# 吸収間隔の漸近的独立性とその近似分布について

（“視覚の閾値光量子数に関する Bouman-Velden-山本の関係式について”への補足）

池　田　貞　雄

(1962 年 1 月受付)

# On Asymptotic Independence of Time-intervals Between the Successive Occurences of Absorptions and Their Approximate Distribution

(A complementary remark to the paper: On an equality by Bouman, Velden and Yamamoto relating to the threshold number of quanta in human vision.)

By
Sadao IKEDA

In the preceding paper cited above the present author has proved mathematically that the probabilty, $W_k(\mu, t)$, of visibility of human eye in some biological experimentation, is approximately evaluated in the limit $(t\rightarrow\infty)_k$, (i. e., $t\rightarrow\infty$ and $\mu^k t\rightarrow$ positive constant.), by

$$W_k(\mu, t)\sim 1-e^{-\frac{\mu^k t}{(k-1)!}}$$

assuming that the threshold value is $k(\geqq 2)$ and the life time of absorbed light-quantum is always constant, which is taken as the unit of an underlying scale of the time.

In doing that, some ambiguous assumptions have been imposed on the asymptotic independence of time-intervals between the time-points at which the absorptions of light-quanta occured, and on its approximate distribution.

From the view-point of the approximation of a probability measure which is scattering, according to some limiting process, with enlarging domain on which it is distributed, the usual definition of mutual independence of component random variables will be of no use. We shall introduce a concept of main domain of asymptotic distribution, on which nearly total mass of the probability measure is distributed and define the asymptotic independence of the component variables on some main domain of asymptotic distribution of these random variables. According to these definitions, we shall investigate the asymptotic independence and an approximate distribution of the time-intervals between the successive occurences of absorptions, and basing upon these invstigations we confirm the validity of the procedure developed in the

proof of the preceding paper.

Only one argument should be admitted to be incomplete, although it is inessential for our final conclusion.

Dept. of Math., College of Sci. and Eng., Nihon Univ.

## §1. 序 論

標記の前論文で取扱った問題は，或る実験条件下で，視覚の閾値光量子数を $k(\geqq 2)$ と仮定したとき，光覚を生ずる確率 $W_k(\mu, t)$ について近似式

$$(1.1)\qquad W_k(\mu, t) \sim 1-e^{-\frac{\mu^k t}{(k-1)!}}, \quad (t\to\infty)_k$$

を導くことにあった．此処で吸収光量子の energy に一定の life time $\tau$ を仮定し，これを時間の単位にとり，$\mu$ は単位時間当りの平均吸収個数，$t$ は刺戟時間である．

$\mu, t$ を固定すると，吸収個数 $S$ の分布は平均 $\mu t$ の Poisson 分布

$$(1.2)\qquad p_t(s) \equiv P_t\{S=s\} = e^{-\mu t}\frac{(\mu t)^s}{s\,!}, \quad (s=0, 1, 2, \cdots\cdots)$$

で与えられ，又，$S=s$ を固定すると，吸収間隔 $U_{s1}, U_{s2}, \cdots, U_{ss}$ の条件附分布は，$(u_1, u_2, \cdots, u_s)$ での確率要素

$$(1.3)\qquad p_t(u_1, u_2, \cdots u_s/s)du_1du_2\cdots du_s = \frac{s!}{t^s}du_1du_2\cdots du_s, (u_i>0, \sum_{i=1}^{s} u_i<t)$$

によって与えられることも，前論文で既に見た通りである．

前論文では (1.1) 式を導くのに次の様な考えに依った．即ち，曖昧な表現であるが，$(t\to\infty)_k$ に対して

(a) $S=s$ を充分大きく固定した時，$U_{s1}, U_{s2}, \cdots, U_{ss}$ は漸近的に相互に独立に分布し，各 $U_{si}$ は同一の指数分布

$$(1.4)\qquad f(u)du = \mu e^{-\mu u}du, \quad (0<u<\infty)$$

に従っていると見做してよい．

(b) $U_{si}$ は $s$ を充分大きくとれば，$s$ の値如何に関係せず，同一の分布 (1.4) に従うと見做してよい．

これらの事柄は漠然とではあっても一般的に認められている事柄のようであるが，或る事象の確率の漸近的な近似評価を問題にする場合には，尚精密に検当する必要があろう．

この種の問題は，確率測度の“拡散”に関して起って来る問題で，特にその近似評価という点からいくつかの実用上の問題を提起してように思われる．この論文では，然し，以上の諸問題を一般的に論ずることは避けて，前論文に関係する範囲で問題を取扱い，上述の (a), (b) が如何なる意味で成立するのか，又，前論文の証明にどの点で影響するかを明らかにしたい．

検当の結果は，前論文は一個所，非本質的な誤りを含んでいる事が判明したが，結論の正当性には影響しない．

## §2. 漸近的主分布域

一般に拡散する確率測度の取扱いには，basic space の変換（通常は，location, scale の変換，例えば標準化など）が有用であろうが，その方法は未考察であり，此処では，拡散して行く測定とその分布領域を直接の対称として，漸近的主分布域 (main domain of asymptotic distribution) の考え方を述べてみたい．

前論文の第3節で，Poisson 分布 (1.2) の分布域について次のことが示された．即ち任意の $\delta>0$ に対して

(2.1) $$P_t\{\mu^{1+\delta}t<S<\mu^{1-\delta}t\}\to 1,\quad (t\to\infty)_k$$

この証明の途中から容易に判るように

(2.2) $$1-P_t\{\mu^{1+\delta}t<S<\mu^{1-\delta}t\}\leqq 0(\mu^\delta),\quad (t\to\infty)_k$$

が成立っている．以下本論文を通じて $0(\mu^\delta)$ は $\mu^\delta$ と同位若しくはそれより高位の無限小を表わすものとする．さて，今

(2.3) $$M(S;\mu^\delta)\equiv\{s|\mu^{1+\delta}t<s<\mu^{1-\delta}t\}$$

と定義すると，これは (2.2)：$|1-P_t(M(S;\mu^\delta)|\leqq 0(\mu^\delta)$ を満し $S$ の分布の order $\mu^\delta$ の漸近的主分布域と呼んでよかろう．

同じような領域を $U_{si}$ について考えてみよう．$S=s$ のとき，$U_{si}$ の条件附分布は (1.3) から容易に求まり

(2.4) $$p_t(u_i/s)=\frac{s}{t}\left(1-\frac{u_i}{t}\right)^{s-1},\quad (0<u_i<t)$$

なる pdf. をもつ．

先づ，本論文の随所で使う不等式を述べておく．

Lemma 1　$x>0$ を十小分さい値とすれば (1°), (2°) が成立つ．

(1°)　$1-x<e^{-x}<1-x+\dfrac{x^2}{2}$

(2°)　$e<e^{1+\frac{x}{2}}<(1-x)^{-\frac{1}{x}}<e^{1+\frac{x}{2(1-x)}}$

(Proof) 容易であるから省く．

所で，(2.4) から容易に

$$P_t\{U_{si}<\eta/S=s\}=\int_0^\eta\frac{s}{t}\left(1-\frac{u}{t}\right)^{s-1}du=1-\left(1-\frac{\eta}{t}\right)^s$$

が得られるが，今 $s\in M(S;\mu^\delta)$ のすべてに対して，$1-\left(1-\dfrac{\eta}{t}\right)^s\to 1(t\to\infty)_k$ が成立つような $\eta$ の値を求めて見よう．これについて次の結果が得られる．

Lemma 2

$\eta=1/\mu^{1+2\delta}$ ならば，$s\in M(S;\mu^\delta)$ に対して一様に次の式が成立つ．但し $0<\delta<1/2$.

