交通制御の問題の統計数理的解析 (II)

——Optimum な系統式信号設定について——

植　松　俊　夫
袖　崎　淑　子

(1962 年 8 月 受 付)

Studies in Traffic Control Problems (II)

—— On the Condition for the Individually Optimum Layout of Signal Phases of the Traffic Control to be Optimum ——

TOSIO UEMATU and YOSHIKO SODESAKI

In [2] we presented a method for the coordination of controllers installed on a series of intersections, for the case of the traffic control with equally ballanced cycle split. According to this method, first any speed of progression and any pair of complete through bands are considered and fixed for the flows of two opposite directions. Then for each of the intersections an individually optimum offset of traffic signal is defined. This is the offset which can be determined best under the consideration of the separate effect upon the complete through bands of the signal at the intersection concerned, irrespective of the effect of the control at the other intersection. Thus a set of individually optimum offsets are defined for any speed of progression and any pair of complete through bands. The effectiveness of the traffic control by this set of offsets is evaluated by the sum of the widths of through bands which are obtained under this traffic control. The speed of progression and the pair of complete through bands are finally adjused so that we have the widest through bands of those which are obtained under the traffic control by the above-mentioned type of the set of offsets.

The method in [2] is effecctive in many cases of practical application. But there are cases where it is not effective. The traffic control at any intersection is affected by the traffic control at the other intersection. Consequently it is easily conceived that the method in [2] does not necessarily give the optimum traffic control as a whole. In section 3 we study the condition under which the method in [2] gives the optimum traffic control.

In section 4 we treat the cases where the above-mentioned condition is not satisfied. In such cases we need other method of determining the offsets of traffic signals in order to obtain the optimum traffic control. Such methods are presented in section 4.

Institute of Statistical Mathematics

本研究は科学研究費（統計的モデル解析についての総合的研究）による研究の一部である.

§1. 前置き

先に [2] において，系統式の信号機系列による自動車交通の制御に対する，信号設定のための一つの方法を提示した．この方法では，車の流れの向いあった二つの方向の車の来方の頻度を考慮して，各方向に対する through band の幅を，これ等の頻度に関して適当に均衡させることが考えられた．この均衡のさせ方であるが，これにはなほ問題がある．それで §2 においては，均衡のさせ方を改善した方法を提示する．この方法によって指定時速と信号の offset の組をきめる実際のやり方は，§5 において述べられる．

われわれの方法は，([2] の方法も，§2 において提示する方法も)，ある条件の下では，向いあった二つの流れに対する through bands の幅の和が，当該の信号機系列における信号設定のあるゆる方法のうちで最大なものを与える．この点についての詳細は [2] は述べなかったが，この議論をここで §3 において行なうことにする．なお §2 に提示する方法は，ある条件の下では，through bands の幅の和を最大にするのみでなく，各方向の through band の幅を両方向の車の来方の頻度に比例せしめるものである．その意味で，この条件の下では optimum なものである．

上述の条件が成立たぬ場合には，§2 に提示する方法によっては必らずしも上の意味で optimum なものが得られない．かかる場合には optimum なものはどのようにすれば得られるかということについては §4 で述べることにする．

なおここで取上げるのは，[2] の場合と同じく，信号の1サイクルの長さ C がすべての交叉点に対し共通で，また青信号の時間 G と赤信号の時間 R が等しい場合である（黄信号は考えない）．またここでも [2] と同じく，$C=2$，従って $G=R=1$ として考えることにする．

§2. 個別的に optimum な系統式制御

初めに，[2] で提示した方法を，より一般的な形で要約しておく．われわれの提示する方法は次の如く述べられる．

(a) 速度勾配 α を固定しておき，また [2] で述べた $\lambda^*(0\leqq\lambda^*<2)$ を固定しておいて，[2] で述べた幅が1の帯 T_0, T_0^* を考える．そうした場合，交叉点毎にそこでの信号の offset を個別的に次の意味で optimum にきめる：

(イ) 当該交叉点での制御の結果，この交叉点の赤信号が帯 T_0, T_0^* に生ぜしめる縮小の幅の和が，最も小さくなるようにする．

(ロ) 当該交叉点での T_0 の縮小と T_0^* の縮小が，流れの向いあった両方向の車の来方の頻度に関して，適当に均衡するようにする．

(b) α はなお固定しておいて，λ^* を動かして，全交叉点を通して結果する through bands の幅の和が最大となるような λ^* を選ぶ．

(c) α をも動かして，全交叉点を通して結果する through bands の幅の和が最大となるような α を選ぶ．

この手順で最終的な α と λ^* を決め，それ等の下で (a) によって決まる各交叉点での offset をもって，各交叉点における信号を設定するのがわれわれの方法である．

上の要約は，[2] で述べたものを少しく一般にした形で述べられているが，これに対して [2] で述べたものは，上の(ロ)を次のように規定するものであった．即ち

(ロ)′ 当該交叉点での T_0 の縮小と T_0^* の縮小が，流れの向いあった両方向の車の来方の頻度に反比例するようにする．但し若しも T_0, T_0^* の何れにも縮小が全然起らぬようにできる時はそれを優先させる．

このやり方をとる時は，流れの向いあった両方向に対して最終的に得られる through bands の幅は，必らずしも両方向の車の来方の頻度に比例しない．相当に食違う結果になることも多い．一

方，構成された through bands としてより妥当なものは，これ等の幅が両方向の車の来方の頻度になるべく比例するものであるといってよいであろう．

この点を考えて，本節では，(ロ)′ の代わりに別のきめ方を提示することにする．これは次のきめ方である．

(ロ)″ 当該交叉点での T_0, T_0^* に対して起こる縮小が，何れも 1/2 を越えぬようにする．かつこの場合，T_0 に起った縮小の大きさを 1/2 から引いたものと，T_0^* に起った縮小の大きさを 1/2 から引いたものとを，両方向の車の来方の頻度に比例するようにする．但し上述の縮小の何れかがちょうど 1/2 のものが起った場合には，上述のような比例はできぬわけだが，この場合にもし各方向の縮小が 1/2 づつとなっていれば，この offset をそのままとるようにして上述のような比例は考えないと定めておく．

ところで交叉点によっては，(イ) と (ロ)″ を同時に成立たせることが必らずしもできないことがある．一方，どの交叉点についても，(イ) と (ロ)′ を同時に成立たせることは常に可能である．そこで (ロ)″ の代わりに次のようなきめ方を考えることにする．即ち

(ロ)‴ 考えている交叉点に対して，もし (イ) と (ロ)″ によって決定ができる場合であれば (ロ) として (ロ)″ を用いる．一方それができぬ時は，(ロ) として (ロ)′ を用いるようにする．

この (イ) と (ロ)‴ のやり方をとを時は，ある条件の下では最終的な through bands の幅が，両方向の車の来方の頻度に比例する結果となる．この条件を見る時，(イ) と (ロ)‴ のやり方の方が，(イ) と (ロ)′ を用いるよりもずっと多くの場合に，上述のような均衡を実現せしめ得ると考えられる．従って [2] に提示した方法よりも，この新らしいやり方の方が良いと考えられる．

(a)，(b) 及び (c) によって，最良の α 及び offset の組を求める具体的なやり方については §5において述べることにし，ここでは §3での議論に必要な若干の事項を述べておく．

今 α, λ^* が固定された場合に，任意交叉点に対して (a) によって，しかも (イ) と (ロ)‴ に従って offset をきめることを考える．$\alpha=1$ の場合を考えれば充分であるから，以下暫く $\alpha=1$ とする．また以下において記号 $D, w_1, w_2 (0<w_1, w_2<1)$ の意味は [2] と同じとする．

考えている交叉点の座標を x とする．この交叉点に対し (イ) と (ロ)″ によって offset をきめることが出来ない場合には．前述の規定により．(ロ)‴ としては (ロ)′ を考える．従ってこの場合には，[2] の結果からこの交叉点に対する信号の offset がきめられる．今，この交叉点における，T_0 と T_0^* に起る縮小の大きさの和の最小値（この交叉点の信号に対するあらゆる offset に関して最小の意味）を ζ で表わせば，(イ)，(ロ)′ によって定まる offset は，T_0 と T_0^* に生ずる縮小の大きさの和が丁度この ζ を与える如きものである．

ζ は [2] の結果から具体的に書きあらわせる．即ち

$$a=x-[x], \qquad b=(D+\lambda^*-x)-[D+\lambda^*-x], \qquad \eta=|a-b| \tag{1}$$

とおけば，

$$\zeta=\begin{cases}\eta, & \text{但し } [x], [D+\lambda^*-x] \text{ が共に偶数または共に奇数の場合,}\\ 1-\eta, & \text{但し } [x], [D+\lambda^*-x] \text{ の一方が奇数，他方が偶数の場合,}\end{cases} \tag{2}$$

である．従って $0\leqq\zeta\leqq1$ である．

なおこの場合，T_0 と T_0^* のそれぞれに起る縮小の大きさは，

$$w_2\zeta \quad \text{及び} \quad w_1\zeta \tag{8}$$

であって，この縮小の大きさは互に逆の方向に，即ち T_0 において上（下）側に起れば，T_0^* においては下（上）側に起ることになる．このことは一般の α（$\alpha=1$ としないでも）の場合にそのまま成立つ．

もしも (イ) と (ロ)″ によってこの交叉点の信号の offset をきめることができる場には，上述の規定により (ロ)‴ は (ロ)″ である．それで，与えられた座標 x に対し，この座標を持つ交叉点の offset を (イ) と (ロ)″ によってきめ得るか否かを判定する条件が問題になる．この条件と，この場合に T_0, T_0^*

に起る縮小について以下に論じることにする．以下記号 $U(x,y)$，$L(x,y)$，$U^*(x,y)$，$L^*(x,y)$ の意味は [2] と同じとする．しかして

$$b(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}-U(x,y), & \text{但し}\quad L(x,y)=0 \quad \text{の場合,}\\[2mm] \dfrac{1}{2}-L(x,y), & \text{但し}\quad U(x,y)=0 \quad \text{の場合,}\end{cases} \tag{4}$$

$$b^*(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}-U^*(x,y), & \text{但し}\quad L^*(x,y)=0 \text{ の場合,}\\[2mm] \dfrac{1}{2}-L^*(x,y), & \text{但し}\quad U^*(x,y)=0 \text{ の場合,}\end{cases} \tag{5}$$

と置く．

然る時は (ロ)″ の条件は，

$$\begin{cases}U(x,y)<\dfrac{1}{2},\quad L(x,y)<\dfrac{1}{2},\quad U^*(x,y)<\dfrac{1}{2},\quad L^*(x,y)<\dfrac{1}{2}, & (6)\\[2mm] \dfrac{b(x,y)}{b^*(x,y)}=\dfrac{w_2}{w_1}, & (7)\end{cases}$$

または

$$b(x,y)=b^*(x,y)=0 \tag{8}$$

となる．

今，$[x]$ と $[D+\lambda^*-x]$ が共に偶数で，かつ $a<b$ の場合とする，この場合に条件 (イ)，(ロ)″ を満足させるためには，

$$a=x-[x]\leqq y\leqq b=(D+\lambda^*-x)-[D+\lambda^*-x] \tag{9}$$

の範囲の y のみを考えなくてはならないことが，[2] の議論から容易に分る．この範囲の y に対しては，[2] によれば，

$$\left.\begin{aligned}&U(x,y)=0,\qquad L(x,y)=[x]-x+y\\ &U^*(x,y)=(D+\lambda^*-x)-[D+\lambda^*-x]-y,\qquad L^*(x,y)=0\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

である．

従って (9) の範囲の y に対して，もし (6)，(7) が成立てば，

$$\frac{\dfrac{1}{2}-\{[x]-x+y\}}{\dfrac{1}{2}-\{(D+\lambda^*-x)-[D+\lambda^*-x]-y\}}=\frac{w_1}{w_2} \tag{7$'$}$$

でなくてはならない．ここに左辺の分母は正である．これを解けば，

$$y=\frac{1}{2}(w_2-w_1)+w_2a+w_1b \tag{11}$$

を得る．これが実際に (9) の範囲にあるためには

$$a\leqq\frac{1}{2}(w_2-w_1)+w_2a+w_1b\leqq b$$

でなくてはならない．これから，

$$w_1(a-b)\leqq\frac{1}{2}(w_2-w_1)\leqq w_2(b-a)$$

を得る．これは $w_1\geqq w_2$ なら

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{w_2}{w_1}\right)\leqq b-a \tag{12$'$}$$

と同値であり，また $w_1\leqq w_2$ なら

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{w_1}{w_2}\right)\leqq b-a \tag{12$''$}$$

と同値である．

(12)$'$, (12)$''$ は，$w_1+w_2=1$ に注意して変形すれば，それぞれ

$$w_1\{1-(b-a)\}\leqq\frac{1}{2} \tag{13$'$}$$

及び

$$w_2\{1-(b-a)\}\leqq\frac{1}{2} \tag{13$''$}$$

となる．これ等は一つにまとめ得ることが明らかである．なお $a<b$ の場合であるから，$b-a=|b-a|=\eta$ なることに注意する．(13)$'$, (13)$''$ をまとめると，結局 (イ) と (6), (7) を満足するような y があるための必要条件として，次の条件を得る．

$$\max\{w_1(1-\eta),\quad w_2(1-\eta)\}\leqq\frac{1}{2}. \tag{13}$$

また (イ) と (8) を満足するような y があるための条件を考えるに，かかる y については，(8) と (10) より $(1/2)-(y-a)=(1/2)-(b-y)=0$ であり，これにより $y=(1/2)+a=b-(1/2)$ を得る．従って $b-a=1$, 即ち $\eta=1$ であるから，この場合にはやはり (13) が成立つ．なおこの場合の y は，$y=(1/2)[\{(1/2)+a\}+\{b-(1/2)\}]=(a+b)/2$, 即ち

$$y=\frac{a+b}{2} \tag{14}$$

と求まる．これは明らかに (9) の範囲内にある．

逆に (13) が成立てば (イ) と (ロ)$''$ によって信号の offset をきめ得ることが分る．何となれば，先ず $\eta<1$ ならば，y を (11) で定めるようにすれば，この y は (9) の範囲にあり，かつ (7)$'$ が，従って (7) が成立つことは容易に確かめられる．更に (6) も成立つ．実際，(10) によれば，(9) の y を用いる場合において

$$U(x,y)=0,\qquad L^*(x,y)=0 \tag{15}$$

であり，また，

$$\begin{aligned}L(x,y)&=-a+\left\{\frac{1}{2}(w_2-w_1)+w_2a+w_1b\right\}\\&=\frac{1}{2}(w_2-w_1)+w_1(b-a)=\frac{1}{2}-w_1(1-\eta),\end{aligned}$$

