一 般 逆 行 列 I

渋 谷 政 昭

(1969 年 11 月 受付)

Generalized Inverses of Matrices, Part I

Masaaki Sibuya

This is a systematic summary report on the recent results in the theory of generalized inverses of matrices. In this Part I, the important subclasses of generalized inverses, namely of least squares type, of minimum norm type, of reflexive type and the Moore-Penrose inverse, are considered. Most of the results in C.R. Rao (1967) and S.K. Mitra (1968) are included, with alternative proofs or in different contexts. The important roles of orthogonal and oblique projections are emphasized, geometric meaning of the statements are explained, and the structures of the important subclasses are clarified.

One thing to be remarked is the dualities between A^- and $(A^*)^-$, $A^-{}_l$ and $A^-{}_m$ and so on. They make many statements systematic. Moreover the Gauss-Markov theorem on least squares method reduces to the duality between $A^-{}_l$ and $A^-{}_m$. The batteries of equivalent definitions of subclasses, D.g, D.l, D.m, D.r, and D. MP, and the table of projections in § 11.2° will be useful as references.

The Institute of Statistical Mathematics

§1 まえがき

一般逆行列は，特異な行列および長方形行列にたいして，逆行列に近い性質をもつ一意に定まる行列として Moore EH ('20, '35) により導入された．その後，Bjerhammar A ('51), Bott R+Duffin RJ ('53)，Penrose R ('55, '56) が同じ概念を独立に導入し Rado R ('56) により Moore の仕事が注意された．

一般逆行列が最小2乗法，したがって統計学にとって有用な概念であることが上記の論文，その他で意識され，60 年代になってからは非常に多数の文献が現われるようになった．これと平行して，Sheffield RD ('58) Rao CR ('62)，Rohde CA ('66) などは一般逆行列の条件を

この研究は昭和 43·44 年度文部省科学研究費補助金（一般研究），最適計画法の研究（担当者 青山博次郎）の助成による。

ゆるめて，必ずしも一意ではない2, 3種類の一般逆行列を定義し，その性質を調べた．一般逆行列は英語で，*generalized inverse, general reciprocal, pseudo-inverse, rectangular reciprocal*（長方行列にたいして），*partial inverse, semi-inverse, virtual inverse* などの名称で呼ばれており，それぞれに異なる定義を与えようとする試みもあったが，以下で見るように名称で区別しようとすることは無理であり，無意味である．一般逆行列（*g.i.*，と略称）によってもっとも広い意味で考え，適当な記号の導入により区別するのが適当であろう．

g.i. の概念はより広い枠組みの中で論ずることができる．von Neumann J ('36)，Munn WD+Penrose R ('55) は環，半群の一般逆元を論じている．Tseng YY ('49a, '49b, '49c, '56)，Ben-Israel A+Charnes A ('63) はヒルベルト空間の一般逆写像を論じている．しかし，ここでは統計学への応用を念頭において複素行列の *g.i.* だけを取り上げる．

この論文の I ではまず，Rao CR ('67)，Mitra SK ('68) に沿って，*g.i.* の基本的な分類を行なう．この2論文の結果をかなり含んでいるが，射影の諸性質に注意してなるべく幾何学的に，直観が働きやすいように叙述し，証明した．また，命題をなるべく一般化するとともに，集合としての *g.i.* の分類を明確にするよう意図した．

§2　記号と線形写像

A を m×n 複素行列，A^* をその転置共役行列とする．$\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$ は複素 n ベクトル空間 $\mathscr{V}^n$ から複素 m ベクトル空間 $\mathscr{V}^m$ への線形写像，値域

$$\mathscr{R}(A)=\{\boldsymbol{y};\ \boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}\in\mathscr{V}^n\}\subset\mathscr{V}^m$$

および核（または零化空間）

$$\mathscr{N}(A)=\{\boldsymbol{x};\ A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{x}\in\mathscr{V}^n\}\subset\mathscr{V}^n$$

はそれぞれの部分空間である．$\mathscr{R}(A)$ は A の列ベクトルが張る部分空間である．A^*: $\mathscr{V}^n\to\mathscr{V}^m$ についても同様に定義する．$\mathscr{N}(A)$，$\mathscr{N}(A^*)$ はそれぞれ．$\mathscr{R}(A^*)$，$\mathscr{R}(A)$ の直交補空間となっている．

$$\mathscr{N}(A)=\mathscr{R}(A^*)^{\perp},\quad \mathscr{N}(A^*)=\mathscr{R}(A)^{\perp}.$$

したがって

$$\dim\mathscr{N}(A)=m-\dim\mathscr{R}(A^*)=m-\operatorname{rank}A=\operatorname{null}A$$

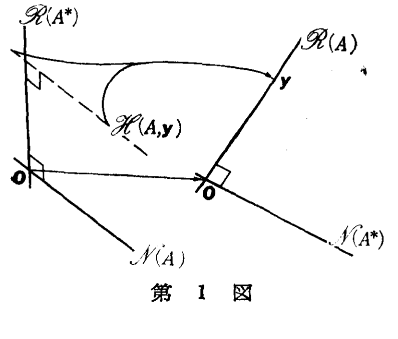
A を $\mathscr{R}(A^*)$ から $\mathscr{R}(A)$ への写像と制約すれば双射となっている．これの代数的な表現の1つは次の定理である．(L. Autonne, Ann. Univ. Lyon, (2), 38 (1915), 1–77 によるといわれている)．

定理 2.1　A を $m\times n$ 階数 r の行列とすると，それぞれ m 次元，n 次元のユニタリ行列 U, V が存在して

$$UAV^*=D$$

ただし D は $d_{ii}=\lambda_i>0$, $i=1, 2, \cdots, r$, 他の要素は0の"一般対角行列"で，λ_i は A^*A の正固有値の正平方根である．A を正方行列に限れば，A はその特異値を対角要素とする対角行列にユニタリ同値である，といえる．

証明はたとえば Forsythe G+Moler CB ('67) を見よ．



第　1　図

任意の $\boldsymbol{y}\in\mathscr{R}(A)$ にたいして

$$\mathscr{H}(A,\ \boldsymbol{y})=\{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{x}_1;\ \boldsymbol{x}_0\in\mathscr{N}(A),\ A\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{y}\}=\boldsymbol{x}_1+\mathscr{N}(A)$$

と定義する．つまり方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ の解の全体がなす超平面である．

第1図は線形写像の幾何学的直観に役立つだろ

う．後の説明でも同種の図を用いる．ただし次元を最小にして表わしてあるからそのための錯誤を犯さぬよう注意が必要である．

§3 射　影

ここでは m 次元ユニタリ空間 $\mathscr{V}^m$ (座標の固定された) での射影についての結果をまとめておく．正射影以外の部分は一般の線形空間にたいして成り立ち，行列の階数によらない部分は無限次元の線形作用素についても成り立つことを注意しておく．射影について比較的詳しい教科書は Halmos PR ('48), Hamburger HL+Grimshaw ME ('51) である．また Densoer CA+Whalen BH ('63), Chipman JS+Rao MM ('64) を見よ

1°
$$\mathscr{V}^m = \mathscr{S} \oplus \mathscr{T}$$
を $\mathscr{V}^m$ の部分空間 $\mathscr{S}, \mathscr{T}$ への直和分解とすると，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathscr{V}^m$ は
$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \quad \boldsymbol{x}_1 \in \mathscr{S}, \quad \boldsymbol{x}_2 \in \mathscr{T}$$
と一意に分解される．

2° $P: \mathscr{V}^m \to \mathscr{V}^m$; $P\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1$ は線形変換である．これを "$\mathscr{T}$ に沿った $\mathscr{S}$ の上への斜射影 (一般射影)" という．P により一定の座標系にたいする行列をも表わす．

3° $\mathscr{V}^m$ の直和分解 $\mathscr{S} \oplus \mathscr{T}$ が与えられるとき，$\mathscr{T}$ に沿う $\mathscr{S}$ の上への斜射影を表わす行列 P は一意である．

4° P が $\mathscr{T}$ に沿った $\mathscr{S}$ の上への斜射影行列ならば $I-P$ は $\mathscr{S}$ に沿った $\mathscr{T}$ の上への斜射影行列である．

5° P が 4° の斜射影行列ならば
$$P\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}, \text{ for all } \boldsymbol{x} \in \mathscr{S}. \quad P\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \text{ for all } \boldsymbol{x} \in \mathscr{T}.$$

6° P が 4° の斜射影行列ならば
$$\mathscr{R}(P) = \mathscr{S},$$
$$\mathscr{R}(I-P) = \mathscr{N}(P) = \mathscr{T}.$$

7° P が斜射影行列ならば P はべき等である；
$$P^2 = P.$$

8° 逆に P がべき等行列ならば，P は $\mathscr{R}(I-P)$ に沿った $\mathscr{R}(P)$ への斜射影行列である．

9° $m \times m$ 行列 P にたいして
$$\operatorname{rank}(I-P) = m - \operatorname{rank} P$$
ならば P はべき等である．

以上の諸命題をまとめるならば次の定理が適当であろう．証明は略する．

定理 3.1 P を $m \times m$ 行列とすると，次の諸条件は同等である．

(i) $P^2 = P$,

(ii) $P\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ for all $\boldsymbol{x} \in \mathscr{R}(P)$,

(iii) $\mathscr{R}(I-P) = \mathscr{N}(P)$ または $\mathscr{R}(P) = \mathscr{N}(I-P)$,

(iv) $\operatorname{rank}(I-P) = m - \operatorname{rank} P$,

(v) $\mathscr{V}^m = \mathscr{R}(P) \oplus \mathscr{R}(I-P)$.

さて A を任意の $m \times n$ 行列とする (n および階数は任意)．A が与えられたとき，その列ベクトルの張る空間 $\mathscr{R}(A)$ への斜射影行列はどのようなものかを調べる．

定理 3.2 次の各条件は $m \times m$ 行列 P が $\mathscr{R}(I-P)$ に沿った $\mathscr{R}(A)$ への斜射影であるための必要十分条件である：

$n \times m$ 行列 G により $P=AG$ と書け ($\Leftrightarrow \mathscr{R}(P) \subset \mathscr{R}(A)$),

(i) $P^2 = P$, $\operatorname{rank} P = \operatorname{rank} A$,

(ii) $PA=A$,

(iii) $P\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$ for all $\boldsymbol{x}\in\mathscr{R}(A)$,

(iv) $\text{rank}\,(I-P)=m-\text{rank}\,A$,

証明

(i) $\text{rank}\ P=\text{rank}\,AG=\text{rank}\,A\Leftrightarrow\mathscr{R}(P)=\mathscr{R}(A)$ だから定理 3.1 により P が斜射影であるための必要十分条件である.

P が $\mathscr{R}(A)$ への斜射影 $\Rightarrow$ (ii)$\Leftrightarrow$(iii) は明らかである. (ii)$\Rightarrow$(i) は, (ii) の両辺の右から G を乗ずれば $P^2=P$ となり, また (ii) と $P=AG$ から $\text{rank}\,A\leqq\text{rank}\,P\leqq\text{rank}\,A$.

(iv) $$\text{rank}\,(I-AG)\geqq m-\text{rank}\,AG\geqq m-\text{rank}\,A$$

だから, 両端が等しければ

$$\mathscr{V}^m=\mathscr{R}(A)\oplus\mathscr{R}(I-P),\quad \mathscr{R}(A)=\mathscr{R}(P)$$

で, これは P が $\mathscr{R}(I-P)$ に沿った $\mathscr{R}(A)$ への射影であることと同等である. (証明終)

10° $\mathscr{T}$ に沿った $\mathscr{S}$ の上への斜射影 P の1つの構成法を示そう.

$A=[\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_r]$, $B=[\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_{m-r}]$ をそれぞれ $\mathscr{S}$, $\mathscr{T}$ の任意の基底を列とする行列とすると

$$\begin{aligned}P&=[A,\ O]\,[A,\ B]^{-1}\\&=AS\end{aligned}$$

ただし S は $[A,B]^{-1}$ の初めの r 行から成る行列である. 証明は容易である.

