綜　合　報　告

Cramér-von Mises-Smirnov 型適合度検定について

橋　本　智　雄

(1966 年 12 月受付)

On the Cramér-von Mises-Smirnov Tests of Fit

Toshio HASHIMOTO

Summary

Since H. Cramér's first treatment of the non parametric ω^2 test for continuous distribution function in 1928, various papers about the subject have been published by many authors. The purpose of the present paper is to review these papers and discuss on some topics of them. The following problems are mainly selected and discussed in expository way ;

(1) a short historical note
(2) limiting distribution of ω^2 statistic
(3) exact distribution of ω^2 statistic
(4) the problems for a grouped data test
(5) the problems of multi-sample test
(6) power function of ω^2 test
(7) ω^2 test in parametric case
(8) some other topics
(9) various problems of $U_N{}^2$ statistic

The author hopes that this expository paper might be a help to those who take interest in the subject.

The Institute of Statistical Mathematics

§1 ま え が き

分布に何ら具体的な型を想定しないで，与えられたデータから，何らかの統計的推論を行ういわゆるノンパラメトリック統計推論は，近年の統計学では重要視されているが，高速度計算機の急速な発展と共に数値計算の労が著しく減ったことも加えて，数値表の完成と共に，実際問題えの応用も広くやられるようになった．例えば，ノンパラメトリック統計推論の総括的な成書として，よく知られているように，Savage, Walsh の二書も刊行されて，基礎的な理論も次第に整えられ，統計学における一つの branch としての独立性をもつまでになっている．

さて Savage の文献表のうちで，経験分布函数に基づいた統計量を扱ったものが相当数を占めるが，それらは大別して，Kolmogorov-Smirnov 型統計量と，Cramér-Von Mises-Smirnov 型統計量とに大別される．この小文で述べようとすることは，この後者の統計量，いわゆる ω^2 型統計量に関しての総合的な報告と，いくつかの批判とである．前者の Kolmogorov-Smirnov 型統計量の紹介については，鈴木義一郎，加地紀臣男両氏が本雑誌に行う筈であるので両方を合はせて読んで下されば好都合である．

勿論適合度検定用 ω^2 型統計量に限定してみても，その理論的内容，適用分野はきわめて広いため，その紹介にあたっても幾分主観的ならざるを得ないが，主として理論的方面から考察

して，重要と思はれる項目はすべて網羅したつもりである．記述にあたっては，理論の厳密性をある程度保持しながら，次記の対象事項目について，その研究結果の筋道を伝えることに主力をそそいだ．

(1) 漸近的確率分布
(2) exact な確率分布
(3) 多標本検定問題
(4) 検定力について
(5) パラメトリックな場合
(6) $U_N{}^2$ 統計量

尚文献は出来るだけ沢山目を通したつもりでいるが，重要と思はれるもので入手不可能なものもあって，他の文献から間接的に引用したものもあることをお断わりしておきたい．

又 Darling は Annals of Mathematical Statistics で 1957 年頃までの，Kolmogorov-Smirnov, Cramér-Von Mises-Smirnov 両統計量に関しての秀れた報告をしているが，本文では多少の重複をあえて重ねることを許していただき，最近英国の Biometrika 誌上を賑わしている．ω^2 統計量の修正した形ともいえる $U_N{}^2$ 統計量について，新たに一章をもうけて詳しく述べることにした．

§2 歴 史 的 概 観

Cramér-Von Mises-Smirnov 型統計量という名から容易に推測されるように，いわゆる ω^2 検定の問題の由来は古く Cramér [18;1928] にその源流を求めることができる．そこでは，理論分布と経験分布とを比較する素朴な idea が提出されており，適合度検定のための統計量というはっきりした形をとってはいなかったが，Cramér は次のような $I_i\,(i=1,2,\cdots\cdot)$ なる表現の列を考察した．

連続的確率分布 $F(x)$ を Brun-Charlier 級数*) に展開する．

$$F(x)=\Phi(x)+F_1(\Phi)+F_2(\Phi)+\cdots\cdot$$

$$F_1(\Phi)=a_3\Phi^{(3)}(x),\quad F_2(\Phi)=a_4\Phi^{(4)}(x)+a_6\Phi^{(6)}(x),\cdots\cdot$$

こゝで Φ は正規分布で，$\Phi^{(\gamma)}$ はその第 ν 次導函数を表わす．このとき経験分布函数 $F_n(x)$ を次のように定義する．

$$\begin{aligned} F_n(x)&=\frac{\nu}{n}, &\quad x_\nu\leqq x<x_{\nu+1}\ \text{のとき}\ \nu=1,\ 2,\cdots\cdot,\ n-1\\ &=0, & x<x_1\ \text{のとき}\\ &=1, & x\geqq x_n\ \text{のとき}\end{aligned}$$

すなわち $F_n(x)$ は n ケの観測値 $x_1,\ x_2,\cdots\cdot,\ x_n$ から作られる階段函数を表わし

$$F_n(x)=\frac{1}{n}\{x\ \text{を越えない}\ x_i\ \text{の個数}\}$$

と考えられる．

このとき差列

$$\Delta_1(x)=F_n(x)-\Phi(x),\quad \Delta_i(x)=\Delta_{i-1}(x)-P_{i-1}(\Phi)\quad,\ i=2,\ 3,\cdots\cdot$$

をつくり，積分値

$$I_i=\int[\Delta_i(x)]^2\,dx\,,\qquad i=1,\ 2,\cdots\cdot$$

を検定のための函数として導入した．

Cramér はこの I_i の平均値 $E[I_i]$ を $i=1,2,3$ について計算したが，$i=3$ の場合でもうかなり長い複雑な式となる．又 I_i の分散は全く考えられていない．

検定用の統計量として，ω^2 を始めて導入したのは 1931 年 Von Mises [51; 1931] であつ

*) これについては Edgeworth (1905) "The law of error' *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, Vol. 20, pp. 36-141. を参照。

た．Von Mises は理論分布と経験分布のくいちがいを測る measure として，

$$\omega_n^2=\int\lambda(x)\,\varepsilon^2(x)\,dx=n^2\int\lambda(x)\,[F_n(x)-F(x)]^2dx \tag{1.1}$$

ただし $\varepsilon(x)=n[F_n(x)-F(x)]$

を定義して，これによる種々の議論を展開した．こゝに，$\lambda(x)$ はあらかじめ選定された荷重函数で，$\lambda(x)\geqq 0$ なものである．

さてわれわれが問題にしているのは「n ケの観測値 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ は与えられた連続な分布 $F(x)$ をもつ母集団からの標本である」という仮説を検定することにある． そこで経験分布 $F_n(x)$ が母集団分布 $F(x)$ にどれ程近いかを表わす統計量としての ω_n^2 を適合度検定に用いるには，ω_n^2 の分布を知らねばならないが，一般にこれを求めることは困難である．荷重函数 $\lambda(x)$ の選び方にもいろいろな場合が考えられる．例えば K. Pearson の導入したカイ二乗検定は $\lambda(x)=\frac{1}{n}F'(x)$ とおいた場合に照応しているとみなされる．(1.1) 式において，Von Mises は $\lambda(x)$ が定数に等しい場合，特に ω_n^2 の平均値 $E(\omega_n^2)$ が常に 1 に等しくなるように $\lambda(x)$ を選ぶことを提案した．すると

$$E(\varepsilon^2)=nF(x)\,(1-F(x))$$

で定数 λ を

$$E[\omega_n^2]=\int\lambda\,E(\varepsilon^2)\,dx=1 \tag{1.2}$$

なる如く選ぶのであるから

$$\frac{1}{\lambda}=n\int F(x)\,(1-F(x))\,dx \tag{1.3}$$

したがって，考えている ω_n^2 は (1.1) 及び (1.3) で定義されるわけである．

一般に ω_n^2 の分布を求めることは難しいが，平均値については，

$$E[\omega_n^2]=n\int\lambda(x)\,F(x)\,(1-F(x))\,dx$$

が，右辺の積分が存在するとき容易に得られるわけだが，これだけでは検定は正確には出来ない．実際資料から得られた ω_n^2 の値をこの $E[\omega_n^2]$ と比較して，その値が小さければ小さい程適合度はよいであろうし，大きければ大きい程適合度は悪いであろうという程度のことしか言えないのである．しかし $E[\omega_n^2]=1$ なるように，荷重函数 $\lambda(x)$ を選ぶという Von Mises の方法によると，ω_n^2 の分散も求められ，母分布が特殊なものであるとき，やゝ正確な検定が出来ることになる．例えば $F(x)$ が区間 $[0,c]$ 上の一様分布をしている場合，すなわち $F(x)=\frac{x}{c}$ $(0\leqq x<c)$，$=0\,(x<0)$，$=1\,(x\geqq c)$ のとき，$\lambda=\frac{6}{nc}$ であり，

$$\omega_n^2=\frac{1}{2n}+6\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{c}-\frac{2i-1}{n}\right)^2 \quad,\quad E[\omega_n^2]=1 \tag{1.4}$$

と展開できるわけである．

統計量 ω_n^2 の分散 $Var[\omega_n^2]$ を計算するのには，K. Pearson のカイ二乗と同じ方法を用いて

$$\begin{aligned}Var[\omega_n^2]&=E[\omega_n^4]-\{E(\omega_n^2)\}^2\\&=2\int\int\lambda(x)\,\lambda(y)\,E[\varepsilon^2(x)\,\varepsilon^2(y)]\,dy\,dx-1\end{aligned} \tag{1.5}$$

こゝに $E[\varepsilon^2(x)\varepsilon^2(y)]=nF(x)\,(1-F(x)[1+(n-2)\{F(y)-F(x)+3F(x)\,(1-F(x)\}]$ で，一様分布の例にあてはめれば

$$Var[\omega_n^2]=\frac{4}{5}-\frac{3}{5n}$$ となる．

故に ω_n^2 の標本値と比較するには，平均値 1 に対して，この分散を考慮に入れればよい．Von Mises は全く同じ方法で，正規分布，指数分布等についても計算しているが，後述するように，われわれは個々の分布 $F(x)$ についての，かような ω_n^2 の平均，分散を求めることに

たいして意味があるとは思はれない，ω_n^2 分布の最も重要な点はそれが個々の分布 $F(x)$ に徹頭徹尾関係しない独立な確率変数 —distribution free— である点に存在するからである．

しかし Von Mises の ω_n^2 検定のひとつの特色としては，それが離散的確率分布 $F(x)$ の場合にも適用可能という点がある．すなわち，$a_1, a_2, \cdots\cdots, a_k$ を順序統計量とし，q_1, q_2, $\cdots\cdots$, q_k をそれに対応する確率とし，各 a_i は n_i 回起り，$\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ とする．このとき，累積分布

$$q_1 + q_2 + \cdots\cdots\cdots + q_k = Q_i \quad (i=1,2,\cdots\cdots,k) \quad , \quad Q_k = 1$$
$$n_1 + n_2 + \cdots\cdots\cdots + n_k = N_i \quad (i=1,2,\cdots\cdots,k) \quad , \quad N_k = n$$

を考えると，理論分布 $F(x)=Q_i$，経験分布 $F_n(x)=\frac{N_i}{n}\ (a_i \leqq x < a_{i+1})$ となり，前と同じく $E[\omega_n^2]=1$ なるように λ を選ぶと，$\frac{1}{\lambda} = n \sum_{i=1}^{k} Q_i(1-Q_i)$ で，

$$\omega_n^2 = \lambda \sum_{i=1}^{k} (N_i - nQ_i)^2 \tag{1.6}$$

となるわけである．この ω_n^2 の分散も少々複雑だが計算される．

一方ソヴィエト統計学者 Smirnov は 1936 年に，フランス学士院雑誌 [41 ; 1936] に自ら「Von Mises のよく知られた表現の修正」と呼んで「ω^2 分布について」と題する論文を証明なしに発表し，翌年ロシヤ語で [42 ; 1937] それの完全な証明を与えている．そこでは，現在われわれが研究対象としているこの種の統計量の確率分布についての先駆的な意味をもっていて，ノンパラメトリック統計推論のひとつの問題としてはじめて明確な形をとったものといえる．

Smirnov は

$$\omega_n^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} \big(F_n(x) - F(x)\big)^2 \psi\big(F(x)\big)\, dF(x) \tag{1.7}$$

