^B E[(Z_0(x) - Z_0)(Z_0(y) - Z_0)] dx dy \\ &= \int_A^B \int_A^B \text{cov}(Z_0(x), Z_0(y)) dx dy. \end{aligned} \quad (1.31)$$

空間の均一性 (変数が時間のときの定常性に相等する) から、

$$\text{cov}(Z_0(x), Z_0(y)) = \text{var } Z_0 \rho_{z_0}(|x - y|). \quad (1.32)$$

ここで ρ_{z_0} は Z_0 の空間相関で、位置に関する定常性により、二点間の距離のみの関数である。 ρ_{z_0} としてはわれわれは結局指数関数を採用することになるが、そのいきさつに少しふれておく。

空間の二点における Z_0 の間の相関には、二点における R の同時分布から計算すればよいが、この同時分布には、相関ある二次元ガンマ分布を用いることができよう。その同時密度を

$$f(R_1, R_2) = \frac{\beta^{\nu+1} (R_1 R_2)^{\frac{\nu-1}{2}} \exp\left\{-\frac{\beta(R_1 R_2)}{1-\rho}\right\}}{\Gamma(\nu) (1-\rho) \rho^{\frac{1-\nu}{2}}} I_{\nu-1}\left(\frac{2\beta\sqrt{\rho R_1 R_2}}{1-\rho}\right) \quad (1.33)$$

とする。ここで I_ν は第一種の変形ベッセル関数で、 ρ は R_1 と R_2 の間の相関である。 R_1, R_2 単独では (すなわち同辺分布は) いずれもパラメタ (ν, β) のガンマ型である。これは、ガンマ過程の二時点の間の同時分布を考えることにあたるが、雨域の移動ということを考えると、このモデルは悪くはない。

$Z_{01} = \gamma R_1^*$ と $Z_{02} = \gamma R_2^*$ の間の相関は (1.33) によって計算すると

$$\rho_{z_0} = \frac{(1-\rho)^{\nu+2n} \Gamma(\nu) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+n+i)}{i! \Gamma(\nu+i)} \rho^i - \Gamma(\nu+n)^2}{\Gamma(2\nu+2n) \Gamma(\nu) - \Gamma(\nu+n)^2} \quad (1.34)$$

となる。ところで、実際の場合 $n=0.8\sim 1.3$ の範囲にあるが、その範囲内では ρ_{z_0} と ρ との差はわずかである。(表 2)。 $\rho=0, \rho=1$ のときは勿論 ρ_{z_0} も 0, 1 である。したがって Z_0 の空間相関には R の空間相関を代用しても差支えないと考えられる。ところで R の空間相関とし

表 2 ρ_{z_0} の値

| | | ρ | | | |
|-------|-------|--------|--------|--------|--------|
| | | 0.2000 | 0.4000 | 0.6000 | 0.8000 |
| n=0.8 | ν | | | | |
| | 0.005 | 0.1950 | 0.3919 | 0.5980 | 0.7985 |
| | 0.01 | 0.1951 | 0.3919 | 0.5910 | 0.7930 |
| | 0.02 | 0.1951 | 0.3920 | 0.5911 | 0.7931 |
| n=1.3 | 0.005 | 0.1922 | 0.3897 | 0.5877 | 0.7915 |
| | 0.01 | 0.1923 | 0.3881 | 0.5877 | 0.7918 |
| | 0.02 | 0.1923 | 0.3882 | 0.5879 | 0.7916 |

ては、前§でも述べたように、指数関数を用いる。それで Z_0 の空間相関を (1.34) のかわりに $\rho_{Z_0}(x) = e^{-\alpha x}$ とすると、

$$\int_A^B \int_A^B \rho_{Z_0}(|x-y|) dx dy = 2 \frac{(ad-1+e^{-\alpha d})}{\alpha^2} \tag{1.35}$$

であるから、結局 Z の分散は (1.31) および (1.32) により

$$\text{var } Z = A \text{ var } Z_0, \tag{1.36}$$

ただし

$$A = \frac{2(ad-1+e^{-\alpha d})}{\alpha^2}, \tag{1.37}$$

となる。従って (1.30) と (1.36) とを用いると Z の分布のパラメタは

$$\nu = (d^2/A)\nu_0, \quad \beta = (d/A)\beta_0$$

となる。ここで (ν_0, β_0) は Z_0 の分布のパラメタである。

これで減衰の分布の推定法がみつかったわけである。ガンマ分布の $p\%$ 点は不完全ガンマ関数表から求められるが、われわれが問題にするような非常に小さい p の値に対しては、つぎのような近似的方法が可能である。