(2.5) $$1-P_t\{U_{si}<\frac{1}{\mu^{1+2\delta}}|S=s\}\leqq 0(\mu^\delta)$$

(Proof)

$$1-P_t\{U_{si}<\frac{1}{\mu^{1+2\delta}}|S=s\}=\left(1-\frac{1}{\mu^{1+2\delta}t}\right)^s$$

であるが，$s\in M(S;\mu^\delta)$ では

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{\mu^{1+2\delta}t}\right)^s&\leqq\left(1-\frac{1}{\mu^{1+2\delta}t}\right)^{\mu^{1+\delta}t}\\&=\left(1-\frac{1}{\mu^{1+2\delta}t}\right)^{-\mu^{1+2\delta}t(-\mu^{-\delta})}\\&\left(\leqq e^{\left(1+\frac{1}{2\mu^{1+2\delta}t}\right)(-\mu^{-\delta})},\quad\text{Lemma 1. (2°)}\right)\\&\leqq e^{-\mu^{-\delta}}=0(\mu^{N\delta}),\quad(N=1,2,\cdots<\infty)\end{aligned}$$

従って特に最も粗い取り方で $N=1$ としても (2.5) が成立つ．

この証明から判るように，$\eta=1/\mu^{1+2\delta}$ ととらなくても，(2.5) の成立つ $\eta$ は他に色々のとり方が考えられるが，吾々の目的には，この Lemma の結果でよいと考えられるので他のものは考えない．

これから，$0<\delta<1/2$ のとき，$U_{si}$ の order $\mu^{\delta}$（又は $e^{-\mu^{-\delta}}$）の漸近的主分布域は，$s\in M(S;\mu^{\delta})$ に対して

$$M(U_{si}/S;\mu^{\delta})\equiv\left\{u/0<u<\frac{1}{\mu^{1+2\delta}}\right\} \tag{2.6}$$

で与えられることがわかる．ここで，左辺（ ）内の $U_{si}/S$ は，条件附分布に対しては常に用いるが，$S$ の order $\mu^{\delta}$ の漸近的主分布域 $M(S;\mu^{\delta})$ に属する $s$ についてのみ考えることを意味する．

## §3. 漸近的独立性

本節では漸近的独立性というものを，確率測度の近似という視点から，どのような条件で与えたらよいか，又 $U_{s1},U_{s2},\cdots,U_{ss}$ の漸近的独立性はそのような観点からすればどの程度まで成立っているかを考えてみよう．

通常，確率変数相互間の独立性を，確率密度函数によって定義する場合には，各々の周辺分布の pdf. の積と同時分布の pdf. が一致するという条件を用いる．この意味からすれば，漸近的独立性の定義も，同時分布の pdf. が漸近的に周辺分布の pdf. の積に，point-wise に，或は uniformly に収束するという条件によればよいであろう．然し，今吾々の問題にしている様な，拡散してゆく確率分布に対しては，この様な定義では取扱えない．

そこで，この通常の定義を強めて，probability ratio の一様収束性によって定義すれば，これは確率の近似という問題に有効であろう．

$U_{s1},U_{s2},\cdots,U_{ss}$ のうち，任意 $n$ 個 $U_{s1},U_{s2},\cdots,U_{sn}$（このようにしても，一般性は失われない）の漸近的独立性の定義を与えてみよう．ここで，$n$ は $t$ には dep. してよいが，$s$ には indep. であるとする．$U_{si}$ の周辺分布の pdf. は (2.4) で与えられ，$i$ には無関係で，固定された $s$ の値にのみ依存する．

Def. 1 $U_{s1},U_{s2},\cdots,U_{sn}$ の同時分布を $p_t(u_1,u_2,\cdots u_n/s)$，各 $U_{si}$ の周辺分布を $p_t(u_i/s)$ と夫々 pdf. で与えたとき，$S$ の或る漸近的主分布域，及びそれに対する $U_{s1},U_{s2},\cdots,U_{sn}$ の漸近的主分布域の上で一様に

$$\left|1-\frac{P_t(u_1,u_2,\cdots,u_n/s)}{\prod_{i=1}^{n}p_t(u_i/s)}\right|\leqq\varphi(t),\ \varphi(t)\to0(t\to\infty)_k \tag{3.1}$$

が成立つとき，$\{U_{s1},U_{s2},\cdots,U_{sn}\}$ は漸近的独立性をもつ系であるという．

Def. 2 $U_{s1},U_{s2},\cdots,U_{sn}$ の同時分布の pdf. $p_t(u_1,u_2,\cdots,u_n/s)$ に対して，ある確率変数の pdf. の列 $f_t(u_1/s),f_t(u_2/s),\cdots,f_t(u_n/s)$ が存在して，上の定義と同じような所で一様に

$$\left|1-\frac{p_t(u_1,u_s,\cdots,u_n/s)}{\prod_{i=1}^{n}f_t(u_i/s)}\right|\leqq\psi(t),\ \psi(t)\to0(t\to\infty)_k \tag{3.2}$$

が成立つならば，$\{U_{s1},U_{s2},\cdots,U_{sn}\}$ は，近似的に漸近的独立性をもつ系であるという．

これらの定義で，もし $n$ が $t$ に dep. してとられたものであれば，$U_{s1},\cdots,U_{sn}$ の個数が，$t$ と共に動くわけである．従って，$t$ を充分大きく固定したときは，それに対応する $\{U_{s1},U_{s2},\cdots,U_{sn}\}$ の漸近的な独立性を問題としているわけである．

以上の定義に従って，$U_{s1},U_{s2},\cdots,U_{sn}$ の漸近的独立性を検当してみよう．先づ次の結果が得られる．

Lemma 3 $0<\delta<1/7$, $1\leqq n\leqq\mu^{k-\delta}t$ なる任意の $\delta,n$ に対して，$s\in M(s;\mu^{\delta})$ 及び $0<u_i<1/\mu^{1+2\delta}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ について一様に

$$\left|\frac{p_t(u_1,u_2,\cdots,u_n/s)}{f_t(u_1,u_2,\cdots,u_n/s)}-1\right|\leqq0(\mu^{1-7\delta}),\ \ (t\to\infty)_k \tag{3.3}$$

が成立つ. 但し，$k \geqq 2$ で又

$$(3.4)\qquad \begin{cases} f_t(u_1, u_2, \cdots, u_n/s) = \prod_{i=1}^{n} f_t(u_i/s), & (0<u_i<\infty, i=1, 2, \cdots n) \\ f_t(u_i/s) = \frac{s}{t} e^{-\frac{s}{t}u_i} & (i=1, 2, \cdots, n) \end{cases}$$

である.