11° 上式の応用の1つとして (他の証明法もあるが), べき等行列の固有和についての式を得る:

$$\text{tr}P=\text{tr}([A,\ B]^{-1}[A,\ O])=\text{rank}\,A=\text{rank}\,P$$

12° 斜射影の積. P_i を $\mathscr{T}_i$ に沿った $\mathscr{S}_i$ の上への斜射影とする.

(i) $P_1P_2=P_2\Leftrightarrow\mathscr{S}_2\subset\mathscr{S}_1$

(ii) $P_2P_1=P_2\Leftrightarrow\mathscr{T}_1\subset\mathscr{T}_2$

(i) は $\mathscr{R}(P_2)=\mathscr{R}(P_1P_2)\subset\mathscr{R}(P_1)$ だから当然でである. (ii) は $I-P_1$, $I-P_2$ について考えれば (i) から得る. これら2条件は同時に成立つこともそうでないこともある. (ii) から明らかに

(iii) $P_2P_1=P_2,\ P_1P_2=P_1\Leftrightarrow\mathscr{T}_1=\mathscr{T}_2$

13° 斜射影の和についてもっとも一般的なのは次の定理であろう. 証明は Hamburger HL +Grimshaw ME ('51), Graybill FA+Marsaglia G ('57) を見よ

P_i は $m\times m$ 行列で $\text{rank}\,P_i=r_i$, $i=1,2,\cdots,k$. $P=\sum_{i=1}^{k}P_i$, $\text{rank}\,P=r$ とする.

(C 1) $P_i^2=P_i,\ i=1,\cdots,k$

(C 2) $P^2=P$

(C 3) $r=\sum_{i=1}^{k}r_i$

(C 4) $P_iP_j=O,\ i\neq j$

という4条件を考える.

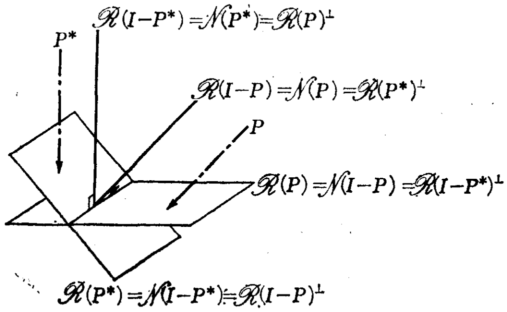
(C 1 & C 2)$\Leftrightarrow$(C 3 & C 4), (C 1 & C 3)$\Leftrightarrow$(C 2 & C 4) (C 1 & C 4)$\Leftrightarrow$(C 2 & C 3)

さらに (C 2 & C 4)$\Rightarrow$C 1 or C 3, (C 3 & C 4)$\Rightarrow$C 1 or C 2 は否定的である.

14° 上の定理の系として, (12° とも関連があるが) P_1, P_2 がべき等ならば

$$P_1-P_2\ \text{がべき等}\Leftrightarrow P_1P_2=P_2P_1=P_2$$

15° $m\times m$ 行列 P がべき等ならば P^* もべき等である. これは $\mathscr{N}(P^*)=\mathscr{R}(P)^\perp$ に沿った $\mathscr{R}(P^*)=\mathscr{R}(I-P)^\perp$ の上への斜射影となる. 2つの斜射影の関係は第2図のようになる.



第 2 図

16°　15° から明らかに斜射影行列 P にたいして

$\mathscr{R}(P)=\mathscr{R}(P^*) \Leftrightarrow P$ が $\mathscr{R}(P)$ の上への正射影.

17°　ところで P がべき等ならば

$$\mathscr{R}(P)=\mathscr{R}(P^*) \Leftrightarrow P=P^*$$

だから，エルミート・べき等行列すなわち正射影行列，である。

18°　与えられた部分空間 $\mathscr{S}$ の上の正射影行列は当然一意である.

19°　定理 3.2 で，さらに

$$\mathscr{R}(P^*)=\mathscr{R}(P)$$

を加える．換言すると

$$P, P^* \text{ が共に } \mathscr{R}(A) \text{ への斜射影である}$$

とすると，P が $\mathscr{R}(A)$ の上への正射影（それを今後 Π_A で書く）であるための必要十分条件が得られる．冗長な部分を除くと，定理 3.1 の (i) (ii) を次のようにまとめることができる.

定理 3.3　　$P=\Pi_A$

$$\Leftrightarrow \text{(i)} \quad P=AG,\ P=PP^*,\ \operatorname{rank} P=\operatorname{rank} A$$

$$\Leftrightarrow \text{(ii)} \quad P=AG,\ P^*A=A.$$

証明 (i) は第2の仮説で PP^* がエルミートだから

$$PP^*=P=P^*=P^2$$

したがって定理 3.2 の (i) に $P=P^*$ を加えたことになる．$P=\Pi_A$ から (i) は明らか.

(ii) の条件から

$$P^*P=P^*AG=AG=P$$

また

$$\operatorname{rank} A \leqq \operatorname{rank} P^*=\operatorname{rank} P \leqq \operatorname{rank} A$$

であり，したがって (i) の条件を得る．(i) $\Rightarrow$ (ii) は明らか.

なお後の節で他の表現を加える.

20°　Π_A を $\mathscr{R}(A)$ の上への正射影，P を $\mathscr{R}(A)$ の上（または中）への任意の射影とすると，

$$\|(I-P)x\|^2=\|(I-\Pi_A)x\|^2+\|(\Pi_A-P)x\|^2$$
$$\geqq \|(I-\Pi_A)x\|^2 \quad \text{for all } x \in \mathscr{V}^m$$

21°　これまで直交補空間，正射影という場合にはもちろん，ふつうの内積の定義

$$(x, y)=y^*x$$

によっている．今後も特に断らなければこの意味である．もしも，Λ を正定符号行列とし，

$$(x, y)=y^*\Lambda x$$

と定義し，P がこの意味での正射影であるとすると，P がエルミートという前の条件は

$$P^*\Lambda P=\Lambda P=P^*\Lambda$$

と変えねばならない.

$\mathscr{R}(A)$ の上への正射影であるための必要十分条件は

$$P=AG \ \&\ P^*\Lambda A=\Lambda A$$

となる．20° の話も距離が $\|z\|=\sqrt{z^*\Lambda z}$ で定義されると，上の意味での正射影により $\|(I-P)x\|$ が最小にされる.

§4 一般逆行列の定義

1° 以下 D.g1, D.g2, ⋯ により，もっとも広い意味での逆行列の同等な定義を述べる．

D.g1 任意の $m\times n$ 複素行列 A にたいして，$n\times m$ 行列 G が，任意の $\boldsymbol{y}\in\mathscr{R}(A)\subset\mathscr{V}^n$ を超平面 $\mathscr{H}(A,\ \boldsymbol{y})=\{\boldsymbol{x};\ A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}\}$ の1点に写す線形写像であるとき；

$$G\boldsymbol{y}\in\mathscr{H}(A,\ \boldsymbol{y})\ \text{ for all }\ \boldsymbol{y}\in\mathscr{R}(A),$$

G を A の一般逆行列という．$\mathscr{R}(A)$ 以外の $\mathscr{V}^n$ の点がどこに写像されるかは問わない．

注意 このような G が存在することは後で構成的に示される．$\boldsymbol{y}\in\mathscr{R}(A)$ を $\mathscr{H}(A,\ \boldsymbol{y})$ のどこに写像するかについて自由度があり，さらに $\mathscr{R}(A)$ 以外の $\mathscr{V}^n$ の点の写像についても自由度がある．A が正方正則ならば双射であり G は A^{-1} となり，これに限る．

A の任意の一般逆行列を A^- で表わし，その全体を $\mathscr{I}(A)$ で表わす．

2° 以下の定義は明らかに D.g1 と同等である．

D.g2 $AG\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}$ for all $\boldsymbol{y}\in\mathscr{R}(A)$.

D.g3 解の存在する (consistent) 連立方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ にたいして $\boldsymbol{x}=G\boldsymbol{y}$ が1つの解を与える．

3° D.g2 と定理 3.2 から次の定義を得る．

D.g4 AG が $\mathscr{R}(I-AG)$ に沿った $\mathscr{R}(A)$ への斜射影である．

D.g5 AG がべき等で，$\operatorname{rank}AG=\operatorname{rank}A$

D.g6 $\operatorname{rank}\ (I-AG)=m-\operatorname{rank}A$

D.g7 $AGA=A$

4° D.g7 の両辺の転置共役行列をとれば

$$G\in\mathscr{I}(A)\ \Leftrightarrow\ G^*\in\mathscr{I}(A^*)$$

あるいは

$$\mathscr{I}(A^*)=\{G^*,\ G\in\mathscr{I}(A)\}$$

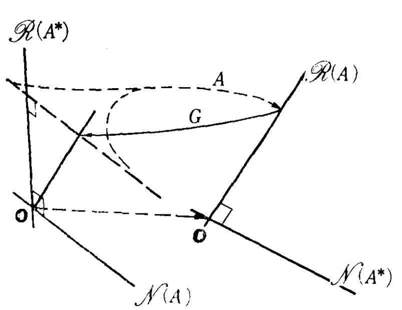
といえる．したがって D.g4—D.g7 の $P=AG$ についての議論を P^* についての議論に変え，命題の中の A^*, G^*, m を A, G, n に変えることにより次の定義が導かれる．

5° D.g4′ GA が $\mathscr{N}(A)$ に沿った $\mathscr{R}(GA)$ への斜射影である．

D.g5′ GA がべき等で $\operatorname{rank}GA=\operatorname{rank}A$

D.g6′ $\operatorname{rank}\ (I-GA)=n-\operatorname{rank}A$

D.g7′ $(GA)^*A^*=A^*$



第 3 図

ただし最後は D.g7 そのもので特に書くこともない．逆にこの事実は D.g7 がもっとも便利な定義であることの1つの裏付けとなっている．

6° D.g4′ の意味は第3図から明らかであろう．GA を $\mathscr{R}(A^*)$ から $\mathscr{R}(GA)$ への変換に制限すれば双射である (D.g5′ から言える)．

7° $\mathscr{R}(A)=\mathscr{R}(AA^*)$, $\mathscr{R}(A^*)=\mathscr{R}(A^*A)$ に注意すれば，D.g4, D.g4′ と定理 3.2 (ii) から

D.g8 $AGAA^*=AA^*$

D.g8′ $(GA)^*A^*A=A^*A$

あるいは，$BAA^*=CAA^*\Leftrightarrow BA=CA$ に注意すれば，D.g7, D.g7′ と同等なことがわかる．

8° D.g8, D.g8′ から直ちに

$$G\in\mathscr{I}(AA^*)\Rightarrow A^*G\in\mathscr{I}(A)$$

$$G\in\mathscr{I}(A^*A)\Rightarrow AG^*\in\mathscr{I}(A^*)$$

後で見るように $A^*(AA^*)^-$, $A(A^*A)^{-*}$ は特殊な $g.i.$ である．10° の注意から $A(A^*A)^- \in \mathscr{I}(A^*)$.

9°　D. g 7 から

$$\mathrm{rank}\, G \geqq \mathrm{rank}\, A$$

実は，この条件を満たす任意の階数の $g.i.$ が存在し，この $g.i.$ は特殊なものであることが後でわかる．6° で，一般には $\mathscr{R}(GA)$ が $\mathscr{R}(G)$ の真部分集合であることに注意せよ．D. g 5, D. g 5′ にあるように，$G \in \mathscr{I}(A)$ ならば $\mathrm{rank}\, AG = \mathrm{rank}\, GA = \mathrm{rank}\, A$ である．

10°　4° で注意したように,

$$G \in \mathscr{I}(A) \Leftrightarrow G^* \in \mathscr{I}(A^*).$$

特にAがエルミートであれば，A^-は必ずしもエルミートでないが $(A^-)^* \in \mathscr{I}(A)$ となる.