平均 1 ($\beta=\nu$) に規格化した分布の $p\%$ 値を相対強度 $Z_{rel p}$ ということにする。これとパ

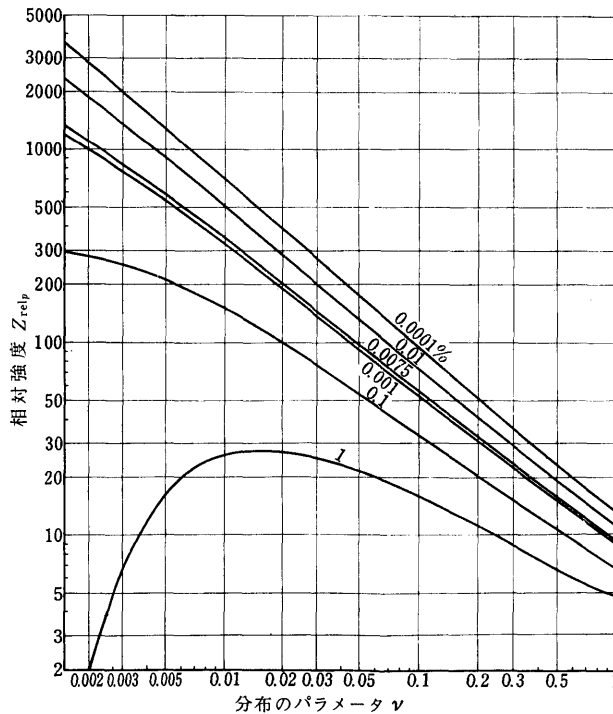


図 17 ガンマ分布におけるパラメータ ν 対相対強度 $Z_{rel p}$ の関係

ラメタ ν との関係は図 17 のようになる。この図でわかるように、 p の小さい値に対しては $\log Z_{rel p}$ と $\log \nu$ とが直線関係に近いので

$$Z_{rel p} \cong a \nu^{-b}$$

の関係が近似的に成り立つ。 $p=0.0075\%$ 程度のところでは $0.005 < \nu \leq 1.000$ の範囲で $a \cong 9.5$ $b \cong 0.782$ である。

実用計算のための数表

雨量データから減衰量の $p\%$ 点 Z_p を求める計算を容易にするため、つぎのような係数 K_p を計算した。(確率積分の計算は前述のガンマ近似による)

$$K_p = \frac{\left[\int_A^B (P^n) dx \right]_p}{d (R^n)_p}$$

これを用いると

$$Z_p = d \cdot K_p (\gamma R^n)_p \tag{1.38}$$

ここで $(\gamma R^n)_p$ は 1km あたりの減衰量の $p\%$ 点である。

K_p の値は $p=0.01\%$ 以下では ν にほとんど依らない。 $\nu=0.005$, $p=0.0075\%$ のときの種々の ad に対する K_p の値はつぎの通りである。

| ad | 0.0 | 0.5 | 1.0 | 1.5 | 2.0 | 2.5 | 3.0 | 3.5 | 4.0 | 4.5 | 5.0 |
|-------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| K_p | 1.00 | 0.889 | 0.797 | 0.721 | 0.656 | 0.602 | 0.555 | 0.515 | 0.480 | 0.450 | 0.423 |

1.5.1 区間雨量の推定についての検討

R^n の距離積分の観測方法がない以上、降雨による電波の減衰量の推定においては、これまで述べて来たような、仮定をおいた理論的推論によらざるを得ない*。仮定や近似に対して一応は根拠を検討をしたものの、以上のような推定方法を実際に回線設計に採用するに当たっては、なお計算値と実測値とがどの程度一致するかを検討してみる必要がある。

なるべく多くの地域について数ヶ年以上の長期間の区間雨量について検討すればよいが、多くの地域で多くの雨量計をならべて観測を行うことは、実際問題として不可能であるので、地点雨量のデータを用いることにした**。すなわち一地点で長期間観測された各時間単位の雨を