即ち

$$L(x,y)=\frac{1}{2}-w_1(1-\eta) \tag{15$'$}$$

である．同様に，

$$U^*(x,y)=\frac{1}{2}-w_2(1-\eta) \tag{15$''$}$$

である． 従って $(1/2)-U(x,y)=(1/2)-L^*(x,y)=1/2>0$, また，$(1/2)-L(x,y)=w_1(1-\eta)>0$, $(1/2)-U^*(x,y)=w_2(1-\eta)>0$ となる． 即ち (6) が成立つ．次に $\eta=1$ ならば，y を (14) によって定義すれば，この y は (9) の範囲にあり，かつ (8) が成立つ．

よって条件 (13) が，この場合，考えている交叉点の offset を (イ) と (ロ)$''$ によってきめ得るための必要充分条件である．この条件が満足される場合に，T_0 と T_0^* に起る縮小の大きさは，$\eta<1$ ならば (15), (15)$'$, (15)$''$ によって与えられ，また $\eta=1$ なら，(15) 及び $U^*(x,y)=L(x,y)=1/2$ と与えられる． 即ち T_0 と T_0^* に起る縮小の大きさは，それぞれ $(1/2)-w_1(1-\eta)$ 及び $(1/2)-w_2(1-\eta)$ であり，かつ T_0, T_0^* の縮小は，(イ) と (ロ)$'$ によってこの交叉点の offset をき

める場合と同様な位置に起る．従って T_0 において上（下）側に起れば，$T_0{}^*$ においては下（上）側に起る．

同様にして，$[x]$ と $[D+\lambda^*-x]$ が共に偶数で，かつ $a=b$ あるいは $a>b$ の場合に対しても，考えている交叉点の offset を (イ) と (ロ)″ によってきめ得るための必要充分条件が (13) で与えられ，また $T_0, T_0{}^*$ に対して起る縮小の大きさはやはりそれぞれ $(1/2)-w_1(1-\eta)$ 及び $(1/2)-w_2(1-\eta)$ であり，かつ $T_0, T_0{}^*$ の縮小は，(イ) と (ロ)′ によって offset をきめる場合と同様な位置に起る．更に $[x]$ と $[D+\lambda^*-x]$ が共に奇数の場合にも全く同様な結果となる．よって次の結果を得る．

$[x]$ と $[D+\lambda^*-x]$ が共に偶数または共に奇数の場合には，考えている交叉点の offste を (イ) と (ロ)″ によってきめ得るための必要充分条件は

$$\max\{w_1(1-\eta),\quad w_2(1-\eta)\}\leqq\frac{1}{2} \tag{16}$$

である．またこの条件が成立つ時，(イ) と (ロ)″ によってきめた offset の下で，この交叉点の赤信号が T_0 及び T^{*} に生ぜしめる縮小の大きさはそれぞれ

$$\frac{1}{2}-w_1(1-\eta) \tag{17}$$

$$\frac{1}{2}-w_2(1-\eta) \tag{18}$$

であり，かつ T_0 及び $T_0{}^*$ に縮小の起る位置は，(イ) と (ロ)′ によってきめる場合と同様である．

同様にして，$[x]$ と $[D+\lambda^*-x]$ の一方が偶数で他方が奇数の場合に対して次の結果を得る．即ち，この場合に考えている交叉点の offset を (イ) と (ロ)″ によってきめ得るための必要充分条件は

$$\max\{w_1\eta, w_2\eta\}\leqq\frac{1}{2} \tag{19}$$

である．またこの条件が成立つ時，(イ) と (ロ)″ によってきめた offset の下で，この交叉点の赤信号が T_0 及び $T_0{}^*$ に生ぜしめる縮小の大きさはそれぞれ

$$\frac{1}{2}-w_1\eta, \tag{20}$$

及び

$$\frac{1}{2}-w_2\eta, \tag{21}$$

であり，かつ T_0 及び $T_0{}^*$ に縮小の起る位置は，(イ) と (ロ)′ によってきめる場合と同様である．

ところで前に定義した ζ を用いれば，上の条件は更にまとめて書ける．即ち (2) を用いればは，(16)，(19) は

$$\max\{w_1(1-\zeta),\quad w_2(1-\zeta)\}\leqq\frac{1}{2} \tag{22}$$

とまとめられ，また (17)，(18) と (20)，(21) は，

$$\frac{1}{2}-w_1(1-\zeta) \tag{23}$$

及び

$$\frac{1}{2}-w_2(1-\zeta) \tag{24}$$

とまとめられる．この結果は一般の α ($\alpha=1$ としないでも) の場合にそのまま成立つ．

次には交叉点の全体を問題とする．w_1, w_2 は与えられているとし．今 α と λ^* が与えられた場合に，(a) によってすべての交叉点に対する offset の組をきめるとする．なお λ^* に対応する帯を $T_0, T_0{}^*$ であらわす．また i 番目の交叉点 I_i の ζ を ζ_i であらわすことにする ($i=1, 2, \cdots, N$)．

(1°) $w_1=w_2=1/2$ の場合には，そこでの赤信号が T_0 の最大の上（下）の縮小を与えるような

交叉点は，また T_0^* の最大の下（上）の縮小を与える．

何となれば，I_i が T_0 に生ずる縮小も T_0^* に生ずる縮小も大きさは同じであり，かつ縮小の起る位置が T_0 と T_0^* ではちょうど逆であるから．

以下 α と λ^* は，$w_1=w_2=1/2$ であった場合に T_0 に起る縮小が，全部の交叉点で T_0 の同じ側にそれぞれある大きさをもって起るようなことにはならない，というようなものであるとする．この場合には，一般の w_1, w_2 に対しても，各交叉点で T_0 に起る縮小の全部が T_0 の同じ側にそれぞれある大きさをもって起るようなことにはならない．そこで今，$w_1=w_2=1/2$ であった場合に，そこでの赤信号が T_0 の最大の上の縮小を生ぜしめる如き交叉点を I_m, T_0 の最大の下の縮小を生ぜしめる如き交叉点を I_n であらわすことにする．但しもし T_0 の上の縮小を生ぜしめる交叉点が全くない場合には，T_0 に全然（上にも下にも）縮小を生ぜしめない交叉点が少くも一つあるわけだから，このうちの任意の一つをとって，それを I_m とする（この交叉点はこの場合，任意の w_1, w_2 に対しても，その対応する制御における赤信号が T_0, T_0^* の何れにも全く縮小を生ぜしめないものである）．I_n についても同じ考慮をする．さて

(2°) w_1, w_2 が任意の場合に対しても，I_m はその赤信号が T_0 の最大の上の縮小と T_0^* の最大の下の縮小を生ぜしめる交叉点であり，I_n はその赤信号が T_0 の最大の下の縮小と T_0^* の最大の上の縮小を生ぜしめる交叉点である．

何となれば，先ず必要ならば適当に交叉点の番号をつけかえればよいから，

$$\zeta_1 \leqq \zeta_2 \leqq \cdots\cdots \leqq \zeta_N \tag{25}$$

とする．勿論 $0\leqq\zeta_1$，及び $\zeta_N\leqq 1$ である．ここでは (a) として(イ)と(ロ)‴によって offset をきめるきめ方をとる場合であるとする（(a) として(イ)と(ロ)′をとる場合，即ち [2] に述べた場合も同様に議論される）．

然る時は，$w_1=w_2=1/2$ の場合において，$I_1, I_2, \cdots, I_N$ のそれぞれの赤信号が T_0 に与える縮小の大きさも，T_0^* に与える縮小の大きさも，何れも交叉点の番号につれて大きくなる．

一方与えられた w_1, w_2 の場合において，k を

$$\zeta_k < \max\left\{1-\frac{1}{2w_1}, 1-\frac{1}{2w_2}\right\} \leqq \zeta_{k+1} \tag{26}$$

なる関係で定めれば，$I_1, I_2, \cdots, I_k$ のそれぞれは(イ)と(ロ)′によって offset がきめられねばならないから，それぞれにおける赤信号の T_0 に生ぜしめる縮小の大きさは $w_2\zeta_1, w_2\zeta_2, \cdots, w_2\zeta_k$ であって，(25) によりこれ等は交叉点の番号につれて大きくなる．一方 $I_{k+1}, I_{k+2}, \cdots, I_N$ のそれぞれは，(イ)と(ロ)″によって offest がきめられねばならないから，それぞれにおける赤信号が T_0 に生ぜしめる縮小の大きさは，

$$\frac{1}{2}-w_1(1-\zeta_{k+1}),\ \frac{1}{2}-w_1(1-\zeta_{k+2}), \cdots, \frac{1}{2}-w_1(1-\zeta_N)$$

であって，これらもまた交叉点の番号につれて大きくなる．更に

$$w_2\zeta_k < \frac{1}{2}-w_1(1-\zeta_{k+1}) \tag{27}$$

である．

実際例えば $w_1\leqq w_2$ とするに，(26) より $1-\zeta_{k+1}\leqq 1/2w_2$ であり，これより $(1/2)-(w_1/2w_2)\leqq(1/2)-w_1(1-\zeta_{k+1})$ を得るが，一方 (26) より $(1/2)-(w_1/2w_2)=(1/2)-(1-w_2)/2w_2=1-(1/2w_2)>\zeta_k$ となるから (27) が得られる．$w_1>w_2$ でも同様である．

以上により，与えられた w_1, w_2 の場合においても，$w_1=w_2=1/2$ の場合と同じく，$I_1, I_2, \cdots, I_N$ のそれぞれの赤信号が T_0 に与える縮小の大きさは交叉点の番号が大きくなるにつれて大きくなる．T_0 の代わりに T_0^* を考えても同様である．

更に，$w_1=w_2=1/2$ の場合と，与えられた w_1, w_2 の場合との間では，各交叉点で，そこにおけ

る赤信号が T_0 あるいは T_0^* に生ぜしめる縮小の起る位置は全く同じようである.

よって更に (1°) に注意することにより，所題の結論が得られる.

§3. optimum なための条件

初めに若干の記号と定義を述べる．与えられた交叉点系 $I_1, I_2, \cdots, I_N$ に対する系統式制御は，指定速度の勾配 α と，これ等の交叉点のそれぞれに対する offset の組を与えればきまるわけだが，今こういった offset の組を記号 S によって表わすことにする．但し相対的にみれば同じである offset の組同志，即ち最初の交叉点の offset を基準にとる時，これに対する各交叉点での offset のずれ方が一致するような組同志は同一のものとみなす．またすべての S の集合を $\mathfrak{S}$ で表わすことにする.

更に，次の如く通過指数なるものを定義しておく．交叉点系に対してある系統式制御を用いる場合，向いあった二つの方向の車の流れのそれぞれに対する through band は，とれることもとれないこともある．そこで，**左から右への方向に対する通過指数**を，もしこの方向に対し through band がとれる時はその幅を意味し，またそれがとれぬ場合には 0 を意味するものとして定義する．同様に**右から左への方向に対する通過指数**が定義される．これ等両者の和をもって，単に**通過指数**と呼ぶことにする．通過指数は明らかに α と S の函数である．それで今これを $Q_\alpha(S)$ と表わすことにする．なお α は $\alpha_1 \leqq \alpha \leqq \alpha_2$ の範囲（α_1, α_2 は与えられた限界）で考える.

さて信号の規制の方法の良否を考える場合，今われわれのとっている立場は次のように述べられる．即ち規制の結果得られる through bands に関して判定を行ない，かつ判定に当っては次の条件の成立を理想的なものとして想定する:

（A） $Q_\alpha(S)$ が最大となること

（B） 各方向に対する通過指数が，各方向の車の来方の頻度に比例すること.

但しこの場合，各方向の通過指数を何れも充分に大きくとることが可能なら，そのために上述の比例関係が破られてもこの条件の方を優先させる.

(B) をもって詳しく述べれば次の通りである．(A) によって考えた $Q_\alpha(S)$ の最大値を（もしそれがあるとして）R とする時，両方向の車の来方の相対頻度を w_1, w_2 として，(B) は次の意味である．即ち

（i） $R \leqq 1+\dfrac{\min\{w_1, w_2\}}{\max\{w_1, w_2\}}$ の場合: この場合には，各方向の通過指数が w_1 と w_2 に比例するという意味とする.

(ii) $R > 1+\dfrac{\min\{w_1, w_2\}}{\max\{w_1, w_2\}}$ の場合: この場合には，車の来方の頻度の多い方向の通過指数が 1 となり，今一つの方向の通過指数が $R-1$ となるという意味とする.

この (A), (B) ができるだけ実現できるように信号の offset の組と指定速度の勾配をきめてゆかうというのがわれわれの立場である．そのための方法として提示したのが [2] あるいは §2 の方法であるが，これ等の方法によって，実際に上に述べた意味で良い結果が得られるかという点はなお検討を要することである.

[2] あるいは §2 の方法は，各交叉点を個別的に（それぞれをその他の交叉点との関係を考えず，独立に取扱かって）optimum にするというやり方である．実際には一般に他の交叉点との関連が影響するから，各交叉点毎に optimum な信号の設定をしても．全体を通して結果する through bands は必らずしも optimum にはならないであろうということが当然考えられる．即ちこれ等の方法によって必らずしも最良の制御が得られるとは限らないかもしれない．本節では，これが実際に全体として optimum となるための条件を問題にする.