で ω^2 統計量を定義した．こゝに $\psi(t)$ は $0 \leqq t \leqq 1$ であらかじめ指定した非負の荷重函数である．

この Smirnov の ω_n^2 に基づく検定は distribution free となることが決定的に重要である．何故ならば，仮説が真のとき，$F(x)$ の連続性より，$F(x)=t$ なる変換をすると，$F(x_i)$ は独立で，区間 $(0,1)$ 上の一様分布をするから，観測値 $x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots\cdots \leqq x_n$ はこの変換で $t_1 \leqq t_2 \leqq \cdots\cdots \leqq t_n$ となり

$$\omega_n^2 = n \int_0^1 \big(F_n(t) - t\big)^2 \psi(t)\, dt \tag{1.8}$$

となって，与えられた $F(x)$ には ω_n^2 は依存しないからである．

こゝに $F_n(t)$ は区間 $(0,1)$ 上の t の分布を表わす．この検定は distribution free である上に，consistent であり，どんな grouping of the data をも必要としないことが分るが，これらの三つの性質は，同じ適合度仮説を検定するカイ二乗検定にはみられない望ましい性質といえよう．この Smirnov の ω_n^2 (1.7) と先の Von Mises の ω_n^2 (1.1) の関係をみてみるとき，その間には本質的な差異はない．$\lambda[F^{-1}(t)]\{F^{-1}(t)\}'=\psi(t)$ とおくと (1.1) は (1.7) になり，逆に $\psi[F(x)]F'(x)=\lambda(x)$ とおくことにより (1.7) は (1.1) に変換されるからである．又 Smirnov の ω_n^2 はあらかじめ連続で，単調増加なる函数 $F(x)$ を仮定するが，Von Mises の ω_n^2 では $F(x)$ については何の仮定もおかないことに注意したい．

さて，大きさの順に並べた順序標本 $x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots\cdots \leqq x_n$ に対して，任意の $F(x)$ について

$$\omega_n^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^{n} \left[F(x_i) - \frac{2i-1}{2n}\right]^2 \tag{1.9}$$

と展開され，個々の標本値が分ると，ω_n^2 の値は直ちに計算できることになる．又この統計量の平均値，分散については，

$$E[\omega_n^2]=\frac{1}{6}, \qquad Var[\omega_n^2]=\frac{4n-3}{180n}$$

であり，これは $E[F_n(x)-F(x)]^2=\frac{F(x)\left(1-F(x)\right)}{n}$ を考慮することによって容易に得られるものであるが，これらを実際の標本における ω_n^2 の値と比較してみて，仮説を検定することもできる．

Smirnov の大きな寄与は，ω_n^2 の漸近的確率分布 $H(z)$ を求めたことである．彼はまず ω_n^2 の極限特性函数 $\phi(t)$ が

$$\phi(t)=\lim_{n\to\infty}E\left\{\exp(it\omega_n^2)\right\}=\frac{1}{\sqrt{D(2it)}} \tag{1.10}$$

となることを証明した．こゝに $D(\lambda)$ は Fredholm 行列式で，次のような核 $k(x, y)$ をもつ．

$$\begin{aligned} k(x, y)&=\sqrt{\psi(x)\psi(y)}\,x(1-y), \qquad x\leqq y \text{ のとき}\\ &=\sqrt{\psi(x)\psi(y)}\,y(1-x), \qquad x\geqq y \text{ のとき,}\end{aligned} \tag{1.11}$$

更にこの極限特性函数に対応する分布函数を求め，次の形に展開したのである．

$$H(x)=\lim_{n\to\infty}Pr\{\omega_n<z\}=1-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\int_{\lambda_{k-1}}^{\lambda_k}\frac{e^{-xz/2}}{\sqrt{-x^2D(x)}}dx \tag{1.12}$$

こゝで $\lambda_j\,(j=1, 2, \cdots\cdots,)$ は行列式 $D(\lambda)$ の根，すなわち積分方程式

$$f(y)=\lambda\int_0^1 k(x, y)f(x)dx \tag{1.13}$$

の固有値である．

特に荷重函数が $\psi(x)=1$ の場合*) 核 $k(x, y)$ は $k(x, y)=\begin{cases}x(1-y) & x\leqq y\\ y(1-x) & x\geqq y\end{cases}$ となって，これを $c(x, y)$ で表わすことにする．このとき，$D(\lambda)=\frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}$，$\lambda_n=n^2\pi^2$ が得られ，分布は簡単になる．Smirnov は後に [43; 1949] でこの結果のより簡単な証明を与えたのであるが，それは次章で述べることにしよう．

§ 3. ω^2 統計量の漸近的確率分布

前章の終りで，Smirnov の ω_n^2 統計量の漸近的確率分布を形式的に積分方程式の固有値を用いて展開されることをみたわけであったが，その約 10 年程経て，Smirnov の derivation が一層簡単な形でおきかえられるようになった．それは主として Doob [23; 1949], Donsker [22; 1952], Kac-Siegert [25; 1947] などによる確率過程論に基礎をおくものである．

いま $F_n^*(t)$ を $F(x_1), \cdots\cdots, F(x_n)$ に基づく経験分布函数とし，$x_n(t)=\sqrt{n}\left(F^*_n(t)-t\right)$, $0\leqq t\leqq 1$ とおくと，

$$\omega_n^2=\int_0^1 x_n^2(t)\psi(t)dt \tag{2.1}$$

となり，$\sqrt{n}\left[F_n(x_i)-F(x_i)\right]$ $(i=1, 2, \cdots\cdots, k)$ は極限的に多次元正規分布をもつという，多次元中心極限定理より，$x_n(t)$ は平均 0，共分散 $c(x, y)$ をもつ正規分布に収束することが分る．そこでいま，

$$\begin{aligned} &E\left[z(x)\right]=0,\\ &E\left[z(x)\,z(y)\right]=x(1-y)\equiv c(x, y) \qquad (x\leqq y)\end{aligned}$$

---

*) このとき，$\omega_n^2=n\int_{-\infty}^{\infty}[F_n(x)-F(x)]^2dF(x)$ となり，これを $n\omega^2$ とかくこともある。

をみたす正規過程 $z(x)$ をとると，

$$\lim_{n\to\infty} P_r\{\omega_n^2 \leqq t\} = P_r\left\{\int_0^1 z^2(x)\,dx \leqq t\right\} \tag{2.2}$$

が予想される．これは Doob が 1949 年に予想し1952 年 Donsker によって証明された結果である．Anderson-Darling [4; 1952] は，扱っている荷重函数が二点 (0, 0)，(1, 1) で不連続な場合，及びbounded でない一般の荷重函数に対しても (2.2) の結果が成立するように一般化したが，本質的には Donsker の定理に訴えるものである．

一般に $Q(f)$ を適当な functional のとき，

$$\lim_{n\to\infty} P_r\left\{Q\left(x_n(t)\right) < x\right\} = P_r\left\{Q\left(x(t)\right) < x\right\}$$

が成立つかどうかを調べる，いわゆる "invariance principle" の問題は興味あるものであるが，これは確率論研究者によって，いろいろな一般化が試みられている．

ところで Smirnov の結果 (1.10) は Kac-Siegert [25; 1947] の定理を用いて直ちに導かれるものである．その要点は次の通りである．前述した如く，結局問題は $W^2=\int_0^1 z\,(x)\,dx$ の分布に帰着するのであるが，これは $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{G_j^2}{\lambda_j}$ の分布に一致することになる．こゝで $G_1, G_2\cdots$ $\cdots$は独立な平均 0，分散 1 の正規分布にしたがい，$\lambda_1, \lambda_2\cdots\cdots$は核 $c(x, y)$ の固有値，すなわち積分方程式

$$f(y)=\lambda\int_0^1 c(x, y)\, f(x)\,dx$$

の Fredholm 行列式 $D(\lambda)$ の根を表わしている．したがって

$$W^2=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_j}G_j^2 \tag{2.3}$$

が結論され，確率変数 $W^2=\int_0^1 z^2(x)\,dx$ の特性函数 $\phi(t)$ は，

$$\begin{aligned}\phi(t) &= E\,[e^{itw^2}] = E\left[\exp\left(it\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_j}G_j^2\right)\right] \\ &= \prod_{j=1}^{\infty} E\left[\exp\left(\frac{itG_j^2}{\lambda_j}\right)\right] \\ &= \prod_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{2ti}{\lambda_j}\right)^{-1/2} \end{aligned} \tag{2.4}$$

となる．最後の等式は G_j^2 が自由度 1 のカイ二乗分布をするから，その特性函数は $\left(1-\frac{2it}{\lambda_j}\right)^{-1/2}$ となることから得られるものである．故に product formula $D(\lambda)=\prod_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_j}\right)$ を用いて，Smirnov の元の形 $\phi(t)=\frac{1}{\sqrt{D(2it)}}$ が得られたことになる．

Smirnov の ω_n^2 を統一的，系統的に極限分布を考察したのは Anderson-Darling [4; 1952] である．彼等は ω_n^2 と同じく，Kolmogorov-Smirnor 型の K_n 統計量

$$K_n=\sqrt{n}\sup_x\left\{|F(x)-F_n(x)|\sqrt{\psi\left(F(x)\right)}\right\}$$

の漸近分布をも合わせて，これらの極限分布を計算する一般的方法を，確率過程に基礎をおいて導出したのである．それは大雑把にいって，固有値問題と微分方程式のクラスの境界問題に関係するわけであるが，その本質的な源はやはり Doob-Donsker，Kac-Siegert に求められるべきものである．特に (1.7) の ω_n^2 の定義式で，$\psi(t)$ が特別な値，すなわち $\psi(t)=1$，および $\psi(t)=\frac{1}{t(1-t)}$ に対して，漸近確率分布を explicit な表現として与え，$\psi(t)=1$ の場合（す

なわち $n\omega^2$ のとき）に，完全な数値表を与えた点の功績が大きいといえよう．

まず積分方程式

$$f(y)=\lambda\int_0^1 K(x,y)f(x)\,dx$$

は二次の常微分方程式の first boundary value problem と同値なことに着目し，今の場合 $\psi(t)$ が $0\leqq t\leqq 1$ で連続ならば，

$$\varphi''(t)+\lambda\varphi(t)\psi(t)=0, \qquad \varphi(0)=\varphi'(1)=0 \tag{2.5}$$

はユニークな解 $\varphi_\lambda(t)$ をもち，Frelholrn 行列式 $D(\lambda)$ は

$$D(\lambda)=\frac{\varphi_\lambda(1)}{\varphi_0(1)}\quad\left(\text{故に } W^2 \text{ の特性函数は } \sqrt{\frac{\varphi_0(1)}{\varphi_\lambda(1)}}\right)$$

となることを証明した．

したがって，われわれの W^2 の特性函数を求める問題は微分方程式の一般解を求める問順に帰着される．

ところで W^2 の半不変係数は $\kappa_n=2^{n-1}(n-1)!\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_j}\right)^n$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ と表わせることが分り，ω^2 の平均，分散はそれぞれ $\kappa_1=\mu=\Sigma\frac{1}{\lambda_j}$，$\kappa_2=\sigma^2=2\,\Sigma\left(\frac{1}{\lambda_j}\right)^2$ と求められる．しかし固有値を知らなくともモーメントは，$c(x,y)$ の重複核 $c_n(x,y)$ を用いて

$$K_n=2^{n-1}(n-1)!\int_0^1 c_n(x,y)\,dx$$

と表わせる．しかし，これだけは分布 $P=P_r(W^2\leqq z)$ は分らない．Anderson-Darling は $\psi(t)=1$ の場合，W^2 の極限特性函数 $\phi_1(t)$ が

$$\phi_1(t)=\sqrt{\frac{\sqrt{2it}}{\sin\sqrt{2it}}}$$

なることから，ラプラス変換とベッセル函数とを巧みに用いて展開し，極限確率分布

$$a_1(t)=P_r\{W^2\leqq z\}=\lim_{n\to\infty}P_r\{\omega_n\leqq z\}$$

$$=\frac{1}{\pi\sqrt{z}}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\binom{-\frac{1}{2}}{j}(4j+1)^{1/2}\exp\left(-\frac{(4j+1)^2}{16t}\right)K_{1/2}\left(\frac{(4j+1)^2}{16z}\right) \tag{2.6}$$

を導き出した．こゝに

$$\binom{-\frac{1}{2}}{j}=(-1)^j\Gamma\left(j+\frac{1}{2}\right)\Big/\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)j!\right]$$

で，$K_{1/2}(x)$ はベッセル函数を表わす．上の級数 (2.6) の収束は非常に速くて都合が良い．更に $a_1(z)$ に対するパーセント点 t を小数第5位まで求めて表にしている．Von Mises の漸近確率分布の表現 (1.12) では，数値計算に適さず，したがって表も作製されなかったのであるが，こゝで初めて数表が出来上り，$\omega_n{}^2$ 統計量を実際問題に適用し得る第一歩が築かれたわけである．

Anderson-Darling は $\psi(t)=\frac{1}{t(1-t)}$ なる荷重函数についても同様な考察をしている．何故このような荷重函数を考えたかといえば，一般にグループ分けしない実際のデータを用いる検定では，メデイアンの附近より，分布の両端の方での動きの方が discrepancy に対して微妙な様相を呈すので，$\sqrt{n}[F_n(t)-t]$ の分散が $t(1-t)$ となることに注意して，$\psi(t)$ の $t=0$, $t=1$ の近くでかなりのウエイトを持たせるわけである．