(Proof) (1.3), (3.4) から容易に

$$(3.5)\qquad \begin{aligned} \frac{p_t(u_1, u_2, \cdots, u_n/s)}{f_t(u_1, u_2, \cdots, u_n/s)} &= \frac{\frac{s(s-1)\cdots(s-n+1)}{t^n}\left(1-\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{n} u_i\right)^{s-n}}{\left(\frac{s}{t}\right)^n e^{-\frac{s}{t}\sum_{i=1}^{n} u_i}} \\ &= \frac{s(s-1)\cdots(s-n+1)}{s^n}\left(\frac{1-v_n}{e^{-v_n}}\right)^s \cdot \frac{1}{(1-v_n)^n}, \quad \left(v_n = \frac{1}{t}\sum_{i=1}^{n} u_i\right) \end{aligned}$$

が得られる. この右辺の第1の factor は

$$(3.6)\qquad 1 \geqq \frac{s(s-1)(s-2)\cdots(s-n+1)}{s^n} \geqq \left(1-\frac{n}{s}\right)^n = \left(1-\frac{n}{s}\right)^{-\frac{s}{n}\left(-\frac{n^2}{s}\right)}$$

ここで，Lemma 1 の結果を用いると

$$\left(1-\frac{n}{s}\right)^{-\frac{s}{n}\left(-\frac{n^2}{s}\right)} \geqq e^{-\frac{n^2}{s}} \geqq 1-\frac{n^2}{s}$$

$s \in M(S;\mu^\delta)$ であれば，$s \geqq \mu^{1+\delta}t$ であり，仮定から$n \leqq \mu^{k-\delta}t$ であるから

$$(3.7)\qquad 1-\frac{n^2}{s} \geqq 1-\frac{(\mu^{k-\delta}t)^2}{\mu^{1+\delta}t} = 1-\mu^{2k-1-3\delta}t = 1-(\mu^k t)\mu^{k-1-3\delta}$$

従って (3.6) より

$$(3.8)\qquad \left|1-\frac{s(s-1)\cdots(s-n+1)}{s^n}\right| \leqq 0(\mu^{k-1-3\delta}), \quad (t\to\infty)_k$$

が得られる.

次に (3.5) の右辺の第 2 factor は Lemma 1 から

$$(3.9)\qquad 1 \geqq \left(\frac{1-v_n}{e^{-v_n}}\right)^s \geqq \left(\frac{1-v_n}{1-v_n+\frac{v_n^2}{2}}\right)^s = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{2}\frac{v_n^2}{1-v_n}}\right)^s$$

ここで Lemma 1 より

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\frac{1}{2}\frac{v_n^2}{1-v_n}} &\geqq \left(1-\frac{1}{2}\frac{v_n^2}{1-v_n}\right)^s = \left(1-\frac{1}{2}\frac{v_n^2}{1-v_n}\right)^{-\frac{2(1-v_n)}{v_n^2}\left(-\frac{sv_n^2}{2(1-v_n)}\right)} \\ &\geqq e^{-\frac{sv_n^2}{2(1-v_n)}} \geqq 1-\frac{sv_n^2}{2(1-v_n)} \end{aligned}$$

$s \leqq \mu^{1-\delta}t$, 又，仮定から $v_n \leqq \frac{n}{\mu^{1+2\delta}t} \leqq \frac{\mu^{k-\delta}t}{\mu^{1+2\delta}t} = \mu^{k-1-3\delta}$ であるから

$$\frac{sv_n^2}{2(1-v_n)} \leqq \frac{\mu^{1-\delta}t\cdot(\mu^{k-1-3\delta})^2}{2(1-\mu^{k-1-3\delta})} = \frac{\mu^k t\cdot\mu^{k-1-7\delta}}{2(1-\mu^{k-1-3\delta})} = 0(\mu^{k-1-7\delta})$$

従って，(3.9) より

$$(3.10)\qquad \left|1-\left(\frac{1-v_n}{e^{-v_n}}\right)^s\right| \leqq 0(\mu^{k-1-7\delta}), \quad (t\to\infty)_k$$

を得る.

(3.5) の右辺第 3 factor は次のように評価される. Lemma 1 より

$$1 \leqq \frac{1}{(1-v_n)^n} = \frac{1}{(1-v_n)^{-\frac{1}{v_n}(-nv_n)}} \leqq \frac{1}{\left[e^{1+\frac{v_n}{2(1-v_n)}}\right]^{-nv_n}}$$
$$= \frac{1}{e^{-\left(1+\frac{v_n}{2(1-v_n)}\right)nv_n}}$$
$$\leqq \frac{1}{1-\left(1+\frac{v_n}{2(1-v_n)}\right)nv_n}$$

$nv_n \leqq (\mu^{k+\delta}t)^2/\mu^{1+2\delta}t = 0(\mu^{2k-1-4\delta}t) \to 0 (t\to\infty)_k$ から

$$\frac{1}{1-\left(1+\frac{v_n}{2(1-v_n)}\right)nv_n} \leqq 1+2\left(1+\frac{v_n}{2(1-v_n)}\right)nv_n$$
$$\leqq 1+4\,nv_n = 1+0(\mu^{k-1-4\delta})$$

従って

$$\left|1-\frac{1}{(1-v_n)^n}\right| \leqq 0(\mu^{k-1-4\delta}),\quad (t\to\infty)_k \tag{3.11}$$

以上 (3.8), (3.10), (3.11) より (3.5) の左辺は

$$\left|1-\frac{p_t(u_1, u_2, \cdots, u_n/s)}{f_t(u_1, u_2, \cdots, u_n/s)}\right| \leqq 0(\mu^{k-1-7\delta}) \tag{3.12}$$

$k \geqq 2$ に対しては, 従って, $\delta > 1/7$ なら, $k-1-7\delta \leqq 1-7\delta$ であって, (3.12) より, Lemma の結果 (3.3) を得る.

この Lemma は, 実は $\{U_{s1}, U_{s2}, \cdots, U_{sn}\}$ が近似的に漸近的独立性を有する system であることを示している. それをみるには, $M(U_{s1}, \cdots, U_{sn}/S) \equiv \{(u_1, u_2, \cdots, u_n)/0<u_i<1/\mu^{1+2\delta}, (i=1, 2, \cdots, n)\}$ が $U_{s1}, U_{s2}, \cdots U_{sn}$ のある order の漸近的主分布域になることを示せばよい. 次の Lemma は次の節の方法を示すもので, 確率の近似を行うに当って, 本論文で常用する手段である.

