Wishart 行列の関数の漸近分布

塩谷　実，　早川　毅

(1964年11月受付)

Asymptotic Distributions of Functions of Wishart Matrix

Minoru SIOTANI and Takesi HAYAKAWA

Recently some asymptotic distributions of functions of a correlation matrix have been obtained by Olkin and Siotani [3]. There, the asymptotic joint distribution of simple correlation coefficients was, first of all, obtained and others were derived on the basis of this distribution by using the usual delta method. A little later, some of them were found to be able to be derived in very simple way by regarding the statistics as functions of a Wishart matrix.

Along the same line with the above, we give, in this paper, two asymptotic joint distributions:

(I) the asymptotic joint distribution of $r^2_{1(2,\ldots,i)}$, $i=2, \cdots, p$, the squares of multiple correlation coefficients between x_1 and $(x_2, \cdots, x_i)$, $i=2, \cdots, p$, (Section 4);

(II) the asymptotic joint distribution of $r^2_{1i\cdot 2,\ldots,i-1}$, $i=2, \cdots, p$, the squares of partial correlation coefficients between x_1 and x_i for fixed $x_2, \cdots, x_{i-1}$, $i=2, \cdots, p$, (Section 5),

where we assume that $(x_1, \cdots, x_p)$ be subject to a p-variate non-singular normal distribution.

We want to summarize, in Section 2, some of results obtained in [3] and given in Olkin's lecture on multivariate analysis offered at Stanford University, 1963–1964. In the section 3, we shall give some simple but very useful formulas for asymptotic variances and covariances of functions of a Wishart matrix.

The Institute of Statistical Mathematics

1. はじめに

Olkin と Siotani [3] は，相関係数に関する研究において，相関行列の関数の漸近分布を，いくつかの関数に対して与えている．ここでは，最初に，相関行列の要素，すなわち，単相関係数の漸近的同時分布が求められた．

そして，この漸近分布を出発点にして，他の相関行列の関数の漸近分布を導いた．しかし，相関係数の研究という枠にとらわれて，かなり冗長な計算がみられるのである．そのあるものは，同時に，Wishart 行列の関数と見られ，この観点からすれば，第3節に示した公式に基いて簡単に導かれるのである．このことは，Olkin, Siotani により相関係数の研究が一段落つい

て間もなく認められ，1963 年秋から 1964 年春にかけて，Olkin により行なわれた，Stanford University の統計学科の，多変数解析に関する講義にも取り入れられた．そこでは，多変数解析の仮設検定に現われる，Wishart 行列の関数として現われる統計量がいくつか取り扱われた．第2節に，以上述べたいくつかの結果をまとめておきたいと思う．

本論文は，上に述べたのと同じ線に沿って，すなわち，第3節の公式を次々に使いながら，(I) x_1 と $(x_2, \cdots, x_i)$, $(i=2, \cdots, p)$, の間の重相関係数の自乗，$r^2{}_{1(2,\ldots,i)}$, $i=2, \cdots, p$, の漸近分布，(II) $x_2, \cdots, x_{i-1}$ の影響を除いた x_1 と x_i の偏相関係数の自乗，$r^2{}_{1i(2,\ldots,i-1)}$, $i=2, \cdots, p$ の漸近分布を導くものである．ここに，$(x_1, \cdots, x_p)$ は p-変数正規分布に従うものと仮定されている．

この論文で取り扱われる分布は，全部，いわゆる，non-null case のもの，すなわち，母集団において，統計量に対応する量が零でない場合のものである．一般に，多変数解析の検定問題において，仮設の下における統計量の分布はわかっても，その検定力となると，なかなか評価がむつかしい．non-null case の分布を求めることが容易でないのがその理由である．この問題への研究の一環として，第1近似としての漸近分布を求めるという意図を，この論文が持っていることを申し添えておく．

2. 既に求められている結果

前節で述べたように，Olkin と Siotani によって既に求められている結果で，本論文と同系統と思われるものをいくつか，ここにまとめておこう．次の記号を使う．

母集団は p 変数正規分布であり，その共分散行列，相関行列をそれぞれ $\Sigma\equiv(\sigma_{ij})$, $\boldsymbol{P}\equiv(\rho_{ij})$ で表わす．勿論 $p\times p$, 対称，正値定符号である．