この $\psi(t)$ に対しては，極限特性函数 $\phi_2(t)$ と漸近確率分布 $a_2(z)$ がそれぞれ次式で与えられる．

$$\phi_2(t)=\sqrt{\frac{-2\pi i t}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{1+8it}\right)}}$$

$$a_2(z)=\frac{\sqrt{2\pi}}{z}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{j}\exp\left(-\frac{(4j+1)^2\pi^2}{8z}\right)\int_0^{\infty}\left[\frac{z}{8(t^2+1)}-\frac{(4j+1)^2\pi^2t^2}{8z}\right]dt \quad (2.7)$$

Anderson-Darling [4: 1952] では，この (2.7) の数表が求められていないが，[5; 1954] において，漸近的信頼点が若干について求められている．しかし実用上はこれだけでは不十分であって更に詳しい数表の完成が望まれるところである．

Von Mises は [52; 1947], [53; 1952] に於て，一般的見地から ω_n^2 に似た統計量の極限分布を考察し，"statistical function" と呼ぶ概念を導入した．この statistical function は経験分布函数 $F_n(x)$ の函数で，線型近似性をもたないものである．そこでは同一分布にしたがわない確率変数 X_i を考え，statistical function の立場から，極限法則を統一的に扱う試みがなされている．又 Anderson [2; 1954] では，適合度仮説を検定するのに，ω_n^2 とは別の

$$V=\iint[F_n(x)-F(x)][F_n(y)-F(y)]\,l[F(x),F(y)]\,dx\,dy \quad (2.8)$$

なる統計量を考え，この極限分布は，仮説が真のとき，

$$V^*=\iint X(u)\,X(v)\,l(u,v)\,du\,dv$$

の分布に一致すること，及び V^* の特性函数が $\Pi\left(1-\frac{2it}{\mu_j}\right)^{-1/2}$ になることを証明なしで述べている．ただし，$X(u)$, $(0\leqq u\leqq 1)$ は平均0のある正規過程である．しかしながら，この V についてはその後全く考察された様子はないようである．

§ 4. ω^2 統計量の exact 確率分布

ω_n^2 の確率分布が distribution-free であることは既にみてきたが，このため $F(x)$ は区間 $(0,1)$ 上の一様分布と仮定しても一般性は失はれない．このとき順序統計量 $x_1\leqq x_2\leqq\cdots\leqq x_n$ を用いて計算が便利になるように，

$$\omega_n^2=\frac{1}{12n}+\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{2i-1}{2n}-x_i\right]^2 \quad (4.1)$$

とかける．

Marshall [34; 1959] は (4.1) 式が，小標本に対する ω_n^2 統計量の分布を求めるのに便利なことを見出し，$n=1,2,3$ の場合についての exact な分布を初めて導き出した．前章で述べた如く，ω_n^2 統計量の漸近分布については Anderson-Darling をもって，一応の解決をみたわけで，一般の n に対しての exact な分布を求めることは，残された大きな問題となっていたわけである．

Marshall の方法は初等解析幾何学の知識のみで解決できるものであって，その限りでは巧い方法といえるが，$n=3$ の場合でもう相当複雑な式となり，$n>4$ に対しては一寸検討がつかない具合である．試みに $n=2$ の場合を例にとることにしてみよう．

$$\omega_2^2=\frac{1}{24}+\left[\frac{1}{4}-x_1\right]^2+\left[\frac{3}{4}-x_2\right]^2$$

より，$P_r\{\omega_2^2\leqq z\}$ 求めるのに，中心が $\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$ 半径が $\sqrt{z-\frac{1}{24}}$ なる円 $\left(x_1-\frac{1}{4}\right)^2+\left(x_2-\frac{3}{4}\right)^2=\left(z-\frac{1}{24}\right)$ と，頂点として $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ をもつ三角形との共通領域の面積を求めることに帰着させる．結果は

$$F_2(z)=Pr\{\omega_2{}^2\leqq z\}$$

$$=0 \qquad \left(z<\frac{1}{24}\right)$$

$$=2\pi\left(z-\frac{1}{24}\right) \qquad \left(\frac{1}{24}\leqq z<\frac{5}{48}\right)$$

$$=\left(z-\frac{1}{24}\right)\left[2\pi-4\cos^{-1}\frac{1}{4}\left(z-\frac{1}{24}\right)^{-1/2}+\frac{\left(z-\frac{5}{48}\right)^{1/2}}{z-\frac{1}{24}}\right] \qquad \left(\frac{5}{48}\leqq z<\frac{1}{6}\right)$$

$$=\left(z-\frac{1}{24}\right)\left[\frac{3\pi}{2}-2\cos^{-1}\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{8}\right)^{1/2}-\left(z-\frac{1}{6}\right)^{1/2}\left(z-\frac{5}{48}\right)^{1/2}}{z-\frac{1}{24}}\right]$$

$$+\frac{1}{8}+\left[\frac{1}{2}\left(z-\frac{1}{6}\right)\right]^{1/2}+\frac{1}{2}\left(z-\frac{5}{48}\right)^{1/2} \qquad \left(\frac{1}{6}\leqq z<\frac{2}{3}\right)$$

$$=1 \qquad \left(z\geqq\frac{2}{3}\right)$$

であり，$n=3$ では，z の場合分けとして8通り考慮せねばならずかなり厄介である．

更に Marshall は $n=1,2,3$ の場合のパーセント点を求めて数表を作製し，Anderson-Darling の漸近分布との比較を試みている．そうして漸近分布は $n=1,2,3$ の小標本の exact な分布に対してかなり良い近似を与えていることをみている．既に Anderson-Darling [5; 1954] に於て，彼等は，「経験的にいって漸近分布の収束はかなりよく，$n=40$ 位のサンプルサイズでは，漸近分布を用いても十分安心できるであろう」と示唆しているのであるが，Marshall の結果では，$n=3,4,5$ あたりでも，大きな誤りないことを示しているものといえよう．この意味では，$n>4$ に対する $\omega_n{}^2$ 統計量の exact な分布が求められなくとも，実用上はさして不便はないということになる．

§ 5. Grouping of data の効果

適合度検定はふつう K. Pearson のカイ二乗検定により行われることが多いが，これはよく知られているように必ずしも満足なものではない．ω^2 検定を用いるひとつの理由としては，カイ二乗分布のもつ grouping of data を，こゝでは必要としないことにあるが，逆に，$\omega_n{}^2$ の分布を求めるのに，この有利な点を切り捨てて grouping of data の場合について考察することも可能なわけである．

もちろん，小標本分布及び漸近分布が既に求められた現在，こうした方面の研究は価値が薄くなることは否めないが，$\omega_n{}^2$ 検定の歴史的発展の中のひとつの実として眺めてみることも無意味ではなかろう．

$\omega_n{}^2=\frac{1}{12n}+\sum_{i=1}^{n}\left[F(x_i)-\frac{2i-1}{2n}\right]^2$ の統計量の計算には n ケの i のすべてに対して $F(x_i)$ を決めなければならないため，n が大きいとき，この数値計算はかなり労力を要する．この計算労力を，軽減させる一つの方法は，大標本をグループに分けることである．

この方面の理論的基礎は Watanabe [56: 1952] にみることができる．こゝでは，x 軸を連続した K ケの区間に分割し，仮説が真のとき，各区間は等確率をもつ（一ケの標本値を含む確率が等しい）とし，k 番目の区間 $(k=1,2,\cdots\cdot K)$ に落ちる標本の数を n_k とするとき，$\omega_n{}^2$ は n が十分大きいとき，

$$\omega^2{}_{nK}=\frac{1}{nK}\sum_{i=1}^{K-1}\left\{\sum_{k=1}^{i}\left(n_k-\frac{n}{K}\right)\right\}^2 \tag{5.1}$$

で近似できることに着目している．

$n\to\infty$ のとき，$\omega_{nK}{}^2$ の極限特性函数 $\psi_n(t)$ を特性根の積で表わし，それから，

$$\psi_n(t)=\frac{1}{\sqrt{D_n(\lambda)}}=\sqrt{\frac{(-1)^{n-1}n}{P_{n-1}(\zeta)}} \tag{5.2}$$

を導き出される．こゝで $\lambda=2it=n^2\zeta$ であって，$P_{n-1}(\zeta)=\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l\binom{2n-1-l}{l}\zeta^{n-1-l}$ なる ζ についての $(n-1)$ 次の多項式である．ここのところの derivation は Smirnov のそれと，そんなに本質的には違いのないものである．この特性函数を invert して確率分布を求める際に函数論的方法を用いところがユニークであるが，結局は

$$F(\omega_n{}^2)=1-\frac{\sqrt{n}}{\pi}\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1}\int_{\zeta_{2k-1}}^{\zeta_{2k}}\frac{\exp\left(-\frac{1}{2}n^2\omega_n{}^2\zeta\right)}{\sqrt{(-1)^n P_{n-1}(\zeta)}}d\zeta \tag{5.3}$$

ただし $p=\frac{n-1}{2}$ (n が偶数のとき)，$=\frac{n}{2}$ (n が奇数のとき) である．

$K\to\infty$ のときの分布は，$\omega_n{}^2$ の漸近分布に相当するものであるが，同じようにして

$$F(\omega^2)=1-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi}\frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\omega^2 z^2\right)}{\sqrt{-z\sin z}}dz \tag{5.4}$$

となるが，これは Smirnov の結果 (1.12) と同じ形である．Watanabe は上の (5.4) より各 ω^2 に対しての分布を計算し数値表を作成してもいる．

実用上は各 K に対しての分布の数値結果が必要とされるわけであるが，Kondo [31; 1954] は $K=2$, $K=9$ の場合について，上記 $\omega_{nK}{}^2$ 統計量の分布を，いわゆる Gauss の方法を用いて数値計算し，この両者と $K=\infty$ の場合を比較討している．そうして ω^2 の値が極めて小さい場合を除いて，ほとんど差異がないことを示している．これは前章の Marshall と Anderson-Darling の比較に対応してみても当然のことであろう．尚この線に沿った研究としては Walsh [55; 1961] があり，その内容は，$F_K(z)=\lim_{n\to\infty}P_r(\omega^2{}_{nK}\leqq z)$ を $F_\infty(z)$ で近似することであり，

$$F_K(z)\doteqdot F_\infty(z)-4K^{-7/3}[1-F_\infty(z)]^{0.84}(z-2.764/K+3.82/K^2)$$

を証明なしで示し，この近似式で数値計算した結果を上記 Watanabe, Kondo のそれと比較し，この近似が相当良いものであることを示している．これから任意の K に対する分布の大体の様子が分るのである．

§6. 多標本検定問題

Kolmogorov 検定に対応して，Smirnov は二標本検定問題を提起し，この種のタイプの検定を Smirnov 型検定と呼んで，これまで多くの研究者によって数々の論文が表われてきたことは承知のことであろう．

二標本検定問題というのは，大きさがそれぞれ n, m の二個の資料 $x_1,\cdots,x_n$; $y_1, y_2,\cdots,y_m$ が与えられたとき，この二つの標本は共に同一の分布をもつ母集団からの標本とみなし得るかどうかを検定することである．いいかえると，$X_1,\cdots,X_n$; $Y_1,\cdots,Y_m$ は互いに独立な確率変数で，それぞれ連続な分布 $F(x)$, $G(x)$ をもつとするとき，仮説

「H_0': $F(x)=G(x)$」

を検定することになる．

Smirnov は二標本の経験分布函数をそれぞれ $F_n(x)$, $G_m(x)$ として，

$D_{m,n}=\sqrt{\frac{mn}{m+n}}\sup_x|F_n(x)-G_m(x)|$ なる統計量を考え，この極限分布を考察した．

これに対して，ω^2 型二標本検定問題は，1953 年になって初めて Rosenblatt [39; 1953] に

より導入されたもので，そこでは，二標本 $x_1, x_2, \cdots, x_n$; $y_1, y_2, \cdots, y_m$ を順序標本として，これから経験分布函数 $F_n(x)$, $G_m(x)$ をつくり，

$$\omega^2_{m,n} = \frac{m\,n}{m+n}\int_{-\infty}^{\infty}(F_n(x)-G_m(x))^2\,d\,\frac{F_n(x)+G_m(x)}{2} \tag{6.1}$$

なる統計量を導入し，これに基づいて検定を行うことを考える．この統計量は既に Lehman [33; 1953] によって示唆されていたものであるが，distribution free 検定として，明確に二標本検定のために用いることを提案したのは，Rosenblatt が最初のものであろう．Rosenblatt は，仮説が真のとき，$m\to\infty$, $n\to\infty$, $\frac{m}{n}\to\lambda>0$ ならば，この $\omega^2_{m,n}$ 統計量は Mises 統計量 ω_n^2 と同じ ($\psi=1$ のとき) 極限分布をもつことを示している．証明には標本が一様分布母集団からのものである時を考え，Doob による確率過程論の方法を用いる．しかしながら，この証明の一部分に誤りがあって，Fisz [24; 1960] はそれを訂正し，より一般的な形

$$\omega_{m,n}^2 = \frac{m\,n}{m+n}\int_{-\infty}^{\infty}(F_n(x)-G_m(x))^2\,d\left(\frac{n\,F_n(x)+m\,G_m(x)}{n+m}\right) \tag{6.2}$$