後に述べるように，ある条件の下では，§2 に述べた方法によって，上の (A) と (B) を同時に

満足させることができる．§2に述べた方法はこの意味で，上述の条件が成立つ場合には optimum なものである．

一方 [2] に提示した方法では，多くの場合，(A) と共に上述の条件 (B) をも成立せしめるということができない．然し (B) の代わりに条件

(B)′ 各方向に対する通過指数をそれぞれ1から引いたものが，各方向の車の来方の頻度に反比例する．但し両方向の通過指数の何れもが1となり得るなら，この方を優先させる．

を考えれば，後に述べる如く，(A) と (B)′ を同時に満足させることが（ある条件の下で）できる．即ち [2] で述べた方法は，この意味で（この条件が成立つ時は），optimum なものである．

以下 §2あるいは [2] の方法が上述の意味で optimum なものであるための条件を問題にしてゆくが，そのためには，先ず (A) のみを取上げ，われわれの方法で (A) を達成できるための条件を問題にすることからはじめる．

今，車の来方の相対頻度 w_1, w_2 を固定する時，α 及び λ^* を与えれば，前節に述べた(イ)と(ロ)′によって，与えられた交叉点系に対するある offset の組がきまる．この組を特に $S'_{\alpha,\lambda^*,w_1,w_2}$ で表わすことにする．また前節に述べた(イ)と(ロ)‴によってきまる offset の組を $S_{\alpha,\lambda^*,w_1,w_2}$ で表わすことにする．特に $w_1=w_2=1/2$ の場合には両者が一致することは，§2の結果から明らかである．なお w_1, w_2 は $0<w_1, w_2<1$ なるもののみを考えることにする．

(A) を記号で表現すれば次のようになる．即ち (A) は，

$$\max_{\substack{S\in\mathfrak{S}\\ \alpha_1\leqq\alpha\leqq\alpha_2}} Q_\alpha(S) \tag{28}$$

を与えるような $\alpha(\alpha_1\leqq\alpha\leqq\alpha_2)$ と $S(\in\mathfrak{S})$ を求めるということである．それに対して [2] のやり方は，w_1, w_2 が与えられた場合に

$$\max_{\alpha_1\leqq\alpha\leqq\alpha_2} Q_\alpha[\max_{0\leqq\lambda^*<2}(S'_{\alpha,\lambda^*,w_1,w_2})] \tag{29}$$

を与えるような $\alpha(\alpha_1\leqq\alpha\leqq\alpha_2)$ と $\lambda^*(0\leqq\lambda^*<2)$ を（またそれを用いて $S'_{\alpha,\lambda^*,w_1,w_2}$ を）求めるというものである．また §2のやり方（(ロ)としては(ロ)‴をとるもの）は，w_1, w を与えられた場合に

$$\max_{\alpha_1\leqq\alpha\leqq\alpha_2} Q_\alpha[\max_{0\leqq\lambda^*<2}(S_{\alpha,\lambda^*,w_1,w_2})] \tag{30}$$

を与えるような α と λ^* を（またそれを用いて $S_{\alpha,\lambda^*,w_1,w_2}$ を）求めるというものである．

そこで問題は，如何なる条件があれば (28)=(29) または (28)=(30) となるかということになる．これについては次のことがいえる．

［定理 1］ 最初の交叉点 I_1 での赤信号によっては縮小が全然起らぬような帯を T_0, T_0^* とする時，これ等に対応する λ^* の値を λ_0^* であらわすことにする．与えられた，車の来方の相対頻度は，w_1, w_2 とする．

さて，(28)=(29) あるいは (28)=(30) であるための必要充分条件は，

$$\sup_{\alpha_1\leqq\alpha\leqq\alpha_2} Q_\alpha(S_{\alpha,\lambda^*,½,½})\geqq 1 \tag{31}$$

なることである．

この条件が成立つ場合，(31) の左辺は実は最大値であって，この最大値を達せしめる α の値を α_0 とすれば，

$$\max_{\substack{S\in\mathfrak{S}\\ \alpha_1\leqq\alpha\leqq\alpha_2}} Q_\alpha(S)=Q_{\alpha_0}(S_{\alpha_0,\lambda_0^*,w_1,w_2}) \tag{32}$$

$$=Q_{\alpha_0}(S'_{\alpha_0,\lambda_0^*,w_1,w_2}) \tag{33}$$

となる．

この定理によれば，$\lambda^*=\lambda_0^*$，$w_1=w_2=1/2$ として §2の (a) を行ない，その後更に α を動か

すようにする時に，1より小でない通過指数が達せられるなら，而してその時に限り，§2あるいは [2] の方法によって (A) を成立たしめ得る．かつこの場合，§2あるいは [2] の方法を行なうには，(b) によって λ^* を0から2まで動かす必要はなく，λ^* の最も良い値は (w_1, w_2 の値に関せず) 上述の λ_0^* であってこれを用いればよく，また最良の α を定めるに当っては $w_1=w_2=1/2$ とおいて行なえばよい．このようにして $\alpha=\alpha_0$, $\lambda^*=\lambda_0^*$ を定めて後，これ等を用いて $S_{\alpha_0,\lambda^*,w_1,w_2}$ あるいは $S'_{\alpha_0,\lambda_0^*,w_1,w_2}$ を考えれば，これを offset の組にとり，また α として α_0 を用いる制御は，最大の通過指数を持つものの一つである．

この定理の証明に入る前に，必要な二三の注意を述べる．先ず

(1°)　$Q_\alpha(S_{\alpha,\lambda^*,w_1,w_2})\geqq 1$ ならば，α と $S_{\alpha,\lambda^*,w_1,w_2}$ の下に行なう制御では，両方向共に through bands がとれる．$S'_{\alpha,\lambda^*,w_1,w_2}$ についても同じことがいえる．

このことは，$Q_\alpha(S_{\alpha,\lambda^*,w_1,w_2})>1$, あるいは $Q_\alpha(S'_{\alpha,\lambda^*,w_1,w_2})>1$ の時には $Q_\alpha(S)$ の定義から明らかである．よって "=1" の場合を証明する．またここでは $S_{\alpha,\lambda^*,w_1,w_2}$ の方のみに関して述べる．

$Q_\alpha(S_{\alpha,\lambda^*,w_1,w_2})=1$ の場合，α と $S_{\alpha,\lambda^*,w_1,w_2}$ の下での制御においてもしも一方の方向，例えば右から左への方向の通過指数が0なら，左から右への方向の通過指数が1に等しい．これは左から右への方向に完全な (即ち幅が1の) through band T_1 がとれることを意味する．

従って，λ^* に対応する帯 T_0, T_0^* を考えれば，このうち T_0 のに対しては，各交叉点の赤信号がそれに生ぜしめる縮小がすべての交叉点につき同じ側に (しかもある同じ大きさで) 起るか，または $T_1\equiv T_0$ であるか何れかなり．もし後者なら，右から左への方向にも through band がとれる (ちょうど T_0^* に一致するもの) こととなり仮定に反する．またもし前者なら，すべての交叉点において T_0^* に起る縮小は1より小で，しかも何れも T_0^* の同じ側に起ることが§2の結果を使ってわかる．従って右から左への方向の通過指数が正ということになり仮定に反す．故に何れの方向の通過指数も0ではない．

(2°)　ある α, λ^* に対してもし $Q_\alpha(S_{\alpha,\lambda^*,1/2,1/2})\geqq 1$ とする．しかる時は (1°) により，α と $S_{\alpha,\lambda^*,1/2,1/2}$ の下での制御では両方向共に through band がとれるから，それ等を T_1, T_1^* とする．また λ^* に対応する帯を T_0, T_0^* とする．今，更に，$T_1\subset T_0$, $T_2^*\subset T_0^*$ であるとする．しかる時は，任意の w_1, w_2 に対して

$$Q_\alpha(S_{\alpha,\lambda^*,w_1,w_2})=Q_\alpha(S_{\alpha,,\lambda^*,1/2,1/2})$$

である．$S'_{\alpha,\lambda^*,w_1,w_2}$ についても同様のことがいえる．

何となれば，§2の (2°) すぐ前に述べた交叉点 I_m, I_n をとる．しかる時は§2の (2°) より，α と $S_{\alpha,\lambda^*,w_1,w_2}$ の下での制御においてで，I_m の赤信号は T_0 の上の縮小の最大のものと T_0^* の下の縮小の最大のものを生ぜしめ，また I_n の赤信号は T_0 の下の縮小の最大のものと T_0^* の上の縮小の最大のものを生ぜしめる．

今，I_m の赤信号が T_0, T_0^* に生ぜしめる縮小を，

$S_{\alpha,\lambda^*,1/2,1/2}$ を用いる場合：　T_0 につき ε_u, T_0^* につき ε_l^*,

$S_{\alpha,\lambda^*,w_1,w_2}$ を用いる場合：　T_0 につき $\hat{\varepsilon}_u$, T_0^* につき $\hat{\varepsilon}_{l*}$,

とする．また I_n の赤信号が T_0, T_0^* に生ぜしめる縮小を

$S_{\alpha,\lambda^*,1/2,1/2}$ を用いる場合：　T_0 につき ε_l, T_0^* につき ε_u^*,

$S_{\alpha,\lambda^*,w_1,w_2}$ を用いる場合：　T_0 につき $\hat{\varepsilon}_l$, T_0^* につき $\hat{\varepsilon}_u^*$,

とする．しかる時は，

$S_{\alpha,\lambda^*,1/2,1/2}$ を用いる場合：

$$\text{左から右への方向の通過指数}=\max\{0, 1-(\varepsilon_u^*+\varepsilon_l)\}, \tag{34}$$

$$\text{右から左への方向の通過指数}=\max\{0, 1-(\varepsilon_u^*+\varepsilon_l^*)\}. \tag{35}$$

また，　$S_{\alpha,\lambda^*,w_1,w_2}$ を用いる場合：

$$左から右への方向の通過指数=\max\{0, 1-(\hat{\varepsilon}_u+\hat{\varepsilon}_l)\}, \tag{36}$$

$$右から左への方向の通過指数=\max\{0, 1-(\hat{\varepsilon}_u{}^*+\hat{\varepsilon}_l{}^*)\}, \tag{37}$$

である．

しかるに α と $S_{\alpha,\lambda^*,½,½}$ の下での制御では，両方向共に through band がとれるから，(34)>0，(35)>0 である．故に，$(34)=1-(\varepsilon_u+\varepsilon_l)$，$(35)=1-(\varepsilon_u{}^*+\varepsilon_l{}^*)$ となる．故に

$$Q_\alpha(S_{\alpha,\lambda^*,½,½})=2-(\varepsilon_u+\varepsilon_l+\varepsilon_u{}^*+\varepsilon_l{}^*). \tag{38}$$

仮定によればこれが $\geqq 1$ であるから，

$$\varepsilon_u+\varepsilon_l+\varepsilon_u{}^*+\varepsilon_l{}^*\leqq 1 \tag{39}$$

を得る．

しかるに §2 の結果（(3) または (23) と (24)）を使えば，

$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon_u+\varepsilon_l{}^*=\hat{\varepsilon}_u+\hat{\varepsilon}_l{}^*\\ \varepsilon_l+\varepsilon_u{}^*=\hat{\varepsilon}_l+\hat{\varepsilon}_u{}^*\end{array}\right\}$$

従って

$$\hat{\varepsilon}_u+\hat{\varepsilon}_l+\hat{\varepsilon}_u{}^*+\hat{\varepsilon}_l{}^*=\varepsilon_u+\varepsilon_l+\varepsilon_u{}^*+\varepsilon_l{}^* \tag{40}$$

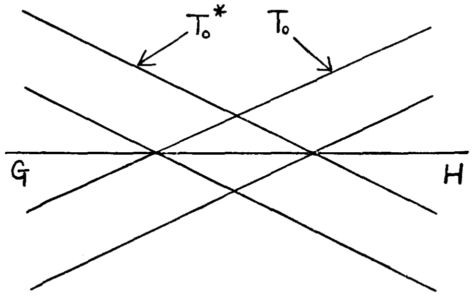
である．

(38) と (40) から，$\hat{\varepsilon}_u+\hat{\varepsilon}_l+\hat{\varepsilon}_u{}^*+\hat{\varepsilon}_l{}^*\leqq 1$ であり，従って $\hat{\varepsilon}_u+\hat{\varepsilon}_l\leqq 1$，$\hat{\varepsilon}_u{}^*+\hat{\varepsilon}_l{}^*\leqq 1$ が分る．故に (36) と (37) より，$(36)=1-(\hat{\varepsilon}_u+\hat{\varepsilon}_l)$，$(37)=1-(\hat{\varepsilon}_u{}^*+\hat{\varepsilon}_l{}^*)$ となる．故に

$$Q_\alpha(S_{\alpha,\lambda^*,w_1,w_2})=2-(\hat{\varepsilon}_u+\hat{\varepsilon}_l+\hat{\varepsilon}_u{}^*+\hat{\varepsilon}^*{}_l{}^*)$$

これは (38) と (40) より $Q_\alpha(S_{\alpha,\lambda^*,½,½})$ に等しい．よって証明が終った．

さて今，ある α, λ^* に対応する帯 $T_0, T_0{}^*$ を固定して考える時，第1図のように直線 GH をとる．この時，各交叉点において，そこでの信号の生起が GH に関して対称である如き offset の組 $\hat{S}$ のことを，**個別的に T_0-$T_0{}^*$ 対称な offset の組**と呼ぶことにする．またかかる $\hat{S}$ の全体を $\hat{\mathfrak{S}}_{\alpha,\lambda^*}$ で表わすことにする．$S_{\alpha,\lambda^*,½,½}$ は，α と共に用いる時は，明らかに個別的に T_0-$T_0{}^*$ 対称な offset の組の一つである．しかし逆に，α と共に用いる時に個別的に T_0-$T_0{}^*$ 対称な offset は $S_{\alpha,\lambda^*,½,½}$ だけでなく他にもある．このことに関連して，



第 1 図

(3°)　offset の組 $\hat{S}$ が $\hat{S}\in\hat{\mathfrak{S}}_{\alpha,\lambda^*}$ でかつ $Q_\alpha(\hat{S})\leqq 1$ であれば，$\hat{S}=S_{\alpha,\lambda^*,½,½}$ である．

何となれば，各交叉点において，そこでの offset を，信号の生起が第1図の GH に関して対称となる如くとるとり方はちょうど2通りしかない．その一つでは，その場合に T_0 あるいは $T_0{}^*$ に起る縮小が 1/2 を越えず，今一つではこれが 1/2 よりも大きい．この後者の型は，$Q_\alpha(\hat{S})\leqq 1$ なる如き個別的に T_0-$T_0{}^*$ 対称な offset の組 $\hat{S}$ には含まれ得ない．即ちかかる $\hat{S}$ に含まれている offset はすべて前者の型である．かかる $\hat{S}$ としては $S_{\alpha,\lambda^*,½,½}$ しかない．

(4°)　今 α と λ^* を固定する．それに対応する帯を $T_0, T_0{}^*$ とする．もしも offset の組 S_1 があって，α と S_1 の下での制御において何れの方向にも through band がとれ，かつそれ等を T_1, $T_1{}^*$ とする時

$$T_1\subset T_0, \qquad T_1{}^*\subset T_0{}^* \tag{41}$$

ならば，$\hat{\mathfrak{S}}_{\alpha,\lambda^*}$ に属する offset の組 $\hat{S}$ で，かつ次の条件を満足するものが存在する：

$$Q_\alpha(\hat{S})\geqq Q_\alpha(S_1). \tag{42}$$

かつ α と $\hat{S}$ の下での制御における through bands $\hat{T}, \hat{T}^*$ に対し，$\hat{T}\subset T_0, \hat{T}^*\subset T_0^*$ が成立する．

何となれば，先ず，α と S_1 の下での制御において，もしある交叉点に対し，そこでの赤信号が T_0, T_0^* に生ぜしめる縮小の位置が同じ側（即ち共に T_0 と T_0^* の上側，または共に T_0 と T_0^* の下側）に起る場合には，かかる交叉点での offset は適当に変更して，しかも新らしい offset の組による制御での通過指数が $Q_\alpha(S_1)$ よりも小さくはなく，また (41) が保持されるようにできる．故に初めから，α と S_1 の下での制御においては，各交叉点において T_0 と T_0^* の縮小が互いに逆の側に起るとしても一般性を失わない．