$\underset{p\times p}{S}\equiv(s_{ij})$; $\underset{p\times p}{R}\equiv(r_{ij})$: それぞれ標本の共分散行列，相関行列で，その自由度は n である．

$$\underset{p\times p}{\Sigma}=\begin{array}{c c} \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \cdots & \Sigma_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ \Sigma_{q1} & \cdots & \Sigma_{qq} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} p_1 \\ \vdots \\ p_q \end{array} \\ \begin{array}{ccc} p_1 & \cdots & p_q \end{array} & \end{array}; \quad \underset{p\times p}{S}=\begin{array}{c c} \begin{bmatrix} S_{11} & \cdots & S_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ S_{q1} & \cdots & S_{qq} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} p_1 \\ \vdots \\ p_q \end{array} \\ \begin{array}{ccc} p_1 & \cdots & p_q \end{array} & \end{array}$$

$$\underset{m\times m}{\Sigma_{(m)}}=\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_{m1} & \cdots & \sigma_{mm} \end{bmatrix}; \quad \underset{m\times m}{S_{(m)}}=\begin{bmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{m1} & \cdots & s_{mm} \end{bmatrix}.$$

相関行列についても同様の記号を用いる．

(I) $\sqrt{n}\,\{|R|-|\boldsymbol{P}|\}$ の極限分布は，平均 0，分散 $2|\boldsymbol{P}|^2(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{P}^2-p)$ をもつ正規分布である．

(II) $\sqrt{n}\,\{(|R_{(2)}|, \cdots, |R_{(p)}|)-(|\boldsymbol{P}_{(2)}|, \cdots, |\boldsymbol{P}_{(k)}|)\}$ の同時極限分布は，平均ベクトル $(0, \cdots, 0)$ なる正規分布で，その共分散は，$i\leqq j$ の時

$$\phi_{ij}=2|\boldsymbol{P}_{(i)}||\boldsymbol{P}_{(j)}|\{\mathrm{tr}\,\boldsymbol{P}_{(i)}{}^2-i+\mathrm{tr}\,\boldsymbol{P}'_{ij}(I-\boldsymbol{P}_{(i)}{}^{-1})\boldsymbol{P}_{ij}\}.$$

ただし $\boldsymbol{P}_{ij}$ は $i\times(j-i)$ 行列 $(\rho_{\alpha\beta})$, $\alpha=1, \cdots, i$; $\beta=i+1, \cdots, j$. $i>j$ の時は上の式で i と j を交換したものである．特に $i=j$ の時は，$\phi_{ii}=2|\boldsymbol{P}_{(i)}|^2(\mathrm{tr}\,\boldsymbol{P}_{(i)}{}^2-i)$.

(III) p 変数を q 個の組に分けた時，その独立性の尤度比検定規準は

$$v=\frac{|S|}{|S_{11}|\cdots|S_{qq}|}=\frac{|R|}{|R_{11}|\cdots|R_{qq}|}$$

である．これにたいして，$\mu=|\Sigma|\Big/\prod_1^q|\Sigma_{ii}|$ とおけば，v は漸近的に平均 μ, 分散

$$\frac{2}{n}\mu^2[\mathrm{tr}\,(D_\Sigma{}^{-1}\Sigma)^2-p]$$

の正規分布に従う．ここで

$$D_\Sigma=\begin{bmatrix}\Sigma_{11} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \Sigma_{qq}\end{bmatrix}.$$

(IV) Sphericity，すなわち，H_0: $\Sigma=\sigma^2 I$ の尤度比検定規準は，$w=|S|\Big/\left(\dfrac{\mathrm{tr}\,S}{p}\right)^p$ である．w の漸近分布は，平均 $\tau=|\Sigma|\Big/\left(\dfrac{\mathrm{tr}\,\Sigma}{p}\right)^p$，分散 $\dfrac{2}{n}\tau^2\left\{\dfrac{p^2}{(\mathrm{tr}\,\Sigma)^2}\mathrm{tr}\,\Sigma^2-p\right\}$ の正規分布である．

(V) Roy-Bargmann [4] による step-down multiple correlation は次のように定義される．

$$1-\bar{r}_i{}^2=\frac{|S_{(i)}|}{s_{ii}|S_{(i-1)}|}, \qquad 1-\bar{\rho}_i{}^2=\frac{|\Sigma_{(i)}|}{\sigma_{ii}|\Sigma_{(i-1)}|}, \qquad i=2,\cdots,p$$

ここに $\bar{r}_i$ は，$\bar{r}_{i(1,\dots,i-1)}$ の，$\bar{\rho}_i$ は，$\rho_{i(1,\dots,i-1)}$ の略号で，x_i と $(x_1,\cdots,x_{i-1})$ の間の重相関係数である．このとき，$\sqrt{n}\,\{(\bar{r}_2{}^2,\cdots,\bar{r}_p{}^2)-(\bar{\rho}_2{}^2,\cdots,\bar{\rho}_p{}^2)\}$ の極限分布は正規で，平均は，$(0,\cdots,0)$，分散・共分散は

$$\varphi_{ii}=4\bar{\rho}_i{}^2(1-\bar{\rho}_i{}^2)^2,$$
$$\varphi_{ij}=\varphi_{ji}=2(1-\bar{\rho}_i{}^2)(1-\bar{\rho}_j{}^2)[\rho_{ij}{}^2-\bar{\rho}^2{}_{j(1,\dots,i)}+\bar{\rho}^2{}_{j(1,\dots,i-1)}] \qquad (i<j)$$