について，同じ結果が成立することを指摘している．(6.2) はいわば重みをつけたもので，やはり Lehman が既に示唆しているものである．$\omega_{m,n}^2$ の極限分布が ω_n^2 のそれと一致するという事実は，Smirnov の $D_{m,n}$ の極限分布が Kolmogorov の K_n のそれと一致するということに対応するもので，はなはだ興味深いことでもあり，われわれの直観を納得させるものでもある．

一方 Anderson [3; 1962] は m, n の小標本に対する $\omega_{m,n}^2$ の分布の様子を rank を道具として調べ，信頼点の表を作製する試みを行った．ここでは，まず

$$\omega_{m,n}^2 = \frac{n\,m}{(n+m)^2}\left\{\sum_{i=1}^{n}\Big[F_n(x_i)-G_m(x_i)\Big]^2+\sum_{j=1}^{m}\Big[F_n(y_j)-G_n(y_j)\Big]^2\right\} \tag{6.3}$$

と表現する．いま二標本を一緒にまとめた大きさ $(m+n)$ の pooled data における第一標本の順序標本の rank を r_i とし，第二標本については s_j とすると，i 番目の観測値については $F_n(x)-G_m(x)=\frac{i}{n}-\frac{r_i-i}{m}$ であるから，いま $U=n\sum_{i=1}^{n}(r_i-i)^2+m\sum_{j=1}^{m}(s_j-j)^2$ とおくと，

$$\omega_{m,n}^2 = \frac{U}{n\,m\,(n+m)} - \frac{4\,m\,n-1}{6\,(m+n)} \tag{6.4}$$

よって仮説 H_0' を検定するには，U が十分大きいとき，仮説を棄却すればよいことになる．Anderson はこれを基に，$n, m=1, 2, \cdots, 7$ についてのすべての組にわたって，U の分布を計算し表を与えている．この $\omega_{m,n}^2$ については

平均 $E(\omega_{m,n}^2)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6\,(m+n)}$;

分散 $Var(\omega_{m,n}^2)=\frac{m+n+1}{45\,(m+n)^2}\times\frac{4\,m\,n\,(m+n)-3\,(m^2+n^2)-2\,m\,n}{4\,m\,n}$

である．これより，観測値が有意であるか否かを決めるため，近似分布として極限分布を用いる一つの方法は観測値 $\omega_{m,n}^2$ を

$$\frac{\omega_{m,n}^2-E(\omega_{m,n}^2)}{\sqrt{45\,Var(\omega_{m,n}^2)}}+\frac{1}{6}$$

と正規化し，この値を極限分布の信頼点と比較することである．これより実際の有意水準と，この方法による有意水準の差を比較すればよい．Marshall が一標本のとき示した如く，この場合の極限分布は，m, n の中位の値に対しての exact な分布には非常に良い近似を与えるようである．

Burr [14; 1963] は標本の大きさが等しい場合，つまり $m=n$ について test criterion として

$$t' = \frac{d_0^2 + d_1^2 + \cdots + d_{2n}^2}{4n^2} \tag{6.5}$$

を用いて，この分布を考察する．こゝで d_i は $2n$ 個の pooled sample を順序標本にして，初めの i 番目までのメンバーに含まれる第一標本と第二標本の個数の差を表わしている．既に Darling [21; 1957] の報告にみる通り，Kolmogorov-Smimov 型統計量に対しては，この種の等しい大きさをもつ二標本検定に関する研究がソヴィエト統計学者を中心に相当進められてきたのであるが，ω^2 型のものとしては，この Burr が最初のものと思はれる．仮説が真のとき，確率分布を

$$P_n(t) = Pr(t' \geqq t) = 1 - F(t)$$

とおくとき，$P_n(t)$ が upper tail $P_n \leqq 0.1$ で $P_\infty = \lim_{n\to\infty} P_n(t)$ に近づく様子を調べているが，これは Anderson [3; 1962] の方針に沿ったものであり，equal samples の場合えの拡張ともいえよう．$n=1, 2, \cdots, 10$ なる n についての完全な分布を求めるのに，$P_n(t)$ を計算する方法を，直線上のランダムウオークの考えを用いて与え，更に $n=11,\ 12,\ 14$ に対しての upper tail での結果の一部を与えている．又極限分布 $P_\infty(t)$ と，$m=n$ の時に計算される分布との間を調べて，exact な分布と極限分布を用いて近似するときの "empirical formula" を各 t について考慮する．例えば，$8 \leqq n \leqq 12$, $t \geqq 0.3$ なる t に対して，「$\log_{10} P_\infty$ と $\log_{10} P_n$ のちがいはすべて，同じ点の近くで符号を変え，固定した t に対して近似的に n^{-1} に比例する」ことを $\log_{10} P_n$ のグラフから考慮して，

$$\log_{10} P_n = \log_{10} P_\infty + n^{-1} g(t)$$

を与えている．

更に同じ方針に沿って，Burr [15; 1964] は

$$\omega_{m,n}^2 = \frac{mn}{(m+n)^2} \sum d_i^2$$
$$= \frac{mn}{(m+n)^2} \sum_{i=1}^{m+n} \left(\frac{n_i}{n} - \frac{m_i}{m} \right)^2 \tag{6.6}$$

を考える．すなわち $(m+n)$ ケを順序標本にして初めの i 番目までのメンバーに含まれる，第一標本の個数 n_i と第二標本の個数 m_i との差として考え，$m, n \geqq 4$, $m+n \leqq 17$ なる各 m, n について，真の確率分布 $P=P_r\{\omega_{m,n}^2 \leqq t\}$ が $P \leqq 0.1$ なるすべての可能な $\omega_{m,n}^2$ に対して計算し，表を作製している．但し修正因子 $R=P/P_\infty$ (P_∞ は極限分布を用いて得られる P の近似) と P との値が水準 $(10, 8, 6, 5, 4, 3, 2.5, 2, 1.5) \times 10^{-a}$, $(a=2, 3, 4)$ の各々について最小の ω^2 信頼点を計算したものである．計算の方法は次のごとき

$$\omega_{m\,n}^2 = \frac{\sum s_j^2}{4m^2 n(m+n)} + \frac{n(n+2m)}{12nm(m+n)} \tag{6.7}$$

整数の二乗和として表現し，結局 $\sum_{j=1}^{m} s_j^2$ の到達可能な値えの rise を与える順列を計算することに帰着させるわけである．

ただし，$s_j = 2mr_j - (2j-1)n \quad (j=1, 2, \cdots, m)$ で，pooled sample において第二標本の r_j ケが第一標本の j 番目の要素より手前にくるものとする．

Wegner [59; 1953] は

$$\theta(F, G) = \int_{-\infty}^{\infty} (F-G)^2 dG$$

なる F と G の間の discrepancy を測る measure を提案し，汎函数 $\phi(F, G) = \frac{1}{3} + \theta(F, G) + \theta(G, F)$ の最小.

分散不偏推定量である Lehman の distribution-free 統計量を用いて，これらの極限分布を論じている．そうして仮説 H_0' が真のとき，この極限分布は Von Mises のそれと同じであり，対立仮説 H_1「$F \neq G$」の F では，漸近分布は F と G に少々の条件をつけたならば正規分布になることを示している．

さて一般の多標本検定問題は非常に難しく，ほとんど研究対象にされてこなかったのであるが，Kiefer [27; 1955], [28; 1958], [29; 1959] は Komogorov-Smirnov 型統計量など一連の経験分布に基づく統計量を統一的に扱い，ほぼ完全な解決を一人で与えた．こゝで問題は「k ケのランダムサンプル $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_k$ は同じ確率分布をもつ母集団からとられた標本である」なる仮説を検定することである．これを formulate すると，$X_{ji} (1 \leqq i \leqq n_j;\ 1 \leqq j \leqq k)$ を独立な確率変数として，X_{ji} は未知な連続の確率分布 F_j をもっとするとき，

$$\text{仮説}\quad H_0'':\ F_1 = F_2 = \cdots\cdots = F_k\ (\equiv G)$$

を検定するわけである．この場合対立仮説としては，上の H''_0 に反するすべての集合 $(F_1, F_2, \cdots\cdots, F_k)$ を考える．

このとき経験分布函数は，

$$S_{n_j}^{(j)}(x) = \frac{1}{n_j}\left\{X_{ji} \leqq x \quad \text{なる個数；}\quad 1 \leqq i \leqq n_j\right\}$$

で定義し，j 番目の集合における n_j ケの観測値の標本分布である．

明らかに，$k=1$ のときが Kolmogorov 検定，Cramér-Von Mises 検定であって，$k=2$ のときが Smirnov 検定，Lehman-Rosenblatt 型検定であるが，test criterion として，$k>2$ のときは $S^{(j)}$ の間に種々の距離の測度が考えられる．Kiefer は

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_j n_j \left[S_{n_j}^{(j)}(x) - G(x)\right]^2 dG(x) \tag{6.8}$$

を導入し，仮説が真の時この統計量 W が共通の分布 $G(x)$ に依存しないことから，すべての F_j は単位区間上の一様分布であるという仮定の下で議論を進めていく．まず Anderson-Darling [4; 1952] と同様に独立なウイーナー過程 $\{Y_i(t)\}$ をつくり，

$$B_h(z) \equiv Pr\left\{\int_0^1 \sum_{i=1}^{h} \left[Y_i(t)\right]^2 dt \leqq z\right\} = \lim_{all\, n_j \to \infty} Pr\{W \leqq z\} \tag{6.9}$$

を Donsker-Rosenblatt の定理により証明する．こゝで注意すべきことは，二標本検定の際に必要であった．標本サイズの比 n_i/n_j が正の有限の値に近づくという仮定がとり振われていることである．この極限分布を求める手順はかなり厄介であるが，分布 $B_h(z)$ が $B_1(z)$ 自身の n 重 convolution であることをみて，Anderson-Darling と同じく，ラプラス変換を用いて，

$$B_h(z) = \frac{2^{(h+1)/2}}{\sqrt{\pi}\, z^{h/4}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\Gamma\left(j + \dfrac{h}{2}\right)}{j!\, \Gamma\left(\dfrac{h}{2}\right)} \exp\left(-\left(j + \frac{h}{4}\right)^2 \Big/ z\right) D_{\frac{h}{2}-2}\left(\left(2j + \frac{h}{2}\right)\Big/\sqrt{z}\right) \tag{6.10}$$

を得る．こゝで D は parabolic cylinder function を表わしている．

更に h が偶数のとき，上の $B_h(z)$ は n 次の Hermite 多項式 $H_n(x)$ を用いて，もっと簡単な形

$$B_h(z) = \frac{2^{(h+1)/2}}{\sqrt{\pi}\, z^{h/4}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(j + \dfrac{h}{2}\right)}{j!\, \Gamma\left(\dfrac{h}{2}\right)} \exp\left(-\left(j + \frac{h}{4}\right)^2 \Big/ z\right) H_{\frac{h}{2}-2}\left(\left(2j + \frac{h}{2}\right)\Big/(2z)^{1/2}\right)$$

に書くことができるし，h が奇数の時は $B_h(z)$ をベッセル函数で書くことができる．

ちなみに $h=1$ のときが Anderson-Darling の結果 (2.6) であるが，これは $D_{-1/2}(z)$ をベッセル函数 $K_{1/4}$ でおきかえて同じ結果を得ることが容易に分る．Kiefer は上式 (6.10) においてベッセル函数をベキ級数に展開して $h=1, 2, 3, 4, 5$ に対する分布 $B_h(z)$ の数値表を完成

した．Kiefer のこの論文では主として Kolmogorov-Smirnov 型検定について，そのderivation，パワーなどに関して詳しく考察しているのであるが，多標本検定問題を系統的に取扱って，その数値表を完成した功績はまことに大きいといわねばならない．

§7. パラメトリック ω_n 検定

これまで述べてきた ω_n^2 及び $\omega_{m,n}^2$ 検定における帰無仮説は単純仮説であったが，これを複合仮説えと拡張してみるとどうなるであろうか．このため，母数の入っている ω^2 検定を考えてみよう．この場合，母数空間を Ω として，母数が未知のとき，

$$\text{仮説}\quad H_0^*:\ F(x)=F(x;\,\theta),\quad \theta\in\Omega$$

を検定しようというわけである．

母数が未知のときには，

$$\omega_n^2=n\int_{-\infty}^{\infty}\bigl(F_n(x)-F(x)\bigr)^2\,dF(x)$$

が使えないため，θ の代りに推定値を代用しなければならない．丘本 [36; 1955] は最丈推定値 $\hat\theta_n$ に対して

$$\omega_n^2(\hat\theta_n)=n\int_{-\infty}^{\infty}\bigl(F_n(x)-F(x,\,\hat\theta_n)\bigr)^2\,dF(x,\,\hat\theta_n)\tag{7.1}$$