Lemma 4　前の Lemma の条件の下で

$$1-P_t(M(U_{s1}, U_{s2}, \cdots, U_{sn}/S)/s) \leqq 0(\mu^{1-7\delta}) \tag{3.13}$$

が成立つ.

(Proof) 今, 簡単の為に $M=M(U_{s1}, \cdots, U_{sn}/S)$ とおく. すると

$$\begin{aligned} P_t(M/s) &= \iint_M\cdots\int p_t(u_1, u_2, \cdots, u_n/s)du_1du_2du_n \\ &= \iint_M\cdots\int \frac{p_t(u_1u_2, \cdots, u_n/s)}{f_t(u_1u_2, \cdots, u_n/s)}\cdot f_t(u_1u_2, \cdots, u_n/s)du_1du_2du_n \end{aligned} \tag{3.14}$$

$(u_1\cdots u_n)\in M$ であれば, Lemma 3 より, $k \geqq 2$ に対して

$$\left|1-\frac{p_t(u_1u_2\cdots u_n/s)}{f_t(u_1u_2\cdots u_n/s)}\right| \leqq 0(\mu^{1-7\delta}), (t\to\infty)_k$$

が成立ったから, (3.14) の右辺は

$$\left|\iint_M\cdots\int\frac{p_t(u_1u_2\cdots u_n/s)}{f_t(u_1u_2\cdots u_n/s)}f_t(u_1u_2\cdots u_n/s)du_1du_2\cdots du_n - \iint_M\cdots\int f_t(u_1u_2\cdots u_n/s)\,du_1du_2\cdots du_n\right|$$
$$\leqq 0(\mu^{1-7\delta})$$

となり, 従って, (3.14) から

$$\left|P_t(M/s) - \iint_M\cdots\int f_t(u_1u_2\cdots u_n/s)du_1du_2\cdots du_n\right| \leqq 0(\mu^{1-7\delta}) \tag{3.15}$$

が得られる．此処で (3.4) から

$$\iint_M\cdots\int f_t(u_1u_2\cdots u_n/s)du_1du_2\cdots du_n=\left(\int_0^{1/\mu^{1+2\delta}}\frac{s}{t}e^{-\frac{s}{t}u}\,du\right)^n$$

(3.16)
$$=\left(1-\int_{1/\mu^{1+2\delta}t}^{\infty}\frac{s}{t}e^{-\frac{s}{t}u}\,du\right)^n$$

$$=\left(1-e^{-\frac{s}{t}\cdot\frac{1}{\mu^{1+2\delta}}}\right)^n$$

Lemma 1 を用いて

$$1\geqq\left(1-e^{-\frac{s}{\mu^{1+2\delta}t}}\right)^n=\left(1-e^{-\frac{s}{\mu^{1+2\delta}t}}\right)^{-e^{\frac{\mu^{1+2\delta}t}{s}}\left(-ne^{-\frac{s}{\mu^{1+2\delta}t}}\right)}$$

$$\geqq e^{\left(1+\frac{\rho}{2(1-\rho)}\right)(-n\rho)}\qquad\left(\rho\equiv e^{-\frac{s}{\mu^{1+2\delta}t}}\right)$$

$$\geqq 1-n\rho\left(1+\frac{\rho}{2(1-\rho)}\right)$$

$s\in M(S;\mu^\delta)$ については

$$\frac{s}{\mu^{1+2\delta t}}\geqq\frac{\mu^{1+\delta t}}{\mu^{1+2\delta t}}=\frac{1}{\mu^\delta}$$

であるから，$\rho/2(1-\rho)\leqq 1$ としてよく

$$1-n\rho\left(1+\frac{\rho}{2(1-\rho)}\right)\geqq 1-2n\rho$$

此処で，任意の正数 $N$ について

$$n\rho=ne^{-\frac{s}{\mu^{1+2\delta}t}}\leqq ne^{-\frac{1}{\mu^\delta}}\leqq\mu^{k-\delta}te^{-\frac{1}{\mu^\delta}}$$

$$=\mu^{k-\delta}t\cdot\mu^{N\delta}\cdot\left(\frac{1}{\mu^\delta}\right)^N e^{-\frac{1}{\mu^\delta}}$$

$t$ が充分大きいとすれば，$\left(\frac{1}{\mu^\delta}\right)^N e^{-\frac{1}{\mu^\delta}}\leqq 1$ と見てよいから

$$\leqq\mu^k t\cdot\mu^{(N-1)\delta}$$

従って，(3.16) から

(3.17)
$$\left|\iint_M\cdots\int f_t(u_1u_2\cdots u_n/s)du_1du_2\cdots du_n-1\right|\leqq 0(\mu^{(N-1)\delta})$$

(3.17), (3.15) から

(3.18)
$$|P_t(M/s)-1|\leqq 0(\mu^{1-7\delta})$$

即ち，Lemma を得る．

さて，次に $\{U_{s1}, U_{s2}, \cdots, U_{sn}\}$ の漸近的独立性（近似的でない）を示してみよう．それには，次の Lemma を示せば充分であろう．

Lemma 5　Lemma 3 の条件の下で

(3.19)
$$\left|\frac{f_t(u_1, u_2, \cdots, u_n/s)}{\prod_{i=1}^n p_t(u_i/s)}-1\right|\leqq 0(\mu^{1-6\delta})$$

が成立つ

(Proof)

$$\frac{f_t(u_1,u_2,\cdots,u_n/s)}{\prod_{i=1}^{n}p(u_i/s)}=\prod_{i=1}^{n}\frac{\frac{s}{t}e^{-\frac{s}{t}u_i}}{\frac{s}{t}\left(1-\frac{u_i}{t}\right)^{s-1}}$$

(3.20)
$$=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{e^{-\frac{u_i}{t}}}{1-\frac{u_i}{t}}\right)^s\left(1-\frac{u_i}{t}\right)$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{e^{-\frac{u_i}{t}}}{1-\frac{u_i}{t}}\right)^s\cdot\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{u_i}{t}\right)$$

この第 1 factor は，Lemma 1 より

$$1\leqq\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{e^{-\frac{u_i}{t}}}{1-\frac{u_i}{t}}\right)^s\leqq\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1-\frac{u_i}{t}+\frac{1}{2}\left(\frac{u_i}{t}\right)^2}{1-\frac{u_i}{t}}\right)^s$$

$$=\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{u_i}{t}\right)^2}{1-\frac{u_i}{t}}\right)^s$$