で与えられる．

以上の結果において，統計量に対応する母集団の量が 0 の時は，分布が degenerate して，正規分布とならないことを注意しておく．

3. 公　式

S を自由度 n の標本共分散行列とする．この時，nS はWishart 行列，$p\lim S=\Sigma$ で，漸近分布において

$$A-\mathrm{cov}\,(s_{ij},s_{kl})=\frac{1}{n}(\sigma_{ik}\sigma_{jl}+\sigma_{il}\sigma_{jk}) \tag{3·1}$$

が成立することはよく知られている，(例えば [1] の 75 頁)．また標本モーメントの関数の漸近分布に関する Cramér の結果 [2, 366 頁] により，普通の regularity conditions の下で，$\sqrt{n}\,\{f(S)-f(\Sigma)\}$ の極限分布が平均 0 の正規分布となることも周知の通りである．問題はその分散の評価にある．普通，いわゆるデルタ法により行なわれるが，今取り扱っている S の関数の場合に，次の公式は便利である．

〔公式 I〕 $f(S)$ の漸近分布における分散は

$$A-\mathrm{var}\,\{f(S)\}=\frac{2}{n}\mathrm{tr}\,(F\Sigma)^2 \tag{3·2}$$

$$=\frac{2}{n}\{f(\Sigma)\}^2\,\mathrm{tr}\,(\Phi\Sigma)^2 \tag{3·3}$$

で与えられる．ただし

$$F=(f_{ij}),\quad f_{ij}=\frac{\partial f(\Sigma)}{\partial\sigma_{ij}}; \qquad \Phi=(\phi_{ij}),\quad \phi_{ij}=\frac{\partial\log f(\Sigma)}{\partial\sigma_{ij}}.$$

証明: デルタ法により

$$A-\mathrm{var}\,\{f(S)\}=E\left\{\sum_{i,j=1}^{p}\frac{\partial f(S)}{\partial s_{ij}}\bigg|_{S=\Sigma}(s_{ij}-\sigma_{ij})\right\}^2$$

$$=\sum_{i,j,k,l=1}^{p}\frac{\partial f(\Sigma)}{\partial\sigma_{ij}}\frac{\partial f(\Sigma)}{\partial\sigma_{kl}}E(s_{ij}-\sigma_{ij})(s_{kl}-\sigma_{kl})$$

$$=\sum_{i,j,k,l=1}^{p}f_{ij}f_{kl}\cdot\frac{1}{n}(\sigma_{ik}\sigma_{jl}+\sigma_{il}\sigma_{jk})$$

$$=\frac{2}{n}\sum_{i,j,k,l=1}^{p}f_{ij}f_{kl}\sigma_{ik}\sigma_{jl}$$

$$=\frac{2}{n}\operatorname{tr}(F\Sigma)^2$$

(3·3) は

$$f_{ij}=\frac{\partial f(\Sigma)}{\partial\sigma_{ij}}=f(\Sigma)\frac{\partial\log f(\Sigma)}{\partial\sigma_{ij}}=f(\Sigma)\phi_{ij}$$

であるから明らかである．

〔公式 II〕 $f(S)$, $g(S)$ を2つの S の関数とするとき，同時漸近分布における共分散は

$$A-\operatorname{cov}\{f(S),g(S)\}=\frac{2}{n}\operatorname{tr}(F\Sigma G\Sigma) \tag{3·4}$$

$$=\frac{2}{n}f(\Sigma)g(\Sigma)\operatorname{tr}(\Phi\Sigma\Psi\Sigma) \tag{3·5}$$

で与えられる．ただし

$$G=(g_{ij})=\left(\frac{\partial g(\Sigma)}{\partial\sigma_{ij}}\right),\quad \Psi=(\varphi_{ij})=\left(\frac{\partial\log g(\Sigma)}{\partial\sigma_{ij}}\right).$$