を考え，この分布を考察する．

まず

$$\xi_s=\sqrt{n}\bigl[F_n(x_s)-F(x_s,\,\hat\theta_n)\bigr],\qquad s=1,2,\cdots,k$$

は漸近的に，正規分布 $N(0,\,c_{st})$ にしたがうことをテーラー展開を使って証明し，この ξ_s の漸近分布は母数 θ に依存しない（尺度母数と位置母数しか含まれていない！）ことを用いる．こゝに

$$c_{st}=c_{ts}=u_s(1-u_t)-\sum_{i,j=1}^{m}g^{ij}\frac{\partial u_s}{\partial\theta_i}\cdot\frac{\partial u_t}{\partial\theta_j},\qquad s\leqq t$$

で

$$u_s=F(x_s,\,\theta)$$

である．

したがって，平均 $E\bigl[z(u)\bigr]=0$，共分散 $E\bigl[z(u)z(v)\bigr]=u(1-v)-\sum_{i,j=1}^{m}g^{ij}\dfrac{\partial u}{\partial\theta_i}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial\theta_j}$，$u\leqq v$ をみたす正規過程 $z(u)$ をつくるとき，

$$\lim_{n\to\infty}Pr\left\{\omega_n^2(\hat\theta_n)\leqq t\right\}=Pr\left\{\int_0^1 z^2(u)\,du\leqq t\right\}$$

が予想できる．

この証明が完全に出来ると，問題は $\int_0^1 z^2(a)\,du$ の分布に帰着してしまうわけだが，まだ為されていない．ただし，この半不変係数は計算することができて，

$$\kappa_n=2^n(n-1)!\int_0^1 K_n(x,\,x)\,dx$$

となり，母数既知の場合と数値計算をすることにより，このときの半不変係数の値が著しく小さいことが分かり，少くとも母数既知のときの Anderson-Darling の表をそのまゝ用いるのは危険であることを指摘している．いずれにせよ，この場合の分布を精密に求めるにはまだ相当の困難が予想されるものである．

一方母数空間 Ω が実数区間 $a\leqq\theta\leqq b$ からなる場合について Darling [20; 1955] が詳細に試みている．$\hat\theta_n$ を θ の推定値として，ω_n^2 criterion と同じく

$$C_n^2 = n\int_{-\infty}^{\infty} (F_n(x) - F(x;\ \hat{\theta}_n))^2 dF(x;\ \theta_n) \tag{7.2}$$

を考え，C_n^2 が十分大きいとき，仮説 H_0^* を棄却する．この論文の主要な結果を列挙すると
(i) 適当な正規性の条件の下で（例えば Cramér 正規性）$nE\{|\hat{\theta}_n - \theta_0|^2\} \to 0$ (θ_0 は θ の真の値）のとき，すなわち $\hat{\theta}_n$ の分散が 0 に十分早く近づくとき，Von Mises の ω_n^2 の（$\psi \equiv 1$ として）極限分布と C_n^2 の極限分布とが等しい．
(ii) θ がいわゆる superefficient 推定値でなく，$\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n - \theta_0)$ が平均 0，分散 $\sigma^2 > 0$ の極限分布をもつならば，C_n^2 と ω_n^2 の極限分布は等しくなく，c_n^2 の極限分布は $\int_0^1 y^2(t)\,dt$ の分布に等しくなる．ここに $y(t)$ はガウス過程，平均 0，共分散 $k(s,t) = c(s,t) - \varphi(s)\varphi(t)$,

$$\varphi\big(F(x,\theta)\big) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n\,Var(\hat{\theta}_n)}\ \frac{\partial}{\partial\theta} F(x,\ \theta)$$

したがって C_n^2 の分布は，核として $k(s,t)$ をもつ Fredholm 行列式 $D(\lambda)$ に対する Smirnov の (1.12) の形で与えられる．
(iii) θ が最小分散不偏推定値 $\hat{\theta}_n$ であるか，又は最大推定値が Cramér の意味で漸近的に efficient であるときは，上の正規過過 $y(t)$ は簡単になり，C_n^2 の極限特性函数

$$\lim_{n\to\infty} E\left\{\exp(itC_n^2)\right\} = \left[D(2it)\right]^{-1/2}$$

をきめることができる．

そこで C_n^2 の極限分布をえるには $[D(2it)]^{-1/2}$ を invert する必要があるわけだが，これはまだ未解決の問題として残っている．

この test criterion C_n^2 はその極限分布において，仮説が真のとき，一般に distribution free にはならず，θ の真の未知の値に関係し，$F(x;\theta)$ の構造に依存する．しかし θ が location パラメーター又は scale パラメーター又は指数パラメーターなどの特殊な場合には，極限分布は θ の値に関係しなくて検定を可能なものにさせる．例えば，$F(x;\ \theta) = R(x - \theta)$ なる Cauchy 分布とするとき，

$$D(\lambda) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} + \left(\frac{4\pi}{4\pi^2 - \lambda}\right)^2 (1 - \cos\sqrt{\lambda})$$

となり，C_n^2 の極限分布は $\sum_{j=1}^{\infty} G_j^2/\lambda_j$ の分布と一致することが分かる．こゝに λ_j は上の $D(\lambda)$ の根である．

一方 Kac-Kiefer-Wolfowitz [26; 1955] では，$F(x;\ \theta)$ が未知の平均 μ，分散 σ^2 をもつ正規分布のクラスであるとき，Anderson-Darling とほぼ同じ方法で，カイ 2 乗検定との検出力の比較が行はれ，

$$\lim_{n\to\infty} Pr\left\{n\,w_n < a\right\} = P\left\{\int_0^1 z^2(t)\,dt < a\right\}$$

が示される．こゝに $w_n = \int [F_n^*(y) - N(y|\bar{x},\ s^2)]^2 d_y N(y|\bar{x},\ s^2)$ で，$N(y|\bar{x},\ s^2)$ は標本平均 $\bar{x}$，標本分散 s^2 をもつ正規分布を表わしている．

いずれにしろ，$D(\lambda)$ の形までは特別の場合に求められているが，C_n^2 の極限分布がはっきりした形で表現されている例はまだ存在せず，又二標本検定問題における parametric case の例もまだ全く行われていないのが現状である．

§ 8. 検定力 (Power) について

§ 3 で述べた Anderson-Darling の統計量 ω_n^2 (1.7) において，荷重函数 $\psi(t)$ の選び方に特別な criterion があるわけではないが，多少なりとも明確にではないが，対立仮説のクラス

に対しての検定力を最大にしようという直観的な意図のもとに選ばれることを暗に含んでいた.

しかしながら，ω_n^2 検定に限らず，他のノンパラメトリック検定 (Wilcoxon, run, ranking 等) について，対立仮説のクラスを正確に示すことや，実際の検定力を比較することなどの基礎的でしかも重要な問題は依然として未解決の分野が多い．近年になり，極めて少数ではあるが少しづつこの方面の研究が発表され，幾らかの結果を持つようになってきた.

Kac-Kiefer-Wolfowitz [26; 1955] は,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(F(x)-F_0(x)\right)^2 dF(x)\geq\delta \qquad (F_0 \text{ は仮説した } F \text{ の分布})$$

なる形の対立仮説を考え，この対立仮説に対しては，δ が十分小さいときは，c_n^2 検定はカイ二乗検定よりかなり検定力がまさっていることを示し，最小検定力 $\frac{1}{2}$ を得るのに，C_n^2 検定では，漸近的に $\alpha N^{4/5}$ ケの観測値を必要とするのに対し，カイ二乗検定では同じ最小検定力 $\frac{1}{2}$ を得るのに N ケの観測値が必要であることをみている.

又仮説 H_0 の検定の漸近的検定力について, Anderson [2; 1954] は, $F(x)=F_0(x)+\frac{1}{\sqrt{n}}G(x)$ ($G(x)$ はある特別な函数) なる形の対立仮説を考え，これが真のとき，ω_n^2 の極限分布は $F_0(x)$, $G(x)$ のある種の正規性条件のもとで,

$$\int_0^1\left(x(u)-k(u)\right)^2 du$$

の分布に等しいことを示唆している．ここに $x(u)$ $(0\leqq u\leqq 1)$ は平均0，共分散 $c(s,t)$ なる正規過程で，$k(u)$ は $F_0(x)$ 及び $G(x)$ に依存してきまる函数である.

ごく最近 Weiss [60: 1966] は，対立仮説として，$H_n(x)$ なる分布，すなわち標本の大きさにより，分布函数がちがってくる場合の Smirnov の ω_n^2 の漸近的確率分布を考えた．そこでは $n\to\infty$ のとき，確率変数

$$z=\frac{1}{\sqrt{n}\sigma}\Bigg[\omega_n^2-n\int_0^1(1-t)^2\psi(t)dt-n\mu_n+2\sum_{j=1}^{n}\int^{F_n^{-1}(j/n)}\psi(y)\left[y-H_n(y)\right]dy$$
$$-2\sum_{j=1}^{n}\left\{\phi_2\left[F_n^{-1}\left(\frac{j}{n}\right)\right]-\frac{2j-1}{2n}\phi_1\left[F_n^{-1}\left(\frac{j}{n}\right)\right]\right\}\Bigg]$$

の分布が正規分布 $N(0,1)$ に近づくことを示した．こゝに μ_n, σ_n^2 は $2\int_0^{X_1}\phi(y)[y-H_n(y)]dy$ の平均，分散を表わし，X_1 は分布函数 $H_n(x)$ をもつ．又，$\phi_1(t)=\int_0^t\psi(s)\,ds$, $\phi_2(t)=\int_0^t s\psi(s)ds$ である．そこで，$\psi(t)\geqq A>0$ と仮定すれば，$H_n(x)$ の具体的な型として,

(I) $H_n(x)=G(x)$ がすべての n について成立つ．ただし，$0<D\leqq\frac{dG(x)}{dx}\leqq c<\infty$

(II) $h_n(x)=1+\frac{L_n}{\sqrt{n}}r(x)$. $h_n(x)$ は $H_n(x)$ の導函数 (すなわち確率密度函数), $\{L_n\}$ は正の値の数列で $\lim_{n\to\infty}L_n=\infty$ で $\lim_{n\to\infty}\frac{L_n}{\sqrt{n}}=0$. 又 $\int_0^1 r(x)\,dx=0$, $\int_0^1 r^2(x)\,dx>0$ かつ $|r(x)|\leqq c<\infty$ が区間 $(0,1)$ 上のすべての x について満足する.

そこで固定した有意水準 α に対して，上のタイプ (I), (II) の対立仮説の列にかんしては，ω_n^2 に基づく検定力は $n\to\infty$ のとき 1 に近づくことをみる．今度は有意水準 α を標本の大きさ n に依存させ，適当な速さで 0 に近づけると，タイプ (II) の対立仮説の列の下で検定力は 1 より小さな値に近づけることが出来て，しかもこの極限値は，そのような対立仮説の列

の下では ω_n^2 の漸近的規性を用いて評価し得るものである．

検定力問題を統一的に扱った論文はほとんどまだ見あたらないが，Chapman [16; 1958] は仮説「$H_0: F=F_0$」を対立仮説「$F<F_0$」に対して検定するのに，検定の monotoneness, partially ordered, admissible, structure (d)*)，等の性質を用いて，片側検定を距離 $\rho^-(F,G)\equiv\sup_x\big(F(x)-G(x)\big)=\Delta$ に基いて比較検討した．片側検定を問題にしているのであるから，統計量としては

$$W'_n=n\int_{-\infty}^{\infty}\big(F_n(x)-F(x)\big)\,dF(x)=n\int_0^1\big(F_n(u)-u\big)\,du=\sum_{i=1}^n U_i-\frac{n}{2}$$

(U_i は $(0,1)$ 上の一様分布からの順序統計量)

を考えるほうが自然であって，十分大きな n に対して，仮説が真のとき，U は正規分布 $N\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{12n}\right)$ であって，対立仮説「$G(u)<u$」のもとでは，U は平均 $\int_0^1 u\,dG(u)>\frac{1}{2}$ をもつ正規分布である．このときの U の分散は有限で，検定はすべての対立仮説のクラスに対して consistent であり，又明らかに monone，したがって partially ordered である．

一方極限分布のところで，H_0 が真のとき，$\omega_n^2\equiv n\omega^2$ は極限分布をもち，それは正規分布でないことを既にみたわけだが，しからば仮説 H_0 がちがっているとき，ω_n^2 の極限分布はどうかというと，それは適当に正規化して，正規分布となる．というのは，もし確率変数 U_i が分布 $G(u)$ をもつならば，

$$\begin{aligned}\omega^2&=\int_0^1\big(u-G_n(u)\big)^2\,du\\&=\int_0^1\delta^2(u)\,du+2\int_0^1\delta(u)G(u)\,du-2\int_0^1\delta(u)\,G_n(u)\,du+\int_0^1\big(G(u)-G_n(u)\big)^2du\end{aligned}\tag{8.1}$$