今 T_0 の上側，下側及び T_0^* の上側，下側それぞれの最大の縮小を与える交叉点を，それぞれ，I_i, I_j, I_k, I_l とし，これらの縮小の大きさを，それぞれ，$\varepsilon_u, \varepsilon_l, \varepsilon_u^*, \varepsilon_l^*$ とする．なおもしも T_0 の上側の縮小が実際にはない場合には，(41) からして，T_0 の上側にも下側にも全然縮小を生ぜしめない交叉点が少くも一つある．よってかかる場合には，それら一つを I_i に選び，$\varepsilon_u=0$ と考えればよい．I_j, I_k, I_l についても，場合により同様な考慮をしなくてはならない．

今任意の交叉点を考えた時，これが T_0 に上側の縮小を，従って T_0^* に下側の縮小を生ぜしめるものなら，それ等の値を α_u, α_l^* とする時，この交叉点の offset を $(\alpha_u-\alpha_l^*)/2$ だけ上の方にずらしたものを考える（但しこの値が負なら，下の方にずらす意味にとらなくてはならない）．同様に T_0 に下側の縮小を，従って T_0^* に上側の縮小を生ぜしめる任意の交叉点に対し，これ等の縮小の値がそれぞれ β_l, β_u^* なる時は，この交叉点の offset を $(\beta_l-\beta_u^*)/2$ だけ下の方にずらしたものを考える（この場合も符号をも考慮する）．なおまた $\alpha_u, \alpha_l^*, \beta_l, \beta_u^*$ は適宜 0 を意味することもある．

このようにしてすべての交叉点に対し，その offset を（必要なら）変更して得られる新たな offset の組を $\hat{S}$ とすれば，明らかに $\hat{S}\in\mathfrak{S}_{\alpha,\lambda^*}$ であり，かつ α と $\hat{S}$ の下での制御によって T_0 に生ずる上の縮小と T_0^* に生ずる下の縮小は，その大きさは $\max\{(\alpha_u+\alpha_l^*)/2\}$ である．

また α と $\hat{S}$ の下での制御により T_0 に生ずる下の縮小と T_0^* に生ずる上の縮小は，その大きさは $\max\{(\beta_l+\beta_u^*)/2\}$ である．（但し max は交叉点を動かした時それに関する最大の意味である）．

しかるに $\alpha_u\leqq\varepsilon_u$，$\alpha_l^*\leqq\varepsilon_l^*$，$\beta_l\leqq\varepsilon_l$，$\beta_u^*\leqq\varepsilon_u^*$ であるから，

$$\max\frac{\alpha_u+\alpha_l^*}{2}\leqq\frac{\varepsilon_u+\varepsilon_l^*}{2}, \tag{43}$$

$$\max\frac{\beta_l+\beta_u^*}{2}\leqq\frac{\varepsilon_l+\varepsilon_u^*}{2}. \tag{44}$$

しかるに仮定により，$\varepsilon_u+\varepsilon_l<1$，$\varepsilon_u^*+\varepsilon_l^*<1$ であるから

$$\varepsilon_u+\varepsilon_l+\varepsilon_u^*+\varepsilon_l^*<2 \tag{45}$$

である．故に (43)，(44)，(45) より

$$\max\frac{\alpha_u+\alpha_l^*}{2}+\max\frac{\beta_l+\beta_u^*}{2}<1.$$

故に

$$\begin{aligned}Q_\alpha(\hat{S})&=2\cdot\max\left[0, 1-\left\{\max\frac{\alpha_u+\alpha_l^*}{2}+\max\frac{\beta_l+\beta_u^*}{2}\right\}\right]\\&=2\left[1-\left\{\max\frac{\alpha_u+\alpha_l^*}{2}+\max\frac{\beta_l+\beta_u^*}{2}\right\}\right]\end{aligned} \tag{46}$$

である．(43)，(44)，(46) より，

$$\begin{aligned}Q_\alpha(\hat{S})&\geqq2\left[1-\left\{\frac{\varepsilon_u+3_l^*}{2}+\frac{\varepsilon_l+\varepsilon_u^*}{2}\right\}\right]\\&=\{1-(\varepsilon_u+\varepsilon_l)\}+\{1-(\varepsilon_u^*+\varepsilon_l^*)\}=Q_\alpha(S_1).\end{aligned}$$

即ち (42) を得た．

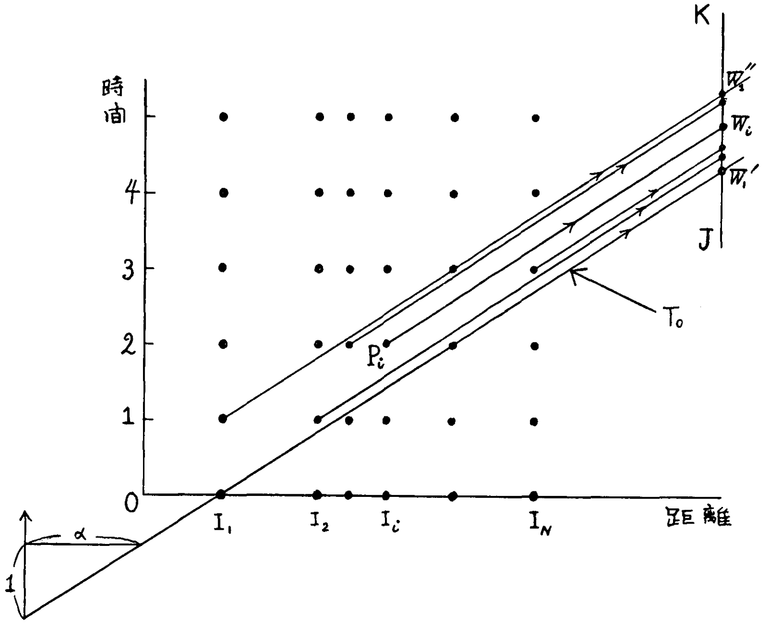
また仮定により $Q_\alpha(S_1)>0$ だから，$Q_\alpha(\hat{S})>0$ である．かつ $\hat{S}$ は T_0-T_0^* 対称．故に α と $\hat{S}$ の下での制御においては，両方向共に through band がとれる．それ等を $\hat{T},\hat{T}^*$ とする時，$\hat{T}\subset T_0$，$\hat{T}^*\subset T_0^*$ は明らかなり．

(5°)
$$\varphi_0(\alpha)=\max_{\hat{S}\in\hat{\mathfrak{S}}_{\alpha,\lambda_0^*}} Q_\alpha(\hat{S}) \tag{47}$$

とおき，また λ_0^* に対応する帯を T_0,T_0^* とする．

α を固定する時，この $\varphi_0(\alpha)$ は次の如く与えられる．即ち第2図の如く，各交叉点において，時間の軸の方向に，距離の軸から 1, 2, 3, ……だけ離れた点を次々にとる．しかしてこれ等の点のうちで T_0 に含まれるものの各々を，勾配 α の方向に図の JK 上に射影する．これ等の射影点の相隣るものの間の距離を考えれば，それ等の最大値の2倍が $\varphi_0(\alpha)$ である．また，$\varphi_0(\alpha)$ は α の連続函数である．

何となれば，I_i に対する上述の射影点を W_i で表わすことにする（場合によっては，I_i の射影点は二つあってそれぞれが W_1' と W_1'' に一致するが，この場合には W_1' と一致する方の射影点を W_i とする）．任意の $\hat{S}(\in\hat{\mathfrak{S}}_{\alpha,\lambda_0^*})$を考えると，$\hat{S}$ のうちの I_i の offset は，I_i に対応する所の上述の T_0 に含まれる点を P_i とする時，P_i から始まる長さ1の時間区間を青信号の時間とするか，または赤信号の時間とする如きものである．それに対応して今 $W_1'W_1''$ 上で，W_i から下の部分を除外するか，または W_i から上の部分を除外するか何れかにする．このようにして $W_1'W_1''$ の部分を次々に除外する時，後に残る区間の長さが $(1/2)Q_\alpha(\hat{S})$ である．即ちこれは，上述の射影点のうちのある相隣るものの間の距離である．従って $\varphi_0(\alpha)$ は，相隣る射影点の間の距離の最大値の2倍である．またこのことから，$\varphi_0(\alpha)$ が α の連続函数であることが知られる．



第　2　図

(6°) もし

$$\sup_{\alpha_1\leqq\alpha\leqq\alpha_2} Q_\alpha(S_{\alpha,\lambda_0^*,½,½})\geqq 1 \tag{48}$$

が成立てば，$Q_\alpha(S_{\alpha,\lambda_0^*,½,½})$ は $\alpha_1\leqq\alpha\leqq\alpha_2$ で最大値に達する．

何となれば $S_{\alpha,\lambda_0^*,½,½}\in\hat{\mathfrak{S}}_{\alpha,\lambda_0^*}$ であるから，任意の $\alpha(\alpha_1\leqq\alpha\leqq\alpha_2)$ に対して $\varphi_0(\alpha)\geqq Q_\alpha(S_{\alpha,\lambda_0^*,½,½})$

である．故に (48) より $\max_{\alpha_1\leqq\alpha\leqq\alpha_2}\varphi_0(\alpha)\geqq 1$. 今 (5°) によって $\varphi_0(\alpha_0)=\max_{\alpha_1\leqq\alpha\leqq\alpha_2}\varphi_0(\alpha)$ なる $\alpha_0(\alpha_1\leqq\alpha_0\leqq\alpha_2)$ があるからそれをとり，$\varphi_0(\alpha_0)=Q_{\alpha_0}(\hat{S}_0)$ なる $\hat{S}_0(\in\hat{\mathfrak{S}}_{\alpha_0,\lambda_0^*})$ をとれば，$Q_{\alpha_0}(\hat{S}_0)\geqq 1$. 故に (3°) より $\hat{S}_0=S_{\alpha_0,\lambda_0^*,1/2,1/2}$. 従って任意の $Q_\alpha(S_{\alpha,\lambda_0^*,1/2,1/2})$, $\alpha_1\leqq\alpha\leqq\alpha_2$ は $Q_{\alpha_0}(S_{\alpha_0,\lambda_0^*,1/2,1/2})$ を越えない．即ち $Q_\alpha(S_{\alpha,\lambda_0^*,1/2,1/2})$ は $\alpha=\alpha_0$ において最大値に達す．

(7°) もし

$$\sup_{\substack{S\in\mathfrak{S}\\ \alpha_1\leqq\alpha\leqq\alpha_2}} Q_\alpha(S)>1 \tag{49}$$

ななならば，$\max_{\substack{S\in\mathfrak{S}\\ \alpha_1\leqq\alpha\leqq\alpha_2}} Q_\alpha(S)$, $\max_{\alpha_1\leqq\alpha\leqq\alpha_2} Q_\alpha(S_{\alpha,\lambda_0^*,1/2,1/2})$, $\max_{\alpha_1\leqq\alpha\leqq\alpha_2} Q_\alpha(S_{\alpha,\lambda_0^*,w_1,w_2})$ はすべて存在して等しい．またこの場合，$Q_\alpha(S_{\alpha,\lambda_0^*,1/2,1/2})$ の最大値を与える α を α_0 とすれば

$$\max_{\substack{S\in\mathfrak{S}\\ \alpha_1\leqq\alpha\leqq\alpha_2}} Q_\alpha(S)=Q_{\alpha_0}(S_{\alpha_0,\lambda_0^*,1/2,1/2})=Q_{\alpha_0}(S_{\alpha_0,\lambda_0^*,w_2,w_2})$$

である．$S'_{\alpha,\lambda_0^*,w_1,w_2}$ についても同様のことが成立つ．

何となれば，(47) より，ある $\alpha(\alpha_1\leqq\alpha\leqq\alpha_2)$ と $S(\in\mathfrak{S})$ に対し $Q_\alpha(S)>1$ である．故に

$$E=\{\alpha;\ Q_\alpha(S)>1 \text{ なる } S \text{ あり}\}$$

と置けば，E に属する α がある．故に明らかに

$$\sup_{\substack{S\in\mathfrak{S}\\ \alpha_1\leqq\alpha\leqq\alpha_2}} Q_\alpha(S)=\sup_{\substack{\alpha\in E\\ S\in\mathfrak{S}}} Q_\alpha(S). \tag{50}$$

今 E の α を任意に固定した場合に，

$$\sup_{S\in\mathfrak{S}} Q_\alpha(S)=Q_\alpha(S_{\alpha,\lambda_0^*,1/2,1/2})=Q_\alpha(S_{\alpha,\lambda_0^*,w_1,w_2}) \tag{51}$$

である，ということがいえたとする．しかる時は (50)，(51) により，

$$\sup_{\substack{S\in\mathfrak{S}\\ \alpha_1\leqq\alpha\leqq\alpha_2}} Q_\alpha(S)=\sup_{\substack{S\in\mathfrak{S}\\ \alpha\in E}} Q_\alpha(S)\leqq\sup_{\alpha_1\leqq\alpha\leqq\alpha_2} Q_\alpha(S_{\alpha,\lambda_0^*,1/2,1/2})=\sup_{\alpha_1\leqq\alpha\leqq\alpha_2} Q_\alpha(S_{\alpha,\lambda_0^*,w_1,w_2})$$

故に

$$\sup_{\substack{S\in\mathfrak{S}\\ \alpha_1\leqq\alpha\leqq\alpha_2}} Q_\alpha(S)=\sup_{\alpha_1\leqq\alpha\leqq\alpha_2} Q(S_{\alpha,\lambda_0^*,1/2,1/2})=\sup_{\alpha_1\leqq\alpha\leqq\alpha_2} Q_\alpha(S_{\alpha,\lambda_0^*,w_1,w_2}). \tag{52}$$

故に仮定と (6°) とより，$\alpha_1\leqq\alpha_0\leqq\alpha_2$ なる α_0 があって，

$$\sup_{\alpha_1\leqq\alpha\leqq\alpha_2} Q_\alpha(S_{\alpha,\lambda_0^*,1/2,1/2})=\max_{\alpha_1\leqq\alpha\leqq\alpha_2} Q_\alpha(S_{\alpha,\lambda_0^*,1/2,1/2})=Q_{\alpha_0}(S_{\alpha_0,\lambda_0^*,1/2,1/2}). \tag{53}$$

従って $Q_\alpha(S)$ は $\alpha=\alpha_0$, $S=S_{\alpha_0,\lambda_0^*,1/2,1/2}$ において最大値に達する．

α_0 は明らかに E に属するから，(51)，(53)，(52) より，

$$Q_{\alpha_0}(S_{\alpha_0,\lambda^{0*},w_1,w_2})=Q_{\alpha_0}(S_{\alpha_0,\lambda_0^*,1/2,1/2})=\sup_{\substack{S\in\mathfrak{S}\\ \alpha_1\leqq\alpha\leqq\alpha_2}} Q_\alpha(S).$$