区間雨量に置きかえて検討した。その置き換えの方法は次の通りである。

減衰量の推定に使用する雨量は 1 分雨量であって、その空間相関は $a=0.1$ (1/km) 程度の指数関数と推定される。 $a=0.1$ の空間相関の場合、相関係数が $1/e$ になる距離が 10km であるから自己相関係数が $1/e$ となるような時間差を空間距離 10km に等置する。たとえば自己相関が $1/e$ の時間差が 15 分であったとする。すると 10 分が距離 6.66 km, 30 分が 20km に相当する。そこで 20 分雨量を距離 6.66km の区間雨量に、40 分雨量を 20km の区間雨量とする。このようにして推定し

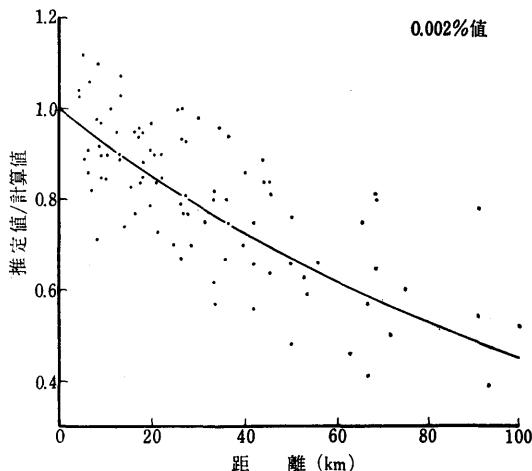


図 18 距離対区間雨量の推定値とガンマ分布を仮定した計算値の比の関係

* 区間雨量のごときものは、むしろ逆に電波の減衰から推定されるべきものである。

** 16 の気象台については数年~10年間の7月~9月の10分雨量の自己相関関数を時間差200分まで計算してある。また、10分雨量ならびに10分移動の20分、40分、60分、100分および200分雨量の累積分布が求めている。

た区間雨量の0.002%値, 0.0075%値, 0.01%値, 0.1%値をガンマ分布を仮定した計算値と比較した。結果は図18, 19, 20の如く, 1%値および0.1%値のとき比は1よりやゝ大きいようであり, 0.01%値以下では, 距離が増大するに従って小さくなってゆく傾向がみられる。

これらの関係を回帰的に集約してまとめて書くと図21のようになる。上記の推定値/計算値を C_p とあらわすと, 図21の範囲でこれらの曲線は $C_p = \exp(mad)$ の形をとる。

ここで a は空間相関のパラメタ, d は距離をあらわす。 m の値はつぎの通り。

| $p=0.001\%$ | 0.002% | 0.0075% | 0.1% | 1.0% |
|-------------|--------|---------|-------|-------|
| $m=-0.11$ | -0.08 | -0.04 | +0.02 | +0.02 |

この C_p は Z_p をつぎのような方法で推定する場合補正につかわれる。(1.38)式で $(\gamma R^m)_p$ は $\gamma(R_p)^m$ ではない。そこで降雨強度の実測値を用いて計算した $\gamma(R_p)^m$ に対しては(1.38)は

$$Z_p = d \cdot K_p [\gamma(R_p)^m] C_p \quad (1.39)$$

となる。§1.5のはじめに書いた R の平均, 分散から計算する推定方法ではこの補正は不要である。

1.5.2 減衰の現場試験結果

現用の11GHz(ギガヘルツ)回線の7区間において行われた降雨による減衰測定現場試験において取得したデータに用いて, 減衰量の分布を求めた。これと推定値との比較をするとつぎのようである。

実測分布はガンマ分布で近似されるものが多い。さきあげた図14はその一例である。地点雨量の分布(ガンマ型で近似)地点雨量の自己相関とレーダーエコーより求めた雨域の移動速度から推定した10分雨量の空間相関, 小口の降雨強度対減衰量の関係を用いて, これまで述べた方法で推定したのが図のガンマ分布曲線であり, 甚だよい一致を示している。