§5　一般逆行列と射影，連立1次方程式

1°　§4 の射影に関する部分を便宜のためにまとめておこう：　なお §11, 2° を参照せよ.

$P=AG$	は $\mathscr{V}^m$	における	$\mathscr{R}(I-P)=\mathscr{N}(AG)$	に沿った	$\mathscr{R}(A)$	の上への斜射影.
〃 G^*A^*	〃 〃	〃	$\mathscr{N}(A^*)$	〃	$\mathscr{R}(G^*A^*)$	〃
〃 GA	〃 $\mathscr{V}^n$	〃	$\mathscr{N}(A)$	〃	$\mathscr{R}(GA)$	〃
〃 A^*G^*	〃 〃	〃	$\mathscr{N}(A^*G^*)$	〃	$\mathscr{R}(A^*)$	〃

2°　§3 の 19° で $\mathscr{R}(A)$ への正射影の表現を与えたが，ここでは $g.i.$ を用いた表現を与えよう.

定理 5.1　$P = \Pi_A$

$\Leftrightarrow$ (i)　$P = AG,\ G \in \mathscr{I}(A),\ \mathscr{R}(P^*) \subset \mathscr{R}(A)$,

$\Leftrightarrow$ (ii)　$P = A(A^*A)^-A^*$.

証明 (i)　D. g 4 から P は $\mathscr{R}(A)$ の上への斜射影したがって P^* もべき等（斜射影）であるが，第1，第3の仮説から $\mathrm{rank}\, P^* \leqq \mathrm{rank}\, A \leqq \mathrm{rank}\, P$ であり，したがって $\mathscr{R}(P^*) = \mathscr{R}(A)$ P も P^* も $\mathscr{R}(A)$ の上への射影だから正射影である．(ii) §4, 8° で見たように $A(A^*A)^- \in \mathscr{I}(A)$．上の議論から $P = A(A^*A)^-A^*$ は $\mathscr{N}(A^*)$ に沿った $\mathscr{R}(P) \subset \mathscr{R}(A)$ の上への射影であるが，当然 $\mathscr{R}(P) = \mathscr{R}(A)$ であり，したがって正射影である.

3°　この節の後半では連立方程式

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$$

と A の $g.i.$ との関係についてまとめておく．まず

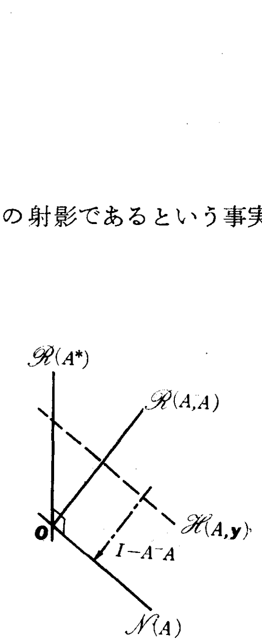
$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}\ \text{が解をもつ} \Leftrightarrow AA^-\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}$$

これは A^- の定義 D. g 3 そのものであるし，AA^- が $\mathscr{R}(A)$ の上への射影であるという事実からも明らかである.

4°　$\mathscr{N}(A) = \{\boldsymbol{x};\ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$

$= \{(I - A^-A)\boldsymbol{z};\ \boldsymbol{z} \in \mathscr{V}^n \mid A^- \in \mathscr{I}(A)$ は任意に固定$\}$

$= \{(I - GA)\boldsymbol{z}_0;\ G \in \mathscr{I}(A) \mid \boldsymbol{z}_0 \notin \mathscr{N}(A)$ は任意に固定$\}$



第 4 図

実際，$I - A^-A$ は $\mathscr{R}(A^-A)$ に沿った $\mathscr{N}(A)$ への射影であり，$\boldsymbol{z}$ を動かすか A^- を動かせば $\mathscr{N}(A)$ 全体に渡る．$\boldsymbol{z}$ を $\mathscr{V}^n$ 全体に動かす必要はなく，たとえば $\boldsymbol{z} \in \mathscr{H}(A, \boldsymbol{y}_0)$ でよい．G も $\mathscr{I}(A)$ 全体を動かす必要はないが，これについては後で論ずる.

5°　$\boldsymbol{y} \in \mathscr{R}(A)$ のとき

$\mathscr{H}(A, \boldsymbol{y}) = \{\boldsymbol{x};\ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}\}$

$= \{\boldsymbol{x} = G_1\boldsymbol{y} + (I - G_2A)\boldsymbol{z};\ \boldsymbol{z} \in \mathscr{V}^n \mid G_1, G_2 \in \mathscr{I}(A)$ は任意に固定$\}$

$= \{x = A^- y + (I - GA)x_0;\ G \in \mathscr{I}(A) \mid A^- \in \mathscr{I}(A),\ x_0 \in \mathscr{V}^n$ は任意に固定$\}$

$= \{x = Gy;\ G \in \mathscr{I}(A)\}$

6° 定理 5.2

$$(l, x) = \text{constant} \quad \text{for all} \quad x \in \mathscr{X}(A,\ y) \quad (y = A\,x)$$

$\Leftrightarrow$ (i) $(A^- A)^* l = l$ for some $A^- \in \mathscr{I}(A)$

$\Leftrightarrow$ (ii) $l \in \mathscr{R}(A^*)$

$\Leftrightarrow$ (iii) $l^* GA = \text{constant}$ for all $G \in \mathscr{I}(A)$

証明. (i) 5° の第2の表現から

$$l^* x = l^* A^- y + l^* (I - A^- A) z = \text{constant for all } z \in \mathscr{V}^n$$

$$\Leftrightarrow\ l^*(I - A^- A) = 0\ \Leftrightarrow\ \text{(i)}$$

(ii)$\Leftrightarrow$(i) は $(A^- A)^*$ が $\mathscr{R}(A^*)$ の上への射影であることから明らか.

(iii)$\Leftrightarrow$(ii) も $(GA)^*$ が $\mathscr{R}(A^*)$ への射影であることから言える. あるいは 5° の第3の表現からも明らか.

§6 一般逆行列の特殊化

一般逆行列 $A^- \in \mathscr{I}(A)$ の定義に制約を加えて興味ある部分集合を求める.

(i) $A^-{}_l \in \mathscr{I}_l(A)$ (least squares type) 任意の

$$y = y_0 + y_1,\quad y_0 \in \mathscr{N}(A^*),\quad y_1 \in \mathscr{R}(A)$$

にたいして

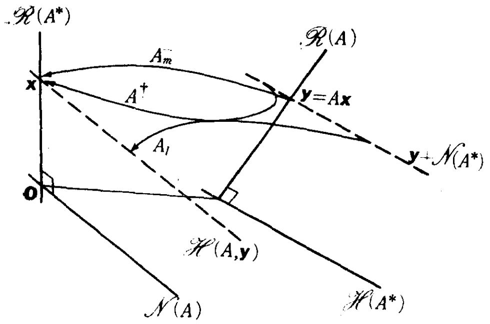
$$A^-{}_l\, y \in \mathscr{X}(A,\ y_1)$$

(ii) $A^-{}_m \in \mathscr{I}_m(A)$ (minimum norm type)

$$A^-{}_m y_1 \in \mathscr{R}(A^*) \cap \mathscr{X}(A,\ y_1) \quad \text{for all } y_1 \in \mathscr{R}(A)$$

(iii) $A^-{}_r \in \mathscr{I}_r(A)$ (reflexive type)

$$\dim\ \mathscr{R}(A^-{}_r) = \dim\ \mathscr{R}(A)$$



第 5 図

(iv) $A^\dagger \in \mathscr{I}^\dagger(A)$ (Moore-Penrose type)

上の (i) の記号を用いると

$A^\dagger y \in \mathscr{R}(A^*) \cap \mathscr{X}(A,\ y_1)$ for all $y = y_0 + y_1$

名前の意味は, これらの部分集合の性質の検討から明らかとなるだろう. $A^-{}_l$ などの記号は A^- とともに Rao CR ('62, '67) によるが $A^\dagger$ (ダッガー) は Penrose R ('55) のもので Rao CR は A^+ を用いている.

(i), (ii), (iv) の幾何学的な意味を第5図に示す. ただし, 一般に $\mathscr{N}(A^*)$ と $\mathscr{N}(A)$ の次元は異なることに注意されたい.

§7 $\mathscr{I}_l(A)$

1° 連立方程式 $Ax = y$ が解をもたないとき, $\hat{x}$ が

$$\| A\hat{x} - y \| \leqq \| Ax - y \| \quad \text{for all } x \in \mathscr{V}^n$$

を満たせば, これを最小2乗解という. このような $\hat{x}$ は必ずしも一意ではない.

§6 の A^-_l の定義

D.11　$A^-_l \boldsymbol{y} \in \mathscr{H}(A,\ \boldsymbol{y}_1)$；$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_0 + \boldsymbol{y}_1,\ \boldsymbol{y}_0 \in \mathscr{N}(A^*),\ \boldsymbol{y}_1 \in \mathscr{R}(A)$

にたいして，次の条件が同等である：

D.12　$\boldsymbol{x} = A_l^- \boldsymbol{y}$ が $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ の最小2乗解の1つを与える．

実際

$$\| A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \|^2 = \| A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}_1 \|^2 + \| \boldsymbol{y}_0 \|^2 \geqq \| \boldsymbol{y}_0 \|^2$$

で，等号が成立つのは $\boldsymbol{x}$ が解をもつ連立方程式 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}_1$ の解のときであり，そのときに限る．

2°　$G \in \mathscr{I}_l(A)$ の同等な定義として

D.13　$AG = \Pi_A$

D.14　$G \in \mathscr{I}(A)$，$(AG)^* = AG$

D.15　$G \in \mathscr{I}(A)$，$(AG)^*(I - AG) = O$

D.16　$A^*AG = A^*$

D.17　$G \in \mathscr{I}(A)$，$\mathscr{R}(G^*A^*) \subset \mathscr{R}(A)$

証明

§3, 20° で見たように $\mathscr{R}(A)$ へのすべての射影 P にたいして

$$\| \Pi_A \boldsymbol{y} - \boldsymbol{y} \| \leqq \| P\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y} \|$$

であり，逆も言えるから，D.13 は D.12 と同等である．D.14，D.15，D.16 が D.17 と同等であることは §3, 19° 特に定理 3.3 から言える．D.17 は定理 5.1 から言える．

D.14，D.15 は理解し易いために特記したが，実は D.17 の系である．

§2, 18° でも述べたように，$\mathscr{R}(A)$ の上への正射影 Π_A は一意であるが，A^-_l は一意ではない．特に A^- と同様に，一般には

$$\mathrm{rank}\, A^-_l \geqq \mathrm{rank}\, A$$

である．第5図では $\boldsymbol{y} + \mathscr{N}(A^*)$ が A^-_l により $\mathscr{H}(A, \boldsymbol{y})$ の1点に写像されており，したがって $\mathscr{N}(A^*)$ は $\{\boldsymbol{0}\}$ に写像されているが，一般には $A^-_l \mathscr{N}(A^*)$ は部分空間をなすことに注意しなければならない．

3°　$m \times n$ 行列 A が

$$\mathrm{rank}\, A = m \leqq n$$

ならば

$$\mathscr{I}(A) = \mathscr{I}_l(A)$$

このとき $\mathrm{null}\, A^* = \dim \mathscr{N}(A^*) = 0$ で，連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ は任意の $\boldsymbol{y}$ にたいして解をもち，$\| AA^-\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y} \| = 0$ となるから，$\mathscr{I}(A)$ と $\mathscr{I}_l(A)$ は一致する．

4°　$$G_1,\ G_2 \in \mathscr{I}_l(A) \Rightarrow A(G_1 - G_2) = O$$

これは $\Pi_A = AG_i$，$i = 1, 2$，の一意性による．

5°　$G \in \mathscr{I}_l(A)$ だと §5. 1° の射影の表で AG，G^*A^* の行に注釈が必要となる．D.14 から $AG = G^*A^*$ で，エルミートであるから $\mathscr{R}(A) = \mathscr{R}(G^*A^*)$ の上への正射影となる．$\mathscr{N}(A^*) = \mathscr{N}(AG)$ はその直交補空間である．

§8　$\mathscr{I}_m(A)$，$\mathscr{I}_{lm}(A)$

1°　連立方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ が解（一般には一意でない）をもつとき，解 $\boldsymbol{x}$ が

$$\| \boldsymbol{x} \| \leqq \| G\boldsymbol{y} \| \quad \text{for all} \quad G \in \mathscr{I}(A)$$

を満たすならばノルム最小解であるという．

§6 の A^-_m の定義（を少し書き変えた）

D.m1　$A^-_m \in \mathscr{I}(A)$，$A^-_m \boldsymbol{y} \in \mathscr{R}(A^*)$ for all $\boldsymbol{y} \in \mathscr{R}(A)$

と次の定義は同等である.