証明は公式 I と同じことである．第2節の (III), (IV) に記した結果は，公式 I を使えば簡単に求められる．例えば，前節 (IV) の $w=|S|\Big/\left(\frac{\operatorname{tr}S}{p}\right)^p$ の漸近分布における分散については次のようになる．

$$\log w=\log|S|-p(\operatorname{tr}S)+p\log p$$

$$\phi_{ij}=\left.\frac{\partial\log w}{\partial s_{ij}}\right|_{S=\Sigma}=(\Sigma^{-1})_{ij}-\frac{p}{\operatorname{tr}\Sigma}(I)_{ij}$$

$$\Phi=\Sigma^{-1}-\frac{p}{\operatorname{tr}\Sigma}I$$

$$A-\operatorname{var}(w)=\frac{2}{n}\tau^2\operatorname{tr}\left\{\left(\Sigma^{-1}-\frac{p}{\operatorname{tr}\Sigma}I\right)\Sigma\right\}^2$$

$$=\frac{2}{n}\tau^2\left\{\frac{p^2}{(\operatorname{tr}\Sigma)^2}\operatorname{tr}\Sigma^2-p\right\}.$$

4. $r^2_{1(2,\dots,i)}$, $i=2,\cdots,p$ の漸近的同時分布

x_1 と $(x_2,\cdots,x_i)$ の間の重相関係数を $r_{1(2,\dots,i)}$ (標本)，$\rho_{1(2,\dots,i)}$ (母集団)，あるいはもっと簡単に，$\dot{r}_i$, $\dot{\rho}_i$ と表わそう．$\dot{r}_2^2,\cdots,\dot{r}_p^2$ の漸近的同時分布を求めるのであるが，Anderson の本 [1] の定理 4·25 により，平均が $\dot{\rho}_2^2,\cdots,\dot{\rho}_p^2$ の正規分布であることは明らかである．以下は共分散行列を求めるものである．

定義により

$$1-\dot{r}_i^2=\frac{|S_{(i)}|}{s_{11}|S_{(i)11}|},\quad i=2,\cdots,p \tag{4·1}$$

ただし $S_{(i)11}$ は $S_{(i)}$ における要素 s_{11} の cofactor をつくる行列で，従って $S_{(i)}$ は $i\times i$, $S_{(i)11}$ は $(i-1)\times(i-1)$ の行列である．最初に公式 I, II によって，いくつかの分散，共分散を用意しておこう．

(1) $$A-\mathrm{cov}\,\{|S_{(i)}|,\ |S_{(j)}|\}=\frac{2}{n}|\Sigma_{(i)}||\Sigma_{(j)}|\cdot\min(i,\ j) \tag{4·2}$$

これは，2 つの行列の要素が全く一致しているか，あるいは，一方が他方の中に完全に含まれているときのものである．従って $A-\mathrm{var}\,(|S_{(i)}|)$, $A-\mathrm{cov}\,(s_{11},\ |S_{(i)}|)$, $A-\mathrm{cov}\,\{|S_{(i)11}|,\ |S_{(i)}|\}$ などは，この範ちゅうに入る．

(2) $$A-\mathrm{cov}\,\{s_{11},\ |S_{(i)11}|\}=\frac{2}{n}\sigma_{11}|\Sigma_{(i)11}|\dot{\rho}_i^2 \tag{4·3}$$

公式 II を用いて導いてみよう．

$$A-\mathrm{cov}\,\{s_{11},\ |S_{(i)11}|\}=\frac{2}{n}\sigma_{11}|\Sigma_{(i)11}|\ \mathrm{tr}\,(\Phi\Sigma\,\Psi\Sigma)\ .$$

$\sigma_1=(\sigma_{12},\ \cdots,\ \sigma_{1i})$ とおけば

$$\Phi\Sigma=\begin{array}{c} 1 \\ p-1 \end{array}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_{11}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\Sigma=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sigma_{11}}\sigma_1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{array}{c} 1 \\ p-1 \end{array},$$
$$\qquad\qquad 1 \quad p-1 \qquad\qquad 1 \quad i-1 \quad p-i$$

$$\Psi\Sigma=\begin{array}{c} 1 \\ i-1 \\ p-i \end{array}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_{(i)11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\Sigma=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \Sigma_{(i)11}^{-1}\sigma_1' & I_{(i-1)} & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{array}{c} 1 \\ i-1 \\ p-i \end{array}$$
$$\qquad\qquad 1 \quad i-1 \quad p-1 \qquad\qquad 1 \quad i-1 \quad p-1$$

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\,(\Phi\Sigma\,\Psi\Sigma)&=\mathrm{tr}\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sigma_{11}}\sigma_1 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \Sigma_{(i)11}^{-1}\sigma_1' & I_{(i-1)} & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &=\frac{1}{\sigma_{11}}\sigma_1\,\Sigma_{(i)11}^{-1}\sigma_1' \\ &=\dot{\rho}_i^2 \end{aligned}$$

(3) $$A-\mathrm{cov}\,\{|S_{(i)}|,\ |S_{(j)11}|\}=\frac{2}{n}|\Sigma_{(i)}||\Sigma_{(j)11}|\{i-\sigma_{11}\sigma_{(i)}^{11}(1-\dot{\rho}_j^2)\} \tag{4·4}$$