$0<u_i<1/\mu^{1+2\delta}\ (i=1,2,\cdots,,n)$ であるから，$\frac{u_i}{t}\leq\frac{1}{\mu^{1+2\delta}t}<\frac{1}{2}$ としてよいから

$$\leqq\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{u_i}{t}\right)^2}{\frac{1}{2}}\right)^s$$

$$\leqq\left(1+\left(\frac{1}{\mu^{1+2\delta}t}\right)^2\right)^{ns}$$

$$(ns\leqq\mu^{k-\delta}t\cdot\mu^{1-\delta}t=\mu^{k+1-2\delta}t^2)$$

$$\leqq\left(1+\frac{1}{\mu^{2+4\delta}t^2}\right)^{\mu^{k+1-2\delta}t^2}$$

然るに一般に $(1+x)^{\frac{1}{x}}\leqq e^{1+\frac{x}{2(1-x)}}$ が示されるから

$$\left(1+\frac{1}{\mu^{2+4\delta}t^2}\right)^{\mu^{k+1-2\delta}t^2}=\left(1+\frac{1}{\mu^{2+4\delta}t^2}\right)^{\mu^{2+4\delta}t^2\ \mu^{k-1-6\delta}}$$

$$\leqq e^{\left(1+\frac{\frac{1}{\mu^{2+4\delta}t^2}}{2\left(1-\frac{1}{\mu^{2+4\delta}t^2}\right)}\right)\cdot\mu^{k-1-6\delta}}$$

$(1/\mu^{2+4\delta}t^2)<1/2$ として

$$\leqq e^{\left(1+\frac{1}{\mu^{2+4\delta}t^2}\right)\cdot\mu^{k-1-6\delta}}$$

$$\leqq 1+2\left(1+\frac{1}{\mu^{2+4\delta}t^2}\right)\mu^{k-1-6\delta}$$

$$\leqq 1+3\cdot\mu^{k-1-6\delta}$$

従って，$k\geq2$，$\delta<1/7$ なら

(3.21)
$$\left|1-\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{e^{-\frac{u_i}{t}}}{1-\frac{u_i}{t}}\right)^s\right|\leqq 0(\mu^{1-6\delta})$$

又，(3.20) の右辺第2の factor は

$$1 \geqq \prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{u_i}{t}\right) \geqq \left(1-\frac{1}{\mu^{1+2\delta}t}\right)^n \geqq \left(1-\frac{1}{\mu^{1+2\delta}t}\right)^{\mu^{k-\delta}t}$$

$$= \left(1-\frac{1}{\mu^{1+2\delta}t}\right)^{-\mu^{1+2\delta}t(-\mu^{k-1-3\delta})}$$

$$\geqq e^{\left(1-\frac{\frac{1}{\mu^{1+2\delta}t}}{2\left(1-\frac{1}{\mu^{1+2\delta}t}\right)}\right)(-\mu^{k-1-3\delta})} \qquad \left(\frac{1}{\mu^{1+2\delta}t}<\frac{1}{2}\right)$$

$$\geqq e^{-2\mu^{k-1-3\delta}}$$

$$\geqq 1-2\mu^{k-1-3\delta}$$

従って

$$\left|1-\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{u_i}{t}\right)\right| \leqq 0(\mu^{1-3\delta}) \tag{3.22}$$

(3.20), (3.21), (3.22) より Lemma の (3.19) を得る．

Lemma 3 及び Lemma 5 より

$$\frac{p_t(u_1, u_2, \cdots, u_n/s)}{\prod_{i=1}^{n} p_t(u_i/s)} = \frac{p_t(u_1, u_2, \cdots, u_n/s)}{f_t(u_1, u_2, \cdots, u_n/s)} \cdot \frac{f_t(u_1, u_2, \cdots, u_n/s)}{\prod_{i=1}^{n} p_t(u_i/s)}$$

を用いて，Lemma 3 の条件の下で

$$\left|\frac{p_t(u_1, u_2, \cdots, u_n/s)}{\prod_{i=1}^{n} p_t(u_i/s)} - 1\right| \leqq 0(\mu^{1-7\delta}) \tag{3.23}$$

が得られるが，これは，Lemma 4 を併せ考えると，$\{U_{s1}, U_{s2}, \cdots, U_{sn}\}$ が漸近的独立性を有することを示している．

$\{U_{s1}, U_{s2}, \cdots, U_{ss}\}$ も，$s \in M(S;\mu^{\delta})$ に対して，適当に，$U_{s1}, U_{s2}, \cdots, U_{ss}$ の漸近的主分布域を決定すれば，漸近的に独立性をもつ系であることが示される．然しその場合は，漸近的主分布域が，$s$ によって変り，勿論矩形領域ではあり得ない．そのような領域に対しては，次節で見るように確率測度の近似がそう容易には行えない．

尚本節では，$\mu^{k-\delta}t \geqq n$ なる $n$ について考えたが $s \in M(S;\mu^{\delta})$ に対しては，$\mu^{1+\delta}t<s<\mu^{1-\delta}t$ であったから，このような $s$ に対しては，$(u_1, u_2, \cdots, u_s)$ の $s$ 次元空間の中の $n$ 個の軸 $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ によって決定される．$\{U_{s1}, U_{s2}, \cdots, U_{sn}\}$ の漸近的主分布域をとることが出来る．

次節では，確率の近似について考えるが，$\{U_{s1}, U_{s2}, \cdots, U_{sn}\}$ の漸近的主分布域が，直積集合の形をしている為に，近似計算がうまくゆくという事を利用する．

## §4. 確率測度の近似

平均 $1/\mu$ の指数分布の pdf. を

$$f_t(u) = \mu e^{-\mu u} \qquad (0<u<\infty) \tag{4.1}$$

とおく．$U_{s1}, U_{s2}, \cdots, U_{sn}$ の同時分布の pdf.

$$p_t(u_1, u_2, \cdots, u_n/s) = \frac{s(s-1)(s-n+1)}{t^n}\left(1-\frac{1}{t}\sum_{i=1}^{n} u_i\right)^{s-n}$$

に対して，$f_t(u)$ は如何なる関係を有するであろうか．これに対する解答として，次の結果が示される．

Lemma 6　$1 \leqq n \leqq \mu^{k-\delta}t$, $0<\delta<1/8$ なる任意の $n, \delta$ に対し，$(u_1, u_2, \cdots, u_n) \in M(U_{s1}, \cdots, U_{sn}/S)$ $(\equiv M)$ 上で一様に

$$\left|\frac{\sum_s' p_t(u_1, u_2, \cdots, u_n/s)p_t(s)}{\prod_{i=1}^n f_t(u_i)} - 1\right| \leqq 0(\mu^\delta) \tag{4.2}$$