$\delta(u)=u-G(a)$

と展開し，Kolmogorov の経験分布函数の極限定理を用いて $\sqrt{n}\,[\omega^2-C(G)]$ は漸近的に正規分布をする確率変数の和であることが証明できる．ただし

$$C(G)=\int_0^1\delta^2(u)\,du+2\int_0^1\delta(u)\,G(u)\,du-2D(1)+2E\,[D(U)]$$

$$D(u)=\int_0^u\delta(t)\,dt$$

とおいた．

いま方程式 $Pr\{n\omega^2>\omega_\alpha|H_0\}=\alpha$ によって ω_α を定義すると，今考えている ω^2 検定一すなわち $n\omega^2>\omega_\alpha$ のとき仮説 H_0 を棄却する一は consistent であるが，monotone ではなくなる．これは ω^2 検定が両側検定であるために起ることがらである．一方少くとも十分大きな n に対して，(8.1) の最後の項 $\int_0^1\big(G_n(u)-G(u)\big)^2\,du$ は他の項に比べて無視できるほどに小さいから，この検定は partially ordered である．Chapman はこの論文を通じて

$$G_{mu_0}(u)=\begin{cases}0 & (u<0)\\ u & (0\leqq u<u_0)\\ u_0 & (u_0\leqq u<u_0+\Delta)\\ u & (u_0+\Delta\leqq u<1)\\ 1 & (1\leqq u)\end{cases}$$

及び

*) structure (d) の定義については Birnbaum [11; 1955] 参照．

$$G_M(u)=\begin{cases}0 & (u<\Delta)\\ u-\Delta & (\Delta\leqq u<1)\\ 1 & (1\leqq u)\end{cases}$$

なる函数を定義して，検定が partially ordered ならば，検定力函数の上限，下限はそれぞれ

$$\underline{\beta}_{\varphi}(\Delta)=\inf_{0\leqq u_0\leqq 1-\Delta}\beta_{\varphi}(G_{mu_0})\,;\quad \bar{\beta}_{\varphi}(\Delta)=\beta_{\varphi}(G_M)$$

で与えられることを述べ，$\omega_n{}^2$ 検定については，$u\to\infty$ のとき，検定力函数 $\beta(G_{mn_0})$ を最小にする u_0 の値は $\frac{1}{2}$ に近づき，大標本の検定力函数 $\beta(G_{m,1/2})$ についてのみ近似式を与えている．結果は，

$$\begin{cases}\beta_{\omega^2}(G_{m,1/2})=1-\Phi\left[\dfrac{2}{\varDelta^2}\left(\dfrac{\omega_\alpha{}^2}{\sqrt{n}}\right)-\dfrac{2\varDelta}{3}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\sqrt{n}-\dfrac{1}{3\Delta^2\sqrt{n}}\right]\\ \bar{\beta}_{\omega^2}(\Delta)=\beta_{\omega^2}(G_M)=1-\Phi(x)\end{cases}$$

で $\Phi(x)$ は正規分布 $N(0,1)$ の分布函数を表わし上の x は $\varDelta$, ω_α, n によって一意的に定まるものである．これを基に，距離 $\varDelta$ による対立仮説に対しての ω^2 検定の最大検定力，最小定力を $n=50$, 100, 200 及び $\varDelta$ をさまざまに変えたときの数値表を作成している．

この Chapman のアイディアを二標本検定の場合に拡張したものに，最近発表された Bell-Moser-Thompson [10; 1966] の仕事がある．そこでは，ほとんど の 二標本検定の統計量が strongly distribution free であり，故に rank statistics とみてよいことに注目し，$\omega_{m,n}{}^2$ 統計量を

$$\omega_{m,n}{}^2=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left[R(Y_k)-R(X)_j\right]^2 \tag{8.2}$$

で定義する．$R(X_j)$, $R(Y_k)$ は pooled sample に対する第一標本，第二標本の rank function を表わしている．これを基に，対立仮説のクラス $C(F,G)=\{G\,|\,G<F;\ \rho^-(F,G)\leqq\varDelta\}$ に対する検定力の上限を求め，若干の n, m の組に対して $\varDelta$ をいろいろ変えたときの数値表を作製している．

一方 Massey [Ann. Math. Stat. Vol. 21 (1950)] は Kolmgorov-Smirnov 検定において，この検定は "biased であること"，すなわち帰無仮説のもとでの棄却確率よりも，ある対立仮説の下での棄却確率の方が小さいことを示しているが，最近 Thompson [48; 1966] は Cramér-Von Mises 型検定についても同じ結果が成立することを発表している．

§ 9. $U_n{}^2$ 統計量について

Cramér-Von Mises-Smirnov 検定の修正した形ともいえる $U_n{}^2$ 統計量が最近になって定義され，それに関する一連の研究が Biometrika 誌上に次々と発表されている．本節ではそれについての結果をまとめておこう．経験分布函数に基づく適合度検定をするのに，Kolmogorov-Smirnov 統計量

$$K_n=\sqrt{n}\sup_{-\infty<x<\infty}|F_n(x)-F(x)| \tag{9.1}$$

と，Cramér-Von Mises-Smirnov 統計量

$$\omega_n{}^2=n\int_{-\infty}^{\infty}\left(F_n(x)-F(x)\right)^2dF(x) \tag{9.2}$$

があることは既に述べた通りである．オランダの統計学者 Kuiper は既に [32; 1960] で，(9.1) の標本空間は実直線上とみなされるが，これの代りに円上の random point に対して Kolmogorov 統計量が使えるようにするために，(9.1) を修正して

$$V_n=\sup_{0\leqq x\leqq 1}\left\{F_n(x)-F(x)\right\}-\inf_{0\leqq x\leqq 1}\left\{F_n(x)-F(x)\right\} \tag{9.3}$$

を定義し，この統計量 V_n の極限分布

$$Pr\left\{\sqrt{n}\,V_n \leqq z\right\} = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} 2\,(4j^2z^2 - 1)\,e^{-2j^2z^2} + \frac{8z}{3\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{\infty} j^2\,(4j^2z^2 - 3)\,e^{-2j^2z^2} + O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{9.4}$$

を求めている．そもそも Kuiper が円上の分布を問題にするようになった理由は，鳥の飛び立つときの compass direction にかんする種々の統計的取扱いから構想したものであって，この統計量が導入された背景はあくまでも実際問題を解決しようという点にあった．円周上に確率が分布しているような場合，明らかに (9.1)，(9.2) を用いるには具合の悪い点がある．つまり分布函数に対して，自然な累積を始める出発点がないことであり，それ故さまざまの任意の出発点により，(9.1)，(9.2) の統計量は異った値をとるからである．それに比べて，(9.3) は出発点に無関係である．

ところで $U_n{}^2$ 統計量は Watson [57: 1961] によって導入されたものであり，(9.1) の円周上の分布えの修正が (9.3) である如く，(9.2) の修正した形として

$$U_n{}^2 = n\int_{-\infty}^{\infty} \left\{F_n(x) - F(x) - \int_{-\infty}^{\infty} \left(F_n(y) - F(y)\right)^2 dF(y)\right\}^2 dF(x) \tag{9.5}$$

で与えられるものである．

表現からみて，(9.5) は分散の形をしており，$\omega_n{}^2$ は原点の回りの 2 次モーメントをしている．Watson はまずこの $U_n{}^2$ は単位円周上に確率量があるとき，分布を累積しはじめるために選んだ点に無関係であることを示し，この検定は distribution free であることより，仮説した分布 $F(x)$ は一様分布としても一般性が失はれないから，

$$U_n{}^2 = n\int_0^1 \left\{F_n(u) - u - \int_0^1 \left(F_n(y) - y\right)^2 dy\right\}^2 du \tag{9.6}$$

を標準形とする．この極限分布を求めるには，$\omega_n{}^2$ のそれを求めたときとほぼ同じく Doob, Kac-Siegert による正規過程の表現にかんする定理と積分方式の固有値問題を解いて

$$\lim_{n\to\infty} Pr\{U_n{}^2 > z\} = 2\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1}\cdot e^{-2j^2\pi^2 z} \tag{9.7}$$

を得る．これは Anderson-Darling の $\omega_n{}^2$ の結果よりはるかに簡単で，しかも途中の計算も容易である．こゝで興味あることは，この極限分布は Kolmogorov 統計量 (9.1) の極限分布と本質的に等しく，

$$\lim_{n\to\infty} Pr\left\{K_n < \frac{\pi}{\sqrt{z}}\right\} = \lim_{n\to\infty} Pr\{U_n{}^2 < z\}$$

となることである．ところで $\omega_n{}^2$ に基づく適合度検定をするために円上の，ある合理的な出発点 x_0 を選ぼうとすると，

$$\omega_n{}^2(x_0) = n\int_0^1 \left\{F_n(x;\,x_0) - F(x;\,x_0)\right\}^2 dF$$

を最小にするように x_0 を選ぶのが自然であろうが，実はこれが $U_n{}^2$ に一致して，

$$U_n{}^2 = \min_{x_0} \omega_n{}^2(x_0) \qquad \text{となる．}$$

又 $x_{(i)}$ を順序統計量とし，$v_i = F(x_{(i)})$，$\bar{v}$ は v_i の標本平均とするとき，

$$\begin{aligned} U_n{}^2 &= \sum_{i=1}^{n} \left(v_i - \frac{2i-1}{2n} - \bar{v} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12n} \\ &= \sum_{i=1}^{n} v_i{}^2 - 2\sum_{i=1}^{n} \frac{2i-1}{2n} v_i + \frac{n}{3} + n\left(\bar{v} - \frac{1}{2}\right)^2 \end{aligned} \tag{9.8}$$

と展開できる．

二標本検定問題も $\omega_n{}^2$ の場合とほゞ同様に，Watson [58; 1962] において

$$U_{m,n}{}^2=\frac{mn}{m+n}\int_{-\infty}^{\infty}\{F_n(x)-F_m(x)-\int_{-\infty}^{\infty}[F_n(y)-F_m(y)]dF^*(y)\}^2dF^*(x) \quad (9.9)$$

$$F^*(x)=\frac{nF_n(x)+mF_m(x)}{n+m}$$

で定義される．これの $n\to\infty$，$m\to\infty$，$\frac{m}{n}\to\lambda(>0)$ としたときの極限分布は (9.7) と一致することを Rosenblatt, Fisz, Kiefer などの結果を用いて証明される．そうして，この極限分布 (9.7) が小標本の場合にも実用上は十分有効であることを，Darling [Theory of Probability and its Applications Vol. 5 (1960)] の，U^2 分布に対する漸近展開をみつけることにより，示される．統計量 (9.9) についてはモンテカルロ法を用いるか，

$$U_{m,n}{}^2=\frac{nm}{(n+m)^2}\left\{\sum_{i=1}^{n}[F_n(x_{(i)})-F_m(x_{(i)})]^2+\sum_{j=1}^{m}[F_n(y_{(j)})-F_m(y_{(j)})]^2 - \frac{\left[\sum_{i=1}^{n}\{F_n(x_{(i)})-F_m(x_{(i)})\}+\sum_{j=1}^{m}\{F_n(y_{(j)})-F_m(y_{(j)})\}\right]^2}{n+m}\right\} \quad (9.10)$$

を用いて exact な $U_{m,n}{}^2$ の分布を計算する．こゝで $x_{(i)}$，$(i=1,2,\cdots\cdots,n)$，$y_{(j)}$，$(j=1,2,\cdots\cdots,m)$ はそれぞれ第一，第二の順序標本である．Stephens は電子計算機を用いて，$U_{10}{}^2$，$U_{10,10}{}^2$，$U_\infty{}^2$ (極限分布) の各々について，有意水準をいろいろかえて，これらの信頼点を求め数値比較をしている．これから $U_{10,10}{}^2$ は $U_{10}{}^2$ よりも確率的に大きい (stochastically larger) であることが明らかとなる．

Stephens [47; 1965] は二標本検定用の統計量 (9.9) が観測値の relative rank に関係することから，Anderson [3; 1962], Burr [15; 1964] と同じ方針で

$$U_{m,n}{}^2=\frac{1}{m+n}\left[\frac{Q}{m+n}-\frac{4mn-1}{6}\right] \quad (9.11)$$

$$Q=n\sum_{i=1}^{n}(r_i-i)^2+m\sum_{j=1}^{m}(s_j-j)^2-\left(\sum_{j=1}^{m}(s_j-j)-\frac{mn}{2}\right)^2$$

と表わし，この $U_{m,n}{}^2$ の信頼点を考える．この $U_{m,n}{}^2$ の最初の4次までのモーメントを計算し，これから Pearson 曲線をあてはめ，これによる信頼点を漸近分布による信頼点と比較している．又 Burr は標本数について $m+n\leqq 17$ の場合の表を作製しているが，Stephens はこれとの比較のため m, n の適当な対について，upper tail での Pearson 曲線による信頼点を計算し数表を作製した．