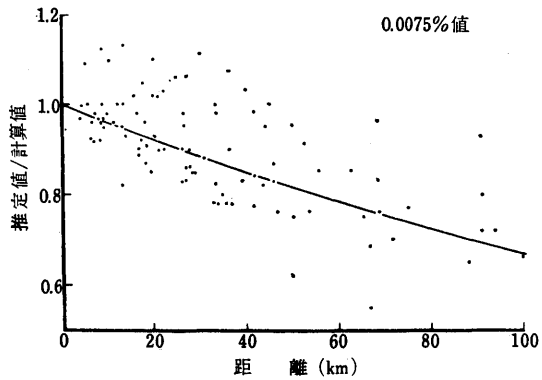


図19 距離対区間雨量の推定値とガンマ分布を仮定した計算値の比の関係

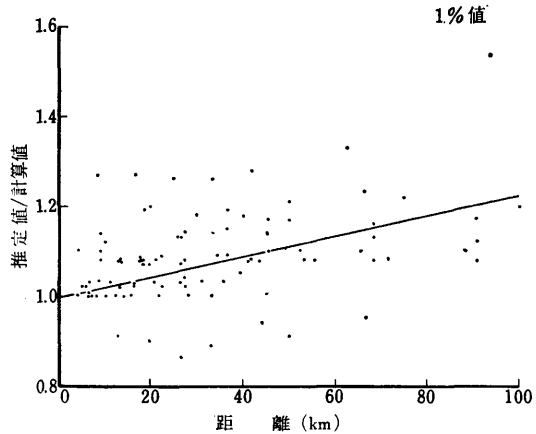


図20 距離対区間雨量の推定値とガンマ分布を仮定した計算値の比の関係

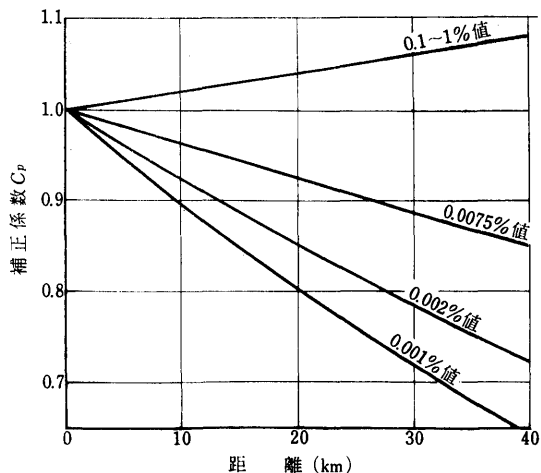


図21 距離対減衰の補正係数 C_p の関係

実測は減衰が40 dB以上のところでは、減衰量対記録の特性が飽和して、減衰量の読み取り精度がよくないので、その前のところから分布曲線を外挿した方が合理的である*。

種々の方法による減衰分布の0.0075%値を比較すると表3のようになる。表3の試験期間中の減衰の推定に際し、名古屋地区の区間については、さきに述べた方法を用い、残りの区間では、回線近くの気象台の試験期間中の10分雨量分布の0.0075%値（1分雨量換に換算するため0.113倍）と、 $\alpha=0.1$ の1分雨量の空間相関（長期間の推定値）を用いて推定を行ったものである。また長期間の減衰の推定は、その地域の1分雨量の0.0075%値と $\alpha=0.1$ の空間相関とを用いて推定を行ったものである。降雨強度対減衰量の関係はその周波数についての小口の理論値を用いた。

表 3

| 区 間 | 距 離 (km) | 周波数 (GHz) | 実測減衰分布の0.0075%値 | | 推定減衰分布の0.0075%値 | |
|---------|-------------|--------------|---------------------|------------------------|-----------------|---------|
| | | | 読みとったまま の値(修正なし) | 減衰の大きいところ まで分布曲線を外挿 | 試験期間中 | 強雨期の長期間 |
| 名古屋—多 度 | 26.1 | 11.245 | 42.5dB | 46.0dB | 47.0dB | 54.0dB |
| 多 度—四日市 | 19.6 | 10.715 | 40.5 " | 42.0 " | 41.5 " | 40.0 " |
| 四日市—津 | 22.9 | 11.245 | 43.0 " | 54.0 " | 58.5 " | 53.0 " |
| 名古屋—桑 名 | 23.6 | 11.285 | 44.0 " | 60.0 " | 44.0 " | 52.0 " |
| 大 阪—柳 谷 | 28.5 | 11.405 | 読みとり不能 (低下しすぎ) | 62.0 " | 51.0 " | 53.5 " |
| 新 潟—矢代田 | 19.9 | 10.715 | 20.5 " | 20.5 " | 20.5 " | 33.5 " |
| 道 上—長 岡 | 16.7 | 11.245 | 33.0 " | 33.0 " | | 32.5 |