が成立つ．但し $\sum_s'$ は，$s \in M(S;\mu^\delta)$ に対する和を表はす．

(Proof) $\sum_s' {}^* p_t(s) = E_S'$ をで表わすことにすると

$$\begin{aligned}\frac{\sum_s' p_t(u_1, u_2, \cdots, u_n/s)p_t(s)}{\prod_{i=1}^n f_t(u_i)} &= E_S'\left[\frac{p_t(u_1, u_2, \cdots, u_n/s)}{\prod_{i=1}^n f_t(u_i)}\right] \\ &= E_S'\left[\frac{p_t(u_1, u_2 \cdots, u_n/s)}{\prod_{i=1}^n f_t(u_i/s)} \cdot \frac{\prod_{i=1}^n f_t(u_i/s)}{\prod_{i=1}^n f_t(u_i)}\right]\end{aligned} \tag{4.3}$$

ここで，Lemma 3 から

$$\left|\frac{p_t(u_1, u_2, \cdots u_n/s)}{\prod_{i=1}^n f_t(u_i/s)} - 1\right| \leqq 0(\mu^{1-7\delta}) \tag{4.4}$$

であったから，(4.3) より

$$\left|E_S'\left[\frac{p_t(u_1, u_2, \cdots, u_n/s)}{\prod_{i=1}^n f_t(u_i)}\right] - E_S'\left[\frac{\prod_{i=1}^n f_t(u_i/s)}{\prod_{i=1}^n f_t(u_i)}\right]\right| \leqq 0(\mu^{1-7\delta}) \cdot E_S'\left[\frac{\prod_{i=1}^n f_t(u_i/s)}{\prod_{i=a}^n f_t(u_i)}\right] \tag{4.5}$$

此処で

$$\begin{aligned}E_S'\left[\frac{\prod_{i=1}^n f_t(u_i/s)}{\prod_{i=1}^n f_t(u_i)}\right] &= \sum_s' \frac{\left(\frac{s}{t}\right)^n e^{-\frac{s}{t}\sum_1^n u_i}}{\mu^n e^{-\mu \sum_1^n u_i}} \cdot p_t(s) \\ &= \frac{1}{(\mu t)^n e^{-\mu t v_n}} \sum_s' s^n \cdot e^{-s v_n} p_t(s), \quad \left(v_n \equiv \frac{1}{t} \sum_1^n u_i\right) \\ &= \frac{1}{(\mu t)^n e^{-\mu t v_n}} \sum_s' \frac{s^n}{s(s-1)\cdots(s-n+1)} \cdot s(s-1)\cdots(s-n+1) \cdot e^{-s v_n} p_t(s)\end{aligned} \tag{4.6}$$

(3.8) で見たように，$s \in M(S;\mu^\delta)$ に対しては

$$\left|1 - \frac{s^n}{s(s-1)\cdots(s-n+1)}\right| \leqq 0(\mu^{k-1-3\delta})$$

であったから，(4.6) から

$$\begin{aligned}&\left|E_S'\left[\frac{\prod_{i=1}^n f_t(u_i/s)}{\prod_{i=1}^n f_t(u_i)}\right] - \frac{1}{(\mu t)^n e^{-\mu t v_n}} \sum_s' s(s-1)\cdots(s-n+1) e^{-s v_n} p_t(s)\right| \\ &\leqq 0(\mu^{k-1-3\delta}) \cdot \frac{1}{(\mu t)^n e^{-\mu t v_n}} \sum_s' s(s-1)\cdots(s-n+1) e^{-s v_n} \cdot p_t(s)\end{aligned} \tag{4.7}$$

そこで，今この左辺，第二項について考えよう．

$$\begin{aligned}F &\equiv \frac{1}{(\mu t)^n e^{-\mu t v_n}} \sum_s' s(s-1)\cdots(s-n+1) e^{-s v_n} p_t(s) \\ &= \frac{1}{(\mu t)^n e^{-\mu t v_n}} \left(\sum_{s=0}^\infty - \sum_{s \leqq \mu^{1+\delta} t} - \sum_{s \geqq \mu^{1-\delta} t}\right) \cdot s(s-1)\cdots(s-n+1) e^{-s v_n} p_t(s)\end{aligned} \tag{4.8}$$

この右辺（ ）内の和について逐次考察する．

先づ

$$
\begin{aligned}
F_1 &\equiv \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{(\mu t)^n e^{-\mu t v_n}} \cdot s(s-1)\cdots(s-n+1)e^{-s v_n} p_t(s) \\
&= \frac{e^{-\mu t}}{(\mu t)^n e^{-\mu t v_n}} \sum_{s=0}^{\infty} s(s-1)\cdots(s-n+1)\frac{(\mu t e^{-v_n})^s}{s!} \\
&= \frac{e^{-\mu t}\cdot e^{\mu t e^{-v_n}}}{(\mu t)^n e^{-\mu t v_n}} (\mu t e^{-v_n})^n \qquad (4.9)\\
&= e^{-\mu t}\cdot e^{\mu t e^{-v_n}}\cdot e^{\mu t v_n}\cdot e^{-n v_n} \\
&= e^{\mu t (e^{-v_n}-1+v_n)}\cdot e^{-n n} \\
&= e^{\mu t\left[\frac{1}{2!}v_n^2-\frac{1}{3!}v_n^3+\cdots\right]} e^{-n v_n}
\end{aligned}
$$

然るに

$$
\begin{aligned}
\left|\mu t\left[\frac{1}{2!}v_n^2-\frac{1}{3!}v_n^3+\cdots\right]\right| &\leqq \mu t\cdot\frac{u_n^2}{2}\left[1+v_n+v_n^2+\cdots\right] \\
&\leqq \frac{1}{2}\frac{\mu t}{(\mu^{1+2\delta}t)^2}\cdot\frac{1}{1-v_n} \\
&= \frac{1}{2\mu^{1+4\delta}t}\cdot\frac{1}{1-v_n} = 0\left(\frac{1}{\mu^{1+4\delta}t}\right)
\end{aligned}
$$

従って，$t$ が充分大きいなら，$0(1/\mu^{1+4\delta}t)=0(\mu^{k-1-4\delta})$ に注意して

$$
\left|1-e^{\mu t\left[\frac{1}{2!}v_n^2-\frac{1}{3!}v_n^2+\cdots\right]}\right| \leqq 0(\mu^{k-1-4\delta}) \qquad (4.10)
$$

が得られる.

又，$n v_n \leqq (\mu^{k-\delta}t)^2/\mu^{1+2\delta}t = 0(\mu^{k-1-4\delta})$ に注意すると

$$
|1-e^{-n v_n}| \leqq 0(\mu^{k-1-3\delta}) \qquad (4.11)
$$

従って，(4.9), (4.10), (4.11) から

$$
|1-F_1| \leqq 0(\mu^{k-1-4\delta}) \qquad (4.12)
$$

を得ることが出来る.