D. m 2　任意の $\boldsymbol{y}\in\mathscr{R}(A)$ にたいし $A^{-}{}_{m}\boldsymbol{y}$ は $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ のノルム最小解を与える.

実際 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ の任意の解を

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+\boldsymbol{x}_1,\quad \boldsymbol{x}_0\in\mathscr{N}(A),\quad \boldsymbol{x}_1\in\mathscr{R}(A^*)$$

とすれば

$$\|\boldsymbol{x}\|^2=\|\boldsymbol{x}_0\|^2+\|\boldsymbol{x}_1\|^2\geqq\|\boldsymbol{x}_1\|^2$$

2°　$G\in\mathscr{I}_m(A)$ の同等な定義として

D. m 3　$GA=\Pi_{A^*}$

D. m 1⇒D. m 3　実際 GA は $\mathscr{H}(A,\ \boldsymbol{y})=A^{-}{}_{m}\boldsymbol{y}+\mathscr{N}(A)$ のすべての点を $A^{-}{}_{m}\boldsymbol{y}$ に写像するから $\mathscr{R}(A^*)$ への正射影である. D. m 3⇒D. m 1 を言うには,

$$AGA=A\Pi_{A^*}=(\Pi_{A^*}A^*)^*=A$$

したがって $G\in\mathscr{I}(A)$ であり, また $\mathscr{R}(G)\subset\mathscr{R}(\Pi_{A^*})=\mathscr{R}(A^*)$ を見ればよい.

3°　上の D. m 3 の両辺の転置共役行列をとれば

$$A^*G^*=\Pi_{A^*}$$

これと D. 13 とを比較し, また D. 13 の転置共役を D. 13 と比較すれば

定理 6. 1

$$G\in\mathscr{I}_m(A)\Leftrightarrow G^*\in\mathscr{I}_l(A^*)$$

同じことだが

$$(A^*)^{-}{}_{m}{}^{*}\in\mathscr{I}_l(A)\ \text{あるいは}\ (A^*)^{-}{}_{l}{}^{*}\in\mathscr{I}_m(A)$$

4°　上の定理 6. 1 から D. 14—D. 17 において $G\to G^*$, $A\to A^*$ として, それを G に関する条件式と見れば, これらと双対な $G\in\mathscr{I}_m(A)$ の定義を得る:

D. m 4　$G\in\mathscr{I}(A)$, $(GA)^*=GA$

D. m 5　$G\in\mathscr{I}(A)$, $(GA)^*(I-GA)=0$

D. m 6　$GAA^*=A^*$,

D. m 7　$G\in\mathscr{I}(A)$, $\mathscr{R}(GA)\subset\mathscr{R}(A^*)$

5°　§7, 3°, 4°, 5° と同様に.

$m\times n$ 行列 A が

$$\operatorname{rank}A=n\leqq m$$

ならば

$$\mathscr{I}_m(A)=\mathscr{I}(A).$$

また,

$$G_1,\ G_2\in\mathscr{I}_m(A)\Rightarrow(G_1-G_2)A=0.$$

$G\in\mathscr{I}_m(A)$ ならば §5. 1 の射影の表で GA, A^*G^* の行は 1 つにまとめられ, $GA=A^*G^*$ は $\mathscr{R}(A^*)=\mathscr{R}(GA)=\mathscr{N}(A)^{\dagger}=\mathscr{N}(A^*G^*)^{\dagger}$ の上への正射影となる.

6°　簡単のために

$$\mathscr{I}_{lm}(A)=\mathscr{I}_l(A)\cap\mathscr{I}_m(A)$$

その要素を $A^{-}{}_{lm}$ と書くことにする. $G\in\mathscr{I}_{lm}(A)$ を特徴づけるためには, $\mathscr{I}_l(A)$ に属するための条件の 1 つと $\mathscr{I}_m(A)$ に属すための条件の 1 つとを組合せればよい. たとえば

$$G\in\mathscr{I}_{lm}(A)$$

⇔ (i)　$AG=\Pi_A$, $GA=\Pi_{A^*}$

⇔ (ii)　$G\in\mathscr{I}(A)$, AG および GA がエルミート

⇔ (iii)　$A^*AG=GAA^*=A^*$

7°　$G\in\mathscr{I}_l(A)\cap\mathscr{I}_m(A)\Leftrightarrow G^*\in\mathscr{I}_m(A^*)\cap\mathscr{I}_l(A^*)$ だから $G\in\mathscr{I}_{lm}(A)\Leftrightarrow G^*\in\mathscr{I}_{lm}(A^*)$ が成立つ.

もしも A がエルミート，$G\in\mathscr{I}_l(A)$ (または $\in\mathscr{I}_m(A)$) もエルミートならば $G\in\mathscr{I}_{lm}(A)$ である．

8° A^-_{lm} は $y\in\mathscr{R}(A)$ を $\mathscr{R}(A^*)\cap\mathscr{H}(A, y)$ に，$y+\mathscr{N}(A^*)$ のすべての点を $\mathscr{H}(A, y)$ に写像するが，$y+\mathscr{N}(A^*)$ の一般の点は必ずしも $\mathscr{R}(A^*)\cap\mathscr{H}(A, y)$ には写像されないことに注意すべきである．

§9 $\mathscr{I}_r(A)$, $\mathscr{I}_{lr}(A)$, $\mathscr{I}_{mr}(A)$

1° $\mathscr{I}_l(A)$ は $y\notin\mathscr{R}(A)$ にたいする A^-y をある程度限定したものと考えられる．$\mathscr{I}_r(A)$ も同様に $y\in\mathscr{R}(A)$ をどこに写像するかをある程度規定する．§6 で述べた $G\in\mathscr{I}_r(A)$ の定義

D.r 1　$G\in\mathscr{I}(A)$，$\operatorname{rank} G=\operatorname{rank} A$ の第2の条件は次の諸条件と同等である ($G\in\mathscr{I}(A)$ ならば $\operatorname{rank} G\geqq\operatorname{rank} A$ だから第2の条件は $\leqq$ で十分である．)

定理 9.1　$G\in\mathscr{I}(A)$ とする．$\operatorname{rank} G=\operatorname{rank} A$

$\Leftrightarrow$ (i)　$G\mathscr{R}(A)=\mathscr{R}(G)$,

$\Leftrightarrow$ (ii)　$\mathscr{V}^m=\mathscr{R}(A)\oplus\mathscr{N}(G)$,

$\Leftrightarrow$ (iii)　G を $\mathscr{R}(A)$ から $\mathscr{R}(G)$ への写像と制約したとき双射である．

2° $\mathscr{I}_r(A)$ のもっとも著るしい性質は次の反射性であろう．

定理 9.2

$$G\in\mathscr{I}_r(A)\Leftrightarrow A\in\mathscr{I}_r(G)$$

証明　3通りの証明を述べる．一方の向きだけを示せば十分である．

(証明1) $g.i.$ の定義に $\operatorname{rank} G=\operatorname{rank} A$ を加えれば，$G\in\mathscr{I}_r(A)$ のとき AG がべき等で $\operatorname{rank} AG=\operatorname{rank} A=\operatorname{rank} G$ これと D.g 5′ を比べれば $A\in\mathscr{I}(G)$ であり，さらに階数の条件から $A\in\mathscr{I}_r(G)$ となる，D.g 5′ から出発して D.g 5 を用いても同じことである．

(証明2) 一般に $\mathscr{R}(GA)\subset\mathscr{R}(G)$ であるが，$\operatorname{rank} G=\operatorname{rank} A$ ならば $\mathscr{R}(GA)=\mathscr{R}(A)$ である．$g.i.$ の定義 D.g 4′ から，$G\in\mathscr{I}_r(A)$ ならば GA が $\mathscr{N}(A)=\mathscr{N}(GA)$ に沿った $\mathscr{R}(G)$ への斜射影である。これは定義 D.g 4 から $G\in\mathscr{I}(A)$ を意味する．このときも D.g 4′ から出発して D.g 4 により結論を導ける．

(証明3) D.g 6 より $G\in\mathscr{I}_r(A)\Rightarrow\operatorname{rank}(I-AG)=m-\operatorname{rank} A=m-\operatorname{rank} G$.

D.g 6′ より $A\in\mathscr{I}(G)$.

3° 上の定理を書き直して，$G\in\mathscr{I}_r(A)\Leftrightarrow$

D.r 2　$$AGA=A,\ GAG=G$$

を得る．

4° 定理 9.2 の (証明2) に現われた射影についての説明の通り，§5, 1° の各行に注釈が心要となる．つまり，$G\in\mathscr{I}_r(A)$ のときには

$$\mathscr{N}(AG)=\mathscr{N}(G),\qquad \mathscr{N}(A^*G^*)=\mathscr{N}(G^*)$$
$$\mathscr{R}(G^*A^*)=\mathscr{R}(G^*),\quad \mathscr{R}(GA)=\mathscr{R}(G)$$

としなければならない．§11, 2° の表を見よ．

5° 定理 9.2 の (証明2) で逆方向の議論が可能なのは次の明らかな性質によっている．

$$G\in\mathscr{I}_r(A)\Leftrightarrow G^*\in\mathscr{I}_r(A^*)$$

6° $m\times n$ 行列 A にたいし一般に

$$\operatorname{rank} A\leqq\operatorname{rank} A^-\leqq\min(m, n)$$

だから

$$\operatorname{rank} A=\min(m, n)\Rightarrow\mathscr{I}_r(A)=\mathscr{I}(A)$$

7° 定理 9.3

$$\mathscr{I}_r(A)=\{G_1AG_2;\ G_1, G_2\in\mathscr{I}(A)\}$$

$$=\{GAG;\ G\in\mathscr{I}(A)\}$$

証明

$$\mathscr{I}_r(A)\subset\{GAG;\ G\in\mathscr{I}(A)\}\subset\{G_1AG_2;\ G_1,\ G_2\in\mathscr{I}(A)\}$$

の最初の関係は D. r 2 から明らか.

$$F=G_1AG_2,\ \ G_1\in\mathscr{I}(A),\ \ G_2\in\mathscr{I}(A)$$

とおけば

$$AFA=AG_1AG_2A=A$$

$$FAF=G_1AG_2AG_1AG_2=G_1AG_2=F$$

と確かめられる.

8° 簡単のために

$$\mathscr{I}_{lr}(A)=\mathscr{I}_l(A)\cap\mathscr{I}_r(A),\ \ \mathscr{I}_{mr}(A)=\mathscr{I}_m(A)\cap\mathscr{I}_r(A)$$

と書く. §8, 3°-4° で述べた $\mathscr{I}_l(A)$ と $\mathscr{I}_m(A)$ との双対性はそのまま $\mathscr{I}_{lr}(A)$ と $\mathscr{I}_{mr}(A)$ との間に保たれる. つまり,

$$G\in\mathscr{I}_{mr}(A)\ \Leftrightarrow\ G^*\in\mathscr{I}_{lr}(A^*)$$

9° 定理 9.4

$$\mathscr{I}_{lr}(A)=\{G\Pi_A;\ G\in\mathscr{I}(A)\}$$

$$\mathscr{I}_{mr}(A)=\{\Pi_{A^*}G;\ G\in\mathscr{I}(A)\}$$

証明 一方を証明すれば他は 8° の双対性から言える. $\mathscr{I}_{lr}(A)$ の方を取り上げる.