ただし $i\leqq j$, $\sigma_{(i)}^{11}$ は $\Sigma_{(i)}^{-1}$ の (1·1) 要素である．

これの評価には，elementary な計算の方がまぎらわしくない．

$$\begin{aligned}A-\mathrm{cov}\,\{|S_{(i)}|,\ |S_{(j)11}|\}&=\sum_{\alpha,\beta=1}^{i}\frac{\partial|\Sigma_{(i)}|}{\partial\sigma_{\alpha\beta}}\sum_{\gamma,\delta=2}^{j}\frac{\partial|\Sigma_{(i)11}|}{\partial\sigma_{\gamma\delta}}E(s_{\alpha\beta}-\sigma_{\alpha\beta})(s_{\gamma\delta}-\sigma_{\gamma\delta}) \\ &=\frac{2}{n}|\Sigma_{(i)}||\Sigma_{(j)11}|\sum_{\alpha,\beta=1}^{i}\sum_{\gamma,\delta=2}^{j}\sigma_{(i)}^{\alpha\beta}\sigma_{(j)11}^{\gamma\delta}\sigma_{\alpha\gamma}\sigma_{\beta\delta} \\ &=\frac{2}{n}|\Sigma_{(i)}||\Sigma_{(j)11}|\left\{\sigma_{(i)}^{11}\sum_{\gamma,\delta=2}^{j}\sigma_{(j)11}^{\gamma\delta}\sigma_{1\gamma}\sigma_{1\delta}+\sum_{\alpha=2}^{i}\sum_{\gamma,\delta=2}^{j}\sigma_{(i)}^{\alpha1}\sigma_{(j)11}^{\gamma\delta}\sigma_{\alpha\gamma}\sigma_{1\delta}\right. \\ &\qquad\left.+\sum_{\alpha=1}^{i}\sum_{\beta=2}^{i}\sum_{\gamma,\delta=2}^{j}\sigma_{(i)}^{\alpha\beta}\sigma_{(j)11}^{\gamma\delta}\sigma_{\alpha\gamma}\sigma_{\beta\delta}\right\} \\ &=\frac{2}{n}|\Sigma_{(i)}||\Sigma_{(j)11}|\{\sigma_{11}\sigma_{(i)}^{11}\dot{\rho}_j^2+(1-\sigma_{11}\sigma_{(i)}^{11})+(i-1)\} \\ &=\frac{2}{n}|\Sigma_{(i)}||\Sigma_{(j)11}|\{i-\sigma_{11}\sigma_{(i)}^{11}(1-\dot{\rho}_j^2)\}\ .\end{aligned}$$

さて $\dot{r}_i^2$, $\dot{r}_j^2$ の共分散を求めよう．ただし $i\leqq j$ とする．

$$A-\mathrm{cov}\,(\dot{r}_i^2, \dot{r}_j^2)=A-\mathrm{cov}\,(1-\dot{r}_i^2, 1-\dot{r}_j^2)=A-\mathrm{cov}\left\{\frac{|S_{(i)}|}{s_{11}|S_{(i)11}|}, \frac{|S_{(j)}|}{s_{11}|S_{(j)11}|}\right\}$$

$$=(1-\dot{\rho}_i^2)(1-\dot{\rho}_j^2)E\left[\frac{\partial \log (1-\dot{\rho}_i^2)}{\partial|\Sigma_{(i)}|}(|S_{(i)}|-|\Sigma_{(i)}|)+\frac{\partial \log (1-\dot{\rho}_i^2)}{\partial\sigma_{11}}(s_{11}-\sigma_{11})\right.$$

$$\left.+\frac{\partial \log (1-\dot{\rho}_i^2)}{\partial|\Sigma_{(i)11}|}(|S_{(i)11}|-|\Sigma_{(i)11}|)\right]\times\left[\frac{\partial \log (1-\dot{\rho}_j^2)}{\partial|\Sigma_{(j)}|}(|S_{(j)}|-|\Sigma_{(j)}|)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial \log (1-\dot{\rho}_j^2)}{\partial\sigma_{11}}(s_{11}-\sigma_{11})+\frac{\partial \log (1-\dot{\rho}_j^2)}{\partial|\Sigma_{(j)11}|}(|S_{(j)11}|-|\Sigma_{(j)11}|)\right]$$

$$=(1-\dot{\rho}_i^2)(1-\dot{\rho}_j^2)\left\{\frac{1}{|\Sigma_{(i)}||\Sigma_{(j)}|}A-\mathrm{cov}\,(|S_{(i)}|, |S_{(j)}|)-\frac{1}{\sigma_{11}|\Sigma_{(i)}|}A-\mathrm{cov}\,(s_{11}, |S_{(i)}|)\right.$$