一方 Pearson-Stephens [37; 1962] はモンテカルロ法を用いて $\omega_{10}{}^2\cdot\omega_\infty{}^2$ (極限分布) とを比較し，更にそれから分布の upper tail では $U_{10}{}^2$ と $U_\infty{}^2$ の差は，$\omega_{10}{}^2$ と $\omega_\infty{}^2$ の差よりもいくらか小さいことを示している．又 Johnson の S_B 曲線 [Biometrika, Vol. 36 (1949)] による近似もモンテカルロ法による結果と比較して良好なことも示している．この論文の最後の章で，$\omega_\infty{}^2$，$U_\infty{}^2$ の特性函数の半不変係数について述べてあるが，これは Watson の，$U_\infty{}^2$ の特性函数は $E(e^{i\theta U^2})=\left(\frac{\sin\sqrt{\frac{1}{2}\theta}}{\sqrt{\frac{1}{2}\theta}}\right)^{-1}$ であることから $U_n{}^2$ の極限分布を導いたことを使って，$U_\infty{}^2$ についての半不変係数 κ_s' も $\omega_n{}^2$ の半不変係数 κ_s と同じく求められ，その間には，

$$\kappa_s'=\kappa_s\times 2^{1-2s}=2^{s-1}\frac{(s-1)!}{(2s)!}B_s \qquad (B_s \text{ は Bernouilli 数})$$

が成立することが分る．又 U_n^2 のモーメントは n の形にかんして ω_n^2 のそれと同じ形をしており，最初の4次までの平均の回りのモーメントは，

$$\mu_1' = \frac{1}{12}, \qquad \mu_2 = \frac{n-1}{360}$$

$$\mu_3 = \frac{2n^2 - 5n + 3}{7560 n^2}, \qquad \mu_4 = \frac{19n^3 - 70n^2 + 87n - 36}{302400 n^3}$$

で与えられる．

これからモーメントパラメーター $\beta_1 = \dfrac{\mu_2^3}{\mu_3^2}$，　$\beta_2 = \dfrac{\mu_4}{\mu_2^2}$ が，任意の n に対して求まり，Pearson 線を適合させせることができるわけである．

ところで U_n^2 統計量の exact な分布についてであるが，これは Marshall の ω_n^2 の場合と同じ方法で求めることができる．Stephens [44; 1963], [45; 1964] では，$n=1,2,3,4$ についての exact な分布が求められている．又 $n>5$ についての分布 $P_n(z) = Pr\{U_n^2 < z\}$ を求める手順がベクトルと解析幾何学を道具として解説されており，これから一般の n についての，lower tail での exact な分布を

$$\begin{aligned} P_n(z) &= 0 \qquad \left(z < \frac{1}{12n}\right) \\ &= \frac{(n-1)!\sqrt{n}\{\sqrt{\pi}R(z)\}^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(n+1)\right)} \qquad \left(\frac{1}{12n} \leqq z < \frac{1}{12n} + \frac{1}{2n^2}\right) \\ &= (n-1)!\sqrt{n}\{\sqrt{\pi}R(z)\}^{n-1}\left\{\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(n+1)\right)} - \frac{nI(z)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)}\right\} \\ &\qquad \left(\frac{1}{12n} + \frac{1}{2n^2} \leqq z < \frac{1}{12n} + \frac{1}{n^2}\right) \end{aligned} \tag{9.12}$$

と求めている．ただし，

$$R(z) = \left(z - \frac{1}{12n}\right)^{1/2}, \quad I(z) = \int_0^{\alpha} \sin^{n-1}\theta\, d\theta, \quad \sec\alpha = \sqrt{2}\, n R(z), \quad \text{である．}$$

これは Marshall の ω_n^2 の仕事と比べて，U_n^2 の exact な分布を計算するのはより簡単であり，しかも lower tail での exact な分布が求められたという点で大きな収穫といえるものである．しかし任意の n についての，upper tail での分布のほうが lower tail での分布よりも実際上重要でありかつ又興味あることなのであるが，これの正確な分布を求めるのはかなり難しい問題である．しかし U_n^2 のモーメントを用いて，分布に対する曲線族をあてはめることで，かなりよい近似が得られ，実際 Stephens は，任意のサンプルサイズ n に対して，$Pr\{U_n^2 > z\} = \alpha$ (α は 100α パーセント点) なる z を $n=2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 25, 30, 40, 50, 100, 00$ の各々について求めている．例えばこの中で $n=10$ については，モンテカルロ法では $Pr(U_{10}^2 < 0.0153) = 0.01$，正確な分布では $Pr(U_{10}^2 < 0.0158) = 0.0158$ である．Pearson [38; 1963] は

$$\omega_n^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2i-1}{2n} - v_i\right)^2 + \frac{1}{12n}$$

$$U_n^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2i-1}{2n} - v_i\right)^2 - n\left(\bar{v} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12n}$$

から，具体的な実例を数種あげて，直線上の点のランダム性の検定の数値比較を行っている．又 U_n^2 と ω_n^2 との間の関係として，

$\omega_n^2 = U_n^2 + n\left(\bar{v} - \frac{1}{2}\right)^2$ は明らかだが，これより，相関係数 $\rho(\omega_n^2, U_n^2) = \sqrt{\frac{2(n-1)}{4n-3}}$ が求められ，比較的相関が高いことが分る．

一方 Tike [49; 1965] は，U_n^2 の最初の4次までのモーメントを用いて，Pearson 曲線にあてはめ近似的パーセント点を求める手順に伴なう，不都合な点，例えば Pearson 曲線によるパーセント点の数表が完全でない等，を考えて，これを初めの3次までのモーメトントをもつ，カイ二乗分布に適合させることを考えた．この場合精度はいくらか落ちるが，確率積分，カイ二乗分布のパーセント点の表が容易に利用できるので，極めて簡単であるという特色をもつものである．それは非心カイ二乗分布は有心カイ二乗分布を用いて近似できるという原理に基づき，

$$U_n^2 \sim a + b\chi^2 \qquad (9.13)$$

とすることである．ここで χ^2 は自由度 f をもつ有心カイ二乗分布で，a, b は (9.13) の右辺が正しい初めの3次のモーメントをもつようにきめられるのであるが，実際にそれらは，

$$f = \frac{49n(n-1)}{20\left(n-\frac{3}{2}\right)^2}, \qquad a = \frac{21n-56}{840\left(n-\frac{3}{2}\right)}, \qquad b = \frac{1}{42n}\left(n-\frac{3}{2}\right)$$

で与えられる．これを基に U_n^2 の 100α パーセント点の値の比較を $n=5$ (exact 分布)，$n=10$ (モンテカルロ法)，$n=\infty$ (極限分布) の場合について行い，この近似も良好なることを示している．

U_n^2 統計量にかんする諸問題のうち検定力函数，パラメトリックな場合など，まだ手がけられていない問題も多いが，これらは ω_n^2 統計量と平行として今後解決していかねばならないことがらである．

§10. そ　の　他

これまで本論文の最初に設定した中心項目について述べてきたが，本節ではそこで漏れた項目，文献を少しばかりまとめてこの報告を終ることにしたい．

Aggarwal [1; 1955] は分布函数の推定という立場から，損出函数 $L(F, \hat{F})$ を

$$L(F, \hat{F}) = \int_{-\infty}^{\infty} |F(x) - \hat{F}(x)|^r dx \qquad (r \geqq 1 \text{ なる整数})$$

で定義し，F の推定値 $\hat{F}$ を経験分布函数 $F_n(x)$ の一般化として，この $L(F, \hat{F})$ を最小にするように階段函数を特徴づける．明らかに $r=2$ の場合がわれわれの ω_n^2 に相当するものである．こゝで $F(x)=c_j$ $(x_j \leqq x < x_{j+1})$ の値は $(n+r)$ 次の方程式の根として与えられ，これを解く一般の procedure を与えている．

確率分布 $F(x)$ をもつ順序確率変数 $x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots\cdots \leqq x_n$ について，$F(x_0)=0$，$F(x_{n+1})=1$ としたとき，$E\{F(x_{i+1}) - F(x_i)\} = \frac{1}{n+1}$ $(i=0, 1, \cdots\cdots, n)$ が成立するが，この分布函数の差である $F(x_{i+1})-F(x_i)$ を "spacing" という概念に於てとらえ，仮説 H_0 を検定する方法は古くからいろいろな人により考察されてきた．

Kimball [30; 1947] は統計量 $\alpha = \sum_{i=1}^{n+1}\left[F(x_i) - F(x_{i-1}) - \frac{1}{n+1}\right]^2$ を用いたが，$\sqrt{\alpha}$ が漸近的に正規分布をするであろうと予想したまゝで，この漸近分布は求められていない．Moran [J. Roy. Stat. Soc. Suppl. Vol. 9. (1947)] は $\beta = \sum_{i=1}^{n+1}[F(x_i) - F(x_{i-1})]^2$ を導入し，これは漸近的に正規分布であることを示した．明らかに $\beta = \alpha + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}$ である．

又 Sherman [40: 1951] は，$\gamma=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n+1}\left|F(x_i)-F(x_{i-1})-\frac{1}{n+1}\right|$ を考え，有限な n についての分布，更には漸近的に正規分布であることを示した．これらの個々の検定を統一的に扱うことに成功したのは Birnbaum [11; 1953] であって，そこでは "structure (d)" をもつ統計量のクラス $\Phi[F(x_1),\cdots\cdots,F(x_n)]$ 及び "strongly distribution free" のクラス $S[x_1,\cdots\cdots,x_n;G]$ を定義して議論し，これらを用いて検定のパワーを考察する．こうした個々の distribution free 検定という観点からではなく，distribution free 統計量のクラス全体に沿った研究としては，その後 Bell 及びその共同研究者による一連の仕事が最近活発に発表されており，それらは [7; 1960], [8; 1964], [9; 1965] にみることができる．これらはいずれも Birnbaun の考えを継続しより精密に展開したものできわめて注目に値するが，本論文の目的からいささか脱れることになるので，詳しい内容は省いておこう．

多次元確率変数えの拡張問題は非常に重要で興味ある問題である．これについては Rosenblatt [39; 1963] が始めて問題を提起したものであって，確率変数 $X_i=(X_{i1},\cdots\cdots X_{ik})$ $(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ が k 次元一様分布からの標本のとき，標本分布函数を $S_n(\bar{t})=S_n(t_1,\cdots\cdots,t_k)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\phi_{ij}(X_{ij})$，$\phi_i(x)=\begin{cases}1 & (x\leqq t)\\ 0 & (x>t)\end{cases}$ で定義して，これより平均 0，共分散 $\prod_{j=1}^{k}\min(t_j,t_j')-t_1\cdots\cdots t_k t_1'\cdots\cdots t_k'$（各 t_i, t_i' は 0 と 1 の間の数）をもつ確率過程 $Y_n(\bar{t})=\sqrt{n}\,[S_n(t_1,\cdots\cdots,t_k)-t_1\cdots\cdots t_k]$ を考え，$Y_n(\bar{t})=\sum_{j=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_j}\,\phi_j(\bar{t})\,Y_{nj}$ なる表現を得て，ω^2 統計量は

$$\int_0^1 Y_n^2(\bar{t})\,d\bar{t}=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j\cdot Y_{nj}^2$$

(Y_{nj} は平均 0，共分散 δ_{jk}（クロ ネッカーのデルタ）なる確率変数）となることを示した．うして，この極限分布は $\int_0^1 Y^2(\bar{t})\,d\bar{t}=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j\cdot Y_j^2$ の分布に等しいことを示している．単に多次元えの拡張として形式的に ω^2 統計量を定義すると，これはもはや distribution free にならないため，k 次元一様分布からの標本のときしか考えられないわけである．多次元 ω^2 検定の本質的な困難さは実にこの点に存在するものといえよう．

これを経験分布函数に基づく，独立性の検定という立場から Blum-Kiefer-Rosenblatt [13; 1961] は，この種の検定のクラスの極限分布の特性函数を求め，対応する分布が二変量のとき，それを explicit に表現して，それが Hoeffding の結果を一致することをみている．すなわち $k=2$ のとき，仮説 H_0; $F\in\omega$ を対立仮説 H_1; $F\in\Omega-\omega$（Ω は 2 次元ユークリッド空間 R^2 の連続な分布函数のクラスで，ω は 1 次元周辺分布の積である Ω のすべての要素からなる subclass）に対して検定するのに，この仮説 H_0 のもとで，統計量

$$B_n=\int[T_n(r)]^2\,dS_n(r)=\int\Big[S_n(t)-\prod_{j=1}^{2}S_{nj}(t_j)\Big]^2\,dS_n(t)$$

は distribution free であることをみて，nB_n の極限分布は $B=\int_0^1\int_0^1 T^2(x,y)\,dx\,dy$ のそれと一致し，B の特性函数は $B(e^{izB})=\prod_{k,j=1}^{\infty}\left(1-\frac{2iz}{\pi^4 j^2 k^2}\right)^{-1/2}$ を得ている．これを直接 invert して分布を求めるのは困難であるが，ラプラス変換に対するタウバー型定理のある種の性質を用いて，分布の tail をかなり合理的に

$$\sqrt{2}\prod_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\pi/n}{\sin\pi/n}\right)^{1/2}Pr\left\{\frac{X^2}{\pi^4}\geqq t\right\}$$