$F=A^-\Pi_A$ とする. AA^- は $\mathscr{R}(A)$ の上への射影であるから

$$AF=AA^-\Pi_A=\Pi_A$$

となり, D. 13 が満たされている. また

$$\operatorname{rank}A\leqq\operatorname{rank}F\leqq\operatorname{rank}\Pi_A\leqq\operatorname{rank}A$$

だから D. r 1 が満たされている.

逆に $\mathscr{I}_{lr}(A)\subset\{G\Pi_A; G\in\mathscr{I}(A)\}$ を言うには, 上でも用いた D. 13 から, $F\in\mathscr{I}_l(A)$ ならば

$$AF=F^*A^*=\Pi_A$$

したがって $\mathscr{R}(\Pi_A)=\mathscr{R}(A)\subset\mathscr{R}(F^*)$ であるが, さらに $F\in\mathscr{I}_r(A)$ ならば $\mathscr{R}(\Pi_A)=\mathscr{R}(F^*)$ となり,

$$F^*=\Pi_AW^*\ \text{あるいは}\ F=W\Pi_A$$

を満足する W が存在する. 再び D. 13 を用いると

$$AFA=AW\Pi_AA=AWA=A$$

したがって $W\in\mathscr{I}(A)$ が導かれる.

10° 幾何学的に言うと, $A^-{}_{lr}$ は $y+\mathscr{N}(A^*)$, $y\in\mathscr{R}(A)$, 全体を $\mathscr{H}(A,\ y)$ のある1点に写像するのであるから, Π_A により y に射影してから, A^- により $\mathscr{H}(A,\ y)$ の1点に写像することと同等である. また $A^-{}_{mr}$ は $y\in\mathscr{R}(A)$ を $\mathscr{H}(A, y)$ に写像しさらに $\mathscr{R}(A^*)$ に射影することと同等である. このとき null (A^*) 次元の超平面 $y+\mathscr{N}(G)$, $y\in\mathscr{R}(A)$, の点をすべて1点 $\mathscr{R}(A^*)\cap\mathscr{H}(A,\ y)$ に写像する.

11° 定理 9.5

$$\mathscr{I}_{lr}(A)=\{GA^*;\ G\in\mathscr{I}(A^*A)\}$$

$$\mathscr{I}_{mr}(A)=\{A^*G;\ G\in\mathscr{I}(AA^*)\}$$

証明 ここでも一方だけを証明すればよい. $\mathscr{I}_{lr}(A)$ について示す.

$F=(A^*A)^-A^*$ とおく. 定理 5.1, (ii) から $AF=\Pi_A$ であり, 定理 9.4 から $F\in\mathscr{I}_{lr}(A)$ が言える.

逆に $F\in\mathscr{I}_{lr}(A)$ であれば，定理9.4の証明の場合と同様に $\mathscr{R}(F^*)=\mathscr{R}(\Pi_A)=\mathscr{R}(A)$ が言えるから

$$F^*=AW^* \text{ または } F=WA^*$$

なる W が存在する．

$$A^*AWA^*A=A^*AFA=A^*\Pi_A A=A^*A$$

だから $W\in\mathscr{I}(A^*A)$ で証明できた．

12° 定理 9.6

$$G\in\mathscr{I}_{lr}(A)\Rightarrow A\in\mathscr{I}_m(G)$$
$$G\in\mathscr{I}_{mr}(A)\Rightarrow A\in\mathscr{I}_l(G)$$

証明　前者を証明する．後者も同様である．逆はもちろん真でない．

$G\in\mathscr{I}_{lr}(A)$ ならば D.14 から $(AG)^*=AG$, D.r2 から $GAG=G$ となる．したがって D.m4 から $A\in\mathscr{I}_m(G)$ を得る

13° §7, 3° および §8, 5° で

$$\operatorname{rank}A=m\leqq n\Rightarrow\mathscr{I}(A)=\mathscr{I}_l(A)$$
$$\operatorname{rank}A=n\leqq m\Rightarrow\mathscr{I}(A)=\mathscr{I}_m(A)$$

を述べたが，本節の 6° も考え合わせると，詳しくは，

$$\operatorname{rank}A=m\leqq n\Rightarrow\mathscr{I}(A)=\mathscr{I}_l(A)=\mathscr{I}_r(A)=\mathscr{I}_{lr}(A)$$
$$\text{および } \mathscr{I}_m(A)=\mathscr{I}_{mr}(A)$$
$$\operatorname{rank}A=n\leqq m\Rightarrow\mathscr{I}(A)=\mathscr{I}_m(A)=\mathscr{I}_r(A)=\mathscr{I}_{mr}(A)$$
$$\text{および } \mathscr{I}_l(A)=\mathscr{I}_{lr}(A)$$

と縮退することになる．第6図b-cを見よ．

§10 $A^\dagger$

1° §6 では $G\in\mathscr{I}^\dagger(A)\Leftrightarrow$

D. MP 1　$G\boldsymbol{y}\in\mathscr{R}(A^*)\cap\mathscr{H}(A,\boldsymbol{y}_1)$

$$\text{for all } \boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}_0+\boldsymbol{y}_1,\ \boldsymbol{y}_0\in\mathscr{N}(A),\ \boldsymbol{y}_1\in\mathscr{R}(A)$$

と定義した．$\mathscr{H}(A,\boldsymbol{y}_1)=\boldsymbol{x}_1+\mathscr{N}(A)$, $\boldsymbol{x}_1\in\mathscr{R}(A^*)$ とすると．G は $\boldsymbol{y}_1+\mathscr{N}(A)$ のすべての点を $\boldsymbol{x}_1$ に写像するから，D.12, D.M2 と対応する次の定義を得る．

D. MP 2　$G\boldsymbol{y}$ は任意の $\boldsymbol{y}\in\mathscr{V}^m$ にたいしてノルム最小の最小2乗解を与える．

しかしながら §8, 8° で注意したように．D. MP2 は $\mathscr{I}_{lm}(A)$ よりも強い条件である．これを次の節で見る．

2° 定理 10.1

$$\mathscr{I}^\dagger(A)=\mathscr{I}_l(A)\cap\mathscr{I}_m(A)\cap\mathscr{I}_r(A)$$

証明

$G\in\mathscr{I}^\dagger(A)\Rightarrow G\in\mathscr{I}_{lm}(A)$ は，D. MP1 (または D. MP2) を，D. 11 および D. m1 (または D. 12 および D. m2) と比較すれば明らかである．さらに

$$G\boldsymbol{y}\in\mathscr{R}(A^*) \text{ for all } \boldsymbol{y}\in\mathscr{V}^m$$

であるから $\operatorname{rank}G\leqq\operatorname{rank}A^*$ で $G\in\mathscr{I}_r(A)$ も成り立つ．

逆に $G\in\mathscr{I}_l(A)\cap\mathscr{I}_m(A)\cap\mathscr{I}_r(A)$ であれば，まず D. 11 から

$$G(\boldsymbol{y})\in\mathscr{H}(A,\boldsymbol{y}_1) \text{ for all } \boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}_0+\boldsymbol{y}_1,\ \boldsymbol{y}_0\in\mathscr{N}(A^*),\ \boldsymbol{y}_1\in\mathscr{R}(A)$$

したがって $\mathscr{R}(G)=G\mathscr{R}(A)$ であるが，D. m1 から $G\mathscr{R}(A)\subset\mathscr{R}(A^*)$, D. r1 から $\dim\mathscr{R}$

$(G)=\dim \mathscr{R}(A^*)$，したがって $G\mathscr{R}(A)=\mathscr{R}(A^*)$ となる．

3° 定理 10.1から定義の D.l, D.m, D.r 条件を適当に選び出し，冗長な条件を除けば，$G\in\mathscr{I}^\dagger(A)$ のための数多くの条件を求められる．ここでは．その中で形の美しい，使いやすいものをいくつかあげる．ところで，$\mathscr{I}(A)$，$\mathscr{I}_{lm}(A)$ のそれぞれについて，§4, 4° と §8, 7° で述べた双対性がここでも成立ち．

$$G\in\mathscr{I}^\dagger(A^*) \Leftrightarrow G^*\in\mathscr{I}^\dagger(A^*)$$

から，対応する対の定義が導けることがある．その場合には D. MP 3′ などプライムで示す．

$G\in\mathscr{I}^\dagger(A)\Leftrightarrow$

D. MP 3	$G=A^-_m\Pi_A$
D. MP 3′	$G=\Pi_{A^*}A^-_l$
D. MP 4	$G=\Pi_{A^*}A^-\Pi_A$
D. MP 5	$G=A^-_mAA^-_l$
D. MP 6	$AGA=A$, $GAG=G$, $(AG)^*=AG$, $(GA)^*=GA$
D. MP 7	$G\in\mathscr{I}_l(A)$, $A\in\mathscr{I}_l(G)$
D. MP 7′	$G\in\mathscr{I}_m(A)$, $A\in\mathscr{I}_m(G)$

証明

D. MP 3, D. MP 3′ は D. MP 1 を書き直したに過ぎない．

D. MP 4, D. MP 5 は D. MP 3, D. MP 3′, と D. l 3, D. m 3 を合わせて得られる．

D. MP 6 ⇔ D. MP 2 は．D. l 4, D. m 4, D. r 2 から言える．

D. MP 6 の 4 つの条件を適当に 2 分して D. l 4 または D. m 4 を用いれば ⇔ D. MP 7, D. MP 7′ が示される．

4° さて，ここで中断して $A^\dagger$ の重要な性質を確かめておく．

定理 10.2

$A^\dagger$ は一意である．

注意 したがって実は $\mathscr{I}^\dagger(A)$ の記号を導入する必要はなく，$G\in\mathscr{I}^\dagger(A)$ の代りに $G=A^\dagger$ と書く方が適切である．

証明 D. MP 4 の表現

$$G=\Pi_{A^*}A^-\Pi_A$$

で G が一意でないとすれば，それは A^- が一意でないためである．ところである"固定された" A^-_l, A^-_m を選んで $\Pi_A=AA^-_l$, $\Pi_{A^*}=A_m^-A$ と代えると．D. MP 5 のように．

$$G=A^-_mAA^-_l$$

となり，一意でなかった A^- は消える．

5° さらに別の定義をあげよう $G=A^\dagger\Leftrightarrow$

D. MP 8	$G\in\mathscr{I}_l(A)$, $\mathscr{R}(G)\subset\mathscr{R}(A^*)$
D. MP 8′	$G\in\mathscr{I}_m(A)$, $\mathscr{R}(G^*)\subset\mathscr{R}(A)$
D. MP 9	$G=A^*(AA^*)^-A(A^*A)^-A^*$
D. MP 10	$G=A^*(AA^*)^-_l$
D. MP 10′	$G=(A^*A)^-_mA^*$

証明

D. MP 8⇔$G=A^\dagger$ を示そう．D. MP 8′ についても同様である．D. MP 8 の第2条件から $\mathrm{rank}\,G\leqq\mathrm{rank}\,A$ したがって D. r 1 から $G\in\mathscr{I}_r(A)$．また $\mathscr{R}(GA)\subset\mathscr{R}(G)\subset\mathscr{R}(A^*)$ だから D. m 7 より $G\in\mathscr{I}_m(A)$ である．逆は，$G\in\mathscr{I}_{mr}(A)$ ならば $\mathscr{R}(G)=\mathscr{R}(GA)\subset\mathscr{R}(A^*)$ に注意しさえすればよい．

D. MP 9 は D. MP 5 と D. l 3, D. m 3, 定理 9.5 から得られる．

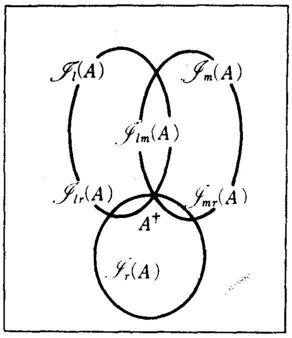
D. MP 10 ⇔ D. MP 8 実際 D. MP 10 の G にたいして $\mathscr{R}(G)\subset\mathscr{R}(A^*)$, $A^*AG=A^*AA^*(AA^*)^-_l=A^*\Pi_{AA^*}=A^*\Pi_A=A^*$. 逆に D.MP 8 の G にたいして $G=A^*W$ なる W が存在して $A^*=A^*AG$ だから $AA^*=(AA^*)^2W$ つまり $W\in\mathscr{I}_l(AA^*)$.