$$-\frac{1}{|\Sigma_{(i)}||\Sigma_{(j)11}|}A-\mathrm{cov}\,(|S_{(i)}|, |S_{(j)11}|)-\frac{1}{\sigma_{11}|\Sigma_{(j)}|}A-\mathrm{cov}\,(s_{11}, |S_{(j)}|)$$

$$+\frac{1}{\sigma_{11}^2}A-\mathrm{var}\,(s_{11})+\frac{1}{\sigma_{11}|\Sigma_{(j)11}|}A-\mathrm{cov}\,(s_{11}, |S_{(j)11}|)$$

$$-\frac{1}{|\Sigma_{(i)11}||\Sigma_{(j)}|}A-\mathrm{cov}\,(|S_{(i)11}|, |S_{(j)}|)+\frac{1}{|\Sigma_{(i)11}|\sigma_{11}}A-\mathrm{cov}\,(|S_{(i)11}|, s_{11})$$

$$\left.+\frac{1}{|\Sigma_{(i)11}||\Sigma_{(j)11}|}A-\mathrm{cov}\,(|S_{(i)11}|, |S_{(j)11}|)\right\}$$

$$=\frac{2}{n}(1-\dot{\rho}_i^2)(1-\dot{\rho}_j^2)\{i-1-[i-\sigma_{11}\sigma_{(i)}{}^{11}(1-\dot{\rho}_j^2)]-1+1+\dot{\rho}_j^2-(i-1)+\dot{\rho}_i^2+(i-1)\}$$

$$=\frac{2}{n}(1-\dot{\rho}_i^2)(1-\dot{\rho}_j^2)\{\dot{\rho}_i^2+\dot{\rho}_j^2+\sigma_{11}\sigma_{(i)}{}^{11}(1-\dot{\rho}_j^2)-1\}$$

$$=\frac{2}{n}(1-\dot{\rho}_i^2)(1-\dot{\rho}_j^2)\{\dot{\rho}_i^2-(1-\dot{\rho}_j^2)(1-\sigma_{11}\sigma_{(i)}{}^{11})\}$$

しかるに，$\sigma_{11}\sigma_{(i)}{}^{11}=\dfrac{1}{1-\dot{\rho}_i^2}$ に注意すれば

$$A-\mathrm{cov}\,(\dot{r}_i^2, \dot{r}_j^2)=\frac{2}{n}(1-\dot{\rho}_i^2)(1-\dot{\rho}_j^2)\left\{\dot{\rho}_i^2+(1-\dot{\rho}_j^2)\frac{\dot{\rho}_i^2}{1-\dot{\rho}_i^2}\right\}$$

$$=\frac{2}{n}\dot{\rho}_i^2(1-\dot{\rho}_i^2)(1-\dot{\rho}_j^2)\left(1+\frac{1-\dot{\rho}_j^2}{1-\dot{\rho}_i^2}\right) \tag{4·5}$$

or

$$=\frac{2}{n}\dot{\rho}_i^2(1-\dot{\rho}_j^2)(2-\dot{\rho}_i^2-\dot{\rho}_j^2) \tag{4·6}$$

特に $i=j$ とすれば

$$A-\mathrm{var}\,(\dot{r}_i^2)=\frac{4}{n}\dot{\rho}_i^2(1-\dot{\rho}_i^2)^2 \tag{4·7}$$

本節の結果をまとめておく．

〔定理〕 もし $\dot{\rho}_i^2\neq 0,\ i=2, \cdots, p$ であるならば，$(\dot{r}_2^2, \cdots, \dot{r}_p^2)$ は漸近的に，平均 $(\dot{\rho}_2^2, \cdots, \dot{\rho}_p^2)$ をもち，(4·5) or (4·6)，(4·7) で与えられる分散，共分散をもつ，$(p-1)$ 変数正規分布に従う．

5. $\dot{r}^2_{1i\cdot 2,\ldots,i-1}\equiv\bar{r}_{1i}^2$, $i=2, \cdots, p$, の漸近的同時分布

x_1 と x_i の，$(x_2, \cdots, x_{i-1})$ の影響を除いたあとの偏相関係数を $r_{1i\cdot 2,\ldots,i-1}$（標本），$\rho_{1i\cdot 2,\ldots,i-1}$（母集団），あるいは，もっと簡単に，$\bar{r}_{1i}$，$\bar{\rho}_{1i}$ と表わす．