1雨期程度の短い期間では、同じ地域でも少し離れた地点で雨量がかなり違うことがあるので、回線近くの1地点だけの雨量データから減衰量を推定して実測値と合うことを期待するのは無理である。しかし、推定値が大き目であるとか小さ目であるとかいう傾向があるとすれば、表にもおよそそのような傾向が見えるであろうが、実測（分布曲線を延長した）の0.0075%値と、試験期間中のその推定値とでは、そうした傾向はわからない。ということは推定方法や採用したパラメタの値が悪いものではないことを証明しているとみてもよいであろう。

1.6 降雪による減衰

降雨による減衰と降雪による減衰の比較データを得るため、1965年1月~66年3月、新潟—矢代田区間および逆上一長岡区間において、降雨降雪による減衰測定現場試験実施した。各月ごとの減衰分布の0.0075%値を示したのが図22であるが、このように二区間とも夏季の

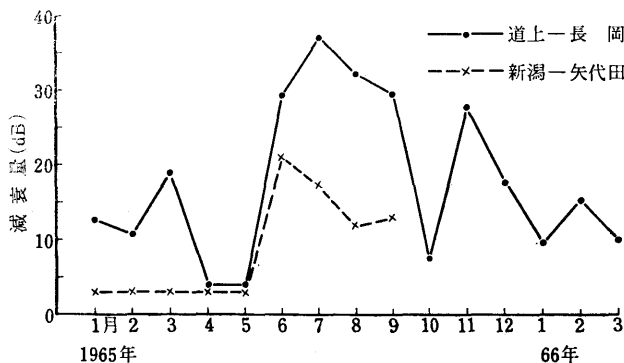


図 22 月別減衰量分布の0.0075%値

* 低雑音増巾器を附加した区間（大阪—柳谷）ではその必要はなく実測も減衰量の大きい方へよくのびている。

減衰の方が大きい。この試験終了後も、夏季には降雨による減衰のための回線瞬断はあったが、冬期に降雪による減衰で瞬断は生じていない。ところが1965年12月～66年3月の逆上—長岡区間で行われた試験の結果、雪、みぞれ、あられ、雨の降水現象の中で、同一降水量ならば、みぞれによる減衰が最も大きく、実に雨の9倍にも達することがわかった。結局みぞれの方が大きく減衰にきくが、降る量が問題なく少いといえる。

1.7 継続時間の分布

時間的に変動する量の連続データ記録を分析する場合、 X がある値 x 以下になる確率 $P_r(X < x)$ をもとにして考えてゆくのが普通である。これは

$$F(x; T) = \frac{T \text{ 中で } X(t) < x \text{ となっている時間}}{\text{記録の全時間 } T}$$

によって推定される。すなわち

$$F(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} F(x; T)$$

が確定存在と考えると、これを X の分布と考える。これはいう迄もなくエルゴード性を根拠に考えているが、それはとも角、電波の統計的な取り扱いにおいてもこの分布の概念を基礎にしていて、これまでのところすべてこれ（およびその多次元化による一般化されたもの）から導出される諸量を用いていろいろの議論がなされている。たとえば回線の品質を論じるにあたって、S/N比が何デシベル以下になる確率（上記の意味）がどうのということとその特性をあらわす慣習になっている。しかしこれだけでは X の統計的性質をすべて規定しつくせるわけのものではないことは明らかである。

上記の概念に含まれない重要な性質として継続時間の分布がある。通信不良の状態が全体としてどの程度の時間を占めるかということは、もち論大切な指標ではあるが、それだけでは品質のすべてを表現していない。同じ10分でも、10分間断になっていることが一回あることと、秒以下の非常に短い断が何回も起るといふことでは、統計的性質も異なるし、実際の意味も全然ちがってくる。これを区別するには、 $X < x$ の状態の継続時間の平均、分散、或いはもっと一般にいつてその分布を問題にしなければならない。