D. MP 10′ についても同様である. $(AA^*)^-_l\in\mathscr{I}_{lm}(AA^*)$ である.

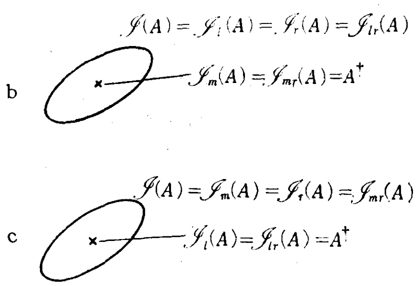
§11 特殊な一般逆行列のまとめと標準形

1° §6—§10 で $\mathscr{I}(A)$ の3つの部分集合 $\mathscr{I}_l(A)$, $\mathscr{I}_m(A)$, $\mathscr{I}_r(A)$ およびその共通集合について調べてきた. 一般に, この3つの部分集合は互に他を含まず, 全部の共通集合が1点 $A^\dagger$ となる. 第6図 a を見よ.

rank $A=\min(m,n)$ つまり A が最大階数ときは §9, 13° で触れたように, 様子はずっと簡単になる. 第6図 b は $m\leqq n$, c は $n\leqq m$ の場合である。



第6図 (a)



第6図 (b-c)

2° ここで各部分集合に属する $g.i.$ と射影との関係をまとめておくと便利であろう. 次の表で $\mathscr{S}/\mathscr{T}$ は部分空間 $\mathscr{T}$ に沿った $\mathscr{S}$ への斜射影 $\mathscr{S}\perp$ は $\mathscr{S}$ の上への正射影を表わす.

<table>
<tr><th>行列</th><th>空間</th><th>G∈</th><th>$\mathscr{I}(A)$</th><th>$\mathscr{I}_l(A)$</th><th>$\mathscr{I}_m(A)$</th><th>$\mathscr{I}_r(A)$</th><th>$A\dagger$</th></tr>
<tr><td>AG</td><td rowspan="2">$\mathscr{V}^m$</td><td rowspan="2"></td><td>$\mathscr{R}(A)/\mathscr{N}(AG)$</td><td rowspan="2">$\mathscr{R}(A)\perp$</td><td rowspan="2">$\mathscr{I}(A)$ の列と同じ</td><td>$\mathscr{R}(A)/\mathscr{N}(G)$</td><td rowspan="2">$\mathscr{R}(A)=\mathscr{R}(G^*)\perp$</td></tr>
<tr><td>G^*A^*</td><td>$\mathscr{R}(G^*A^*)/\mathscr{N}(A^*)$</td><td>$\mathscr{R}(G^*)/\mathscr{N}(A^*)$</td></tr>
<tr><td>GA</td><td rowspan="2">$\mathscr{V}^n$</td><td rowspan="2"></td><td>$\mathscr{R}(GA)/\mathscr{N}(A)$</td><td rowspan="2">$\mathscr{I}(A)$ の列と同じ</td><td rowspan="2">$\mathscr{R}(A^*)\perp$</td><td>$\mathscr{R}(G)/\mathscr{N}(A)$</td><td rowspan="2">$\mathscr{R}(A^*)=\mathscr{R}(G)\perp$</td></tr>
<tr><td>A^*G^*</td><td>$\mathscr{R}(A^*)/\mathscr{N}(A^*G^*)$</td><td>$\mathscr{R}(A^*)/\mathscr{N}(G^*)$</td></tr>
</table>

rank $A=n\leqq m$ であると任意の $G\in\mathscr{I}(A)$ にたいして GA が. $n\times n$, 階数 n のべき等行列, つまり単位行列となる. 言い換えると任意の $G\in\mathscr{I}(A)$ は左逆元である.

同様に, rank $A=n\leqq m$ のときには任意の $G\in\mathscr{I}(A)$ にたいして $AG=I_m$, つまり G が右逆元である.

3° これまで $g.i.$ の存在についての説明を延ばしてきたが, ここで構成的に示す. 出発点となるのは定理 2.1 で述べた, $m\times n$, 階数 r の行列 A の “ユニタリ同値対角化”

$$A=U^*DV$$

$$D=\left[\begin{array}{c:c}\Delta & O\\ \hdashline O & O\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\lambda_1\cdot\cdot\cdot\lambda_2 & O\\ O & \end{bmatrix}$$

である.

定理 11.1

上で定義された D にたいして

$$\begin{bmatrix} \Delta^{-1} & R \\ L & S \end{bmatrix} \in \mathscr{I}(D)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta^{-1} & O \\ L & S \end{bmatrix} \in \mathscr{I}_l(D)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta^{-1} & R \\ O & S \end{bmatrix} \in \mathscr{I}_m(D)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta^{-1} & R \\ L & -L\Delta R \end{bmatrix} \in \mathscr{I}_r(D)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} = D^\dagger$$

ただし左辺の行列は $n\times m$ で，小行列 L, R, S は大きさは適当で任意なものである．しかも，これらの表現は必要条件である．

証明 $n\times m$ 行列 G を上の左辺と同じ大きさの小行列に分割し，$DGD=D$, $(DG)^*=DG$, $(GD)^*=GD$, $GDG=G$ を満足するように小行列を決定すればよい．

$\mathscr{I}_{lm}(D)$ 等についても同様の命題が成立つ．また，この定理は Δ が対角行列でなくとも正則であれば成り立つ．L, R, S を適当に選ぶことにより種々の階数の $g.i.$ が得られることが分かる．

定理 11.2

A が $m\times n$ の任意の行列．U, V はそれぞれ m 次元，n 次元のユニタリ行列．$A=U^*BV$ とすると，

$$G \in \mathscr{I}(B),\ \in \mathscr{I}_l(B),\ \in \mathscr{I}_m(B),\ \in \mathscr{I}_r(B),\ = B^\dagger$$

のとき，それぞれ

$$V^*GU \in \mathscr{I}(A),\ \in \mathscr{I}_l(A),\ \in \mathscr{I}_m(A),\ \mathscr{I}_r(A),\ = A^\dagger$$

であり．逆も成立つ．

証明 左辺を F とおき $AFA=A$, $(AF)^*=AF$, $(GF)^*=FA$, $FAF=F$ を確かめればよい．

定理 11.1, 11.2 を組合せて定められる $g.i.$ の表現は 1 つの標準的な形とみなすことができよう．

定理 11.1, 11.2 と同じ内容の定理が Tewarson RP ('69) にある．Morris GL + Odell PL ('68) は同値な行列の標準形

$$A = P^{-1}\begin{bmatrix} I_r & O \\ O & O \end{bmatrix}Q^{-1},\ P, Q \text{ は正則}$$

を用いて A の $g.i.$ の分類を行なっている。$\mathscr{I}(A)$, $\mathscr{I}_r(A)$ の場合は，上とほとんど同じ条件となるが，$\mathscr{I}_l(A)$, $\mathscr{I}_m(A)$ にたいしては当然複雑となる．

4° $\mathscr{V}^m$ から $\mathscr{V}^n$ への線形写像である $m\times n$ 行列 A と部分空間 $\mathscr{S}, \mathscr{T}$ で

$$\mathscr{V}^m = \mathscr{S} \oplus \mathscr{N}(A)$$

$$\mathscr{V}^n = \mathscr{R}(A) \oplus \mathscr{T}$$

なるものが与えられたとする．すると

定理 11.3

$$\mathscr{R}(G) = \mathscr{S},\ \mathscr{N}(G) = \mathscr{T},\ G \in \mathscr{I}(A)$$

なる行列 G が一意に存在し，しかも

$$G \in \mathscr{I}_r(A)$$

証明

$[\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_r]$; $\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_r\in\mathscr{R}(A)$, $\boldsymbol{y}_{r+1},\cdots$, $\boldsymbol{y}_n\in\mathscr{N}(A^*)$; を $\mathscr{V}^n$ の基底とする. $r=\mathrm{rank}\,A$ である.

$A\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{y}_i$, $\boldsymbol{x}_i\in\mathscr{S}$, $i=1,\cdots,r$ なる $\boldsymbol{x}_i$ が1つ, ただ1つ存在する. 実際 $A\boldsymbol{u}_i=\boldsymbol{y}_i$ なる任意の $\boldsymbol{u}_i\in\mathscr{V}^m$ を $\mathscr{S}$ と $\mathscr{N}(A)$ との成分布に分けて $\mathscr{S}$ の成分をとれば良い ($\mathscr{N}(A)$ に沿って $\mathscr{S}$ の上に斜射影する). このような $\boldsymbol{x}_i$ がもう1つあるとする. それを $\boldsymbol{x}_i$ と書けば $A(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_i)=\boldsymbol{0}$, したがって $\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_i\in\mathscr{N}(A)\cap\mathscr{S}=\{\boldsymbol{0}\}$.

しかも $[\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r]$ は線形独立である. もしも $\sum_{i=1}^r c_i\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{0}$ なる, すべてが0でない c_i が存在すれば, $\Sigma c_i A\boldsymbol{x}_i=\Sigma c_i\boldsymbol{y}_i=\boldsymbol{0}$ で $\boldsymbol{y}_i$ が基底という仮定に反する.

$n\times m$ 行列 G を, $[\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_n]$ を $[\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_r,\boldsymbol{0},\cdots,\boldsymbol{0}]$ に写像するものと定義すれば. これは任意の $\boldsymbol{y}\in\mathscr{R}(A)$ を1点 $\mathscr{S}\cap\mathscr{X}(A,\boldsymbol{y})$ に写像するから基底 $\boldsymbol{y}_i$ の選び方に依存せず,

$$\mathscr{R}(G)=\mathscr{S},\ \mathscr{N}(G)=\mathscr{T}$$

なる A の $g.i$ である.

$$\dim\mathscr{R}(G)=m-\dim\mathscr{N}(A)=\mathrm{rank}\,A$$

だから $G\in\mathscr{I}_r(A)$ でもある.

注　この定理は Langenhop E('67) による. 証明はより直接的なものに変えた.

上の構成的証明は

$$G=P_1A^\dagger P_2$$

P_2 は $\mathscr{T}$ に沿った $\mathscr{R}(A)$ の上への斜射影

P_1 は $\mathscr{N}(A)$ に沿った $\mathscr{S}$ の上への斜射影

という表現と一致する. $\mathscr{T}=\mathscr{N}(A^*)$ $(P_2=\Pi_A)$ とすれば $G\in\mathscr{I}_{lr}(A)$, $\mathscr{S}=\mathscr{R}(A^*)$ ($P_1=\Pi_{A^*}$ または I) とすれば $G\in\mathscr{I}_{mr}(A)$ となる.

G の構成では $[\boldsymbol{y}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{y}_n]$ を $\boldsymbol{0}$ に写像したが, これらを $\mathscr{S}$ の外の適当な点に写像することによって, rank A より大きな任意の階数をもつ $g.i.$ を構成できる.