$(\bar{r}_{12}^2, \cdots, \bar{r}_{1p}^2)$ の漸近的分布は，前節の場合と同じく，平均 $(\bar{\rho}_{12}^2, \cdots, \bar{\rho}_{1p}^2)$ をもつ正規分布

となることは容易にわかることである．分散，共分散を求めるには，次の重相関係数と偏相関係数を結ぶ関係式（例えば [2]，307 頁）を利用すると，前節の結果を使うことができて便利である．

$$1-\dot{r}_i^2=(1-\bar{r}_{12}^2)(1-\bar{r}_{13}^2)\cdots(1-\bar{r}_{1i}^2) \tag{5·1}$$

$$1-\dot{\rho}_i^2=(1-\bar{\rho}_{12}^2)(1-\bar{\rho}_{13}^2)\cdots(1-\bar{\rho}_{1i}^2) \tag{5·2}$$

故に

$$1-\bar{\rho}_{1i}^2=\frac{1-\dot{\rho}_i^2}{1-\dot{\rho}_{i-1}^2}\ ,\qquad 1-\bar{r}_{1i}^2=\frac{1-\dot{r}_i^2}{1-\dot{r}_{i-1}^2} \tag{5·3}$$

を得る．これより $\mathrm{cov}\,(\bar{r}_{1i}^2, \bar{r}_{1j}^2)$ は次のように計算される．ただし $i<j$ とする．

$$\begin{aligned}
A-\mathrm{cov}\,(\bar{r}_{1i}^2, \bar{r}_{1j}^2)&=A-\mathrm{cov}\,(1-\bar{r}_{1i}^2, 1-\bar{r}_{1j}^2)\\
&=A-\mathrm{cov}\left(\frac{1-\dot{r}_i^2}{1-\dot{r}_{i-1}^2}\ ,\ \frac{1-\dot{r}_j^2}{1-\dot{r}_{j-1}^2}\right)\\
&=(1-\bar{\rho}_{1i}^2)(1-\bar{\rho}_{1j}^2)E\left[\frac{1}{1-\dot{\rho}_{i-1}^2}(\dot{r}_{i-1}^2-\dot{\rho}_{i-1}^2)-\frac{1}{1-\dot{\rho}_i^2}(\dot{r}_i^2-\dot{\rho}_i^2)\right]\\
&\quad\times\left[\frac{1}{1-\dot{\rho}_{j-1}^2}(\dot{r}_{j-1}^2-\dot{\rho}_{j-1}^2)-\frac{1}{1-\dot{\rho}_j^2}(\dot{r}_j^2-\dot{\rho}_j^2)\right]\\
&=(1-\bar{\rho}_{1i}^2)(1-\bar{\rho}_{1j}^2)\left\{\frac{1}{(1-\dot{\rho}_{i-1}^2)(1-\dot{\rho}_{j-1}^2)}A-\mathrm{cov}\,(\dot{r}_{i-1}^2, \dot{r}_{j-1}^2)\right.\\
&\quad-\frac{1}{(1-\dot{\rho}_{i-1}^2)(1-\dot{\rho}_j^2)}A-\mathrm{cov}\,(\dot{r}_{i-1}^2, \dot{r}_j^2)-\frac{1}{(1-\dot{\rho}_i^2)(1-\dot{\rho}_{j-1}^2)}A-\mathrm{cov}\,(\dot{r}_i^2, \dot{r}_{j-1}^2)\\
&\quad\left.+\frac{1}{(1-\dot{\rho}_i^2)(1-\dot{\rho}_j^2)}A-\mathrm{cov}\,(\dot{r}_i^2, \dot{r}_j^2)\right\}\ .
\end{aligned}$$

前節の (4·5) を代入すれば，

$$\begin{aligned}
A-\mathrm{cov}\,(\bar{r}_{1i}^2, \bar{r}_{1j}^2)&=\frac{2}{n}(1-\bar{\rho}_{1i}^2)(1-\bar{\rho}_{1j})\left\{\dot{\rho}_{i-1}^2\left(1+\frac{1-\dot{\rho}_{j-1}^2}{1-\dot{\rho}_{i-1}^2}\right)-\dot{\rho}_{i-1}^2\left(1+\frac{1-\dot{\rho}_j^2}{1-\dot{\rho}_{i-1}^2}\right)\right.\\
&\quad\left.-\dot{\rho}_i^2\left(1+\frac{1-\dot{\rho}_{j-1}^2}{1-\dot{\rho}_i^2}\right)+\dot{\rho}_i^2\left(1+\frac{1-\dot{\rho}_j^2}{1-\dot{\rho}_i^2}\right)\right\}\\
&=-\frac{2}{n}(1-\bar{\rho}_{1i}^2)(1-\bar{\rho}_{1j}^2)\frac{(\dot{\rho}_i^2-\dot{\rho}_{i-1}^2)(\dot{\rho}_j^2-\dot{\rho}_{j-1}^2)}{(1-\dot{\rho}_i^2)(1-\dot{\rho}_{i-1}^2)}
\end{aligned} \tag{5·5}$$