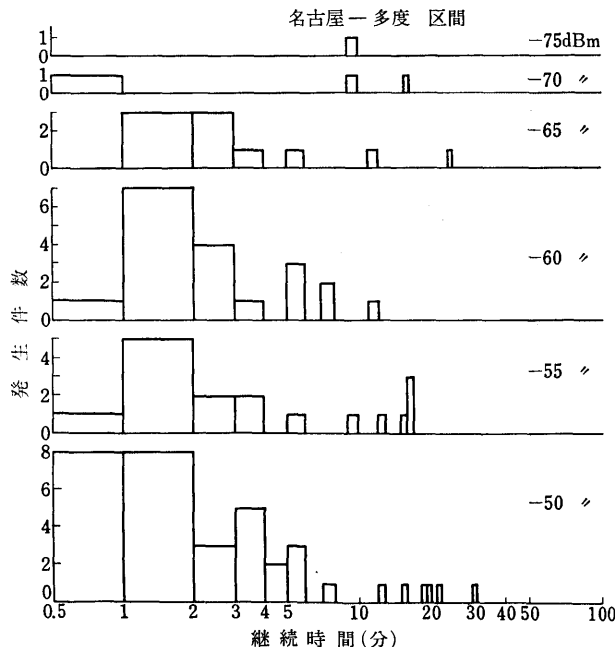


図 23 減衰継続時間の頻度分布

継続時間というのは、サンプルプロセス $X(t)$ に対し (i) $t_1 < t \leq t_2 \Rightarrow X(t) < x$, (ii) 任意の $\varepsilon (> 0)$ に対し t' が存在し $t' \geq t_1 - \varepsilon$, かつ $X(t') \geq x$, (iii) 任意の $\varepsilon (> 0)$ に対し t' が存在し $t' < t_2 + \varepsilon$ かつ $X(t') \geq x$ を同時にみたす t_1, t_2 に対して $l = t_2 - t_1$ のことで、これの集りにおける分布が継続時間の分布というわけであるから、通常確率過程の考え方からする取扱いは非常に面倒である。また実際の測定の間からは、非常に短い時間間隔で相隣る（接するといつてもよい）二つの時間帯を二つと区別しにくい場合がある。

このような理論的ならびに実際的困難のために継続時間の分布を扱っているものの二義的になっているが、それは重要でないことを意味しない。

降雨による受信電力の減衰について、われわれは、不良状態の継続時間の分布を測定した。すなわち名古屋附近のデータによって、受信電力が -50dBm , -55dBm , -60dBm 等のレベル以下に低下している継続時間を統計した。図 23 はその一例である。実際に不都合が問題になるような低いレベルをとったため出現回数が少く、回数そのままを表示してある。それで分布関数を推定するまでにはいたらないが、これだけでも定性的には、たとえば、4 GHz, 6 GHz 等の周波数のフェージングと比較すると継続時間がはるかに長く、1 時間の平均雑音が高いことが想像される。

このように継続時間の分布をしらべることは、まだ進んでいないが、いろいろの種類の減衰の特徴づけや、障害対策にも有用な情報を与えるものであるから、今後次第につかわれるものと思われる。

附 録

二次元ガンマ変量の和の分布*

X, Y は非負の確率変数でその同時密度を

$$f(\xi, \eta; \nu, \alpha, \beta, \rho) = \frac{(\alpha\beta)^{(\nu+1)/2} (\xi\eta)^{(\nu-1)/2} \exp\left\{-\frac{\alpha\xi + \beta\eta}{1-\rho}\right\}}{\Gamma(\nu) (1-\rho) \rho^{(\nu-1)/2}} I_{\nu-1}\left(\frac{2\sqrt{\alpha\beta\rho}}{1-\rho} \sqrt{\xi\eta}\right)$$

とする。ここで $I_{\nu-1}$ は第一種変形ベッセル関数である。このとき、 X, Y はそれぞれパラメタ (ν, α) , (ν, β) のガンマ分布に従い、 X と Y との相関係数は $\rho (\geq 0)$ である。

$Z = X + Y$ とすると、 Z の密度は

$$f(\xi) = \frac{2^{2\nu-1} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) (\alpha\beta)^\nu \xi^{\nu-1/2} \exp\left\{-\frac{\alpha + \beta}{2(1-\rho)} \xi\right\}}{\Gamma(2\nu) (1-\rho)^{1/2} [(\alpha-\beta)^2 + 4\rho\alpha\beta]^{\nu/2-1/4}} I_{\nu-1/2}\left(\frac{\sqrt{(\alpha-\beta)^2 + 4\rho\alpha\beta}}{2(1-\rho)} \xi\right)$$