次に，(4.8) の（ ）内第二の和については

$$
\begin{aligned}
F_2 &\equiv \sum_{s\leqq\mu^{1+\delta}t} \frac{1}{(\mu t)^n e^{-\mu t v_n}}\cdot s(s-1)\cdots(s-n+1)e^{-s v_n}p_t(s) \\
&= \frac{e^{-\mu t}}{(\mu t)^n e^{-\mu t v_n}}\cdot\sum_{s\leqq\mu^{1+\delta}t} s(s-1)\cdots(s-n+1)\cdot\frac{(\mu t e^{-v_n})^s}{s!} \qquad (4.13)\\
&= \frac{e^{-\mu t}}{(\mu t)^n e^{-\mu t v_n}}\cdot(\mu t e^{-v_n})^n\cdot\sum_{s\leqq\mu^{1+\delta}t-n}\frac{(\mu t e^{-v_n})^s}{s!}
\end{aligned}
$$

然るに，前論文第3節の Lemma の証明中で見たように一般に平均 $\lambda$ の Poisson 分布では，Markov の不等式より

$$
P\{X\leqq a\} \leqq \frac{a+1}{\lambda}(1-e^{-\lambda}) \qquad (4.14)
$$

が得られるから，(4.13) の最後の式で

$$
\begin{aligned}
\sum_{s\leqq\mu^{1+\delta}t-n}\frac{(\mu t e^{-v_n})^s}{s!} &= e^{\mu t e^{-v_n}}\sum_{s\leqq\mu^{1+\delta}t-n} e^{-\mu t e^{-v_n}}\frac{(\mu t e^{-v_n})^s}{s!} \\
&\leqq e^{\mu t e^{-v_n}}\frac{\mu^{1+\delta}t-n+1}{\mu t e^{-v_n}}\cdot(1-e^{-\mu t e^{-v_n}})
\end{aligned}
$$

従って (4.13) から

$$F_2 \leqq \frac{e^{-\mu t}}{(\mu t)^n e^{-\mu t v_n}} (\mu t e^{-v_n}) \cdot e^{\mu t e^{-v_n}} \cdot \frac{\mu^{1+\delta} t - n + 1}{\mu t e^{-v_n}} (1 - e^{-\mu t e^{-v_n}})$$

$$(4.15( \qquad \leqq e^{-\mu t} \cdot e^{\mu t v_n} \cdot e^{-n v_n} \cdot e^{\mu t e^{-v_n}} \cdot \mu^\delta e^{v_n}$$

$$\leqq 2\mu^\delta \cdot e^{\mu t(e^{-v_n} - 1 + v_n)} \cdot e^{-n v_n}$$

(4.9) 以下で見たように

$$|\mu t(e^{-v_n} - 1 + v_n)| \leqq 0(\mu^{k-1-4\delta})$$

又，$n v_n \leqq 0(\mu^{k-1-4\delta})$ であったから，(4.15) から

$$(4.16) \qquad F_2 \leqq 0(\mu^\delta)$$

が得られる．

最後に，(4.8)の最後の（ ）内の和については

$$F_3 \equiv \sum_{s \geqq \mu^{1-\delta} t} \frac{s(s-1)\cdots(s-n+1)}{(\mu t)^n e^{-\mu t v_n}} \cdot e^{-s v_n} p_t(s)$$

$$= \frac{e^{-\mu t}}{(\mu t)^n e^{-\mu t v_n}} e^{\mu t e^{-v_n}} \cdot (\mu t e^{-v_n})^n \sum_{s \geqq \mu^{1-\delta} t - n} e^{\mu t e^{-v_n}} \frac{(\mu t e^{-v_n})^s}{s!}$$

$$\leqq \frac{e^{-\mu t}}{(\mu t)^n e^{-\mu t v_n}} e^{\mu t e^{-v_n}} (\mu t e^{-v_n})^n \cdot \frac{\mu t e^{-v_n}}{\mu^{1-\delta} t - n}$$

$$\leqq e^{-\mu t} \cdot e^{\mu t v_n} \cdot e^{\mu t e^{-v_n}} \cdot e^{-n v_n} \frac{\mu t}{\mu^{1-\delta} t - \mu^{k-\delta} t}$$

$$\leqq e^{\mu t(e^{-v_n} - 1 + v_n)} \cdot \frac{n^\delta}{1 - \mu^{k-1}} \leqq 0(\mu^\delta)$$

即ち

$$(4.17) \qquad F_3 \leqq 0(\mu^\delta)$$

故に，(4.8)，(4.12)，(4.16)，(4.17) から

$$|1 - F| \leqq 0(\mu^{k-1-4\delta}) \text{ 又は } 0(\mu^\delta)$$

仮定により $0 < \delta < 1/8$ であるから，

$$(4.18) \qquad |1 - F| \leqq 0(\mu^\delta)$$

を得る．

従って，(4.7) 及び (4.18) より，$k \geqq 2$ に対して

$$(4.19) \qquad \left| E_S' \left[ \frac{\prod_{i=1}^n f_t(u_i/s)}{\prod_{i=1}^n f_t(u_i)} \right] - 1 \right| \leqq 0(\mu^\delta)$$

この式と (4.5) より，$0 < \delta < 1/8$ なら，$k \geqq 2$ に対して

$$(4.20) \qquad \left| E_S' \left[ \frac{p_t(u_1, u_2, \cdots u_n/s)}{\prod_{i=1}^n f_t(u_i)} \right] - 1 \right| \leqq 0(\mu^\delta)$$

が得られる．これで Lemma 6 の証明が完了した．

この結果と関連して，次のことが成立つことを注意しておこう．即ち，

$$V_{sn} \equiv U_{s1} + U_{s2} + \cdots + U_{sn}$$

の pdf. は容易に (1.3) より求まり

$$(4.21) \qquad p_t(v/s) = \frac{s(s-1(\cdots(s-n+1)}{(n-1)!\ t} \left(\frac{v}{t}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{v}{t}\right)^{s-n}, \quad (0 < v < t)$$

又，平均 $1/\mu$ の指数分布に従う，互に独立な $n$ 個の確率変数の和の pdf. は

$$(4.22) \qquad f_t(v) = \frac{\mu^n}{(n-1)!} v^{n-1} e^{-\mu v} \quad (0 < v < \infty)$$

であるが，これらの間には，次の関係が成立つ.

Lemma 7　$0<v<1/\mu^{1+2\delta}$ ならば，$1\leqq n\leqq\mu^{k-\delta}t$, $0<\delta<1/8$ なる任意の $n,\delta$ に対して

$$\left|E_S'\left[\frac{p_t(v/s)}{f_t(v)}\right]-1\right|\leqq 0(\mu^{\delta}) \tag{4.23}$$

が成立つ.

(Proof) 省略する.

以上の諸結果から，次の確率測度の近似に関する結果が示されよう．$t$ は充分大きく固定されたものとする.