(5·2) より，

$$\dot{\rho}_i^2-\dot{\rho}_{i-1}^2=\prod_{\alpha=1}^{i-1}(1-\bar{\rho}_{1\alpha}^2)\cdot\bar{\rho}_{1i}^2\ ,\qquad \dot{\rho}_j^2-\dot{\rho}_{j-1}^2=\prod_{\alpha=1}^{j-1}(1-\bar{\rho}_{1\alpha}^2)\bar{\rho}_{1j}^2\ .$$

したがって (5·5) に代入すれば，最終結果として

$$\begin{aligned}
A-\mathrm{cov}\,(\bar{r}_{1i}^2, \bar{r}_{1j}^2)&=-\frac{2}{n}(1-\bar{\rho}_{1i}^2)(1-\bar{\rho}_{1j}^2)\frac{\bar{\rho}_{1i}^2\bar{\rho}_{1j}^2\prod_{\alpha=1}^{i-1}(1-\bar{\rho}_{1\alpha}^2)\prod_{\alpha=1}^{j-1}(1-\bar{\rho}_{1\alpha}^2)}{\prod_{\alpha=1}^{i}(1-\bar{\rho}_{1\alpha}^2)\prod_{\alpha=1}^{i-1}(1-\bar{\rho}_{\alpha 1}^2)}\\
&=-\frac{2}{n}\bar{\rho}_{1i}^2\bar{\rho}_{1j}^2\prod_{\alpha=1}^{j}(1-\bar{\rho}_{1\alpha}^2)
\end{aligned} \tag{5·6}$$

を得る．

分散の計算は簡単である．

$$\begin{aligned}
A-\mathrm{var}\,(\bar{r}_{1i}^2)=(1-\bar{\rho}_{1i}^2)^2&\left\{\frac{1}{(1-\dot{\rho}_{i-1}^2)^2}A-\mathrm{var}\,(\dot{r}_{i-1}^2)-\frac{2}{(1-\dot{\rho}_{i-1}^2)(1-\dot{\rho}_i^2)}A-\mathrm{cov}\,(\dot{r}_{i-1}^2, \dot{r}_i^2)\right.\\
&\left.+\frac{1}{(1-\dot{\rho}_i^2)^2}A-\mathrm{var}\,(\dot{r}_i^2)\right\}
\end{aligned}$$

$$=\frac{4}{n}(1-\bar{\rho}_{1i}^2)^2\left\{\dot{\rho}_{i-1}^2-\dot{\rho}_{i-1}^2\left(1+\frac{1-\dot{\rho}_i^2}{1-\dot{\rho}_{i-1}^2}\right)+\dot{\rho}_i^2\right\}$$

$$=\frac{4}{n}(1-\bar{\rho}_{1i}^2)^2\frac{\dot{\rho}_i^2-\dot{\rho}_{i-1}^2}{1-\dot{\rho}_{i-1}^2} \tag{5·7}$$

$\dfrac{\dot{\rho}_i^2-\dot{\rho}_{i-1}^2}{1-\dot{\rho}_{i-1}^2}=\bar{\rho}_{1i}^2$ であるから，予想通りの結果

$$A-\mathrm{var}\,(\bar{r}_{1i}^2)=\frac{4}{n}\bar{\rho}_{1i}^2(1-\bar{\rho}_{1i}^2)^2 \tag{5·8}$$

を得る．本節の結果をまとめておく．

〔定理〕 $\bar{\rho}_{1i}^2\neq 0,\ i=2,\cdots,p$ ならば，$(\bar{r}_{12}^2,\cdots,\bar{r}_{1p}^2)$ は，n が充分大きいとき，漸近的に，平均 $(\bar{\rho}_{12}^2,\cdots,\bar{\rho}_{1p}^2)$，(5·8)，(5·6) で与えられる分散・共分散をもつ，$(p-1)$ 変数正規分布に従う．

統計数理研究所

参 考 文 献

[1] T. W. Anderson: *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis*. John Wiley & Sons, New York, 1958.

[2] H. Cramér: *Mathematical Methods of Statistics*. Princeton University Press, 1946.

[3] I. Olkin and M. Siotani: "Asymptotic distribution of functions of a correlation matrix," *Technical Report* No. 6, 1964, Stanford University.

[4] S. N. Roy and R. E. Bargmann: "Tests of multiple independence and the associated confidence bounds," *Ann. Math. Statist.*, Vol. 29, (1958), pp. 491-503.