故に

$$\max_{\alpha_1\leqq\alpha\leqq\alpha_2} Q_\alpha(S_{\alpha,\lambda_0^*,w_1,w_2})=Q_{\alpha_0}(S_{\alpha_0,\lambda_0^*,w_1,w_2}).$$

よって (51) を証する，$E\ni\alpha$ を任意にとる．E の定義より，ある $S(\in\mathfrak{S})$ があって，$Q_\alpha(S)>1$ である．故に，

$$\sup_{S\in\mathfrak{S}} Q_\alpha(S)=\sup_{\substack{S\in\mathfrak{S}\\ Q_\alpha(S)>1}} Q_\alpha(S). \tag{54}$$

今 $Q_\alpha(S_1)>1$ なる任意 S_1 をとるに，α と S_1 の下での制御では，両方向共に through band がとれる．今それ等を T_1, T_1^* とする．λ_0^* の定義から明らかな如く，$T_1\subset T_0$, $T_1^*\subset T_0^*$ である．故に (4°) より，$\hat{\mathfrak{S}}_{\alpha,\lambda_0^*}$ に属する offset の組 $\hat{S}_1$ があって，$Q_\alpha(\hat{S}_1)\geqq Q_\alpha(S_1)>1$, かつ α と $\hat{S}_1$ の下での制御の through bands $\hat{T}_1, \hat{T}_1^*$ に対し

$$\hat{T}_1\subset T_0,\qquad \hat{T}_1^*\subset T_0^* \tag{55}$$

である．

故に (3°) により $\hat{S}_1=S_{\alpha,\lambda_0^*,½,½}$ である．従って結局，$Q_\alpha(S_1)>1$ なる任意 $S_1(\in\mathfrak{S})$ に対して

$$Q(S_{\alpha,\lambda_0^*,½,½})\geqq Q_\alpha(S_1)>1. \tag{56}$$

故に (54) と (56) より，

$$\sup_{S\in\mathfrak{S}} Q_\alpha(S)=Q_\alpha(S_{\alpha,\lambda_0^*,½,½}). \tag{57}$$

また (55)，(56) により (2°) が適用できて，

$$Q_\alpha(S_{\alpha,\lambda_0^*,w_1,w_2})=Q_\alpha(S_{\alpha,\lambda_0^*,½,½}) \tag{58}$$

を得る．(57) と (58) より (51) の成立が分る．

(8°) 任意の α に対して，左から右への方向の通過指数が 1 となるような offset の組 S_α が常にとれる．従って常に

$$\sup_{\substack{S\in\mathfrak{S}\\ \alpha_1\leqq\alpha\leqq\alpha_2}} Q_\alpha(S)\geqq 1$$

である．これは明らかである．

(9°) 任意の α,λ^* に対して，§2 の (2°) のすぐ前に述べた交叉点を I_m, I_n とする時，もし

$$\max\left\{1-\frac{1}{2w_1}, 1-\frac{1}{2w_2}\right\}\leqq\zeta_m, \zeta_n$$

でかつ $\zeta_m+\zeta_n\neq 2$ ならば，α と $S_{\alpha,\lambda^*,w_1,w_2}$ の下での制御においては，両方向の通過指数の比は w_1/w_2 に等しい．かつ $Q(S_{\alpha,\lambda^*,w_1,w_2})=Q_\alpha(S_{\alpha,\lambda^*,½,½})$ である．

何となれば，I_m, I_n の定義及び (23)，(24) により，α と $S_{\alpha,\lambda^*,w_1,w_2}$ の下での制御における左から右への方向の通過指数は $w_1\{2-(\zeta_m+\zeta_n)\}$，右から左への方向の通過指数は $w_2\{2-(\zeta_m+\zeta_n)\}$ である．しかも $\zeta_m+\zeta_n\neq 2$ であるから，これ等両者の比は w_1/w_2 である．また $Q_\alpha(\alpha,\lambda^*,w_1,w_2)=2-(\zeta_m+\zeta_n)=Q_\alpha(S_{\alpha,\lambda^*,w_1,w_2})$．

次に定理 1 を証する． ここでは $S_{\alpha,\lambda^*,w_1,w_2}$ の方についてのみ述べるが，$S'_{\alpha,\lambda^*,w_1,w_2}$ についても同様である．

先ず (28)=(30) とする．しかる時は，この仮定と (8°) とより，

$$\max_{\alpha_1\leqq\alpha\leqq\alpha_2}\left[\max_{0\leqq\lambda^*<2} Q_\alpha(S_{\alpha,\lambda^*,w_1,w_2})\right]\geqq 1.$$

故にある $\alpha'(\alpha_1\leqq\alpha'\leqq\alpha_2)$ と $\lambda^{*\prime}(0\leqq\lambda^{*\prime}<2)$ がとれて，

$$Q_{\alpha'}(S_{\alpha',\lambda^{*\prime},w_1,w_2})\geqq 1.$$

である．故に (1°) より，α' と $S_{\alpha',\lambda^{*\prime},w_1,w_2}$ の下での制御においては，両方向何れに対しても through band がとれる．それ等を T_1, T_1^* とするに，勿論 $T_1\subset T_0$, $T_1^*\subset T_0^*$ である．故に (4°) により $\hat{\mathfrak{S}}_{\alpha',\lambda_0^*}$ に属する $\hat{S}$ があって

$$Q_{\alpha'}(\hat{S})\geqq Q_\alpha(S_{\alpha',\lambda^*,w_1,w_2}).$$

故に $Q_{\alpha'}(\hat{S})\geqq 1$ であり，従って (3°) により，$\hat{S}=S_{\alpha',\lambda_0^*,½,½}$ である．故に (31) が得られる．

逆に (31) が成立つとする．この場合もし，

$$\sup_{\alpha_1\leqq\alpha\leqq\alpha_2} Q_\alpha(S_{\alpha,\lambda_0,½,½})>1$$

であれば，勿論 $\displaystyle\sup_{\substack{S\in\mathfrak{S}\\ \alpha_1\leqq\alpha\leqq\alpha_2}} Q_\alpha(S)>1$ であるから，この時は (7°) によって定理の結論がいえる．

一方もし

$$\sup_{\alpha_1\leqq\alpha\leqq\alpha_2} Q_\alpha(S_{\alpha,\lambda_0^*,½,½})=1 \tag{59}$$

の時は

$$\sup_{\substack{S\in\mathfrak{S}\\ \alpha_1\leqq\alpha\leqq\alpha_2}} Q_\alpha(S)\leqq 1 \tag{60}$$

でなくてはならない．

何となれば，もし (60) の左辺>1 ならば，(7°) によって (59) の左辺>1 となって矛盾であるから．

故に (8°) によって

$$\max_{\substack{S\in\mathfrak{S}\\ \alpha_1\leqq\alpha\leqq\alpha_2}} Q_\alpha(S)=1 \tag{61}$$

である．

一方 (59) により，(6°) が適用できて，$Q_\alpha(S_{\alpha,\lambda_0^*,1/2,1/2})$ は $\alpha_1\leqq\alpha\leqq\alpha_2$ で最大値に達する．今それが，$\alpha=\alpha_0$ の時であるとする．即ち

$$\max_{\alpha_1\leqq\alpha\leqq\alpha_2} Q_\alpha(S_{\alpha,\lambda_0^*,1/2,1/2})=Q_{\alpha_0}(S_{\alpha_0,\lambda_0^*,1/2,1/2})=1. \tag{62}$$

(61) と (62) より，直ちに (28)=(30) が得られる．また (62) から，(2°) が適用できて，

$$Q_{\alpha_0}(S_{\alpha_0,\lambda_0^*,w_1,w_2})=Q_{\alpha_0}(S_{\alpha_0,\lambda_0^*,1/2,1/2})$$

を得る．これを (61) 及び (62) と合わせれば (32) が得られる．

次に，[2] の方法によって (A) と (B)′ を同時に達成し得るための条件，及び，§2の方法によって (A) と (B) を同時に達成し得るための条件を与える．

[定理 2] [2] の方法によって，(A) と (B)′ を同時に達成し得るための必要かつ充分なる条件は，(31) で与えられる．この場合，α,λ^* の最もよい値としては，定理1に述べた α_0,λ_0^* をとればよい．

何となれば，必要性は定理1より明らかなり．逆に今 (31) が成立つとすれば，定理1に述べた α_0,λ_0^* をとれば，定理1により，α_0 と $S'_{\alpha_0,\lambda_0^*,w_1,w_2}$ の下での制御によって (A) を達成し得る．この場合更に (B)′ をも達成しうることが次の如く分る．

即ち，$Q_{\alpha_0}(S_{\alpha_0,\lambda_0^*,w_1,w_2})\geqq1$ だから，(1°) より，α_0 と $S_{\alpha_0,\lambda_0^*,w_1,w_2}$ の下での制御では，何れの方向の through bands もとれる．故に，今，§2の (2°) のすぐ前に述べた交叉点 I_m,I_n を考え，今の場合（即ち $\alpha=\alpha_0,\lambda^*=\lambda_0^*$ の場合）のそれ等を I_{m_0},I_{n_0} とすれば，左から右への方向の通過指数は $1-w_2(\zeta_{m_0}+\zeta_{n_0})$ (>0)，右から左への方向の通過指数は $1-w_1(\zeta_{m_0}+\zeta_{n_0})$ (>0) である．故に $\zeta_{m_0}=\zeta_{n_0}=0$ なら，両方向共にその通過指数は1であり，また $\zeta_{m_0}\neq0$ または $\zeta_{n_0}\neq0$ なら，

$$\text{各方向の通過指数をそれぞれ1から引いたものの比}=\frac{1-\{1-w_2(\zeta_{m_0}+\zeta_{n_0})\}}{1-\{1-w_1(\zeta_{m_0}+\zeta_{n_0})\}}=\frac{w_2}{w_1}$$

である．即ち (B)′ が成立つ．

(9°) に注意する時は，次の定理の成立つことが明らかである．

[定理 3] (31) が成立つとし，α_0,λ_0^* を，定理1に述べた最良の α,λ^* の値とする．§2の (2°) のすぐ前に述べた交叉点 I_m,I_n の，$\alpha=\alpha_0$, $\lambda^*=\lambda_0^*$ の場合のものを I_{m_0},I_{n_0} とする．この時もし

$$\max\left\{1-\frac{1}{2w_1},1-\frac{1}{2w_2}\right\}\leqq\zeta_{m_0},\zeta_{n_0} \tag{63}$$

ならば，α_0 と $S_{\alpha_0,\lambda_0^*,w_1,w_2}$ の下での制御によって，(A) と共に (B) をも達成することができる．

即ち (31) と共に (63) が成立つなら，§2の方法によって (A)，(B) を達成しうる．なお特に $w_1=w_2=1/2$ の場合は，(63) が必らず満足されるから，この定理に含まれる場合なること明らかなり．

§4. 前節に述べた条件の満足されぬ場合

前節に述べた条件が満足されない場合には，われわれの方法によって必らずしも optimum な制御を得られるとは限らない．かかる場合にはどうすればよいかということを本節では問題とする．そのために先ず，§2の方法で用いられる offset の組 $S_{\alpha,\lambda^*,w_1,w_2}$ を変形したものを定義しておく．

λ_0^* は前節に述べたような λ^* の値，T_0, T_0^* をそれに対応する帯とする．また α を $Q_\alpha(S_{\alpha,\lambda_0^*,½,½})>0$ をなる任意のものとし，更に $w_1>w_2$ とする．それに対し，$\bar{S}_{\alpha,\lambda_0^*,w_1,w_2}$ を次のように定義する．但し I_m, I_n を §2の (2°) のすぐ前に述べた交叉点としておく：先ず

$$1-\frac{1}{2w_1}\leqq\zeta_m,\zeta_n \tag{64}$$

ならば $\bar{S}_{\alpha,\lambda_0^*,w_1,w_2}=S_{\alpha,\lambda_0^*,w_1,w_2}$ と定む．次に

$$\min\{\zeta_m,\zeta_n\}<1-\frac{1}{2w_1}\leqq\frac{\zeta_m+\zeta_n}{2} \tag{65}$$

の場合:

α と $S_{\alpha,\lambda_0^*,½,½}$ の下での制御において，T_0 に対し上側の縮小を生ぜしめるような交叉点の組と，下側の縮小を生ぜしめるような交叉点の組を，それぞれ $I_{\nu_1}, I_{\nu_2}, \cdots, I_{\nu_r}=I_m$; $I_{\mu_1}, I_{\mu_2}, \cdots I_{\mu_s}=I_n$ とする．これ等以外の交叉点は，α と $S_{\alpha,\lambda_0^*,½,½}$ の下での制御において，T_0, T_0^* に縮小を全然生ぜしめないものである．

そこで (65) の場合における $\bar{S}_{\alpha,\lambda_0^*,w_1,w_2}$ を次のように定義する．即ち以下 $\zeta_m<\zeta_n$ の場合とするに，$I_{\nu_1}, I_{\nu_2}, \cdots, I_m$ のそれぞれに対する offset は，T_0 に対してこれ等の交叉点が縮小を全然生ぜしめないようにという条件で定める，また $\{I_{\mu_j}\}$ のうち

$$2-\frac{1}{w_1}-\zeta_m\leqq\zeta_{\mu_j} \tag{66}$$

を満足するような I_{μ_j} に対しては，この交叉点が T_0 に対して下側に大きさ

$$\left\{\frac{1}{2}-w_1(1-\zeta_{\mu_j})\right\}-\left\{w_1(1-\zeta_m)-\frac{1}{2}\right\}=1-w_1\{2-(\zeta_m+\zeta_{\mu_j})\} \tag{67}$$

の縮小を生ぜしめるようにという条件で定める．ここに (67) は (66) によって負ではないことに注意する．なお$I_{\mu_s}=I_n$ は，(65) より明らかに，(66) を満足する交叉点の一つである．

更に (66) を満足しない I_{μ_j} に対しては，その offset を，T_0 に対して縮小を全然生ぜしめないという条件で定める．

残りの交叉点の offset は，T_0 にも T_0^* にも縮小を全然生ぜしめないものをとる．

もし $\zeta_n<\zeta_m$ なら，$I_{\nu_1}, I_{\nu_2}, \cdots, I_m$ と $I_{\mu_1}, I_{\mu_2}, \cdots, I_n$ の役割を入れかえて同様にして定義する．

最後に

$$\frac{\zeta_m+\zeta_n}{2}<1-\frac{1}{2w_1} \tag{68}$$

であれば，$\bar{S}_{\alpha,\lambda_0^*,w_1,w_2}$ は，T_0 がちょうど左から右への方向に対する through band となるような offset の組のとり方と定める．

明らかに以上によって，$\bar{S}_{\alpha,\lambda_0^*,w_1,w_2}$ は何れの場合に対しても一意に定義される．この $\bar{S}_{\alpha,\lambda_0^*,w_1,w_2}$ については次のことがいえる（勿論 α は，$Q_\alpha(S_{\alpha,\lambda_0^*,w_1,w_2})>0$ なるものとする）．即ち：