§5, 4°-5° で

$$\mathscr{N}(A)=\{(I-GA)\boldsymbol{z}_0;\,G\in\mathscr{I}(A)\}$$
$$\mathscr{X}(A,\boldsymbol{y})=\{\boldsymbol{x}=G\boldsymbol{y};\,G\in\mathscr{I}(A)\}$$

を述べた. いずれにせよ, ある $\boldsymbol{y}, A\boldsymbol{z}_0$ を G により $\mathscr{X}(A,\boldsymbol{y})$ のすべての点に写像するのであるから, $G\in\mathscr{I}_{lr}(A)$ に制限してもなお, かなり冗長である.

5°　Rohde CA ('66) における記号法と命名について記しておく.

A^-, $\mathscr{I}(A)$	A^g, $\mathscr{G}_g$, generalized inverse
$A^-{}_r$, $\mathscr{I}_r(A)$	A^r, $\mathscr{G}_r$, reflexive inverse
$A^-{}_{lr}$, $\mathscr{I}_{lr}(A)$	A^n, $\mathscr{G}_n$, normalized inverse
$A^\dagger$, $\mathscr{I}^\dagger(A)$	$A^\dagger$, $\mathscr{G}^\dagger$, pseudo inverse

Rohde CA ('65) では $A^{(g)}$, $A^{(r)}$, $A^{(N)}$ の記号を用いている.

§12　特殊な行列の一般逆行列

1°　積の $g.i.$

(i)　$$B_1=A^-AB,\quad A_1=AB_1G_1,\ G_1\in\mathscr{I}(B_1)$$

とおくと

$$A_1B_1=AB_1G_1B_1=AB_1$$
$$=AA^-AB=AB$$

したがって

$$A_1 = ABG_1 = A_1 B_1 G_1$$
$$ABG_1 A_1^- = A_1 A_1^-$$

$G_1 \in \mathscr{I}(B_1)$ のとき

$$G_1 A_1^- \in \mathscr{I}(AB)$$
$$G_1 A_{1\ l}^- \in \mathscr{I}_l(AB)$$
$$G_1 A_{1\ r}^- \in \mathscr{I}_r(AB)$$

このとき rank A_1=rank B_1=rank AB であることに注意せよ

(ii)
$$A^-A_1 = A^-AA^-ABG_1 = A^-ABG_1 = B_1 G_1$$
$$B_1 G_1 A_1^- A_1 = A^-A_1 A_1^- A_1 = A^-A_1 = B_1 G_1$$

ところで $G_1 \in \mathscr{I}_l(B_1)$ ならば，$X^-_m X$, XX^-_l はエルミートだから

$$A_{1\ m}^- A_1 = A_{1\ m}^- A_1 B_1 G_1 = B_1 G_1 A_{1\ m}^- A_1 = B_1 G_1$$

したがって G_1 とは独立な B_1^- にたいして，

$$B_1^- A_{1\ m}^- AB = B_1^- A_{1\ m}^- A_1 B_1 = B_1^- B_1 G_1 B_1 = B_1^- B_1$$

それゆえ $G_1 \in \mathscr{I}_l(B_1)$ のとき

$$B_{1\ m}^- A_{1\ m}^- \in \mathscr{I}_m(AB)$$
$$B_{1\ r}^- A_{1\ m}^- \in \mathscr{I}_r(AB)$$

(i) とこの結果を組み合わせると

$$G_1 \in \mathscr{I}_{lm}(B_1) \qquad G_1 A_{1\ lm}^- \in \mathscr{I}_{lm}(AB)$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad G_1 A_1^\dagger = (AB)^\dagger$$
$$G_1 = B_1^\dagger \qquad G_1 A_{1\ lm}^- = (AB)^\dagger$$

(iii) 同様にして次のことが証明できる．

$$A_2 = ABB^-, \quad B_2 = G_2 A_2 B$$

とおくと $G_2 \in \mathscr{I}(A_2)$ のとき $A_2 B_2 = AB$ で

$$B_2^- G_2 \in \mathscr{I}(AB)$$
$$B_{2\ m}^- G_2 \in \mathscr{I}_m(AB)$$
$$B_{2\ r}^- G_2 \in \mathscr{I}_r(AB)$$

$G_2 \in \mathscr{I}_m(A_2)$ ならば G_2 と独立な $A_{2\ l}^-$ にたいし

$$B_{2\ l}^- A_{2\ l}^- \in \mathscr{I}_l(AB)$$
$$B_{2\ l}^- A_{2\ r}^- \in \mathscr{I}_r(AB)$$

さらにこれらの結果を組み合わせて

$$G_2 \in \mathscr{I}_{lm}(A_2) \qquad B_{2\ lm}^- G_2 \in \mathscr{I}_{lm}(AB)$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad B_2^\dagger G_2 = (AB)^\dagger$$
$$G_2 = A_2^\dagger \qquad B_{2\ lm}^- G_2 = (AB)^\dagger$$

注 Cline RE ('64) は $B_1 = A^\dagger AB$, $A_1 = AB_1 B_1^\dagger$ とおいて $B_1^\dagger A_1^\dagger = (AB)^\dagger$ を導いた．

ii) 任意の $m\times n$ 行列 C, rank $C=r$ が，最大階数の $m\times r$, $r\times n$ 行列，A, B により

$$C = AB$$

と表わされているとする．この場合に (i) の結果を適用してみる．

$$B_1 = A^-AB, \qquad A_1 = AB_1 B_1^-$$

とおく．§11, 2° で注意したように，任意の A^-（実は $\in\mathscr{I}_{mr}(A)$）にたいして $A^-A=I_r$ である．したがって $B_1=B$ であり，任意の $B_1^-=B^-$（実は $\in\mathscr{I}_{lr}(B)$）にたいして $A_1=A$ である．

§11, 1° の議論から

$$
\begin{aligned}
B_1^-A_1^- &= B^-_{lr}A^-_{mr} && \in\mathscr{I}_r(AB)\\
B_1{}^-_m A_1^- &= B^\dagger A^-_{mr} && \in\mathscr{I}_{mr}(AB)\\
B_1^-A_1{}^-_l &= B^-_{lr}A^\dagger && \in\mathscr{I}_{lr}(AB)\\
B_1{}^-_m A_1{}^-_l &= B^\dagger A^\dagger = (AB)^\dagger
\end{aligned}
$$

が，この場合に 1° の方法で得られる $g.i.$ である．

3°　AA^* の $g.i.$

(i)　$A^{-*}A_m^-$，$(A^*)^-_l A^-\in\mathscr{I}(AA^*)$

(ii)　$(A^-_m)^*A^-_l$，$(A^*)^-_l A^-_l\in\mathscr{I}_l(AA^*)$

(iii)　$(A^*)^-_m A^-_m$，$(A^-_l)^*A^-_m\in\mathscr{I}_m(AA^*)$

(iv)　$(A^-_r)^*A^-_m$，$(A^*)^-_l A^-_r\in\mathscr{I}_r(AA^*)$

(v)　$(A^*)^\dagger A^\dagger=(AA^*)^\dagger$

注意　Rao CR('67) の定理 3b (i), (ii)

$$\text{(i)}\ (A^-_m)^*A^-_m\in\mathscr{I}_m(AA^*),\qquad \text{(ii)}\ (AA^*)^-_m AA^*=(AA^-_m)^*$$

は誤りである．(i) の1つの修正は $(A^-_{lm})^*A^-_{lm}\in\mathscr{I}_{lm}(AA^*)$ であろう．

証明

(i)　$A^{-*}A^-_m AA^*=A^{-*}\Pi_{A^*}A^*=A^{-*}A^*$

これはべき等であり，階数は $\mathrm{rank}\,A^*=\mathrm{rank}\,AA^*$ に等しいから D. G5′ により $A^{-*}A^-_m\in\mathscr{I}(AA^*)$．その転置共行列をとることにより，第2の命題も言える．

(ii)　$AA^*(A^-_m)^*A^-_l=A\,\Pi_{A^*}{}^*A^-_l=AA^-_l=\Pi_A=\Pi_{AA^*}$

したがって D.13 により $(A^-_m)^*A^-_l\in\mathscr{I}_l(AA^*)$．

$(A^-_m)^*=(A^*)^-_l$ により第2の命題を得，転置共役行列をとって (iii) を得る．

(iv)　$(A^-_r)^*A^-_m AA^*(A^-_r)^*A^-_m=(A^-_r AA^-_r)^*A^-_m=(A^-_r)^*A^-_m$

であり，左辺 $\in\mathscr{I}(AA^*)$ は (i) の特別な場合として明らかである．

(v)　(ii), (iii), (iv) を合わせればよい．

Penrose R ('55) による $(A^*A)^-_m$（当然 $\in\mathscr{I}_{lm}(A^*A)$ である）の構成法について述べておく．A^*A の最小多項式を

$$\lambda_1A^*A+\cdots+\lambda_k(A^*A)^k=0$$

とし，r を $\lambda_1=\cdots=\lambda_{r-1}=0$，$\lambda_r\neq0$ なる整数

$$G=-\lambda_r^{-1}\left\{\lambda_{r+1}I+\lambda_{r+2}AA^*+\cdots+\lambda_n(A^*A)^{k-r-1}\right\}$$

とおけば

$$G(A^*A)^{r+1}=(A^*A)^r$$

$LX^*X=MX^*X\Rightarrow LX^*=MX^*$ を反復して用いれば

$$GA^*AA^*A=A^*A\ \text{さらに}\ GA^*AA^*=A^*$$

つまり $G\in\mathscr{I}_m(A^*A)$ しかも $GA^*\in\mathscr{I}_m(A)$ が言えた．(D. MP 10 により実は $GA^*=A^\dagger$.)

4°　正規行列の $g.i.$

A を正規行列とする．つまり正方で $AA^*=A^*A$ を満たすとする．すると $\mathscr{R}(A)=\mathscr{R}(AA^*)=\mathscr{R}(A^*A)=\mathscr{R}(A^*)$ だから，

$$AA^-_l=A^-_mA=\Pi_A=\Pi_{A^*}$$

これより，

$$A^n(A^-_l)^n=A^{n-1}\Pi_{A^*}(A^-_l)^{n-1}=A^{n-1}(A^-_l)^{n-1}=AA_l^-$$

$(A^-{}_m)^n$ についても同様であり，次の諸結果を得る．

$$(A^-{}_l)^n \in \mathscr{I}_l(A^n), \qquad (A^-{}_m)^n \in \mathscr{I}_m(A^n)$$
$$(A^-{}_{lr})^n \in \mathscr{I}_{lr}(A^n), \qquad (A^-{}_{mr})^n \in \mathscr{I}_{mr}(A^n)$$
$$(A^-{}_{lm})^n \in \mathscr{I}_{lm}(A^n), \qquad (A^\dagger)^n = (A^n)^\dagger$$

5° 同値変換の $g.i.$

(i) $\mathscr{I}(A) = \{Q(PAQ)^-P;\ P,\ Q \text{ 正則}\}$

証明

$$B = PAQ, \quad A = P^{-1}BQ^{-1}$$

とおけば

$$\begin{aligned} AQB^-PA &= P^{-1}BQ^{-1}QB^-PP^{-1}BQ^{-1} \\ &= P^{-1}BQ^{-1} = A \end{aligned}$$

逆に $G \in \mathscr{I}(A)$ ならば $AGA=A$ から

$$\begin{aligned} BQ^{-1}GP^{-1}B &= B \\ Q^{-1}GP^{-1} &= B^- \end{aligned}$$

を得る．P, Q は，§11, 4° で述べたように，ユニタリ行列に制限してもよい．

(ii) $\mathscr{I}_r(A) = \{Q\ (PAQ)^\dagger P;\ P,\ Q \text{ 正則}\}$
$\qquad\qquad = \{Q\ (PAQ)^-{}_r P;\ P,\ Q \text{ 正則}\}$