となる。特に $\alpha = \beta$ のときは

$$f(\xi) = \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \beta^{2\nu}}{\Gamma(2\nu) (1-\rho)^\nu} e^{-\frac{\beta}{1-\rho}\xi} \xi^{2\nu-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\beta\sqrt{\rho}}{2(1-\rho)} \xi\right)^{2m}}{m! \Gamma\left(m + \nu + \frac{1}{2}\right)}$$

で、 Z の分布関数は

$$F(\xi) = \frac{1}{\Gamma(2\nu)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\rho}{4}\right)^m \gamma\left(2\nu + 2m, \frac{\alpha\xi}{1-\rho}\right)}{m! \left(\nu + \frac{1}{2}\right) \left(\nu + \frac{3}{2}\right) \cdots \left(\nu + m - \frac{1}{2}\right)}$$

となる。ここで γ はルジャンドルの不完全ガンマ関数

$$\gamma(\nu, \xi) = \int_0^\xi t^{\nu-1} e^{-t} dt$$

をあらわす。

* 筆者らがはじめてこの問題を手がけたときはまだよくは知られていなかった。仲上稔氏によってこれと同等の分布はみちびかれていたように思うが、ガンマ変量との関連において簡明には扱われていなかった。今ではたとえば Miller の本にはこれに関係ある一連の分布があつてある⁹⁾¹⁰⁾。

Zの積率は

$$\bar{Z}^k = \frac{\Gamma(2\nu + k)}{\Gamma(2\nu)} (1 - \rho)^\nu \left(\frac{1 - \rho}{\beta}\right)^k F\left(\nu + \frac{k}{2}, \nu + \frac{k+1}{2}, \nu + \frac{1}{2}; \rho\right)$$

ここでFは超幾何級数

$$F(a, \beta, \gamma; \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(\beta+n)\Gamma(\gamma)}{n! \Gamma(a)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma+n)} \xi^n$$

よって

$$\bar{Z} = 2\nu/\beta, \quad \bar{Z}^2 = 2\nu(2\nu + 1 + \rho)/\beta^2, \quad \bar{Z}^3 = 4\nu(\nu + 1)(2\nu + 1 + 3\rho)/\beta^3$$

このZの分布はガンマ分布ではない。もしもガンマ分布ならば

$$\bar{Z} \cdot \bar{Z}^3 - \bar{Z}^2 (2\bar{Z}^2 - \bar{Z}^3)$$

が0となるはずである。ところが上の関係によりこの値は $1 - 8\nu^2 \rho(1 - \rho)/\beta^4$ となるから、 $\rho = 0$ および $\rho = 1$ のときのほかは0とはならない。しかしガンマ分布と形が甚だよく似ている。

二次までの積率がZのそれらと等しいガンマ分布のパラメタ (ν_e, β_e) は

$$\nu_e = 2\nu/(1 + \rho) \quad \beta_e = \beta/(1 + \rho)$$

である。図24にはいくつかの場合について $\rho = 0.5$ のときの比較をしてある。 $\nu = \beta$ ととってある。図ではタテ軸には $1 - F(z)$ をとってある。