α と $\bar{S}_{\alpha,\lambda_0^*,w_1,w_2}$ の下での制御においては (B) が成立ち，かつ

$$Q_\alpha(\bar{S}_{\alpha,\lambda_0^*,w_1,w_2})=Q_\alpha(S_{\alpha,\lambda_0^*,½,½}) \tag{69}$$

である．

何となれば，先づ (64) の場合は §3の (9°) によって明らかである．

次に (65) の場合を考える．例えば $\zeta_m<\zeta_n$ とする（$\zeta_m>\zeta_n$ の場合も同様である．なお $\zeta_m=\zeta_n$ なることはこの場合ないことは (65) より明らかである）．α と $\bar{S}_{\alpha,\lambda_0^*,w_1,w_2}$ の下での制御の結果は次のようになる．即ち，

(i) $I_{\nu_1}, I_{\nu_2}, \cdots, I_m$ においては;

T_0 には全然縮小が起らず，従って T_0^* には，これ等の交叉点においてそれぞれ，大きさが $\zeta_{\nu_1}, \zeta_{\nu_2}, \cdots, \zeta_m$ の縮小が下側に起る．

(ii) (66) を満足する I_{μ_j} においては;

T_0 にはその下側に大きさが $1-w_1\{2-(\zeta_m+\zeta_{\mu_j})\}$ の縮小が起る．その最大値は明らかに $\zeta_{\mu_j}=\zeta_n$ の場合で，その大きさは $1-w_1\{2-(\zeta_m+\zeta_n)\}$ である．また T_0^* にはその上側に大きさが $\zeta_{\mu_j}-[1-w_1\{2-(\zeta_m+\zeta_{\mu_j})\}]$ の縮小が起る．その最大値もまた $\zeta_{\mu_j}=\zeta_n$ の場合で，その値は

$$\zeta_n-[1-w_1\{2-(\zeta_m+\zeta_n)\}] \tag{70}$$

である．

(iii) (66) を満足しない I_{μ_j} においては;

T_0 には縮小が全然起らず，また T_0^* にはその上側に大きさが ζ_{μ_j} の縮小が起る．この ζ_{μ_j} に対しては

$$\zeta_{\mu_j}<(70) \tag{71}$$

である．

実際 (69) が成立たぬことより，$1-w_1\{2-(\zeta_m+\zeta_{\mu_j})\}<0$．故に $1-w_1\{2-(\zeta_m+\zeta_n)\}=1-w_1\{2-(\zeta_m+\zeta_{\mu_j})\}+w_1(\zeta_n-\zeta_{\mu_j})<w_1(\zeta_n-\zeta_{\mu_j})$．故に$(70)>\zeta_n-w_1(\zeta_n-\zeta_{\mu_j})=w_2\zeta_n+w_1\zeta_{\mu_j})\geqq w_2\zeta_{\mu_j}+w_1\zeta_{\mu_j}=\zeta_{\mu_j}$ となる．

(iv) その他の交叉点では;

定義により，T_0, T_0^* の何れにも全然縮小が生じない．

以上により (特に (71) に注意する時)，(65) の場合には，α と $\bar{S}_{\alpha,\lambda_0^*,w_1,w_2}$ の下での制御において，左から右への方向の通過指数は

$$1-[1-w_1\{2-(\zeta_m+\zeta_n)\}]=w_1\{2-(\zeta_m+\zeta_n)\}, \tag{72}$$

であり，また右から左への方向の通過指数は

$$\max[0,1-\{(70)+\zeta_m\}] \tag{73}$$

である．しかるに $1-\{(70)+\zeta_m\}=w_2\{2-(\zeta_m+\zeta_n)\}$ で，これは $\zeta_m<1$ により正である．故に

$$(73)=w_2\{2-(\zeta_m+\zeta_n)\}>0, \tag{74}$$

である．故に (72)，(74) より，両方向の通過指数の比は w_1/w_2 で，また $Q_\alpha(\bar{S}_{\alpha,\lambda_0^*,w_1,w_2})=2-(\zeta_m+\zeta_n)=Q_\alpha(S_{\alpha,\lambda_0^*,½,½})$，即ち (69) が成立つ．

最後に (68) の成立つ場合であれば，$Q_\alpha(S_{\alpha,\lambda_0^*,½,½})=2[1-\{(\zeta_m/2)+(\zeta_n/2)\}]>1/w_1=1+(w_2/w_1)$．故にこの場合の (B) は，左から右への方向の通過指数が 1 で，右から左への方向の通過指数が $Q_\alpha(S_{\alpha,\lambda_0^*,½,½})-1$ という条件である．

しかるに (68) の成立つ場合，$\bar{S}_{\alpha,\lambda_0^*,w_1,w_2}$ の定義によれば，α と $\bar{S}_{\alpha,\lambda_0^*,w_1,w_2}$ の下での制御では，左から右への方向の通過指数は 1 となり，また右から左への方向の通過指数は $\max\{0,1-(\zeta_m+\zeta_n)\}$ となる．これは (68) により $1-(\zeta_m+\zeta_n)$ に等しい．即ち $Q_\alpha(S_{\alpha,\lambda_0^*,½,½})-1$ に等しい．よって (B) が成立つ．また明らかに (69) が成立つ．

前節の条件が満足ちれない場合として，先ず，条件 (31) が成立っているが必らずしも (63) が満足されない場合を取上げる．なお $w_1=w_2=1/2$ の場合には，前節の終りに注意したように，(63) が必らず満足される．故に以下の議論ではこの場合は除外される．また $w_1<w_2$ の場合には，I_1 の代りに I_N を考え，また距離の座標軸の方向を逆にして考えればよいから，以下本節では $w_1>w_2$ とする．さて今迄に述べたところにより，次のことが明らかに成立つ．

［定理 4］ (31) が成立つとし，α_0,λ_0^* を定理1に述べた最良の α,λ^* の値とする時，α_0 と $\bar{S}_{\alpha_0,\lambda_0^*,w_1,w_2}$ の下での制御では (A)，(B) が共に成立する．

次に条件 (31) が必らずしも成立ぬ場合を考える．もし車の流れの2つの方向のうちの一方が，極度に車の来方が少ない場合には，もう一方の方向の通過指数を1とする制御をとれば充分であ

る．その場合，車の来方の極度に少ない方向の方はその通過指数が0となっても問題はない．

しかしもしも両方向共に車の来方が極度に少くはなければ，何れの方向の通過指数も0でないようにすることが先ず要求されるであろう．従って，α, S としては，その下での制御において，両方向共に through band がとれるようなもののみを考えねばならない．以下ではこの立場にあるとして考えを進める．

この場合には，条件 (A) の代わりに，次に述べる条件 (A)$'$ を考えねばならない．先ず $\mathfrak{S}_\alpha^{(t)}$ を，α の下で両方向共に through band のとれるような S の全体と定義する．条件 (A)$'$ は次のものである．

(A)$'$ $Q_\alpha(S)$ が，$\alpha_1 \leqq \alpha \leqq \alpha_2$，$S \in \mathfrak{S}_\alpha^{(t)}$ の範囲で最大となること．

この条件 (A)$'$ は常に達成することができる．即ち次のことがいえる．

［定理 5］ λ^{0*} は定理1に述べた λ^* の値とし，§3の (50) に述べた函数 $\varphi_0(\alpha)$ を考え，$\alpha_1 \leqq \alpha \leqq \alpha_2$ における $\varphi_0(\alpha)$ の最大値を与える α の値を $\hat{\alpha}_0$ とし，$\varphi_0(\hat{\alpha}_0) = Q_{\hat{\alpha}_0}(\hat{S}_0)$，$\hat{S}_0 \in \hat{\mathfrak{S}}_{\hat{\alpha}_0, \lambda_0^*}$ とすれば，

$$\max_{\alpha_1 \leqq \alpha \leqq \alpha_2} [\max_{S \in \mathfrak{S}_\alpha^{(t)}} Q_\alpha(S)] = Q_{\hat{\alpha}_0}(\hat{S}_0), \tag{75}$$

即ち $\hat{\alpha}_0$ と $\hat{S}_0$ の下での制御により条件 (A)$'$ を達成できる．なおもし (31) が成立たぬ場合なら，この最大値は1より小さい．

何となれば，$\alpha_1 \leqq \alpha \leqq \alpha_2$ なる α を任意に固定する時，$\mathfrak{S}_\alpha^{(t)}$ に属する任意の S をとれば，§3の (4°) により，$\hat{\mathfrak{S}}_{\alpha, \lambda_0^*}$ に属する offset の組 $\hat{S}_1$ があって $Q_\alpha(\hat{S}_1) \geqq Q_\alpha(S)$ である．また $\hat{\mathfrak{S}}_{\alpha, \lambda_0^*}$ に属して $\mathfrak{S}_\alpha^{(t)}$ に属さぬ $\hat{S}$ に対しては明らかに $Q_\alpha(\hat{S}) = 0$ である．故に

$$\max_{S \in \mathfrak{S}_\alpha^{(t)}} Q_\alpha(S) = \max_{S \in \hat{\mathfrak{S}}_{\alpha, \lambda_0^*}} Q_\alpha(\hat{S}) = \varphi_0(\alpha).$$

従って

$$\max_{\alpha_1 \leqq \alpha \leqq \alpha_2} [\max_{S \in \mathfrak{S}_\alpha^{(t)}} Q_\alpha(S)] = \varphi_0(\hat{\alpha}_0).$$

なおもしこの最大値 $\geqq 1$ なら，$\varphi_0(\hat{\alpha}_0) = Q_{\hat{\alpha}_0}(\hat{S}_0)$ なる，$\hat{\mathfrak{S}}_{\hat{\alpha}_0, \lambda_0^*}$ に属する offset の組 $\hat{S}_0$ を考えれば，$Q_{\hat{\alpha}_0}(\hat{S}_0) \geqq 1$．故に (3°) により $\hat{S}_0 = S_{\hat{\alpha}_0, \lambda_0^*, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$．従って (31) が成立つことになる．故に (31) が成立たぬ時は，上述の最大値は1より小さい．

上述の $\hat{S}_0$ を用いることによって条件 (A)$'$ は達成できるが，更に条件 (B) をも満足させるには，前と同じように，$\hat{S}_0$ の変形がやはり必要である．そのために次のようなものを考える．即ち今 $\varphi_0(\alpha) = Q_\alpha(\hat{S}_\alpha)$ なる $\hat{S}_\alpha (\in \hat{\mathfrak{S}}_{\alpha, \lambda_0^*})$ に対して，その次のような変形を定義する．なおここに $Q_\alpha(\hat{S}_\alpha) > 0$ なることに注意しておく．今 λ_0^* に対応する帯を T_0, T_0^* で表わすことにする．

α と $\hat{S}_\alpha$ の下での制御は個別的に T_0-T_0^* 対称であるから，この制御で T_0 の最大の上の（下の）縮小を生ずる交叉点は T_0^* の最大の下の（上の）縮小を生ずる．そこで T_0 の最大の上の縮小を生ずる交叉点を I_m，最大の下の縮小を生ずる交叉点を I_n とし，また I_m において T_0 ないし T_0^* に生ずる縮小を ε_m，I_n において T_0 ないし T_0^* に生ずる縮小を ε_n で表わすことにする．

この場合もし $\varepsilon_m < 1/2$，$\varepsilon_n < 1/2$ ならば，この時はちょうど

$$\hat{S}_\alpha = S_{\alpha, \lambda_0^*, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \tag{76}$$

であることに注意しておく．即ちこの場合，任意の交叉点 I_i における T_0 の縮小を ε_i とすれば $2\varepsilon_i = \zeta_i$ である．

今 $\hat{S}_\alpha$ に対して $\hat{S}_{\alpha, \lambda_0^*, w_1, w_2}$ を次の如く定義する．即ちもし $\varepsilon_m < 1/2, \varepsilon_n < 1/2$ ならば $\hat{S}_{\alpha, \lambda_0^*, w_1, w_2} = \bar{S}_{\alpha, \lambda_0^*, w_1, w_2}$ と定義する．また $\varepsilon_m < 1/2$，$\varepsilon_n < 1/2$ ではない場合には，$\varepsilon_m < 1/2$，$\varepsilon_n \geqq 1/2$ または $\varepsilon_m \geqq 1/2$，$\varepsilon_n < 1/2$ である（何となれば $Q_\alpha(\hat{S}_\alpha) > 0$ だから）．ここでは例えば前者の時を考える．この時は $\hat{S}_{\alpha, \lambda_0^*, w_1, w_2}$ を次に述べるように定義する．今 α と $\hat{S}_\alpha$ の下での制御において T_0 の上の縮小を生ぜしめる交叉点を $I_{\nu_1}, I_{\nu_2}, \cdots, I_{\nu_r} = I_m$，$T_0$ の下の縮小を生ぜしめる交叉点を $I_{\mu_1}, I_{\mu_2}, \cdots,$

$I_{\mu_s}=I_n$ とする.

$I_{\nu_1}, I_{\nu_2}, \cdots, I_m$ に対してはそれぞれの offset を，これ等の交叉点の各々において，T_0 に縮小が全然起らないようにという条件で定義する.

また $I_{\mu_1}, I_{\mu_2}, \cdots, I_n$ のうち

$$(w_1-w_2)(1-\varepsilon_n)-2w_1\varepsilon_m \leqq \varepsilon_{\mu_j} \tag{77}$$

を満足する I_{μ_j} に対しては，この交叉点が T_0 に対して下側に大きさ

$$\varepsilon_{\mu_j}-\{(w_1-w_2)(1-\varepsilon_n)-2w_1\varepsilon_m\} \tag{78}$$

の縮小を生ぜしめるようにという条件で定める. $I_{\mu_s}=I_n$ は (77) を満足する交叉点の一つである. 何となれば，$\varepsilon_n-\{(w_1-w_2)(1-\varepsilon_n)-2w_1\varepsilon_m\}=2w_1(\varepsilon_m+\varepsilon_n)-(w_1-w_2)\geqq w_1-(w_1-w_2)=w_2>0$ であるから.

(77) を満足しない I_{μ_j} に対しては，この交叉点が T_0 に対して縮小を全く生ぜしめないという条件で定める.

残りの交叉点 (少くも一つある. 例えば I_1 がそれ) に対しては，そこでは T_0, T_0^* の何れにも縮小が全然生じないようにという条件で定める.

もし $\varepsilon_m\geqq 1/2$, $\varepsilon_n<1/2$ なら，$I_{\nu_1}, I_{\nu_2}, \cdots, I_m$ と $I_{\mu_1}, I_{\mu_2}, \cdots, I_n$ の役割を入れかえて同様にして定義する.