で近似できることを示し，これの数値計算をして，漸近分布の近似の良好性を示している．

Blackman [12; 1955] は

$$H(a)=\int_{-\infty}^{\infty}|F(x-a)-F_n(x)|^2\,dF(x-a)$$

を最小にする a の値 a_n を問題にして，分布 F_n に適当な条件をおいて $\sqrt{n}\,a_n$ の漸近分布を求めようとする．すなわち $F(x)$ の初めの3次までの derirative が連続でかつ有限ならば，a_n の極限分布は正規分布になることである．しかしながら，これのもつ統計的意味はほとんどないであろう．

一方 ω^2 型定理を抽象空間ﾍ拡張する試みは統計理論としてよりもむしろ純粋数学上の問題として興味あることであるが，Jean-Revé Barra [6; 1960] は，ユークリッド空間 R^k 上での ω^2 型確率分布をもつものについての極限法則を議論し，ひとつの試みとして，Riesz 空間えの拡張を試みている．これは Fortet, Mourier を中心とするフランスの確率論研究者の一連の仕事のひとつの結果であるが，更に一層の発展が期待されるところのものである．

風見 [35; 1954] は独立なサンプルによる母集団分布函数の ω^2 検定に対応して，定常確率過程に於いても ω^2 統計量なるものを考え，それにもとづいた検定を試みようとする．連続的変数 t の場合の定常確率過程 x_t の各点における分布函数を $F(x)$ とし，$F(x)$ の consistent estimate を求めるため，x_t に対応して，新しい確率変数 e_t を次のように導入するとき，

$$e_t(x,\ \omega)=\begin{cases}1 & x_t(\omega)\leqq x\\ 0 & x_t(\omega)>x\end{cases}$$

ω^2 統計量を

$$\omega^2=\int_{-\infty}^{\infty}\left|F(x)-\frac{1}{T}\int_0^T e_t(x,\ \omega)\,dt\right|^2 dF(x)$$

で定義しようというわけである．こゝで $\frac{1}{T}\int_0^T e_t(x,\ \omega)\,dt$ は区間 $[0,\ T]$ において，$x_t(\omega)\leqq x$ なる時間の相対的な測度をあらわしていて，もし x_t がエルゴート的ならば，これは $T\to\infty$ で殆んど確実に $e_t(\omega)$ の空間平均に収束するものである．こうした定義した ω^2 については，2次までのモーメントが計算されている．

統計数理研究所

References

(1) Aggarwal, O.P. (1955) "Some minimax invariant procedure for estimating a cumulative distribution function", *Ann. Math. Stat.*, Vol. 26, pp. 450–463.

(2) Anderson, T.W. (1954) "Distribution of some integral of certain Gaussian stochastic process and limiting distributions of some "goodness of fit" criteria", (abstract) *Ann. Math. Stat.*, Vol. 25, pp.174–175.

(3) Anderson, T.W. (1962) "On the distribution of the two-sample Cramér-Von Mises criterion", *Ann. Math. Stat.*, Vol. 33, pp. 1148–1159.

(4) Anderson, T.W. and Darling, D.A. (1952) "Asymptotic theory of certain "goodness of fit" criteria based on stochastic processes " *Ann. Math. Stat.* Vol. 23, pp. 765–769.

(5) Anderson, T.W. and Darling, D.A. (1954) "A test of goodness of fit, *Jour. Amer. Stat. Asso.*, Vol. 49, pp. 765–769.

(6) Barra, Jean-René (1960) "Extension du théorème de von Mises a certaines classe de lois de probabilité sur R^K et plus généralement sur un espace Riesz," *Comptes Rendus Akad. Sci. Paris*, Vol. 250, pp. 52–54.

(7) Bell, C.B.(1960) "On the structure of distribution-free statistics", *Ann. Math. Stat.*, Vol. 31, pp. 703–709.

(8) Bell, C.B. (1964) "A characterization of multi sample distribution-free statistics", *Ann. Math. Stat.*, Vol. 35, pp. 735–738.

(9) Bell, C.B. and Doksum, K.A. (1965) "Some new distribution-free statistics," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 36, pp. 203–214.

(10) Bell, C.B., Moser, J.M. and Thompson Rory (1966) "Coodness criteria for two sample distribution-free tests", *Ann. Math. Stat.* Vol. 37, pp. 133–142.

(11) Birnbaum Z.W. (1953) "Distribution-free tests of fit for continuous distribution functions," *Ann. Math. Stat.* Vol. 24. pp. 1–8.

(12) Balckman, (1955) "On the approximation of a distribution functions by an empiric distribution", *Ann. Math. Stat.* Vol. 26, pp. 256–267.

(13) Blum. J.R., Kiefer. J. and Rosenblatt. M. (1961) "Distribution free tests of independence based on the sample distribution functions", *Ann. Math. Stat.* Vol. 32, pp. 485–498.

(14) Burr, E.J. (1963) "Distribution of the two-sample Cramér-von Mises criterion for small equal samples", *Ann. Math. Stat.* Vol. 34, pp. 95–101.

(15) Burr, E.J. (1964) "Small sample distributions of the two-sample Cramér-von Mises's ω^2 Watoson's U^2", *Ann. Math. Stat.* Vol. 35, pp. 1091–1098.

(16) Chapman, D.G. (1958) "A comparative study of several onesided goodness-of-fit tests", *Ann. Math. Stat.* Vol. 29, pp. 655–674.

(17) Cochran, W.G. (1952) "The x^2-test of goodness of fit", *Ann. Math. Stat.* Vol. 23, pp. 315–345.

(18) Cramér, H. (1928) "On the composition of elementary errors; second paper", *Skand. Aktuarietidskr.* Vol. , p. 171–180.

(19) Cramér, H. (1946) "*Mathematical Method of Statistics*," Princeton University Press.

(20) Darling, D.A. (1955) "The Cramér-Smirnov test in the parametric case," *Ann. Math. Stat.* Vol. 26, pp. 1–20.

(21) Darling, D.A. (1957) "The Kolmogorov-Smirnov, Cramér-Von Mises test", *Ann. Math. Stat.* Vol. 28, pp. 823–838.

(22) Donsker, M.D. (1952) "Justification and extension of Doob's heuristic approach to the Kolmogorov-Smirnov theorem", *Ann. Math. Stat.* Uol. 23, pp. 277–281.

(23) Doob, J.L. (1949) "Heuritistic approach to the Kolmogorov-Smirnov theorems", *Ann. Math. Stat.* Vol. 20. pp. 393–403.

(24) Fisz, (1960) "On a result by M. Rosenblatt concerning the von Mises-Smirnov test", *Ann. Math. Stat.* Vol. 31, pp. 427–429.

(25) Kac, M. and Siegert. J.F. (1947) "An explicit representation of a stationary Gaussian process," *Ann. Math. Stat.* Vol. 18, pp. 438–442.

(26) Kac, M., Kiefer, J. and Wolfwitz, J. (1955) "On tests of normality and other tests of goodness of fit based on distance methods," *Ann. Math. Stat.* Vol. 26, pp. 189–211.

(27) Kiefer, J. (1955) "Distance tests with good power for the nonparametric k-sample problem", (Abstract) *Ann. Math. Stat.* Vol. 26, p. 775.

(28) Kiefer, J. (1958) "Limiting distributions of k-sample test criteria of Kolmogorov-Smirnov-von Mises type", (Abstract) *Ann. Math. Stat.* Vol. 29, p. 614.

(29) Kiefer, J. (1959) "K-smaple analogues of the Kolmogorov-Smirnov and Cramér-von Mises test", *Ann. Math. Stat.* Vol. 30, pp. 420–447.

(30) Kimball, B.F. (1947) "Some basic theorems for developing tests of fit for the case of the non-parametric probability distribution function, I," *Ann. Math. Stat.* Vol. 18, pp. 540–548.

(31) Kondo, T. (1954) "Evaluation of some $\omega_n{}^2$ distribution", *Jour. of the Gakugei College, Tokushima Univ.* Vol. 4, pp. 45–47.

(32) Kuiper, N.H.(1960) "Tests concerning random points on a circle", *Indagationes Mathematics,* Vol. 22, pp. 38–47.

(33) Lehman, E.L. (1951) "Consistency and unbiasedness of certain non-parametric tests", *Ann. Math. Stat.* Vol. 22, pp. 165–179.

(34) Marshall, A.W. (1959) "The small sample distribution of $n\omega^2$," *Ann. Math. Stat.* Vol. 29, pp. 307–309.

(35) 風見秋子 (1954) "定常確率過程における ω^2-統計量" 統計数理研究所彙報, 第二巻, 43頁-47頁.

(36) 丘本 正 (1955) "パラメトリック ω^2 検定法" 大阪統計談話会, 第一巻, 37頁-39頁.

(37) Pearson, E.S. and Stephens, M.A. (1962) "The goodness-of-fit tests based on W_N^2 and U_N^2," *Biometrika*, Vol. 49, pp. 397–402.

(38) Pearson, E.S. (1963) "Comparison tests for randomness of points on a line", *Biometrika*, Vol. 50, pp. 315–325.

(39) Rosenblatt, M. (1953) "Limit theorems associated with variants of the von Mises statistic", *Ann. Math. Stat.* Vol. 23, pp. 617–623.

(40) Sherman, B. (1951) "A random variable related to the spacing of smaple values", *Ann. Math. Stat.* Vol. 21, pp. 339–361.

(41) Smirnov, N.V. (1936) "Sur la distribution de ω^2 (criterium de M.R.V. Mises)," *Comptes Rendus. Acad. Sci. Paris*, Vol. 202, pp. 449–452.

(42) Smirnov, N.V. (1937) "Sur la distribution de ω^2" (in Russian) *Recueil Math.* (NS), Vol. 2, pp. 973–993.

(43) Smirnov, N.V. (1949) "On the Cramér-von Mises criterion" (in Russian) *Uspehi Matem. Nauk* (NS), Vol. 4, No. 4 (32), pp. 196–197.

(44) Stephens, M.A. (1963) "The distribution of the goodness-of-statistic U_N^2, I," *Biometrika*, Vol. 50, pp. 303–313.

(45) Stephens, M.A. (1964) "The distributions of the goodness-of-fit statistic U_N^2, II," *Biometrika*, Vol. 51, pp. 393–397.

(46) Stephens, M.A. (1965) "The goodness-of-fit statistic U_N; distribution and signfiicance points", *Biometrika*, Vol. 52, pp. 309–321.

(47) Stephens, M.A. (1965) "Signfiicance points for the two-sample statistic $U_{M,N}^2$," (Miscellaneous) *Biometrika*, Vol. 52, pp. 661–663.

(48) Thompson, Rory (1966) "Bias of the one sample Cramér-von Mises Test", *Jour. Amer. Stat. Assoc.* Vol. 61, pp. 246–247.

(49) Tike, M.L. (1965) "Chi-square approximations for the distributions of goodness-of-fit statistic U_N^2 and W_N^2" (Miscellaneous) *Biometrika*, Vol. 52, pp. 630–632.

(50) 統計科学研究会 (1952) "新編統計数値表" 河出書房, 99頁-103頁.

(51) Von Mises, R. (1931) "*Wahrscheinlichkeitrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und theoretischen physik*," Leibzig und Wien, pp. 316–335.

(52) Von Mises, R. (1947) "On the asymptotic distribution of differential statistical functions," *Ann. Math. Stat.* Vol. 18, pp. 309–348.

(53) Von Mises, R. (1952) "Théorie et applications des fonctions statistiques," *Rend. Mat. et Appli.* Ser. V, pp. 1–37.

(54) Von Mises, R. (1964) "*Mathematical theory of probability and statistics*", edited by H. Geiringer, Academic Press. pp. 471–490.

(55) Walsh, J.E. (1961) "Probabilities for Cramér-von Mises-Smirnov test using grouped data", *Ann. Inst. Stat. Math.* Vol. 12, pp. 143–145.

(56) Watanabe (1952) "On the ω^2 distribution," *Jour. of Gakugei College, Tokushima Univ.* Vol. 2, pp. 21–30.

(57) Watson, G.S. (1961) "Goodness-of-fit test on a circle", *Biometrika*, Vol. 48, pp. 109–114.

(58) Watson, G.S. (1962) "Goodness-of-fit test on a circle II," *Biometrika*, Vol. 49, pp. 57–63

(59) Wegner, L.H. (1954) "Some two-sample tests based on a particular measure of discrepancy", (Abstract) *Ann. Math. Stat.* Vol. 24, p. 682.

(60) Weiss, L. (1966) "On the asymptotic power of Cramér-von Mises tests of fit", *Ann. Inst. Stat. Math.* Vol. 18, pp. 149–153.