Theorem　$1\leqq n\leqq\mu^{k-\delta}t$, $0<\delta<1/8$ なる任意の $n,\delta$ に対して，$s(\geqq n)$ 次元空間の部分領域 $A$ が，$(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ 軸によって決定される $n$ 次元空間の部分集合であり，且つ，$s$ に無関係であるとする．今

$$\begin{cases} P_t(A)=\sum\limits_{s=n}^{\infty} P_t(A/s)p_t(s), \\ Q_t(A)=\sum\limits_{s=n}^{\infty} P_t(A,n)p_t(s)=P_t(A,n)\sum\limits_{s=n}^{\infty} p_t(s), \end{cases} \tag{4.24}$$

$$但し\quad P_t(A,n)=\iint\limits_{A}\cdots\int f_t(u_1,u_2,\cdots u_n)du_1du_2\cdots du_n$$

とすれば

$$|P_t(A)-Q_t(A)|\leqq 0(\mu^{\delta}),\quad (t\to\infty)_k \tag{4.25}$$

が成立つ.

(Proof)　先づ，$n\leqq\mu^{k-\delta}t<\mu^{1+\delta}t$ であるから，$n\notin M(S;\mu^{\delta})$ であることを注意する．$0<\delta<1/8$ なら，$1-7\delta>\delta$ であるから，Lemma 4 により，

$$M(U_{s1},\cdots,U_{sn}/S)\equiv\{(u_1,u_2,u_n)0<u_i<\frac{1}{\mu^{1+2\delta}},\ (i=1,2,\cdots,n)\}$$

は，$s\in M(S;\mu^{\delta})$ に対して，$\{U_{s1},U_{s2},\cdots U_{sn}\}$ の order $\mu^{\delta}$ の漸近的主分布域である．簡単の為に，

$$M^S=M(S;\mu^{\delta}),\ M^U=M(U_{s1},\cdots,U_{sn}/S)$$

とおく．(4.24) より

$$\begin{cases} P_t(A)=\sum\limits_{s\in M^s} P_t(A/s)p_t(s)+\sum\limits_{s\notin M^s} P_t(A/s)p_t(s) \\ Q_t(A)=\sum\limits_{s\in M^s} P_t(A,n)p_t(s)+\sum\limits_{s\notin M^s} P_t(A,n)p_t(s) \end{cases} \tag{4.26}$$

$0\leqq P_t(A/s), P_t(A,n)\leqq 1$ に注意すると，上式の右辺の第二項は共に $0(\mu^{\delta})$ 以下の大きさだから

$$|\{P_t(A)-Q_t(A)\}-\{\sum_{s\in M^s} P_t(A/s)p_t(s)-\sum_{s\in M^s} P_t(A,n)p_t(s)\}|\leqq 0(\mu^{\delta}) \tag{4.27}$$

此処で，$M^U$ が $\{U_{s1},\cdots,U_{sn}\}$ の order $\mu^{\delta}$ の main domain だから

$$|P_t(A/s)-P_t(A\cap M^U/s)/\leqq 0(\mu^{\delta}),\ (s\in M^S)$$

であるから

$$|\sum_{s\in M^s} P_t(A/s)p_t(s)-\sum_{s\in M^s} P_t(A\cap M^U/s)|\leqq 0(\mu^{\delta}) \tag{4.28}$$

所で，$A\cap M^U$ が $s$ に dep. しない領域だから

$$\begin{aligned}\sum_{s\in M^s} P_t(A\cap M^U/s)p_t(s)&=\sum_{s\in M^s}\left(\iint\limits_{A\cap M^U}\cdots\int p_t(u_1u_2\cdots u_n/s)du_1du_2\cdots du_n\right)p_t(s)\\ &=\iint\limits_{A\cap M^U}\cdots\int\left(\sum_{s\in M^s} p_t(u_1u_2\cdots u_n/s)p_t(s)\right)du_1du_2\cdots du_n\\ &=\iint\limits_{A\cap M^U}\cdots\int E_S'\left[\frac{p_t(u_1u_2\cdots u_n/s)}{f_t(u_1u_2\cdots u_n)}\right]f_t(u_1u_2\cdots u_n)du_1du_2\cdots du_n\end{aligned}$$

従って，Lemma 6 によって

(4.29) $$\left|\sum_{s\in M^s} P_t(A\cap M^U/s)p_t(s)-P_t(A\cap M^U,n)\right|\leqq 0(\mu)^\delta\cdot P_t(A\cap M^U,n)$$

又，容易にわかるように，

(4.30) $$|P_t(A\cap M^U,n)-\sum_{s\in M^s} P_t(A\cap M^U,n)p_t(s)/\leqq 0(\mu^\delta)$$

従って，(4.29), (4.30) より

(4.31) $$\left|\sum_{s\in M^s} P_t(A\cap M^U/s)p_t(s)-\sum_{s\in M^s} P_t(A\subset M^U,n)p_t(s)\right|\leqq 0(\mu^\delta)$$

又，$P_t(A\cap\bar{M}^U,n)\leqq P_t(\bar{M}^U,n)=1-P_t(M^U,n)$ で，Lemma 4 の証明と同じ様にして

(4.32) $$P_t(A\cap\bar{M}^U,n)\leqq 0(\mu^\delta)$$

を示すことは容易であろう．従って

(4.33) $$\left|\sum_{s\in M^s} P_t(A\cap M^U,n)p_t(s)-\sum_{s\in M^s} P_t(A,n)p_t(s)\right|\leqq 0(\mu^\delta)$$

(4.28), (4.29), (4.30), (4.33) より

(4.34) $$\left|\sum_{s\in M^s} P_t(A/s)p_t(s)-\sum_{s\in M^s} P_t(A,n)p_t(s)\right|\leqq 0(\mu^\delta)$$

これと (4.27) より (4.25) を得て，定理の証明は終了する．

## §5. 確率の近似に関する前論文の検当

前の論文を，以上の見地から検当すると，1個所だけ問題になる点がある．それは第5節の特に，(5.22) 式から (5.23) 式の間に到る確率の近似計算で，前節の Theorem から，確率の近似は $1\leqq n\leqq\mu^{k-\delta}t$ なる $n$ 個の $U_{s1}, U_{s2}, \cdots, U_{sn}$ の漸近的独立性を基にして保証されるので，前論文の (5.8) 式で与えられた，

$$M=[\mu^{1+2\delta}t]$$

はもっと，小さく

(5.1) $$M=[\mu^{k-\delta}],\quad (0<\delta<1/8)$$

としなければならない．$(t\to\infty)_k$ に対して，(5.1) の $M$ が $M\to\infty$ となることは，$k\geqq 2$ に対しては常に保証される．

従って，それに応じて，(5.24)（前論文の）の式は

(5.2) $$\left|\sum_{m=M+1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{(\mu\rho t)^m}{m!}\right|\leqq 0(\mu^{\frac{3}{2}\delta})$$

と訂正しなければならない．しかし，結論には影響を及ぼさない．

前論文及び本論文の準備中，色々と御指示下さった山本純恭氏 及び 高松俊朗氏に，尚，終始渝らず，激励して下さった小川潤次郎教授にも，感謝いたします．

(1961.12.26)　　日大理工学部数学教室