このような変形により，(A)$'$ と共に (B) をも成立たしめ得ることになる. 即ち

[定理 6] $\lambda_0^*, \hat{\alpha}_0, \hat{S}_0$ は定理5に述べたと同じものとする. しかして $\hat{S}_0$ に対して上述の変形，即ち $\hat{S}_{\hat{\alpha}_0,\lambda_0^*,w_1,w_2}$ を考える. しかる時は次のことがいえる: $\hat{\alpha}_0$ と $\hat{S}_{\hat{\alpha}_0,\lambda_0^*,w_1,w_2}$ の下での制御によって，(A)$'$ と共に (B) をも達成し得る.

何となれば，上述の変形の定義において述べた I_m, I_n をこの場合 I_{m_0}, I_{n_0} とするに，もし $\varepsilon_{m_0}<1/2$, $\varepsilon_{n_0}<1/2$ ならば，定義によって $Q_{\hat{\alpha}_0}(\hat{S}_{\hat{\alpha}_0,\lambda_0^*,w_1,w_2})=Q_{\hat{\alpha}_0}(\bar{S}_{\hat{\alpha}_0,\lambda_0^*,w_1,w_2})$ である. また (76) と (69) から $Q_{\hat{\alpha}_0}(\hat{S}_0)=Q_{\hat{\alpha}_0}(\bar{S}_{\hat{\alpha}_0,\lambda_0^*,w_1,w_2})$ である. 故に $\varepsilon_{m_0}<1/2, \varepsilon_{n_0}<1/2$ の場合には $Q_{\hat{\alpha}_0}(\hat{S}_{\hat{\alpha}_0,\lambda_0^*,w_1,w_2})=Q_{\hat{\alpha}_0}(\hat{S}_0)$ となり，$\hat{\alpha}_0$ と $\hat{S}_{\alpha_0,\lambda_0^*,w_1,w_2}$ の下での制得では (A)$'$ が成立つことが分る. また $\hat{\alpha}_0$ と $\bar{S}_{\hat{\alpha}_0,\lambda_0^*,w_1,w_2}$ の下での制御では (B) が成立つから，今の場合 $\hat{\alpha}_0$ と $\hat{S}_{\hat{\alpha}_0,\lambda_0^*,w_1,w_2}$ の下での制御でも (B) が成立つ.

次に $\varepsilon_{m_0}<1/2$, $\varepsilon_{n_0}\geqq 1/2$ の場合とする.

(i) $I_{\nu_1}, I_{\nu_2}, \cdots, I_{m_0}$ においては;

T_0 には全然縮小が起らず，T_0^* にはそれぞれ大きさが $2\varepsilon_{\nu_1}, 2\varepsilon_{\nu_2}, \cdots, 2\varepsilon_{m_0}$ の縮小が下側に起る.

(ii) (77) を満足する I_{μ_j} においては;

T_0 にはその下側に大きさが $\varepsilon_{\mu_j}-\{(w_1-w_2)(1-\varepsilon_{n_0})-2w_1\varepsilon_{m_0}\}$ の縮小が起る. その最大値は明らかに $\varepsilon_{\mu_j}=\varepsilon_{n_0}$ の場合で，その大きさは

$$\varepsilon_{n_0}-\{(w_1-w_2)(1-\varepsilon_{n_0})-2w_1\varepsilon_{m_0}\}=2w_1(\varepsilon_{m_0}+\varepsilon_{n_0})-(w_1-w_2) \tag{79}$$

である.

また T_0^* には，$0\leqq\varepsilon_{\mu_j}+\{(w_1-w_2)(1-\varepsilon_{n_0})-2w_1\varepsilon_{m_0}\}$ なる I_{μ_j} では，上側に大きさが $\varepsilon_{\mu_j}+\{w_1-w_2)(1-\varepsilon_{n_0})-2w_1\varepsilon_{m_0}\}$ の縮小が生じ，その最大値は

$$\varepsilon_{n_0}+\{(w_1-w_2)(1-\varepsilon_{n_0})-2w_1\varepsilon_{m_0}\}=(w_1-w_2)+2w_2\varepsilon_{n_0}-2w_1\varepsilon_{m_0} \tag{80}$$

であり，また $\varepsilon_{\mu_j}+\{(w_1-w_2)(1-\varepsilon_{n_0})-2w_1\varepsilon_{m_0}\}<0$ なる I_{μ_j} では，下側に大きさが $-\varepsilon_{\mu_j}-\{(w_1-w_2)(1-\varepsilon_{n_0})-2w_1\varepsilon_{m_0}\}$ の縮小が生じる. なお

$$-\varepsilon_{\mu_j}-\{(w_1-w_2)(1-\varepsilon_{n_0})-2w_1\varepsilon_{m_0}\}<2\varepsilon_{m_0} \tag{81}$$

なること明らかなり.

(iii) (77) を満足しない I_{μ_j} においては；

T_0 には縮小が全然起らず，$T_0{}^*$ にはその上側に大きさが $2\varepsilon_{\mu_j}$ の縮小が起る．

(iv) その他の交叉点では，$T_0, T_0{}^*$ の何れにも全然縮小が起らない．

以上により，T_0 には上の縮小はなく，また T_0 の最大の下側の縮小は (79) で与えられる．また $T_0{}^*$ の最大の上側の縮小は，(77) を満足しないような I_{μ_j} に対する $2\varepsilon_{\mu_j}$ と (80) のうちの最大のものである．しかるに (80) と (77) を満足しないような $2\varepsilon_{\mu_j}$ を比較するに，前者が後者よりも大きい．

実際，$(w_1-w_2)(1-\varepsilon_{n_0})-2w_1\varepsilon_{m_0}>\varepsilon_{\mu_j}$ ならば，$(w_1-w_2)+2w_2\varepsilon_{n_0}-2w_1\varepsilon_{m_0}>(w_1-w_2)-(1-2w_2)\varepsilon_{n_0}-2w_1\varepsilon_{m_0}+\varepsilon_{\mu_j}=(w_1-w_2)-(w_1-w_2)\varepsilon_{n_0}-2w_1{}^3{}_{m_0}+\varepsilon_{\mu_j}>2\varepsilon_{\mu_j}$ である．

故に $T_0{}^*$ の最大の上側の縮小は (80) で与えられることが分る．また $T_0{}^*$ の最大の下側の縮小はというに，(81) に注意する時，これは $2\varepsilon_{m_0}$ であることが分る．更に，少くも一つの交叉点，例えば I_1 においては，$T_0, T_0{}^*$ の何れにも縮小が全然起らぬ offset がとられる．

よって $\varepsilon_{m_0}<1/2$, $\varepsilon_{n_0}\geqq 1/2$ の場合，$\hat{\alpha}_0$ と $\hat{S}_{\hat{\alpha}_0,\lambda_0^*,w_1,w_2}$ の下での制御において，左から右への方向の通過指数は

$$1-\{2w_1(\varepsilon_{m_0}+\varepsilon_{n_0})-(w_1-w_2)\}=2w_1\{1-(\varepsilon_{m_0}+\varepsilon_{n_0})\} \tag{82}$$

であり，また右から左への方向の通過指数は

$$\max[0, 1-\{(80)+2\varepsilon_{m_0}\}] \tag{83}$$

である．しかるに $1-\{(80)+2\varepsilon_{m_0})\}=2w_2\{1-(\varepsilon_{m_0}+\varepsilon_{n_0})\}$ で，これは $Q_{\hat{\alpha}_0}(\hat{S_0})>0$ によって正である．故に

$$(83)=2w_2\{1-(\varepsilon_{m_0}+\varepsilon_{n_0})\}>0. \tag{84}$$

(82) と (84) により，両方向の通過指数の比が w_1/w_2 なることが分る．またこの場合

$$Q_{\hat{\alpha}_0}(\hat{S}_{\hat{\alpha}_0,\lambda_0^*,w_1,w_2})=2\{1-(\varepsilon_{m_0}+\varepsilon_{n_0})\}=Q_{\hat{\alpha}_0}(\hat{S_0}).$$

即ち $\hat{\alpha}_0$ と $\hat{S}_{\hat{\alpha}_0,\lambda_0^*,w_1,w_2}$ の下での制御では，この場合にも (A)′, (B) が共に成立つ．

定理 6 から，定理 3 に対応する次のことが分る．

［定理 7］ $\lambda_0{}^*, \hat{\alpha}_0$ を定理 5 で述べたと同じものとする．また §2 の (2°) のすぐ前に述べた交叉点 I_m, I_n をこの場合 I_{m_0}, I_{n_0} とする．この時もし

$$\max\left\{1-\frac{1}{2w_1}, 1-\frac{1}{2w_2}\right\}\leqq\zeta_{m_0}, \zeta_{n_0}$$

ならば，$\hat{\alpha}_0$ と $\hat{S}_{\hat{\alpha}_0,\lambda_0^*,w_1,w_2}$ の下における制御によって，(A)′ と (B) を共に達成できる．

定理 6 に述べたように，条件 (31) が成立たぬ時でも，(A)′ と (B) を共に成立たしめるような offset の組を求めることができるが，この場合この offset の組を求める手順はかなり面倒なものとなる．実用上からいえば，どんなにうまくしても通過指数が 1 よりずっと小さいものしか得られないような場合には，各方向の通過指数に車の来方に応じた均衡を与えても余り役に立たぬであろう．このような場合には，$w_1=w_2=1/2$ の場合と同じに offset の組を定める方が実際的である．これならば定理 5 の $\hat{\alpha}_0$ を求めるところ迄の手順ですむわけである．

§5. 制御決定の実際

本節では，§2 に述べた個別的に optimum な系統式制御のために，指定時速と信号の offset の組を求める実際のやり方について述べる．

§2 に述べたやり方では，λ^* の値を動かして一番良いものを選ぶという考え方をしているわけであるが，§3, §4 の議論によれば，λ^* の値の一番よいものとしてはいつでも定理 1 に述べた $\lambda_0{}^*$ をとればよい．

更に α の値を動かして一番良いものを選ぶわけであるが，§3, §4 に述べたところによれば，

この決定を行なうに当っては $w_1=w_2=1/2$ として，この場合に最も良い α の値 α_0 を求めればよい．

以上のことに注意する時，個別的に optimum な系統式制御においては，α の値 α_0 を求めるには次のようにすればよいことが分る．

先ず座標系の原点を交叉点 I_1 にとる．α を任意に固定する．しかる時は，$\lambda^*=\lambda_0^*$，$w_1=w_2=1/2$ の場合には，座標 x の交叉点において optimum な信号では，T_0 に起る上の縮小及び下の縮小の大きさをそれぞれ u_α, l_α とすれば，

$$u_\alpha=\begin{cases} x_\alpha-[x_\alpha], & \text{但し}\ x_\alpha-[x_\alpha]\leqq 1/2\ \text{の場合}, \\ \ \ 0 \quad , & \text{但し}\ x_\alpha-[x_\alpha]>1/2\ \text{の場合}, \end{cases} \tag{85}$$

$$l_\alpha=\begin{cases} \ \ 0 \quad , & \text{但し}\ x_\alpha-[x_\alpha]\leqq 1/2\ \text{の場合}, \\ 1-(x_\alpha-[x_\alpha]), & \text{但し}\ x_\alpha-[x_\alpha]>1/2\ \text{の場合}, \end{cases} \tag{86}$$

である．但し $x_\alpha=x/\alpha$ とする（なお $T_0{}^*$ に起る上の縮小は l_α，下の縮小は u_α である）．

何となれば，$w_1=w_2=1/2$ の場合には，個別的に optimum な系統式制御では，任意交叉点の offset は，I_1 の offset に等しいか．またはそれより1だけ大きい．しかるに $\lambda^*=\lambda_0^*$ であるから，個別的に optimum な系統式制御での I_1 の offset は0である．故に任意交叉点の offset は0か1となる．従って u_α, l_α は上述のようでなければならない．

そこで今各交叉点の座標を $x^{(1)}=0, x^{(2)}, \cdots, x^{(N)}$ とし，それから $x_\alpha{}^{(i)}=x^{(i)}/\alpha$，$i=1,2,\cdots,N$ を作る．しかしてこれらから，各 I_i に対する u_α, l_α を作る．それを今 $u_\alpha{}^{(i)}, l_\alpha{}^{(i)}$ とあらわす $(i=1,2,\cdots,N)$．

次に

$$h(\alpha)=\max_{1\leqq i\leqq N} u_\alpha{}^{(i)}+\max_{1\leqq i\leqq N} l_\alpha{}^{(i)}$$

なる $h(\alpha)$ を求める．今 α を動かして，この $h(\alpha)$ が与えられた α の範囲 $\alpha_1\leqq\alpha\leqq\alpha_2$ において最小となるような α の値 α_0 を求める．この α_0 が所求の α の値である．

$S_{\alpha_0,\lambda_0^*,w_1,w_2}$ を求めるには次のようにすればよい．今 $S_{\alpha_0,\lambda_0^*,w_1,w_2}$ のあらわす offset を $y_1, y_2, \cdots, y_N$ とする．これ等の任意の一つ y_i は次のように求められる．

先ず (85)，(86) によって $u_{\alpha_0}{}^{(i)}, l_{\alpha_0}{}^{(i)}$ を求める．これらの少くも一方は0である．そこで

$$\zeta_{\alpha_0}{}^{(i)}=2(u_{\alpha_0}{}^{(i)}+l_{\alpha_0}{}^{(i)})$$

とおく．しかる時 y_i は次のようにして定められる．

（I） $\max\{w_1(1-\zeta_{\alpha_0}{}^{(i)}),\ w_2(1-\zeta_{\alpha_0}{}^{(i)})\}>1/2$ の場合：

この場合には，

(i) $u_{\alpha_0}{}^{(i)}>0$ または，$u_{\alpha_0}{}^{(i)}=l_{\alpha_0}{}^{(i)}=0$ ならば，y_i は $x_{\alpha_0}{}^{(i)}-w_2\zeta_{\alpha_0}{}^{(i)}$ を2で割って整数商を求める場合の剰余である．

(ii) $l_{\alpha_0}{}^{(i)}>0$ ならば，y_i は，$x_{\alpha_0}{}^{(i)}+w_2\zeta_{\alpha_0}{}^{(i)}$ を2で割って整数商を求める場合の剰余である．

(II) $\max\{w_1(1-\zeta_{\alpha_0}{}^{(i)}), w_2(1-\zeta_{\alpha_0}{}^{(i)})\}\leqq 1/2$ の場合：

この場合には，

(i) $u_{\alpha_0}{}^{(i)}>0$ または $u_{\alpha_0}{}^{(i)}=l_{\alpha_0}{}^{(i)}=0$ ならば，y_i は $x_{\alpha_0}{}^{(i)}-1/2+w_1(1-\zeta_{\alpha_0}{}^{(i)})$ を2で割って整数商を求める場合の剰余である．