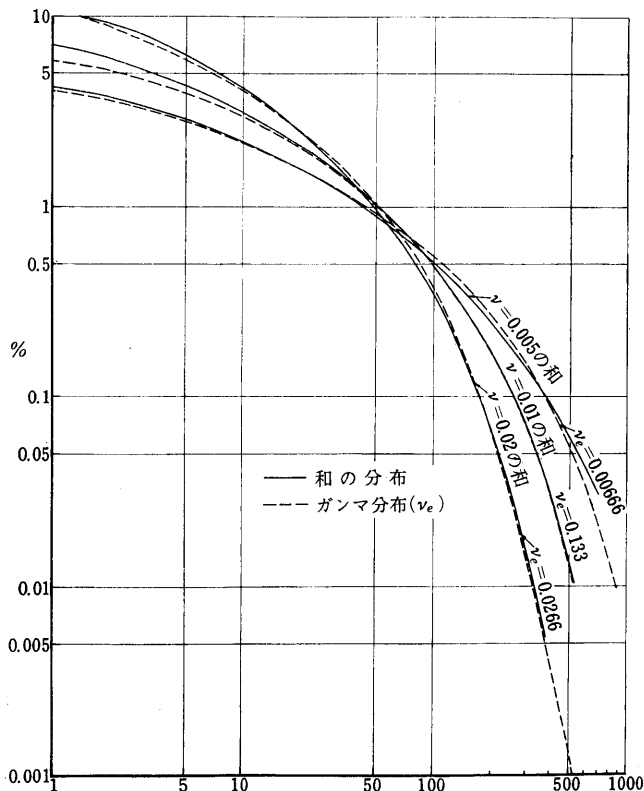


図 24 二つのガンマ変量の和の分布

おわりに

これで一まず今回の報告を終る。今回の主題は、資料の収集整理と、いろいろな情報を組み合わせて行う推定であった。この段階での問題点は、大づかみにして二つあるだろう。第一は、いろいろ精度の異なる情報や不完全情報をおつめて、ある目的のために有用な情報にまとめあげ

てゆくとき、結果的に全体として精度落ちして役に立たなくならないようにするための方策の問題である。われわれの方法は、いくつかの実証的チェックを並行させているので、最終結果的にはまず問題はないが、これが最も効果的なすじみちかどうか、これ以外にやりようがないかどうかの検討を完全にはしていない。

このようなこともさることながら、つぎの第二の問題はより重要であると思われる。それは問題になる時間スケールを明確にし、現象を見る眼を調節してそれにびったりあわせ、時間スケールをもった目的に応じた情報を得るということである。たとえば天体地質学的な時間スケールで問題になることか、この地上の実験の時間スケールで問題になることか、そのようなことを明確にしなければ定常だ、非定常だといっても意味はない。これは至極当たり前のことで、単一の現象については誰しも誤りはしない。ところがわれわれがここで扱ったように、いろいろの時間のものが入りこくんでいるとき、これを明快に載いて、それぞれ目的に適合した情報をとり出してゆき、それを総合するということが、あまり容易なことではない。たとえば通信路の切替えというごく短い時間の同時性が問題になる。ところが最終的な回路網検討、たとえば中継点をどこにおくかというような問題は、10年、20年という単位でものを見て効果の評価をしなければならない。(それで場合によっては、同じ量の分布関数のパラメタ値でも目的によって異らしめねばならない)。すると気象データのとり方、見方、プロセスの仕方など複雑になる。一方の時間スケールにあわせるだけでは、片方の情報がぬけてしまい。そのため結果的に何も得られなくなることもある。

この点について、われわれは頭是なくやったわけではなく、データの使いわけもできるだけ行ったが、このような問題を定式化した上で、定量的に十分検討しつくしたともいえない。

この問題は時間スケールについてのみならず、空間スケールについても起る。総合的なデータプロセッシングの場合における重要な課題であろう。

謝 辞

本研究をすゝめるにあたり、いろいろお世話になり、また御教示をいただいた気象庁今井一郎氏、統計数理研究所林知己夫氏、電気通信研究所牧野英夫氏、減衰係数の計算に協力していただいた電波研究所小口知宏氏に感謝の意を表します。

また降雨量の観測データ、レーダーエコーの観測データの提供をしていただいた気象研究所ならびに全国各地の気象台の方々に御礼申し上げます。

参 考 文 献

- [1] 前田憲一、後藤三男；電波伝播 岩波全書
- [2] Kerr；Propagation of Short Wave, M.I.T. Series No 13, (1947)
- [3] K. Kodaira；The Radar Wave Attenuation Caused by Precipitation Particles：Papers in Meteorology and Geophysics Vol XIV (1963)
- [4] T. Oguchi；Attenuation of electromagnetic wave due to rain with distorted raindrops (Part I) Journal of Radio Research Lab. Vol 7, 33 (1960), 同じく (Part II) Vol 11, 53 (1964)
- [5] J.O. Laws, D.A. Parsons；Trans. Am. Geophys. Union (1943)
- [6] A.C. Best；Part I of the Interim Report of the Ultra Short Wave Panel Working Committee, July 18, (1944)
- [7] 森田、鹿志村；転倒楕型降雨強度計の観測誤差の検討、昭和42年電気四学会連合大会
- [8] 今井 他；降雨の統計的性質と電波の減衰、研究時報（気象庁）、16巻3号（1964）
- [9] K.S. Miller；Multidimensional Gaussian Distributions；John Wiley 1964
- [10] M. Nakagami；The m-Distribution-A General Formula of Intensity Distribution of Rapid Fading, in Statistical Methods in Radiowave Propagation, edited by W. C. Hoffman, Pergamon Press 1960