証明

$$\{Q(PAQ)^\dagger P\} \subset \{Q(PAQ)^-{}_r P\} \subset \mathscr{I}_r(A)$$

であることは (i) と同様に容易に確かめられる．

$G \in \mathscr{I}_r(A)$ とする．§11, 4° の議論から適当なユニタリ行列 U, V で

$$UAV^* = D = \begin{bmatrix} \varDelta & O \\ O & O \end{bmatrix}, \qquad \varDelta \text{ は対角}$$

と分解すると

$$\begin{aligned} D^-{}_r &= \begin{bmatrix} \varDelta^{-1} & R \\ L & L\varDelta R \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I & O \\ L\varDelta & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varDelta^{-1} & O \\ O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \varDelta R \\ O & I \end{bmatrix} \\ &= SD^\dagger T \end{aligned}$$

ただし S, T は上の行の対応する行列で，正則である．さらに

$$D = TDS$$

であることに注意すると，

$$\begin{aligned} A^-{}_r &= V^*D^-{}_r U = V^*SD^\dagger TU \\ &= V^*S\ (TUAV^*S)^\dagger TU \end{aligned}$$

したがって $P=TU$, $Q=V^*S$ とおけば $\mathscr{I}_r(A) \subset \{Q(PAQ)^\dagger P\}$ が示されたことになる．

注　(ii) は Frame JS ('64)，Mitra SK ('68) が，ずっと間接的な証明を与えている．

§13　最小2乗法（もっとも簡単な場合）

1° 線形統計模型のもっとも簡単な場合を考える．Rao CR ('65) の記号によると $(\boldsymbol{y},\ \varXi\boldsymbol{\beta},\ \sigma^2 I)$ である：

$$\boldsymbol{y} = \varXi\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{z}, \quad E(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{0}, \quad V(\boldsymbol{z}) = \sigma^2 I$$

$\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ は n 次元確率ベクトル，Ξ は $n\times p$, $n>p \geqq \mathrm{rank}\Xi$ の与えられた行列，$\boldsymbol{\beta}$ は p 次元未知母数ベクトル，$V(\boldsymbol{z})$ は $\boldsymbol{z}$ の分散共分散行列である，この節でのベクトル，行列はすべて実とする．

$\boldsymbol{c}'\boldsymbol{\beta}$ を $\boldsymbol{l}'\boldsymbol{y}$ で推定する．

$$E(\boldsymbol{l}'\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{l}'\Xi\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{c}'\boldsymbol{\beta} \text{ for all } \boldsymbol{\beta}\in\mathscr{V}^p$$

が不偏性の条件であり，$\boldsymbol{c}'\boldsymbol{\beta}$ が推定可能 $\Leftrightarrow \boldsymbol{c}\in\mathscr{R}(\Xi')$ となる。

$$V(\boldsymbol{l}'\boldsymbol{y}) = \sigma^2\boldsymbol{l}'\boldsymbol{l} = \sigma^2\|\boldsymbol{l}\|^2$$

であるから，

$$\Xi'\boldsymbol{l} = \boldsymbol{c},\ \ \boldsymbol{c}\in\mathscr{R}(\Xi')$$

の条件の下で $\|\boldsymbol{l}\|$ を最小化するのが，不偏最小分散推定量の問題である．これにたいする解答をわれわれはすでに知っており

$$\boldsymbol{l} = \Xi'^-_m\boldsymbol{c}$$

である．

$$\min_{l} V(\boldsymbol{l}'\boldsymbol{y}) = \sigma^2\boldsymbol{c}'\Xi'^-_m{}'\Xi'^-_m\boldsymbol{c}$$

である．

2°　$\boldsymbol{c}'\boldsymbol{\beta}$ の最小2乗推定量とは，一般には解をもたない方程式 $\boldsymbol{y} = \Xi\boldsymbol{\beta}$ で残差平方和 $\|\boldsymbol{y}-\Xi\boldsymbol{\beta}\|^2$ を最小にするような $\boldsymbol{\beta}$ を $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ と書くと，$\boldsymbol{c}'\hat{\boldsymbol{\beta}}$ のことである．これについてもわれわれは解を知っており，

$$\boldsymbol{c}'\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{c}'\Xi^-_l\boldsymbol{y}$$

である．一方 1° で不偏最小分散推定量は

$$\boldsymbol{l}'\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}'\Xi'^-_m{}'\boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}'\Xi^-_l\boldsymbol{y}$$

であることを得ており，両者が一致するという“ガウス＝マルコフの定理”が証明された．つまり，この定理の代数学的内容は $\mathscr{I}_l(A)$ と $\mathscr{I}_m(A)$ との双対性に帰着されることになる．

3°　上の $\boldsymbol{\beta}$ そのものの“推定量”

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \Xi^-_l\boldsymbol{y}$$

は $\mathrm{rank}\,\Xi<p$ ならば一意ではない．しかし推定可能なような $\boldsymbol{c}$ にたいしては．定理 5.2, (ii) から $\boldsymbol{c}'\hat{\boldsymbol{\beta}}$ は一意である．1° の方で考えると，$\boldsymbol{\beta}$ の各成分 $\boldsymbol{e}_i'\boldsymbol{\beta}$ ($\boldsymbol{e}_i$は第 i 単位ベクトル) は必ずしも推定可能ではない．その形式的解 $\Xi'^-_m\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{l}_i$ は不偏条件の方程式の解とはならないが，やはり形式的に $\hat{\boldsymbol{\beta}} = [\boldsymbol{l}_1'\boldsymbol{y}, \cdots, \boldsymbol{l}_p'\boldsymbol{y}]'$ をつくれば 2° と同じ統計量を得る．そのとき

$$V(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \Xi'^-_m{}'\Xi'^-_m = \Xi^-_l\Xi^-{}'_l$$

は形式的分散共分散行列であるが，$\boldsymbol{\beta}$ の任意の形式的不偏推定量の形式的分散共分散行列

$$\Xi^-\Xi^-{}'$$

にたいして

$$\boldsymbol{c}'(\Xi^-_l\Xi^-{}'_l - \Xi^-\Xi^-{}')\boldsymbol{c} \ \leqq 0 \quad \text{for all } \boldsymbol{c}\in\mathscr{R}(\Xi)$$

の意味で分散最小である．

4°　古典的な最小2乗推定量の求め方は．正規方程式

$$\Xi'\Xi\hat{\boldsymbol{\beta}} = \Xi'\boldsymbol{y}$$

を解いて $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ を決定する．この方程式は常に解をもつが，Ξ が最大階数でなければ一意ではない．その不定な解は，われわれの記号では

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\Xi'\Xi)^-\Xi'\boldsymbol{y}$$

ところで定理 9.5 により $(\Xi'\Xi)^-\Xi'\in\mathscr{I}_{lr}(\Xi)$ である．前の $\Xi^-_l\boldsymbol{y}$ と比べれば $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ の不定性の程度に違いはあるが問題ではない．

5° 2° において

$$\min_{\beta} \| \boldsymbol{y} - \Xi \boldsymbol{\beta} \|^2 = \| \boldsymbol{y} - \Xi \Xi^-{}_l \boldsymbol{y} \|^2$$
$$= \boldsymbol{y}'(I - \Xi \Xi^-{}_l)'(I - \Xi \Xi^-{}_l)\boldsymbol{y}$$
$$= \boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}' \Xi \Xi^-{}_l \boldsymbol{y}$$
$$= \boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} - (\Xi' \boldsymbol{y})' \boldsymbol{\beta}$$

3番目の等式は $\Xi \Xi_l^- = \Pi_\Xi$ がエルミート・べき等であることを用いている．

$$E \| \boldsymbol{y} - \Xi \Xi^-{}_l \boldsymbol{y} \|^2 = E(\boldsymbol{y}'(I - \Xi \Xi^-{}_l)\boldsymbol{y})$$
$$= \sigma^2 \operatorname{tr}(I - \Xi \Xi^-{}_l)$$
$$= \sigma^2 (n - \operatorname{rank} \Xi)$$

統計数理研究所

参 考 文 献

Ben-Israel, A. and Charnes, A. (1963). Contributions to the theory of generalized inverses. Jour. SIAM **11** 667–699.

Bjerhammar, A. (1951). Rectangular reciprocal matrices, with special reference to geodetic calculations. Bulletin Geodesique. No.19–22 188–220.

Bott, R. and Duffin, R.J. (1953). On the algebra of networks. Trans. Am. Math. Soc. **74** 99–109.

Chipman, J.S. and Rao, M.M. (1964). Projections, generalized inverses and quadratic forms. J. Math. Analysis Applic. **9** 1–11.

Cline, R.E. (1964). Note on the generalized inverse of the product of matrices. SIAM Review. **6** 56–58.

Desoer, C.A. and Whalen, B.H. (1963). A note on pseudoinverses. Jour. SIAM **11** 442–447.

Forsythe, G. and Moler, C.B. (1967). Computer Solution of Linear Algebraic Systems, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.

Frame, J.S. (1964). Matrix functions and applications. IEEE Spectrum. **1** 208–220.

Graybill, F.A. and Marsaglia, G. (1957). Idempotent matrices and quadratic forms in the general linear hypothesis. Ann. Math. Statist. **28** 678–686.

Halmos, P.R. (1948). Finite Dimensional Vector Spaces. Princeton Univ. Press, Princeton.

Hamburger, H.L. and Grimshaw, M.E. (1951). Linear Transformations in n-Dimensional Vector Space. Cambridge Univ. Press, Cambridge.

Langenhop, C.E. (1967). On generalized inverses of matrices. SIAM J. Appl. Math. **15** 1239–1246.

Mitra, S.K. (1968). On a generalized inverse of a matrix and applications. Sankhya, Ser. A **30** 107–114.

Moore, E.H. (1920). On reciprocal of the general algebraic matrix. Bull. Amer. Math. Soc. **26** 394–395.

Moore, E.H. (1935). General analysis. Amer. Phil. Soc., Philadelphia

Morris, G.L. and Odell, P.L. (1968). A characterization for generalized inverses of matrices. SIAM Review **10** 208–211.

Munn, W.D. and Penrose, R. (1955). A note on inverse semigroups. Proc. Camb. Phil. Soc. **51** 396–399.

von Neumann, J. (1936). On regular rings. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **22** 707–713

Rado, R. (1956). Note on generalized inverses of matrices. Proc. Camb. Phil. Soc. **52** 600–601.

Rao, C.R. (1962). A note on a generalized inverse of a matrix with applciations to problems in mathematical statistics. J. Roy. Stat. Soc. B **24** 152–158.

Rao, C.R. (1965). Linear Statistical Inference and its Applications. John Wiley and Sons, New York.

Rao, C.R. (1967). Calculus of generalzied inverses of matrices Part I-General theory. Sankhya A **29** 317–342.

Rohde, C.A. (1965). Generalized inverses of partitioned matrices. J. SIAM **13** 1033–1035.

Rohde, C.A. (1966). Some results on generalized inverses. SIAM Rev. **8** 201–205.

Sheffield, R.D. (1958). A general theory for linear systems. Amer. Math. Monthly **65** 109–111.

Tewarson, R.P. (1969). On some representations of generalized inverses. SIAM Review **11** 272–276.

Tseng, Y.Y. (1949). Sur les solutions des equations operatrices fonctionnelles entre les espaces unitaires. Solutions extremales. Solutions virtuelles. C.R. Acad. Sci. Paris **228** 640–641.

Tseng, Y.Y. (1949). Generalized inverses of unbounded operators between two unitary spaces. Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.) **67** 431–434

Tseng, Y.Y. (1949). Properties and classification of generalized inverses of closed operators. Dokl. Akad. Nauk. SSSR (N.S.) **67** 607–610.

Tseng, Y.Y. (1956). Virtual solutions and general inversions. Usphei. Mat. Nauk. (N.S.) **11** 213–215.

なお，Moor-Penrose 一般逆行列について次の日本語の解説がある．

古屋 茂 (1967)，一般逆行列．数理科学，no. 47 68-72, no. 48 57-61