(ii) $l_{\alpha_0}{}^{(i)}>0$ ならば，y_i は $x_{\alpha_0}{}^{(i)}+1/2-w_1(1-\zeta_{\alpha_0}{}^{(i)})$ を2で割って整数商を求める場合の剰余である．

なお offset y_i の下に，交叉点 I_i において T_0 に起る上及び下の縮小の大きさをそれぞれ U_i，L_i，また $T_0{}^*$ に起る上及び下の縮小の大きさをそれぞれ $U_i{}^*, L_i{}^*$ とすれば，これらはそれぞれ次のようになる：

$$\text{(I) の (i) の場合：}\begin{cases} U_i\ =w_2\zeta_{\alpha_0}{}^{(i)}, & L_i\ =0, \\ U_i{}^*=0, & L_i{}^*=w_1\zeta_{\alpha_0}{}^{(i)}. \end{cases}$$

$$\text{(I) の (ii) の場合：}\begin{cases} U_i\ =0, & L_i\ =w_2\zeta_{\alpha_0}{}^{(i)}, \\ U_i{}^*=w_1\zeta_{\alpha_0}{}^{(i)}, & L_i{}^*=0. \end{cases}$$

$$\text{(II) の (i) の場合：}\begin{cases} U_i\ =1/2-w_1(1-\zeta_{\alpha_0}{}^{(i)}), & L_i\ =0, \\ U_i{}^*=0, & L_i{}^*=1/2-w_2(1-\zeta_{\alpha_0}{}^{(i)}). \end{cases}$$

$$\text{(II) の (ii) の場合：}\begin{cases} U_i\ =0, & L_i\ =1/2-w_1(1-\zeta_{\alpha_0}{}^{(i)}), \\ U_i{}^*=1/2-w_2(1-\zeta_{\alpha_0}{}^{(i)}), & L_i{}^*=0. \end{cases}$$

今，$\max_{1\leqq i\leqq N} u_{\alpha_0}{}^{(i)}$ を与える交叉点を I_m，$\max_{1\leqq i\leqq N} l_{\alpha_0}{}^{(i)}$ を与える交叉点を I_n とする．しかる時は，左から右への方向の通過指数は $1-(U_m+L_n)$，また右から左への方向の通過指数は $1-(U_n{}^*+L_m{}^*)$ で与えられる．従って全体の通過指数 $Q_{\alpha_0}(S_{\alpha_0,\lambda_0^*,w_1,w_2})$ は $2-(U_m+U_n{}^*+L_m{}^*+L_n)$ である．

この場合もし

$$h(\alpha_0)\leqq\frac{1}{2} \tag{87}$$

であれば，

$$Q_{\alpha_0}(S_{\alpha_0,\lambda_0^*,w_1,w_2})=2-(U_m+U_n{}^*+L_m{}^*+L_n)=2\{1-h(\alpha_0)\}$$

であり，これは w_1, w_2 に関しない．

一方 (87) が成立たぬ場合には，個別的に optimum な系統式制御では，通過指数の大きさに関して必らずしも最も良い結果は得られない．この場合には α の最も良い値は上述の α_0 でなく，§4 に述べた α の値 $\hat{\alpha}_0$ を求めなくてはならない．ここでこの求め方を述べておく．先ず α を固定した時，

$$c_\alpha{}^{(i)}=1-(x_\alpha{}^{(i)}-[x_\alpha{}^{(i)}]),\qquad i=1,2,\cdots,N,$$

を求め，また $c_\alpha{}^{(N+1)}=0$ とおく．しかして，$c_\alpha{}^{(1)}=1, c_\alpha{}^{(2)},\cdots,c_\alpha{}^{(N)}, c_\alpha{}^{(N+1)}=0$ を大きさの順に並べた後，相隣るもの同志につき，大きい方から小さい方を引いて得られるものを考える．それらの最大値を $g(\alpha)$ とする．そこで α を色々に動かして，$g(\alpha)$ が，与えられた α の範囲 $\alpha_1\leqq\alpha\leqq\alpha_2$ において最大となるような α の値 $\hat{\alpha}_0$ を求めれば，この $\hat{\alpha}_0$ が所求の α の値である．

(87) が成立たぬ場合には，§4 の終りに注意したように，through bands は，両方向の通過指数が等しいようなものを考える方が実際的である．この場合には，各交叉点の offset は次のようにして与えればよい．即ち，先ず I_1 の offset は 0 とする．また $g(\hat{\alpha}_0)=c_{\hat{\alpha}_0}{}^{(m)}-c_{\hat{\alpha}_0}{}^{(n)}$ なる I_m, I_n を考え，これ等に関して交叉点全体を次のように 2 群に分ける．即ち $c_{\hat{\alpha}_0}{}^{(\nu_i)}\geqq c_{\hat{\alpha}_0}{}^{(m)}$ なる交叉点の全体 $I_{\nu_1}, I_{\nu_2},\cdots,I_{\nu_r}$ と，$c_{\hat{\alpha}_0}{}^{(\mu_j)}\leqq c_{\hat{\alpha}_0}{}^{(n)}$ なる交叉点全体 $I_{\mu_1}, I_{\mu_2},\cdots,I_{\mu_s}$ の 2 群である．但しこれ等のうちから I_1 除外する．

そこで上の第 1 群に属する任意交叉点 I_i に対しては，$[x_i]$ が偶数なるか奇数なるかに従って I_i の offset y_i を $y_i=0$ または 1 と定め，第 2 群に属する任意交叉点 I_j に対しては，$[x_j]$ が偶数なるか奇数なるかに従ってその offset y_j を $y_j=1$ または 0 と定める．このようにして定まる offset の組 $\hat{S}_0$ が所求のものである．

なおこの場合の通過指数は，$Q_{\hat{\alpha}_0}(\hat{S}_0)=2h(\hat{\alpha}_0)$ で与えられる．

最後に [2] の §4 と同じ例について，本節に従って offset の組を求めてみると第 1 表の通りである．第 2 表にはこの場合の通過指数を示してある．この例では αの最も良い値は $\alpha=0.33$ で，その場合の通過指数は 1.333 であり，1 より大きい．故に定理 1 から，第 1 表の offset の組の下に得られる through bands は，最大の通過指数を与える．即ち §3 に述べた条件 (A) を成立たしめる．

第1表　本節の方法で求めた optimum な offset の組の例

交叉点 / 車の来方の頻度の比	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7
3 : 2	0	1.08	1.94	0.94	1.99	0.94	0.01
2 : 1	0	1.04	1.89	0.89	1.98	0.90	0.02

第 2 表　上例における通過指数

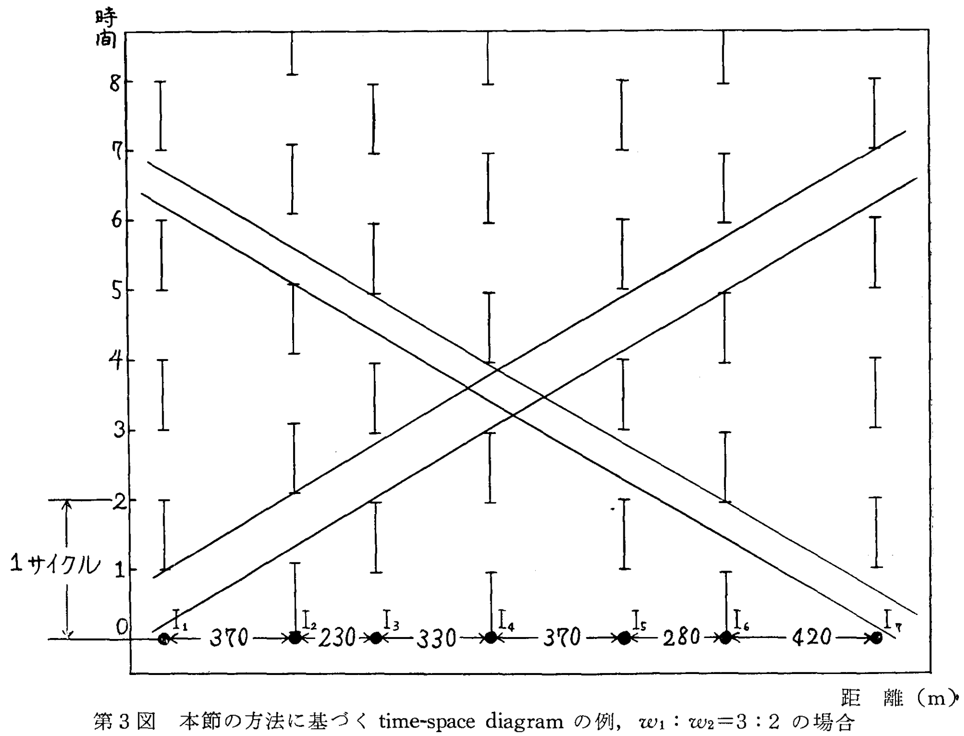
通過指数 / 車の来方の頻度の比	左→右	左←右	計
3 : 2	0.800	0.533	1.333
2 : 1	0.803	0.530	1.333

第3表　上例の $w_1:w_2=2:1$ の場合に対する補正された offset の組

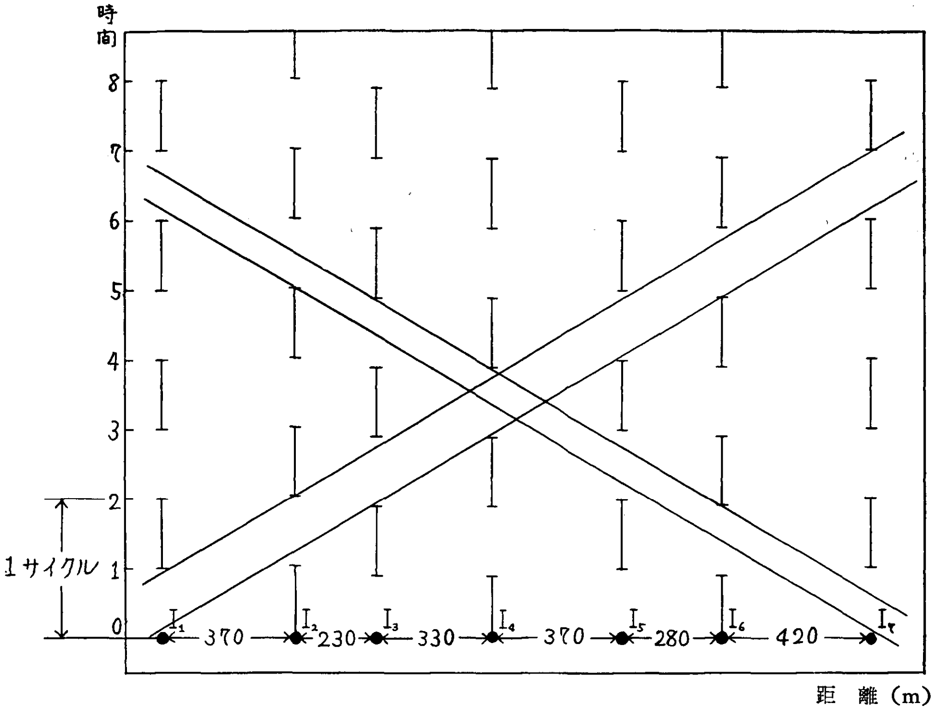
交叉点 / 車の来方の頻度の比	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7
2 : 1	0	1.12	1.89	0.89	1.94	0.90	0.06

$w_1:w_2$ が 3:2 の場合には，定理3の条件 (63) が満足され，各方向の通過指数の比は正確に 3:2 となっている (即ち条件 (B) も達成されている)．[2] の方法ではこの比が約 11:9 であった．

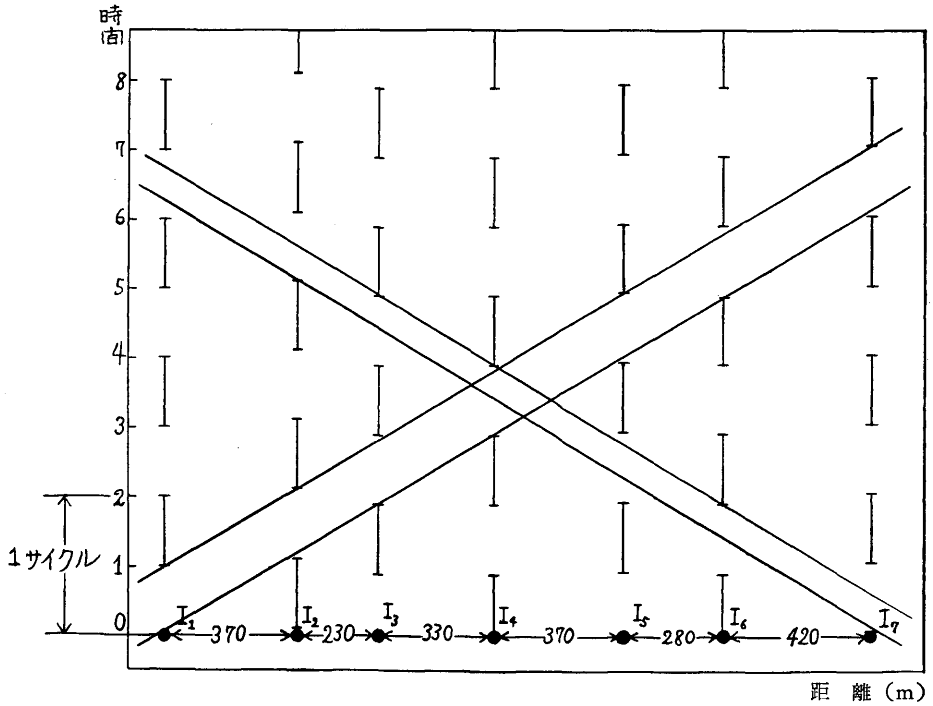
$w_1:w_2$ が 2:1 の場合には，定理8 の条件 (63) が満足されず，各方向の通過指数の比は約 3:2 となり (即ち (B) は成立たぬ)，[2] の方法の場合と結果はあまり違わない．しかしこの比が少しではあるが，2:1 の方に近くなった．なおこれは (65) が成立つ場合であって，§4 に従って第3表のように補正された offset の組を用いれば (B) が達成できる．



第3図　本節の方法に基づく time-space diagram の例，$w_1:w_2=3:2$ の場合



第4図　本節の方法に基づく time-space diagram の例, $w_1 : w_2 = 2 : 1$ の場合



第5図　第3表に対応する time-space diagram

なお，第1，第2，第3表の offset 組を用いた場合に得られる time-space diagram を第3，4，5図に掲げておく．

統計数理研究所

参考文献

[1] J. H. Kell, "Coordination of fixed-time traffic signals", August 1956, University of California, Institute of Transportation and Traffic Engineering.

[2] 植松俊夫・柚崎淑子，"交通制御の問題の統計数理的解析 (I)"，統計数理研究所彙報 9 巻 1 号 (1962).